Title	論理と数学的帰納法の実質的陶冶 : 国費学部留学生の予備教育において顕在化した数学教育の綻びとその解決策について
Author(s)	長谷川, 貴之
Citation	日本語・日本文化. 1999, 25, p. 83-108
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/4896
rights	本文データはCiNiiから複製したものである
Note	

<研究ノート>

論理と数学的帰納法の実質的陶冶

—国費学部留学生の予備教育において顕在化した数学教育の綻びとその解決策について—

長谷川　貴之

0．はじめに

日本に限られたことではないが，数学教育において，「論理」は形式的に陶冶されるべき分野に属していることが多い．つまり，数学の様々な証明を見知って行くうちに体得して行くべきものとして取り扱われている．真正面から「論理」に向かってはいない (杉山・澤田・橋本・町田 1999, 吉田 1996, 1997, 1999, 長谷川 1996, 1997).

文部省の『高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編』(1989) には,「...，必要条件，十分条件，対偶，背理法などは，(1) 又は (2) の中で，必要に応じて，自然な形で取り上げるようにする」(p.61) という目標が立てられている.（ここで (1) は「数と式」を，(2) は「平面幾何」を意味する.）「必要に応じて，自然な形で」と書いてあった場合，現場の高校講師は普通,「その場しのぎで，学生を上手く丸め込んで」と読む．更に，この指導要領に従った日本の高等学校の教科書には論理の節があり，ある程度の説明はなされている (例えば，小松 1997 p.26, pp.46–51; 永尾 1993 pp.45, 46, pp.49–55)．しかし，全称命題と命題関数との違いを無視する方策，つまり命題論理と述語論理を混ぜ合わせたような方策をとっており，これは尋常に数学を展開する上で，全く使いものにならないと言ってよい.

その中にあって，タイ国の数学教科書には「論理」の章があり，日本のような方策はとっておらず，正しく命題論理と述語論理とを区別している．しかし，対偶や背理法，反例，十分条件，必要条件等については，充分触れられていない (長谷川 1997 参照).

更にまた，理科系大学初年級の教科書 (微分・積分，線形代数) の多くは，やや「論理」を詳述しているが，本論の付け足し，前座的な取り扱いである．明らかに数理論理学の専門書からの書き写しと思えるものさえある．ここで「付け足し」と言っているのは，記述の量の多少，程度の高低のことを言っているのではない．その後の本論との関連が希薄であることを言っているのである．

大阪外国語大学の留学生日本語教育センターにおいて，理科系学部留学生に対する専門科目「数学」を担当する上で，ここ数年「論理」の取り扱いが大きな課題として浮かび上がって来ていた.（1994 年の時点では目立っていなかったことが，島谷・長谷川 (1995) からわかる.）証明に重きを置かないような数学教育をしている国出身の留学生はもちろんのこと，高度な数学を学んできているはずの留学生でも,「論理」や，同じく形式的陶冶分野に属している「数学的帰納法」を，大きな壁と感じていたのであった．日本語を学習している最中に出会う壁であるため，尚更大きく感じることであろう．高等学校や大学初年級の理科系の数学ともなれば，いわゆる単なる計算問題においても「論理」は複雑に入り込んでおり，必要条件・十分条件の理解なしに解決することは出来ない場合が増加する．同僚の 吉田 淳一 氏 (本センター理科系数学担当非常勤講師) とも,「背理法，必要条件・十分条件，数学的帰納法の使い方さえ修得してもらえれば，残りの部分にこれ程手強いものは少ない」との共通認識に至っていた．

この課題に対する筆者の解決案の一つとして,『理科系学部留学生のための 数学入門 I』の第 2 章，第 10 章を作ってみた (長谷川 1998)．そこでは,「論理」や「数学的帰納法」を，実質的に陶冶されるべきものとして提示した．つまり，直接対象として学ぶことによって修得するべきものとしての取り扱いをした．

筆者のこの試みに対して「教え過ぎる弊害」を指摘するのは，見当違いであると考える．例えば，次のような理由がある．

コンピュータは「数学」で動いている，とよく言われるが,「数学」と言うよりむしろ,「数理論理」で動いている，と言った方が正確である．大阪外国語大学の留学生日本語教育センターへ配属される理科系の国費学部留学生の中

で，特に情報科学関連学科へ進学を希望する者が急増している．これは，将来「言語」や「論理」の formal system を学ぶことになる学生が増加している，ということである．そういった学生が，大阪外国語大学留学生日本語教育センターにおける予備教育で，ナイーヴであっても「論理」を一通り実質的陶冶対象として学んでおくことは，積極的な準備となり，日本留学の成果を大いに高めることになるだろうと考えられるからである.（ここで「ナイーヴ」という言葉を使ったが，意味は Halmos がその著書 “Naive Set Theory” (1960) で使った意味に近い．つまり，ガチガチの公理系ではなく，使い手のことを意識した融通無碍で便利なもの，といったつもりである.）

『理科系学部留学生のための 数学入門 I』を書くにあたり，数学用語に限らず,「論理」や「数学的帰納法」を記述する日本語の取り扱いにも，慎重にならざるを得なかった．留学生に読んでもらう，という設定をとることによって，定義もより明瞭に表現しなければならないことにも気付かされた．(例えば,「△△かつ□□となるような◇のことを，●●と呼び，しかも●●と呼ぶのは，△△かつ□□となるような◇に限る」といった定義の仕方を適切に使うこと等．) 既存の試みがないため，新雪を踏みしめる清々しさもあったが，いつ何時雪に隠れた下水溝に踏み込むかも知れないという怖れもあった．

『理科系学部留学生のための 数学入門 I』の第 2 章ではどのように古典命題論理・述語論理をナイーヴに展開してみたか，次々節で解説する．

また，同書第 10 章ではどのように数学的帰納法を述べてみたか，その後の節で解説する．

これらの試みがどのくらい上手くいったものか，それともどのくらい手際の悪いものか，是非識者のご意見を賜りたい．これらの他にも,『理科系学部留学生のための 数学入門 I』及び『理科系学部留学生のための 数学入門 II』(長谷川 1999-1) を書く上で，日本語との関連で幾つか試みをしたが，それらについては，別の機会に論じることにする．

1.「数学の基礎としての論理」の位置付け

先ず数学において「論理」はどのような使われ方をしているか，一つ高等

学校初年級の例を見てみよう．

全称命題

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[\, a^2 \text{ が偶数} \Rightarrow a \text{ は偶数}\,]$$

は，どのように証明するとよいだろうか．因みにこれは,「任意の整数 a に対して，a^2 が偶数ならば，a は偶数である」等と読む．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合 $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ のことで，$a \in \mathbb{Z}$ は「a が $\mathbb{Z}$ の要素である」こと，つまり「a は整数である」ことを意味する．また，$\forall$ は全称記号であり，$\Rightarrow$ は含意記号である．この命題の証明は，対偶か背理法を使った次のいずれかの方法で普通なされる．

証明 1　**対偶**:「任意の整数 a に対して，a が奇数 $\Rightarrow a^2$ は奇数」が成り立つことを示そう．

そこで，整数 a は奇数とする．a は，別なある整数 n を用いて

$$a = 2n + 1$$

と表すことができる．このとき，

$$\begin{aligned} a^2 &= (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2\,(2n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$

となり，ここで $2n^2 + 2n$ は整数なので，a^2 は奇数であることが言える．■

証明 2　**背理法**で示そう．

a^2 が偶数でかつ a は奇数となるような整数 a が存在したと仮定する．このとき，a は奇数なので，別なある整数 n を用いて

$$a = 2n + 1$$

と表すことができる．このとき

$$\begin{aligned} a^2 &= (2n+1)^2 \\ &= 4n^2+4n+1 \\ &= 2(2n^2+2n)+1 \end{aligned}$$

となり，ここで $2n^2+2n$ は整数なので，a^2 は奇数であることになる．ところが，a^2 は偶数であった．これは矛盾である．よって，任意の整数 a に対して，a^2 が偶数であるならば a は偶数であることが言えた．■

日本の高等学校の「数学 A」の教科書では,「$\sqrt{2}$ は無理数である」ことの証明が背理法の例として挙げられている．つまり，背理法を使って「二乗して 2 になるような正の数は分数で表すことができない」ことの証明を紹介している (例えば，小松 1997 p.26, 永尾 1993 p.55)．因みにその際，上で紹介した全称命題が真であることを暗に用いている．

原理的には，対偶を持ち出したり背理法を使ったりすることは不可避ではない (Gentzen の基本定理; 竹内・八杉 1988 参照)．しかし一般的な理科系の学生にとって，数学は排中律を認める古典論理を基にしており，対偶や背理法を用いるのが全く「自然」である (Chagrov・Zakharyaschev 1997)． また，数学的帰納法なしに数学を展開することは，不可能と言ってよい．

2.「論理」のナイーヴな展開の具体的なメニュー

『理科系学部留学生のための 数学入門 I』の第 2 章を，順を追って解説して行こう．

2·1　命題と命題関数

ここでは，命題論理を導入する．命題とは,「真か偽かが定まっているような数学上の表現またはその意味のこと」と定めた．例えば,「$1+2=3$」,「$1+2>3$」,「素数は無限に存在する」等である．formal system を構築しようとしているわけではないので，このような意識的に表現と意味，syntax と semantics の二股をかけたナイーヴで実用に供する定義とした．

また，変数にその変域中の定数を代入したときに命題となるものを，命題関数と定めた.「値が命題であるような関数」であることによる名付け方である.「述語」とか「開放文」等と呼ぶこともある．例えば「$x=1$」とか「$x=y$」がそれである.

二つの真偽値を **T** (true, 真) と **F** (false, 偽) と書くことにする.

特に命題は，いつも定数値 (**T** か **F**) をとる命題関数の一種である，ととらえる立場をとることにする．しかし，以下の展開において，命題関数の一般論で済まさずに，命題の場合も特別に述べるよう努めた.

2·2　論理結合記号

連言，選言，含意，および否定の論理結合記号の使い方を定義する.

2·2·1　論理結合記号と真偽表

論理結合記号 $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, および $\neg$ は，次のように使われる．即ち，A, B が命題の時，

$$A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad \neg A$$

もそれぞれ命題であるとする．これらの読み方の例として，

$A \wedge B$	A かつ B
$A \vee B$	A または B
$A \Rightarrow B$	A ならば B
$\neg A$	A でない

等を挙げた．また更に，

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**T**

A	$\neg A$
T	**F**
F	**T**

で真偽を定める.

メタな立場での議論と峻別せずナイーヴに使いたいので，$A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $\neg A$ が **T** の時，誤解がないように配慮した上で，単に

$$A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad \neg A$$

と書くことも許すことにする．

命題関数 F, G に対しても

$$F \wedge G, \quad F \vee G, \quad F \Rightarrow G, \quad \neg F$$

はそれぞれ命題関数であるとする．

命題関数 $F \Rightarrow G$ において，F のことを仮定と，G のことを結論と呼ぶことにする．2·9 節で反例を定義する際に，再び仮定，結論という言葉が登場する．

また，論理結合記号の scope を明瞭にするために，括弧の付け方に注意するよう促した．

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ や $(F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$ を，それぞれ $A \Leftrightarrow B$ や $F \Leftrightarrow G$ と略記することにする．これらをそれぞれ，A iff B, F iff G というメタな表現にも読み換えてよいものとした．(‘iff’ とは，‘if and only if’ の略記である．)

参考として，論理結合記号の結合の強さについても，順序を比較してみた．

2·2·2 「または」について

排他的論理和 (exclusive ‘or’; 計算機科学で言う XOR) と包含的論理和 (inclusive ‘or’) について説明した．

2·2·3 「ならば」について・1

実質含意 (material implication) の説明をした．

本書の「論理」を展開する上で，次のような配慮が必要となった．即ち，

$$(\text{偽な命題}) \Rightarrow (\text{真な命題})$$

の形をした命題のうち，例えば，

「$1 < 1 \Rightarrow$ 素数は無限に存在する」

や

(偽な命題) $\Rightarrow$ (偽な命題)

の形をした命題のうち，例えば，

「$1 < 1 \Rightarrow$ 素数は全部で 20 個しか存在しない」

のような命題の名称に適切な既存のものがなかったので,「自明に真な命題」と名付けた．また,

(真な命題) $\Rightarrow$ (真な命題)

の形をした命題のうち，例えば，

「$1 = 1 \Rightarrow$ 素数は無限に存在する」

のような命題の名称にも適切な既存のものがなかったので,「無意味に真な命題」と名付けた.

2·2·4 記号のいろいろ

論理結合記号も流儀によって様々である．通常メタ記号を別にすることにも触れた.

2·3 全称記号・存在記号と 1 変数の命題関数

命題論理における同値や変形に深入りする前に，一階の述語論理の導入をしておいた.

2·3·1 定義と法則

1 変数の命題関数 $F(x)$ から，x の変域 $U\,(\neq \emptyset)$ において，命題

$$(\forall x)[\,F(x)\,], \qquad (\exists x)[\,F(x)\,]$$

を作ることが出来ると定めた．真偽値は次のように定める：U の要素 c を代入した $F(c)$ について，$F(c)$ 達がすべて $\mathbf{T}$ のとき $(\forall x)[\,F(x)\,]$ は $\mathbf{T}$, $F(c)$

達の中に **F** となるものが存在するとき $(\forall x)[F(x)]$ は **F** とする．また，$F(c)$ 達の中に **T** となるものが存在するとき $(\exists x)[F(x)]$ は **T**, $F(c)$ 達がすべて **F** のとき $(\exists x)[F(x)]$ は **F** とする．

全称作用素 $(\forall\ \ )[\ \ ]$ は $\wedge$ を，存在作用素 $(\exists\ \ )[\ \ ]$ は $\vee$ を拡張したものととらえることが出来ることにも着目した．

$\neg(\forall x)[F(x)]$ は $(\exists x)[\neg F(x)]$ と同じ真偽値をとり，また，$\neg(\exists x)[F(x)]$ は $(\forall x)[\neg F(x)]$ と同じ真偽値をとる，というド・モルガンの法則 (1 変数形) を紹介した．

また，自由変数と束縛変数との違いに注意した．

$F(x)$ は，x を束縛変数として持たず，自由変数としてせいぜい x だけを持つ 1 または 0 変数関数とする．y が $F(x)$ の束縛変数でないとき $(\forall y)[F(y)]$ は $(\forall x)[F(x)]$ と同じ真偽値をとり，$(\exists y)[F(y)]$ は $(\exists x)[F(x)]$ と同じ真偽値をとることがわかる．

$(\forall x)[F(x)]$ が **T** である時，メタな立場で，誤解がないように配慮した上で，単に

$$(\forall x)[F(x)]$$

と書いたりするとした．同様に，$(\forall x)[F(x)]$ が **F** である時，$(\exists x)[F(x)]$ が **T** である時，$(\exists x)[F(x)]$ が **F** である時，それぞれ

$$\neg(\forall x)[F(x)], \quad (\exists x)[F(x)], \quad \neg(\exists x)[F(x)]$$

と書くこともあるとした．

2·3·2　命題の読み方

x の変域 $U\,(\neq \emptyset)$ において命題 $(\forall x)[F(x)]$ の真偽値が **T** の時，

任意の x に対して $F(x)$ が成り立つ

等と読む．読み方にはいろいろあり，90 余りの例を収集して紹介した．

x の変域 $U\,(\neq \emptyset)$ において命題 $(\exists x)[F(x)]$ の真偽値が **T** の時，

$F(x)$ を満たすような x が存在する

等と読む．読み方の例を 70 余り収集し，紹介した．

x の変域 $U\,(\neq \emptyset)$ において命題 $\neg(\forall x)[\,F(x)\,]$ の真偽値が $\mathbf{T}$ の時，これを命題 $(\exists x)[\neg F(x)\,]$ に変えて読むことを薦めた．これは，

$F(x)$ を満たさないような x が存在する

等と読む．このように命題を変形して読むことを薦めるのは，次のような調査結果を踏まえてのことである (細井 1986, 1992).

アンケート　石は黒か白だとします．ここに石が三つあります．つまり，
〈黒黒黒〉，〈黒黒白〉，〈黒白白〉，〈白白白〉
のいずれかの組合せになってなっていると思われます．このとき，
「全部の石が白とは限らない」
ということを教えられたとします．上の四つの組合せのうち，可能性のあるものに ○ をつけてください．○ はいくつつけても構いません．

細井 勉 氏によると，このアンケート調査を日本の大学生達に数学の講義の中で行ったところ，約 40 % の学生が，四つの組合せのどれも可能性があると答えたそうである.「〈白白白〉 の組合せだけを除く」 という回答は全体では 10 − 20 %, 数学科の四年生では約 50 % という結果であったそうである．つまり，$\neg(\forall x)[\,F(x)\,]$ を「すべての x に対して $F(x)$ が成り立つとは限らない」と読むと，思っていること $((\exists x)[\neq F(x)\,])$ を伝えられないことがわかる.

x の変域 $U\,(\neq \emptyset)$ において命題 $(\exists x)[\,F(x)\,]$ の真偽値が $\mathbf{F}$ の時，

$$\neg(\exists x)[\,F(x)\,]$$

と書くことにしたが，これは

$F(x)$ を満たすような x は存在しない

等と読む．また，これを

$$(\forall x)[\neg F(x)\,]$$

と書くならば,

どのような x を取って来ても $F(x)$ は成り立たない

等と読む．これらについて，合計 50 近くの読み方の例を収集し紹介した．

2·4　命題論理

基本的なトートロジー (tautology) を紹介するのが，この節の目的である．

2·4·1　命題論理と矛盾

命題論理では，$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$ を有限回使って作られた命題や命題関数に着目する．$\forall$, $\exists$ は視野に入れない．

命題関数 Q は命題関数 F_1, F_2, $\ldots$, F_m から構成されたものとする．F_j $(j=1,2,\ldots,m)$ のとる値である命題の真偽値によらず常に **F** となるとき，命題関数 Q は矛盾であると言う．例えば，任意の命題関数 P に対して，命題関数 $P\wedge\neg P$ は矛盾である．

2·4·2　命題論理で常に真となる命題関数や命題の形

真偽値が常に **T** となる命題関数に，次のようなものがある．

例 2.12　矛盾律: $\neg(P\wedge\neg P)$

例 2.13　背中律: $P\vee\neg P$

例 2.14　modus ponens: $(P\wedge(P\Rightarrow Q))\Rightarrow Q$

例 2.15　パースの法則: $((P\Rightarrow Q)\Rightarrow P)\Rightarrow Q$

例 2.16　$(P\wedge\neg P)\Rightarrow Q$

例 2.17　同一律: $P\Rightarrow P$

例 2.18　$(P\wedge Q)\Rightarrow P$

例 2.19　$((R\Rightarrow P)\wedge(R\Rightarrow Q))\Rightarrow(R\Rightarrow(P\wedge Q))$

例 2.20　$P\Rightarrow(P\vee Q)$

例 2.21　両刀論法: $((P\Rightarrow R)\wedge(Q\Rightarrow R))\Rightarrow((P\vee Q)\Rightarrow R)$

例 2.22　三段論法: $((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R))\Rightarrow(P\Rightarrow R)$

例 2.23　modus tollens: $((P\Rightarrow Q)\wedge\neg Q)\Rightarrow\neg P$

2·5 命題関数の同値と変形・命題論理編

命題論理における基本的な同値を紹介するのが，この節の目的である．

2·5·1 命題関数の同値

次のような同値である命題関数の例を挙げた．真偽表で確認する．

例 2.24 対偶律: $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

例 2.25 $(P \Rightarrow Q) \iff \neg P \vee Q$

例 2.26 巾等律: $P \vee P \iff P, \quad P \wedge P \iff P$

例 2.27 交換律: $P \vee Q \iff Q \vee P, \quad P \wedge Q \iff Q \wedge P$

例 2.28 結合律: $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R,$
$P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$

例 2.29 分配律: $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$
$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

例 2.30 吸収律: $P \wedge (P \vee Q) \iff P,$
$P \vee (P \wedge Q) \iff P$

例 2.31 二重否定の法則: $\neg(\neg P) \iff P$

例 2.32 ド・モルガンの法則: $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q,$
$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$

2·5·2 命題関数の変形

例えば

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \iff P \vee Q$$

を，真偽表を使って示す代わりに，既に示した同値関係を用いて，

$$\begin{aligned}
&(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q \\
\iff &(\neg P \vee Q) \Rightarrow Q \\
\iff &\neg(\neg P \vee Q) \vee Q \\
\iff &(\neg(\neg P) \wedge \neg Q) \vee Q \\
\iff &(P \wedge \neg Q) \vee Q
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow Q \vee (P \wedge \neg Q)$$
$$\Longleftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$$
$$\Longleftrightarrow Q \vee P$$
$$\Longleftrightarrow P \vee Q$$

と示すこともできる．問いとして，次のような命題論理における同値を紹介した．

(1) $(P \Rightarrow \neg P) \Longleftrightarrow \neg P$
(2) $(\neg P \Rightarrow P) \Longleftrightarrow P$
(3) $\neg(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow P \wedge \neg Q$
(4) $(\neg P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow P \vee Q$
(5) $(P \Rightarrow \neg Q) \Longleftrightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$
(6) $(\neg P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Rightarrow P)$
(7) $(P \Rightarrow Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
(8) $(P \Rightarrow Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \vee R$
(9) $(P \Rightarrow Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)$
(10) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Longleftrightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$
(11) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Longleftrightarrow (\neg P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
(12) $(P \wedge Q \Rightarrow R) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$
(13) $(P \vee Q \Rightarrow R) \Longleftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
(14) $(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

2·6　命題関数の同値と変形・述語論理編

一階の述語論理における valid な基本的命題を紹介するのが，この節の目的である．

2·6·1　述語論理

命題論理を包含し，$\forall$ や $\exists$ も視野に入れたものを述語論理と呼ぶ．これが数学で必要とされる論理の中心となる．

任意の1変数命題関数 $F(x), G(x)$ に対して，x の変域 $U\,(\neq \emptyset)$ において，次のような例は常に **T** である．

例 2.33　$(\forall x)[\,F(x) \land G(x)\,] \Rightarrow ((\forall x)[\,F(x)\,] \land (\forall x)[\,G(x)\,])$
例 2.34　$((\forall x)[\,F(x)\,] \land (\forall x)[\,G(x)\,]) \Rightarrow (\forall x)[\,F(x) \land G(x)\,]$
例 2.35　$(\exists x)[\,F(x) \lor G(x)\,] \Rightarrow ((\exists x)[\,F(x)\,] \lor (\exists x)[\,G(x)\,])$
例 2.36　$((\exists x)[\,F(x)\,] \lor (\exists x)[\,G(x)\,]) \Rightarrow (\exists x)[\,F(x) \lor G(x)\,]$
例 2.37　$((\forall x)[\,F(x)\,] \lor (\forall x)[\,G(x)\,]) \Rightarrow (\forall x)[\,F(x) \lor G(x)\,]$
例 2.38　$(\exists x)[\,F(x) \land G(x)\,] \Rightarrow ((\exists x)[\,F(x)\,] \land (\exists x)[\,G(x)\,])$

因みに第3章では，

$(\forall x)[\,x \in S \Rightarrow F(x)\,]$　を　$(\forall x \in S)[\,F(x)\,]$　と，
$(\exists x)[\,x \in S \land F(x)\,]$　を　$(\exists x \in S)[\,F(x)\,]$

と略記した場合，確かに同値

$$\neg(\forall x \in S)[\,F(x)\,] \iff (\exists x \in S)[\,\neg F(x)\,],$$
$$\neg(\exists x \in S)[\,F(x)\,] \iff (\forall x \in S)[\,\neg F(x)\,]$$

が成立することを見ることになる (同書 p.97)．

2·6·2　命題関数の同値と変形

ここでは，述語論理における命題（命題関数）の同値の例を紹介した．2·3·1 で見たことをもとにした例として，ド・モルガンの法則 (1 変数形):

$$\neg(\forall x)[\,F(x)\,] \iff (\exists x)[\,\neg F(x)\,],$$
$$\neg(\exists x)[\,F(x)\,] \iff (\forall x)[\,\neg F(x)\,]$$

がある．また，2·6·1 の例 2.33 と例 2.34 をまとめて，

例 2.39　$(\forall x)[\,F(x) \land G(x)\,] \iff (\forall x)[\,F(x)\,] \land (\forall x)[\,G(x)\,]$

が **T** である．更に，例 2.35 と例 2.36 をまとめて，

例 2.40　$(\exists x)[\,F(x)\vee G(x)\,] \iff (\exists x)[\,F(x)\,]\vee(\exists x)[\,G(x)\,]$

が **T** である．また，

$$
\begin{aligned}
(\exists x)[\,F(x)\Rightarrow G(x)\,] &\iff (\exists x)[\,\neg F(x)\vee G(x)\,]\\
&\iff (\exists x)[\,\neg F(x)\,]\vee(\exists x)[\,G(x)\,]\\
&\iff \neg(\forall x)[\,F(x)\,]\vee(\exists x)[\,G(x)\,]\\
&\iff (\forall x)[\,F(x)\,]\Rightarrow(\exists x)[\,G(x)\,]
\end{aligned}
$$

と変形することによって，

例 2.41　$(\exists x)[\,F(x)\Rightarrow G(x)\,] \iff ((\forall x)[\,F(x)\,]\Rightarrow(\exists x)[\,G(x)\,])$

を示すことが出来る．

また，x を束縛変数として持たないような命題 A に対して，

$$(\forall x)[\,A\,] \iff A, \qquad (\exists x)[\,A\,] \iff A$$

が **T** であることも示した．課題として，同様の命題 A に対する次の 8 個の同値を確認してもらうことにした．

(1)　$(\forall x)[\,A\wedge G(x)\,] \iff A\wedge(\forall x)[\,G(x)\,]$
(2)　$(\exists x)[\,A\vee G(x)\,] \iff A\vee(\exists x)[\,G(x)\,]$
(3)　$(\exists x)[\,A\Rightarrow G(x)\,] \iff (A\Rightarrow(\exists x)[\,G(x)\,])$
(4)　$(\exists x)[\,F(x)\Rightarrow A\,] \iff ((\forall x)[\,F(x)\,]\Rightarrow A)$
(5)　$(\forall x)[\,A\Rightarrow G(x)\,] \iff (A\Rightarrow(\forall x)[\,G(x)\,])$
(6)　$(\forall x)[\,F(x)\Rightarrow A\,] \iff ((\exists x)[\,F(x)\,]\Rightarrow A)$
(7)　$(\forall x)[\,A\vee G(x)\,] \iff A\vee(\forall x)[\,G(x)\,]$
(8)　$(\exists x)[\,A\wedge G(x)\,] \iff A\wedge(\exists x)[\,G(x)\,]$

2·7　全称記号・存在記号と n 変数の命題関数 $(n \geqq 2)$

ここからは，多変数の命題関数を扱うことにする．

2·7·1 2変数の命題関数と全称記号・存在記号

2変数の命題関数に $\forall$ または $\exists$ を合計 2 個施して命題が出来る様子を示した．2変数の命題関数 $F(x,y)$ に対して，x の変域 $U\,(\neq \emptyset)$ と y の変域 $V\,(\neq \emptyset)$ において，

$$(\forall y)(\forall x)[\,F(x,y)\,] \iff (\forall x)(\forall y)[\,F(x,y)\,],$$
$$(\exists y)(\exists x)[\,F(x,y)\,] \iff (\exists x)(\exists y)[\,F(x,y)\,]$$

が **T** となる．ド・モルガンの法則 (2 変数形):

$$\neg(\forall x,y)[\,F(x,y)\,] \iff (\exists x,y)[\neg F(x,y)\,]$$
$$\neg(\exists x,y)[\,F(x,y)\,] \iff (\forall x,y)[\neg F(x,y)\,]$$
$$\neg(\exists y)(\forall x)[\,F(x,y)\,] \iff (\forall y)(\exists x)[\neg F(x,y)\,]$$
$$\neg(\forall y)(\exists x)[\,F(x,y)\,] \iff (\exists y)(\forall x)[\neg F(x,y)\,]$$

等や，

例 2.44 $(\exists y)(\forall x)[\,F(x,y)\,] \Rightarrow (\forall x)(\exists y)[\,F(x,y)\,]$

が **T** であることも示した．

第 8 章になるが，二次関数を題材にして，同値でない $(\exists y)(\forall x)[\,F(x,y)\,]$ と $(\forall x)(\exists y)[\,F(x,y)\,]$ の様子を見てもらうことになる (同書 pp.222–224):

例題 8.1 x, y は実数とします．次の二つの不等式について，後の問いに答えなさい．

$$y > -\,x^2 + 2(a-1)x + 2a - 1, \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$
$$y < x^2 - 2(a-3)x + 9. \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

(1) すべての x に対して「① かつ ② を満たすたすような y が存在する」ための，a の必要十分条件を求めなさい．

(2) 「すべての x が ① かつ ② を満たす」ような y が存在するための，a の必要十分条件を求めなさい．

（因みに答は，(1) $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} < a < \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, (2) $0 < a < 3$ である.）

2·7·2　一般的な n 変数の命題関数と全称記号・存在記号

次のド・モルガンの法則 (一般形) を示した.

$$\neg(\mathrm{Q}_n x_{i_n})(\mathrm{Q}_{n-1} x_{i_{n-1}})\cdots(\mathrm{Q}_1 x_{i_1})[F]$$
$$\Longleftrightarrow\ (\mathrm{Q}_n{}' x_{i_n})(\mathrm{Q}_{n-1}{}' x_{i_{n-1}})\cdots(\mathrm{Q}_1{}' x_{i_1})[\neg F].$$

ただし，Q_k が $\forall$ のとき $\mathrm{Q}_k{}'$ は $\exists$ を，Q_k が $\exists$ のとき $\mathrm{Q}_k{}'$ は $\forall$ を表すものとする ($k = 1, 2, \ldots, n$).

2·8　命題を新しく作る方法について

2·2·1 で命題論理における命題の作り出し方を，加えて 2·3·1, 2·7·1, 2·7·2 で述語論理における命題の作り出し方を示した.「命題の構成原理はこれだけである」ということを，ここで明らかに述べた.

また，参考として「双対（そうつい）の原理」について，結果と例だけを紹介した.

2·9　必要条件と十分条件

この節から，数学において実際に頻繁に応用される項目が現われる.

2·9·1　仮定・結論と反例

変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の変域をそれぞれ空集合でない $U_1, U_2, \ldots, U_n$ とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を自由変数だけに持つ高々 n 変数の命題関数

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

に対して，命題

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow G(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

を考える．これを

$$(\forall \overrightarrow{x})[F(\overrightarrow{x}) \Rightarrow G(\overrightarrow{x})]$$

と略記する.

F を満たすような任意の $\overrightarrow{x}$ は G を満たす;
仮定 F を満たすような任意の $\overrightarrow{x}$ は結論 G を満たす

等，10 余りの読み方の例を挙げた．

次に，単純であるがそれ故に例として適切と思われるものを二つ挙げた．

例 2.45　x は整数全体の集合を変域とした変数とする．命題

$$(\forall x)[\,x = 1 \Rightarrow x^2 = 1\,]$$

は **T** である．

例 2.46　x は整数全体の集合を変域とした変数とする．命題

$$(\forall x)[\,x^2 = 1 \Rightarrow x = 1\,]$$

は **F** である．

仮定を満たすにもかかわらず，結論を満たさない例のことを反例と呼ぶことにする．例 2.46 において，$x = -1$ は反例である．

一般的には，全称の命題が誤りであることを示すためには，「反例が存在する」ことを示す方法をとる．また，全称の命題が誤りであることを示すために，数学ではよく，「具体的な反例を一つ発見」して，それが仮定を満たしていることと結論を満たしていないことを明示する方法をとることもある．

メタな立場での反例の挙げ方について，例を二つ，問いを一つ紹介した．

2·9·2　必要条件と十分条件

2·9·1 で見たのと同じ命題

$$(\forall \overrightarrow{x})[\,F(\overrightarrow{x}) \Rightarrow G(\overrightarrow{x})\,]$$

が **T** であるとする．このとき，$\overrightarrow{U}$ から取って来たどの $\overrightarrow{x}$ の組にとっても，$F(\overrightarrow{x})$ であることは $G(\overrightarrow{x})$ であるための十分条件であり，$G(\overrightarrow{x})$ であることは $F(\overrightarrow{x})$ であるための必要条件であると言う．

数学における「命題」ではないが，

犬であることは哺乳類であるための十分条件である

とか,

哺乳類であることは犬であるための必要条件である

という例も，参考に挙げてみた.

2·9·3　必要十分条件

命題

$$(\forall \overrightarrow{x})[F(\overrightarrow{x}) \iff G(\overrightarrow{x})]$$

が **T** であるとする．このとき，$\overrightarrow{U}$ $(\neq \emptyset)$ から取って来たどの $\overrightarrow{x}$ の組にとっても，$F(\overrightarrow{x})$ であることは $G(\overrightarrow{x})$ であるための必要十分条件であると言う.

2·9·4 「ならば」について・2

x の変域が整数全体の集合のときの命題関数

$$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$$

を例にとって，実質含意 $\Rightarrow$ の真偽表

A	B	$A \Rightarrow B$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

を定めた根拠の一つを見てもらった.

2·9 では全称形の命題に限ったが，通常の数学においては，これで間に合うだろう．ただし極端な例として，公理的集合論における巨大基数 (large cardinals) の理論では，存在型の命題を見ることも多い (Kanamori 1994 参照).

2·10　逆命題・裏命題・対偶

もとの命題

$$(\forall \overrightarrow{x})[F(\overrightarrow{x}) \Rightarrow G(\overrightarrow{x})]$$

に対して，

$$(\forall \overrightarrow{x})[G(\overrightarrow{x}) \Rightarrow F(\overrightarrow{x})]$$

を逆命題と呼び (2·10·1),

$$(\forall \overrightarrow{x})[\neg F(\overrightarrow{x}) \Rightarrow \neg G(\overrightarrow{x})]$$

を裏命題と呼び (2·10·2),

$$(\forall \overrightarrow{x})[\neg G(\overrightarrow{x}) \Rightarrow \neg F(\overrightarrow{x})]$$

を対偶と呼ぶ (2·10·3).

互いに対偶の関係にある命題どうしの真偽値は，常に一致することを見た．このことから，対偶の証明を以てして，もとの命題の証明としてもよいことがわかる．**1.「数学の基礎としての論理」の位置付け** で紹介した例のように，もとの命題よりもその対偶の方が技術的に証明しやすい場合，この事実は有り難い．

2·11　背理法

これも **1.「数学の基礎としての論理」の位置付け** で紹介した証明方法である．

2·11·1　全称の含意形のとき

命題

$$(\forall \overrightarrow{x})[F(\overrightarrow{x}) \Rightarrow G(\overrightarrow{x})]$$

の背理法による証明方法とは，

> 先ず F を満たしかつ G を満たさないような $\overrightarrow{x}$ が存在したと仮定する．次に，この仮定のもとで矛盾を導く

というものである．背理法の根拠:

$$\begin{aligned}(\forall \overrightarrow{x})[F(\overrightarrow{x}) \Rightarrow G(\overrightarrow{x})] &\iff (\forall \overrightarrow{x})[\neg F(\overrightarrow{x}) \vee G(\overrightarrow{x})] \\ &\iff (\forall \overrightarrow{x})[\neg F(\overrightarrow{x}) \vee \neg(\neg G(\overrightarrow{x}))] \\ &\iff (\forall \overrightarrow{x})[\neg (F(\overrightarrow{x}) \wedge \neg G(\overrightarrow{x}))] \\ &\iff \neg(\exists \overrightarrow{x})[F(\overrightarrow{x}) \wedge \neg G(\overrightarrow{x})].\end{aligned}$$

も添えた．

2·11·2　一般のとき

$(\forall \overrightarrow{x})[F(\overrightarrow{x}) \Rightarrow G(\overrightarrow{x})]$ の形の命題に限らず一般的に，命題 A を直接証明することが技術的に難しい場合，命題 $\neg A$ を仮定し，矛盾を導き，矛盾が導かれたことから $\neg A$ ではないこと，つまり $\neg(\neg A)$ であることが言え，二重否定の法則により A が言える，という証明方法も採られる．

3．対象化した「数学的帰納法」の具体的なメニュー

『理科系学部留学生のための 数学入門 I』の第 10 章の該当二節を，解説して行こう．

10·7　標準的な数学的帰納法

自然数 n に関する命題関数 $P(n)$ が「全称で真となる」ことを示すための方法の一つである次のような証明方法を，標準的な数学的帰納法と呼ぶ．

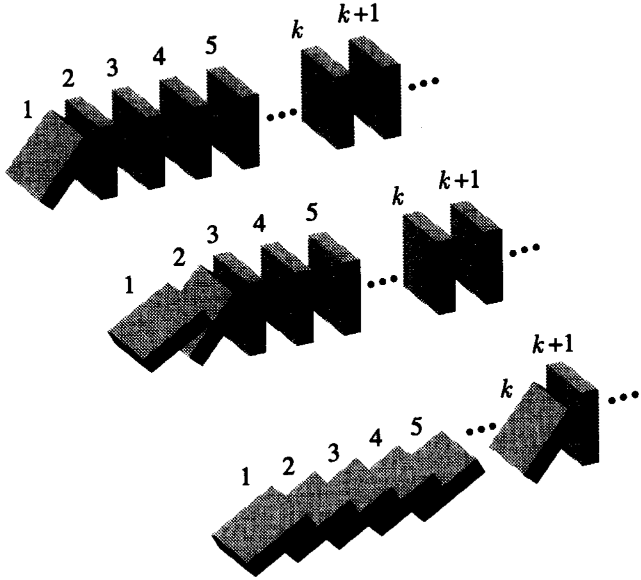
[I]　$P(1)$ が成り立つことを示す．

[II]　$P(k)$ (k は任意の自然数) が成り立つことを仮定して，
$P(k+1)$ が成り立つことを示す．

[III]　以上の [I], [II] から，任意の自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことが示されたことが言える．

modus ponens によって [I] と [II] は結び付けられ，任意の自然数 n が与えられたならばその n に到達するまで，その modus ponens を続けて行くことができる，ということを [III] で述べる，という方法である．

「ドミノ倒し」にも喩えてみた．[I] は「最初のドミノが実際に倒れる」ということに対応する．[II] は「隣り合ったどの二つのドミノも，適切な間隔で並べられている」ということに対応する．間隔が広すぎても狭すぎても次のドミノを倒すことができない．[III] は [I] と [II] を結びつけたもので,「どのドミノも倒れる」ということに対応する．



数学的帰納法による等式や不等式の証明例を示し，練習問題を紹介した．また，結果を予想し，それを数学的帰納法で証明する，といった発見的場でよく経験する形式の問題等も紹介した．等式や不等式を含まない命題関数についても，練習問題を用意した．

ここまで，日本語を学習中の留学生が読者であるための記述を工夫したことの他は，日本で使われている普通の高等学校数学の教科書の展開方法とさほど変わりはない．

10·8　累積帰納法

ここでは，数学的帰納法という証明方法自体を考察の対象として，10·7 の標準的数学的帰納法と次の累積帰納法との,「証明方法としての同等性」を

見た.

累積帰納法

先ず任意の自然数 k をとる. このとき, $l<k$ を満たすような任意の自然数 l に対して,

「命題 $P(l)$ が成り立つことを仮定すれば, 命題 $P(k)$ が成り立つ」

ことを示す. このことから, 任意の自然数 n に対して命題 $P(n)$ は真となる.

日本の大学入試において, 次のような問題が複数校で出題されたことがある.

問.　$x=t+\frac{1}{t}$ とし, $P_n=t^n+\frac{1}{t^n}$ (n は自然数) とおく. P_n は x の n 次の整式で表されることを示せ.

この問題の証明は, 標準的数学的帰納法の形に技術的に合わない. 標準的数学的帰納法と同等であることが示されたこの累積帰納法を使うのが, 適切と思われる. その示し方を紹介した. また, 整式の除法の原理である次の重要な定理も, 累積帰納法で示した.

定理 5.1　整式 $f(x)$ と $g(x)$ (ただし, $g(x)$ の次数は 1 以上) に対して,

$$\begin{cases} f(x)=Q(x)g(x)+R(x), \\ (R(x)\ \text{の次数}) < (g(x)\ \text{の次数}) \end{cases}$$

を満たすような整式 $Q(x)$ と $R(x)$ が存在する. しかも, このような整式 $Q(x)$ と $R(x)$ の対は, 唯一である.

4. おわりに

大阪外国語大学留学生日本語教育センターにおける理科系国費学部留学生に対する専門科目「数学」の講義で『理科系学部留学生のための 数学入門 I』

を使用して，まだ一年しか経っていない．筆者が以上論じた方策がどのような効果をもたらすかは，今後とも注意深く観察して行かなければならない．

また日本の数学教育において，論理の取り扱いの改革を推進してよいものかどうか，数学教育・情報教育関連学会に調査・研究を今後とも提案して行きたいと思う．

参考文献

杉山 吉茂・澤田 利夫・橋本 吉彦・町田 彰一郎 (1999)『講座 教科教育　数学科教育 — 中学・高校』学文社.

吉田 淳一 (1996)「数学の教科書の翻訳と分析 (1): オーストラリア」研究代表 小林 明美『共同研究 (文部省)・諸外国における中等教育の教科書と教材に関する調査研究』.

長谷川 貴之 (1996)「数学の教科書の翻訳と分析 (2): フィリッピン」研究代表 小林 明美『共同研究 (文部省)・諸外国における中等教育の教科書と教材に関する調査研究』.

吉田 淳一 (1997)「数学の教科書の分析 (1): インドネシア」研究代表 小林 明美『共同研究 (文部省)・諸外国における中等教育の教科書と教材に関する調査研究』.

長谷川 貴之 (1997)「数学の教科書の分析 (2): タイ」研究代表 小林 明美『共同研究 (文部省)・諸外国における中等教育の教科書と教材に関する調査研究』.

吉田 淳一 (1999)「数学の教科書の分析 (1): ベトナム」研究代表 小林 明美『共同研究 (文部省)・諸外国における中等教育の教科書と教材に関する調査研究』(作業中).

長谷川 貴之 (1999-2)「数学の教科書の分析 (2): モンゴル」研究代表 小林 明美『共同研究 (文部省)・諸外国における中等教育の教科書と教材に関する調査研究』(作業中).

文部省 (1989)『高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編』ぎょうせい.

小松 勇作，ほか 8 名 (1997)『高等学校 数学 A [改訂版]』旺文社.

永尾 汎，ほか 8 名 (1993)『高等学校 数学 A』数研出版.

島谷 健一郎・長谷川 貴之 (1995)『学部留学生予備教育過程における専門科目・数学の現状と課題』大阪外国語大学留学生日本語教育センター『日本語・日本文化』第 21 号 pp. 157 – 171.

長谷川 貴之 (1998)『理科系学部留学生のための 数学入門 I』大阪外国語大学留学生日本語教育センター.

Halmos, Paul R. (1960) *Naive Set Theory.* Van Nostrand.

長谷川 貴之 (1999-2)『理科系学部留学生のための 数学入門 II』大阪外国語大学留学生日本語教育センター.

竹内 外史・八杉 満利子 (1988)『証明論入門〔数学基礎論改題〕』共立出版.

Chagrov, Alexander and Zakharyaschev, Michael (1997) *Modal Logic.* Oxford Logic Guides 35. Oxford University Press.

Kanamori, Akihiro (1994) *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Springer-Verlag.

細井 勉 (1986)「数学文の解釈について」福原 満洲夫 (代表)『続 数学と日本語』共立出版.

細井 勉 (1992)『数学とことばの迷い路』日本評論社.

<キーワード> 命題論理，一階の述語論理，数学的帰納法

On Substantial Cultivation of Logic and Mathematical Induction

Takayuki HASEGAWA

Indirect study of logic and mathematical induction is common in mathematics education around the world. We find the fact is due to this, that many foreign undergraduate students have hurdles in the study of mathematics, espescially on the stage of language training. In *Introduction to Mathematics I, for science major undergraduate foreign students* (1998, CLJ, Osaka University of Foregin Studies), I suggested a practical plan of the lecture in logic and mathematical induction. The outline of the plan is explained in this paper.