Title	Asymptotically holomorphic embeddings of presymplectic manifolds
Author(s)	森山, 貴之
Citation	大阪大学, 2008, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/48749
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【25】

氏　　　　　　名	森（もり）　山（やま）　貴（たか）　之（ゆき）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　２１７４０　号
学位授与年月日	平成 20 年３月 25 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学　位　論　文　名	Asymptotically holomorphic embeddings of presymplectic manifolds （プレシンプレクティック多様体の漸近的正則な埋め込みについて）
論　文　審　査　委　員	（主査） 教　授　藤木　　明 （副査） 教　授　満渕　俊樹　　教　授　梅原　雅顕　　准教授　後藤　竜司

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では symplectic 幾何における漸近的正則性を presymplectic 幾何に導入することにより、射影空間への漸近的に正則な埋め込みの構成を行う。

定義１． l, n を非負整数、M を $2n+l$ 次元 C^{∞}-多様体、ω を M 上の閉微分２次形式とする。任意の x∈M に対して $\omega_x^n \neq 0$、$\omega_x^{n+1}=0$ となるとき、ω を M 上の rank $2n$ の presymplectic 形式と呼び、組（M, ω）を rank $2n$ の presymplectic 多様体と呼ぶ。

（M, ω）を rank $2n$ の presymplectic 多様体とすると積分可能な接分布 $F=\{v \in TM \mid i(v)\omega=0\}$ が定義できる。今、F と直和な部分束 $W\subset TM$ を決めると、$TM= W\oplus_g F$ となる M 上の Riemann 計量 g と $J^2=-id_W$ であり $\omega\,|_W$-compatible となる $J\in\Gamma(M, \mathrm{End}(W))$ を考えることができる。この組 (J, g) を pre-compatible pair と呼ぶ。

今、pre-compatible pair（J, g）を与えると、複素多様体（X, J_0）と写像 $\phi : M\to X$ に対し、$T^*M\otimes\phi^*TX= W^{1,0}\oplus_g W^{0,1}\oplus_g(F^*\otimes\phi^*TX)$ となる固有値分解が与えられ、$\bar\partial\phi$ を微分 $d\phi\in\Gamma(M, T^*M\otimes\phi^*TX)$ の $W^{0,1}$ 部分で与える事により、作用素 $\bar\partial$ が定義できる。

定義２．（X, J_0）を Kähler 多様体とし、$\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を M から X への写像の族とする。$\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が漸近的正則写像であるとは、$p\geq 1$ に対し

$$|\nabla^p\phi_k|_{gk}=O(1),\quad |\nabla^{p-1}\bar\partial\phi_k|_{gk}=O(k^{-\frac{1}{2}})$$

となるときに言う。ここで g_k は計量 kg であり、∇は g_k の Levi-Civita 接続から決まる共変外微分。更に漸近的正則写像 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が W に沿って漸近的正則なはめ込みであるとは、微分の W への制限 $d\phi_k|_W$ が左逆元 $\theta_{W,k}$ を持ち、そのノルムが γ^{-1} 以下であるような、k に依存しない定数 $\gamma>0$ が存在するときにいう。又、漸近的正則写像 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が漸近的正則な埋め込みであるとは、微分 $d\phi_k$ が左逆元 θ_k を持ち、そのノルムが $\tilde\gamma^{-1}$ 以下であるような、k に依存しない定数 $\tilde\gamma>0$ が存在するときにいう。

次の定理が本論文の主定理である。

定理１． (M, ω) を rank n の $2n+l$ 次元 presymplectic 閉多様体とし、(J, g) を pre-compatible pair とする。ωは integral とすると、十分大きい $k\in\mathbb{N}$ に対し、W に沿って漸近的正則なはめ込みϕ_k : $M\to\mathbb{C}P^{2n+l}$ であり、$\left[\phi_k^* \omega_{FS}\right]=\left[\dfrac{k\omega}{2\pi}\right]$を満たすものが存在する。

定理２． (M, ω) を rank n の $2n+l$ 次元 presymplectic 閉多様体とし、(J, g) を pre-compatible pair とする。ωは integral とすると、十分大きい $k\in\mathbb{N}$に対し、漸近的正則な埋め込みϕ_k: $M\to\mathbb{C}P^m$ であり、$\left[\phi_k^* \omega_{FS}\right]=\left[\dfrac{k\omega}{2\pi}\right]\in H^2$ (M, $\mathbb{Z}$) を満たすものが存在する。ここで $m=2n+\max\{1, 2l\}$ である。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

森山氏の研究の背景には Donaldson、Gromov などによる、大域的なシンプレクティック幾何の最近の急速な発展がある。Donaldson はシンプレクティック幾何に漸近的正則というアイデアを導入し、コンパクト多様体上、整シンプレクティック形式のポアンカレ双対となる余次元２のシンプレクティック部分多様体を構成した。更に、彼は複素幾何における Lefschetz ペンシルをシンプレクティック幾何に拡張し、４次元のシンプレクティック幾何は大きな発展を遂げた。これらの結果はオールーなどにより、実１次元の family の場合に拡張された。また、漸近的正則、Lefschetz ペンシルなどの概念は接触幾何にも導入され、open-book 構造の存在など、重要な結果が続々と得られている。最近、ムサス、プレサス、ソルにより、整数係数のコホモロジー群の元を定めるシンプレクティック多様体は漸近的正則に射影空間に埋め込めることが示されている。これは複素ケーラー幾何における小平埋め込み定理のシンプレクティック版ともいうべきものである。

森山氏はこれら様々な結果を統一的に理解するために、プレシンプレクティック構造を導入した。

実 $2n+l$次元の多様体 X 上の２次閉微分形式をωとする、２次閉微分形式ωのランクが n のとき、ωはランク n のプレシンプレクティック構造といい、(X, ω) をプレシンプレクティック多様体という。プレシンプレクティック多様体 (X, ω) には実１次元の葉層構造が入り、横断的な方向にシンプレクティック構造が定まる。

$l=0$ なら、これはシンプレクティック構造であり、接触構造は 2n＋1 次元多様体上、ランク n の d-exact なプレシンプレクティック構造を与える。またシンプレクティック多様体上のファイバー束や、シンプレクティック多様体内の余次元１の部分多様体などはプレシンプレクティック多様体となる。シンプレクティック構造と適合する概複素構造をとり、漸近的正則な埋め込み、という概念が定義される。森山氏は横断正則性に関連した問題をうまく処理し、次を示した。

定理 : ランク n の integral なプレシンプレクティック構造をもった閉多様体は複素射影空間に漸近的正則に埋め込むことができる。

更に、横断的な方向の高次の微分の精密な評価、埋め込む複素射影空間の次元の評価、などを得ており、これは大きな発展が期待できる結果である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。