

| | |
|--------------|---|
| Title | Information Geometrical Study of Quantum Channel Estimation Problems |
| Author(s) | 今井, 寛 |
| Citation | 大阪大学, 2008, 博士論文 |
| Version Type | |
| URL | https://hdl.handle.net/11094/48783 |
| rights | |
| Note | 著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について 〈/a〉 をご参照ください。 |

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

| | |
|------------|---|
| 氏名 | いま い ひろし 今 井 寛 |
| 博士の専攻分野の名称 | 博 士 (理 学) |
| 学位記番号 | 第 2 1 7 4 1 号 |
| 学位授与年月日 | 平成 20 年 3 月 25 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第 4 条第 1 項該当 理学研究科数学専攻 |
| 学位論文名 | Information Geometrical Study of Quantum Channel Estimation Problems (量子通信路推定問題の情報幾何的研究) |
| 論文審査委員 | (主査) 教授 藤原 彰夫 (副査) 教授 杉田 洋 教授 満洲 俊樹 准教授 鈴木 譲 |

論 文 内 容 の 要 旨

Pauli 通信路は量子系に対して非一様なノイズが加わる通信路一般のモデルであり、量子暗号鍵配送の理論におけるノイズの標準モデルとして知られる。本研究では Pauli 通信路の量子推定理論を確立し、任意有限次元での最適な推定戦略を与えた。即ち通信路に対して最大エンタングルド状態を入力すると共に、出力状態族に対し、有効推定量を用いた推定を独立に繰り返すのが、Pauli 通信路に対する最適な推定方式である。

さらに、上記 Pauli 通信路の推定問題を情報幾何的な観点から捉え直すことにより、部分モデルの推定問題を一般的に議論出来ることを明らかにした。この手法により、有効推定量が存在する為の必要十分条件を指数型接続に関する自己平行性と言う幾何的な言葉で簡潔に述べると共に、有効推定量が存在するモデルを具体的に構成する方法を与えた。

SU(D) 通信路は量子計算機の回路を構成する量子ユニタリゲートの数学的モデルとして応用上重要である。この通信路は Pauli 通信路と異なり、一般に $D \geq 3$ で量子 Cramer-Rao 下界を最小化する入力状態は存在しない。そこで私は Yuen と Lax が Gauss 状態族の推定問題で用いた、分散・共分散行列のトレースを最小化するという問題設定を採用した。その問題設定と主結果は次の通りである。

$\{X(i)\}$ を Lie 環 $\mathfrak{su}(D)$ の Killing 計量に関する正規直交基底とする。 $\{X(i)\}$ をパラメタ空間 $U(D)/U(1)$ の各座標近傍における接空間の基底に取った時の、テンソル積拡大通信路 $\text{id} \times U(\theta)$ の n 次テンソル積拡大通信路の出力状態族が成す統計モデルに対する分散・共分散行列のトレース最小化問題を扱い、

- (i) SU(D) の n 次テンソル積表現の Clebsch-Gordan 分解を介して、この問題が Lie 環 $\mathfrak{su}(D)$ の表現の各既約成分 f について、2 次の Casimir 不変量 $c(f)$ を最大化する f を求める問題に帰着されることを明らかにした。
- (ii) 最適な入力状態とその時の $c(f)$ の値を、Lie 環の weight diagram を経由して陽に求める方法を明らかにした。
- (iii) 通信路への入力最適入力であるための十分条件は、出力状態族の成す統計多様体が Lie 群 SU(D) に等長同型となることである。
- (iv) この時の量子 Cramer-Rao 下界は達成可能である。
- (v) SU(D) 通信路の推定に於いて $c(f)$ が最大となるのは f が完全対称テンソル積表現の時である。

論文審査の結果の要旨

今井寛君は、非可換統計学における最新の研究テーマの一つである量子系の力学的変化を同定する問題に興味を持ち研究を行った。着目する量子系を表現するヒルベルト空間を H とし、 H 上の密度作用素全体の集合を $S(H)$ とする。量子系の力学的変化（量子通信路） $\Gamma : S(H) \rightarrow S(H)$ はトレースを保存する完全正写像で表現される。今井君は、真の量子通信路が有限次元パラメータ θ を持つパラメータ族 $\{\Gamma_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ に属するという仮定の下で、完全正値性から許容される最も一般的な推定スキームである $(\text{id} \otimes \Gamma_\theta)^{\otimes n}$ という型（ id は恒等写像、 n は自然数）の通信路の拡大を考慮した量子推定問題を研究し、以下の結果を得た。1) 入力を最適化して得られる量子 Fisher 情報量 $J[(\text{id} \otimes \Gamma_\theta)^{\otimes n}]$ は、一般化 Pauli 型通信路に対しては古典論と同様に拡大次数 n に関する線形性を有するが、 $SU(D)$ 通信路においては群作用の既約成分上の量子相関を用いることにより $O(n^2)$ という量子論特有の増大レートが達成できることを明らかにした。2) 任意の通信路のクラスに対する量子推定理論を統一的に展開する目的で、量子通信路空間を底空間とし、通信路の生成元全体をファイバー空間とするファイバーバンドル構造を導入した。そして凸解析的手法を援用することにより、通信路の量子 Fisher 情報量を底空間の接ベクトルの水平持ち上げの作用素ノルムで表す表式を得ると共に、この表式を用いて量子 Fisher 情報量 $J[(\text{id} \otimes \Gamma_\theta)^{\otimes n}]$ が拡大次数 n と共に高々 $O(n^2)$ で増大することや $O(n)$ で増大するための十分条件を導出し、ほとんどすべての通信路は $O(n)$ という増大レートを呈することを明らかにした。これは、当該分野における未解決問題の一つである量子 Fisher 情報量の増大指数を決定する問題に対する大きな進展を与えるものである。3) 1) で理論的に予言した $O(n^2)$ という非古典的な増大レートの実験的検証に向けて、量子光学系における適応的推定方式の一致性および漸近有効性の予備検討を行った。以上の研究成果は、非可換統計学および量子情報理論の将来の発展に大きく貢献する高い学術的価値を有する研究成果である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。