

Title	超流動ヘリウムとボーズ系の厳密解 : 二流体が共存できる理由を解き明かす
Author(s)	佐々木, 祥介
Citation	大阪大学低温センターだより. 63 P.9-P.14
Issue Date	1988-07
Text Version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/11094/4795
DOI	
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/repo/ouka/all/>

超流動ヘリウムとボーズ系の厳密解

—— 二流体が共存できる理由を解き明す ——

教養部 佐々木 祥 介 (豊中5244)

I. はじめに

液体ヘリウムの世界は、まことに奇妙な現象で満たされている。50年程昔に、液体HeIIの特異な性質が次々発見され、人々を魅了したが、今日では当時の新鮮さを欠いてしまった。しかし、根本的な所は、なお謎のままである。

2.17Kを境に低温側のHeIIは高温側のHeIに比べて300万倍以上も熱を伝えやすい。また、HeIIには全く粘性のない超流動成分がある。さらに素焼きの陶器の小穴を通してこぼれ落ちるHeIIは冷え、残った液体Heは熱くなる。まるで熱をザルですくうようだが、なぜこんなことが熱平衡状態で可能なのだろう。

これらの不思議な現象は、超流動・常流動の2成分が共存すると仮定した二流体理論により現象論的に説明されている。しかし、それは次のように未解決な根本問題を残している。

〈従来の二流体理論の仮定と欠陥〉

- 1° 実体不明の背景流を超流動成分と仮定している。
- 2° 超流動成分のエントロピーをゼロと仮定している。
- 3° 超流動・常流動の流速は同じでなくてもよく、しかもそれらが熱平衡で共存できると仮定している。
- 4° なぜ二流体が λ 点以下で出現し、それ以上で常流体だけになるのかも説明不可能である。

他方これより前、液体Heを相互作用のない原子の集まりとみなし、統計力学を適用したロンドンの理論があった。それによると、ある温度以下でボーズ凝縮が起き、それを超流動成分であると考えた。しかし、そのボーズ凝縮した粒子の速度は、He全体の重心の速度と一致するものしか許されない。従って統計力学の熱平衡状態の解として二流体が出てくるような理論を作ることが必須となった。

しかし、これを実現するのは非常に困難で、未解決のまま、二流体論を前提としたランダウ理論が展開され、現象を説明していった。それで、研究者の関心も、ランダウの提起したフォノン・ロトンのスペクトルをHe原子間のマイクロな相互作用から計算する事に移った。

II. 素励起とは何か

世界中で、ランダウのスペクトルをマイクロな立場から計算する試みがなされ、素励起が密度波であるとする導けることが分かった(文献1)。しかし、いくつかの疑問が残された。それは、

(イ) 素励起を密度波以外の見方で導けないか。

(ロ) λ 点近くでは、素励起の数が非常に多くなるはずで、その時スペクトルに本質的な変化が発生しないか。

という疑問であった。

まず、(1)に関してわれわれが13年前文献2で示したように、密度波と全く異なった見方ができることが分かった。すなわち、He原子は相互作用により、まわりの原子を引きずりながら動いている。液体He中で、各He原子が他の原子を引きずりながら動く運動を“準粒子”すなわち“相互作用の着物を着た粒子”の運動と考えることができる。この準粒子の生成消滅演算子は、もとのHe原子の生成・消滅演算子 a^* と a で表され、例えば $a^*_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}$ ($a^*_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$) のような項が含まれている。この項は他の原子の運動量を \mathbf{k} だけふやし自分は \mathbf{k} だけ少ない運動量で生成されることを意味し、他の原子を相互作用により引きずる効果を取り入れられている。さらに、この演算子は、もとのHe原子1個の演算子と同一の粒子数、運動量を持ち、その上にハミルトニアン固有状態を作り出すものである。以後、これを相互作用の着物を着たHe原子の生成消滅演算子と呼ぶことにする。この準粒子が運動量ゼロの状態から $\mathbf{p} (\neq 0)$ の状態に励起されるエネルギーを計算すると、その計算式が文献1の砂川先生らのグループをはじめとする密度波の励起のエネルギースペクトルの式と一致した。

それで、素励起を密度波と見ずに、運動量ゼロの準粒子がゼロ以外の運動量に励起されることだと考え直すことができる。これは単なる言い換えではなく、理論に重大な変更をもたらす。まず密度波の見方をとると、素励起の数の増加は密度波の振幅の増大をもたらすだけで、この励起子の数に上限がない。一方“相互作用の着物を着た粒子”という見方に立つと、その粒子の数はもとのHe原子の数と一致している。そこで、 $\mathbf{p} = 0$ に凝縮しているこの準粒子が、 $\mathbf{p} \neq 0$ にどんどん励起されると、ついには凝縮がなくなり、その時相転移が発生する。従って準粒子の見方で欠陥4°が克服されたと言える。しかし、文献2の近似計算の方法では、なぜ流速の異なる二流体が共存できるのかは分からなかった。

その後、約8年前、私と癸生川氏とで、一次元多体ボゾン系をユニタリ変換して厳密に解くことができた(文献3)。その結果、前述の疑問(1)に関して、励起状態の粒子数が増加した時、スペクトルに根本的な変化が現れる例が見つかったのである。

III. エネルギー準位の逆転

一次元系ではあるが 10^{23} 個ものオーダーの多体問題が解けた。その結果、粒子を各エネルギー準位にどう分布させるかによってエネルギー準位の順番がドラスタックに変化する事が分かった。準位 i のエネルギーを E_i 、そこにつまった粒子数を n_i とすると、対角化された全エネルギーは、単純に $\sum_i E_i n_i$ とはならず、

$$\text{全エネルギー} = \sum_i E_i n_i + \sum_{i,j} f_{ij} n_i n_j + \dots$$

のように、 n_i について2次以上の項が現れる。これが原因で面白い性質が出現する。説明を簡単にするため、準位数が2個で全エネルギー E が下式の場合を考えてみる。

$$E = E_1 n_1 + E_2 n_2 + f_{12} n_1 n_2$$

f_{12} のない時、 $E_1 < E_2$ なら、準位1が基底状態で、準位2が励起状態である。この系の準位 i に粒子を1個追加した時の増加エネルギーを ϵ_i とすると、

$$\epsilon_1 = E_1 + f_{12} n_2, \quad \epsilon_2 = E_2 + f_{12} n_1$$

となる。もし、 $E_1 - E_2 + f_{12} (n_2 - n_1) > 0$ の時は準位2につめる方が増加エネルギーが小さくなり、

準位の逆転が発生する。

このような全エネルギーの持つ非線形効果を、三次元ボーズ系にも取入れられれば、二流体の共存をミクロな立場から導けるのではないかと思った。

IV. 少数の原理が二流体共存を生む

3年前前、“あのHeIIの奇妙な性質は、ハミルトニアンを対角化する際の細かな関数形に依存せず、もっと根本的な事だけが効いている。”という考えを基礎にして理論を分析し直してみた。その結果、HeIIの特異な性質は、次のような単純な条件から出てくる事が分かった。

(条件1) He原子系の多体ハミルトニアンを対角化するユニタリ変換 U が存在する。(ハミルトニアンはエルミートなので明らか。)

(条件2) 液体Heの中でHe原子は束縛状態を作らない。(実際にHe₂分子等は見つからない。)

(条件3) 基底状態は一重で、それは全てのHe原子が運動量ゼロにいる状態を、上述の U で変換したものである。(脚注参照)

(条件4) 基底状態からの励起エネルギーは、phonon-likeである。(実験的に確認されている。)

この外に、ボーズ統計、He原子数保存、ガリレイ変換共変性(全エネルギーが重心運動のエネルギーと等速度座標変換で不変な形の項の和で書ける事)等、ごく当然の条件が付加される。4条件のうち、

(条件3) 以外は括弧内の理由から、すでに成立している。そこで、条件3は仮定し、統計力学の基礎方程式を作ってみると、二流体の存在が自動的に導かれることが分かった。

V. エネルギー最小準位が定まらない奇妙さ

前述の4条件を使って、液体Heのエネルギーの一般形を書き下してみる。まず条件1の変換 U で、もとのHe原子の生成消滅演算子 a^* , a , を準粒子の A^* , A , へと変換すると、

$$A^* = Ua^*, U^*, A = Ua, U^* \quad \dots\dots(1)$$

ハミルトニアンの全ての固有状態は、条件1, 2よりこの A^* , A , の積で書けるので、固有値 E はこの準粒子の粒子数 $n_i \equiv A^*, A$, の分布で表せる。ガリレイ変換共変性より E の一般形は、

$$E = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} - W_i \right) n_i + \frac{1}{2V} \sum_{i,j} f_2(p_i - q; \frac{N}{V}) n_i n_j + \frac{1}{3V^2} \sum_{i,j,r} f_3(p_i - q, p_j - r) n_i n_j n_r + \dots\dots(2)$$

となる(文献4)。ただし、 W_i は一粒子当りの束縛エネルギーで、関数 f_i は一般性を失うことなく次式を満たすように書換えることができる。

$$f_i(0, \dots, 0) = 0 \quad (\text{for } i \geq 2),$$

$$f_j(p, \dots, p) = f_j(-q, 0, \dots, 0) = 0 \quad (\text{for } j \geq 3) \quad \dots\dots(3)$$

次に条件3より基底状態は、準粒子が全て運動量0にいる状態であることが分かる。この基底状態から

脚注：条件3は基底状態が固体でないことを表している。もし固体なら、その結晶軸を回転した状態もすべて基底状態になり、多種縮退しており、条件3は成立しない。又、条件1~4は1次元の厳密解では完全に満たされている。

1つの準粒子が $p (\neq 0)$ に励起された時の増加エネルギー（素励起のエネルギー）を ε^0 と書くと、(3)式の性質を使って次の関係が得られる。

$$f_2(p-q; N/V) = [\varepsilon^0_{p-q} - (p-q)^2/2m] V/N. \quad \dots\dots(4)$$

この式からわかるように、エネルギーの一般的表示の中に現われる関数 f_2 が素励起エネルギーで書ける。

さて(2)式は、 n_q について非線形性をもっているため、ある運動量 Q に全粒子数 N に近い準粒子が凝縮すると、次のような奇妙な性質がでてくる。これを見るために、(2)式で、この n_q の効く所を取り出してみると、

$$E = \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - W_B \right) n_p + \frac{n_q}{V} \sum_p f_2(p-Q; \frac{N}{V}) n_p + \{ \dots \} \quad \dots\dots(5)$$

ここで $\{ \dots \}$ の項は $(N - n_q) / N$ のオーダーの項を表わし、 $n_q \approx N$ の時は効かない。

そこで $Q = 0$ 、 $n_q / N \approx 1$ の時は、(4)、(5)式より、

$$E \approx \sum_p (\varepsilon^0_p - W_B) n_p \quad \dots\dots(6)$$

となり、準粒子のエネルギーが $\varepsilon^0_p - W_B$ であることを示している。この式は束縛エネルギー W_B があることと $p = 0$ の準粒子が存在することを除き、ランダウ理論と同じ形をしている。しかし $Q \neq 0$ に準粒子が凝縮し $n_q / N < 1$ の時は、全く違った性質を示す。この時(6)式は、

$$E = \sum_p (\nu_p - W_B) n_p + \{ (N - n_q) / N \text{ の higher order } \}$$

$$\nu_p = \left(\frac{p^2}{2m} \right) + (n_q / N) [\varepsilon^0_{p-Q} - (p-Q)^2 / 2m] \quad \dots\dots(7)$$

となり、関数 ν_p は図. 1のような曲線を描く。

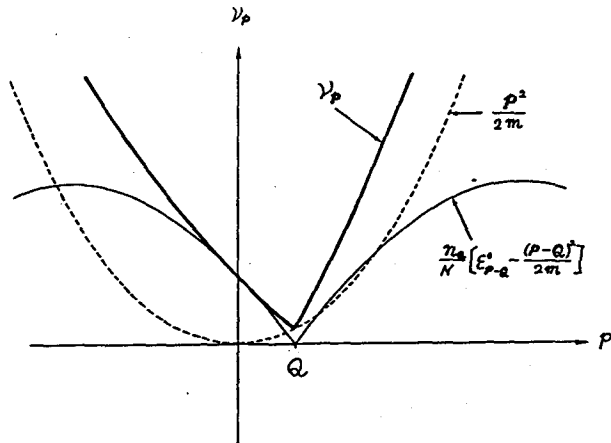


図. 1 相互作用の着物を着たHe原子のエネルギー ($p = Q$ の所が最小エネルギーになっている)

この図で ε^0_{p-q} は、IV節条件4より $|p-Q|$ の一次の項を持つため、 Q があまり大きくない時には ν_p は $p = Q$ の所で最小になる。即ち Q に準粒子が凝縮すると、そこが最低エネルギー準位となる。この非線形効果が効いて、次節のように二流体の共存も導けるのである。

VI. 熱平衡状態を決める基本式

(2)式のエネルギーを持つボーズ系の熱平衡状態を、ミクロカノニカル分布で求める。系全体のエネルギー、運動量、粒子数が保存するから、それらを一定にして全状態数が最大になるように、平均粒子数分布 \bar{n}_p を決める。この時、熱浴すなわち容器の速度 v 、温度 T 、ケミカルポテンシャル μ は、ラグランジュ未定乗数として決まり、分布 \bar{n}_p は次式を満たす (文献4)。

$$\bar{n}_p = [e^{(\omega_p - \mu)/k_B T} - 1]^{-1}$$

$$\omega_p = p^2/2m + \sum_q [\varepsilon_{p-q} - (p-q)^2/2m] \bar{n}_q / N - v \cdot p - W_p + (\text{higher order}) \dots \dots (8)$$

この連立積分方程式の解は逐次近似により求まる。そして T がある値 T_2 以下の時、(8)式の ω_p が最小になる運動量の所に、巨視的な数の準粒子がボーズ凝縮する事が、粒子数保存則から出てくる。しかし、 T_2 以上ではこんな事は起こらない。また v は熱浴の速度であるが、熱平衡状態では常流動の流速を表している。この事は、 $T > T_2$ で(8)式の解を使ってHeの重心の速度を計算すると、 v と一致することからも確かめられる。

ところが、 $T < T_2$ では、 T 、 μ 、 v を与えても、なお(8)式の解が無限個存在するのだ。これは、前節で述べたように最小エネルギーをもつ準粒子の運動量が不定であることからきている。それでボーズ凝縮する運動量 Q を一定範囲の中で自由に選ぶことができる。 Q の不定性は、実験的には超流動を作る時の初期条件を選ぶ自由度に対応し、He I を回転したままで冷やし、超流動成分を発生させ、その後容器を止めると、 $Q (\neq 0)$ 、 $v = 0$ の状態が作れる。このように初期条件から Q が定まる。今、速度 $u = Q/m$ を考えると、これはボーズ凝縮している準粒子の流速、即ち超流動成分の速度を表している。こうして常流動成分の速度 v の他に、超流動成分の速度 u が存在することが分かる。結局、二つの異なる流速を持つ二流体が熱平衡状態で共存できる事を、統計力学から導けた。

また当然ながら超流動成分は、1つの Q に凝縮した準粒子の集まりなので、そのエントロピーはゼロである。I 節での仮定1° ~ 4° は全て導けたことになる。二流体の存在が証明されたので、今までの二流体モデルが現象論的に説明していることも全て導ける。さらに、噴水効果やメカノカリック効果では、2つの異なる温度 T_1 、 T_2 、圧力 P_1 、 P_2 をもつ2つの He II の間に超流動成分だけを通す通路が設けられており、超流動成分が移動し、準平衡状態になる。すなわち、ボーズ凝縮した準粒子はこの二つの He II の間を移動し準平衡状態になるため、そのエネルギーは等しいはずである。この関係から $T_1 - T_2 = (P_1 - P_2) / \rho s$ が得られる。結局、ロンドンが現象論的に求めた式をミクロから導き出せた。

VII. 新しい予言

準粒子のエネルギーは(8)式の ω_p であり、それが分布 \bar{n}_p を含むので、スペクトルが温度と共に変化することが予想される。(8)式で $u = v = 0$ の場合を考えると、 ω_p が $|p|$ に比例する係数は、素励起のディスページョンカーブの $p = 0$ 近くでの勾配を表わす。(8)式から $|p|$ の小さい所では、

$$\omega_p \approx (\bar{n}_0/N) c_0 |p| + \text{order}(|p|^2)$$

となり、素励起の音速は、ボーズ凝縮した準粒子の数 \bar{n}_0 の比率 (\bar{n}_0/N) に比例することが分かる。こ

の比率は、 T が λ 点に近づくとき 0 になるため、ディスページョンカーブがソフト化することが予想される。それ故、 $T \sim T_\lambda$ での素励起は第 1 音波でなく、第 2 音波になることを示している。このことは、超流動成分が粘性なしに流れられる限界速度（クリティカルベロシティ）が $T \rightarrow T_\lambda$ と共にゼロに近づくことを意味している（文献 5）。

次に、He 原子のビームを液体 He II にあてると、He 原子が液体 He 中で準粒子となり直進するため、入射ビームの運動エネルギーが 1.51~6.64 K の時は、液面で三重屈折することが導ける。この逆過程として、準粒子が相互作用の着物を脱いで、液体 He II の中から、飽和蒸気中へ、He 原子として飛び出して来る現象もある。これはウィヤット（文献 6）らにより発見されたが、この現象も“相互作用の着物を着た粒子”という概念でうまく説明できる（文献 7, 8）。さらに、三重屈折するときの各方向への分岐確率は、液表面での相互作用の形を決める有力なデータとなることが分かる。この分岐確率を求める実験が行われることを期待するものである。

参考文献

- 1) S. Sunakawa, S. Yamasaki and T. Kebukawa, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), 919; 56 (1976), 415.
F. Iwamoto, Prog. Theor. Phys. 44 (1970), 1121.
T. Nishiyama, Prog. Theor. Phys. 38 (1967), 1062; 54 (1975), 597.
F. Takano, Phys. Rev. 123 (1961), 699.
- 2) S. Sasaki and K. Matsuda, Prog. Theor. Phys. 56 (1976), 375.
- 3) S. Sasaki and T. Kebukawa, Prog. Theor. Phys. 65 (1981), 1198, 1217, 1798; 66 (1981), 831.
- 4) S. Sasaki, Jpn. J. Appl. Phys. Suppl. Proc. LT18, 26 (1987), 23; Sci. Rep. Col. Gen. Educ. Osaka Univ. 35-2 (1986), 1.
- 5) S. Sasaki, Springer Series in Solid-State Sciences Vol. 79 (1988) in press.
- 6) A. F. G. Wyatt: Physica B & C 126 (1984), 392.
G. M. Wyborn and A. F. G. Wyatt: Jpn. J. Appl. Phys. Suppl. Proc. LT18, 26 (1987), 2095.
- 7) S. Sasaki, Proc. Spring Meeting of Jpn. Phys. Soc. No 3 (1986), 197.
- 8) 「超流動・超伝導って何だろう」佐々木祥介著 ダイヤモンド社 (1988年)