



Title	非線形nポートの解析と構成に関する研究
Author(s)	高橋, 治久
Citation	大阪大学, 1980, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/49">https://hdl.handle.net/11094/49</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 非線形 $n$ ポートの解析と 構成に関する研究

昭和 55 年 1 月

高 橋 治 久

# **非線形 $n$ ポートの解析と 構成に関する研究**

昭和 55 年 1 月

高 橋 治 久

## 内 容 梗 概

本論文は、著者が大阪大学大学院工学研究科博士課程（電子工学専攻）在学中に行なった、非線形ルポートの解析と構成に関する研究をまとめたもので、本文は次の6章から成る。

第1章は緒論で、本研究の目的と意義およびこの分野での研究の現状について述べ、本研究の諸結果についての概説を行なう。

第2章は代数的非線形ルポート（代数閾数でそのポート特性が規定されるルポート）の解析と構成に関する基本的結果を述べる。この章では従来の概念を一般化した相反性・非相反性に対する統一的な定義を与え代数的ルポートの分解定理を導く。更に、その応用として非線形ルポートの構成についての基本的結果を述べる。

第3章は非線形混成ルポート（代数的ルポート以外の非線形ルポート）の解析と構成に関する基本的結果を述べる。混成ルポートについては定式化の難しさから従来あまり研究されてこなかつた分野であるが、この章では、その特別なクラスに対して主としてエネルギー的概念についての基本的結果を示す。まず、混成ルポートの受動条件をいくつか示し、これらの逆定理を導く。また線形受動回路構成理論の非線形の場合への1つの拡張として受動混成ルポートの構成理論を述べ、システム理論的線形回路構成理論の基本的補題である正実補題の非線形への拡張を示し、構成問題に関する基本的結果を与える。

第4章は複数個のルポートを接続してできる複合ルポートの相反性と受動性に対する基本的考察を行う。

第5章は非線形ルポート抵抗の寄生リアクタンスによる正規化モデルについて考察する。この章の内容は正規形微分方程式による表現を持たない回路の応答を数値計算する際に生じる問題を回路理論的立場から考察するものである。まず異なる正規化によるモデルの等価性についての

考察を行ない、いくつかの十分条件を示す。次に、微小寄生リアクタンスを含む非線形回路網が正規形微分方程式による表現を持つ場合でも回路が一意解を有さない様に見えた場合があることを述べ、一意解を持つための十分条件について考察する。最後に、正規化に要する寄生リアクタンスの個数を減小させる方法を述べる。

第6章は結論で、本研究で得られた結果のまとめと展望を行なう。

## 関連発表論文

- (1) 高橋, 熊谷, 児玉: 非線形ルポートの一般分解定理と構成, 信学論(A) 61-A, 8, (1978)
- (2) 高橋, 熊谷, 児玉: 非線形ルポートの一般分解定理と構成について, 信学技報 CST 77-71 (1977)
- (3) 高橋, 熊谷, 児玉: 非線形混成ルポートの理論, 信学論(A) (投稿中)
- (4) 熊谷, 高橋, 児玉: 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価性について, 信学論(A) (投稿中)
- (5) 熊谷, 高橋, 児玉: 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価性について, 信学技報 CAS 79-42 (1979)
- (6) 高橋, 児玉: 相反非線形ルポート抵抗の構成, 信学論(A) (投稿中)
- (7) KUMAGAI, TAKAHASHI: On The Modeling of Improper Reciprocal Nonlinear Networks, ISCAS of 1979 (Tokyo)

# 目 次

第 1 章	緒 論	1
第 2 章	代数的非線形ルポートの解析と構成	5
2.1	緒 言	5
2.2	諸 定 義	6
2.3	基本分解定理	10
2.4	非相反ルポートの構成	16
2.4.1	非相反 2 ポート抵抗の構成	16
2.4.2	非相反ルポート抵抗の構成	18
2.4.3	エネルギー的観点からの考察	23
2.5	相反ルポート抵抗の構成	24
2.6	結 言	30
第 3 章	混成ルポートの解析と構成	31
3.1	緒 言	31
3.2	諸 定 義	32
3.3	受動条件	36
3.4	受動性の逆定理	40
3.5	受動混成ルポートの構成問題	45
3.6	結 言	52
第 4 章	複合ルポート	54
4.1	緒 言	54
4.2	複合代数的ルポート	54

4.2.1	結線れポート .....	54
4.2.2	代数的れポートの接続 .....	56
4.3	複合混成れポート .....	61
4.4	結 言 .....	63
第 5 章 非線形抵抗れポートの寄生リアクタンス .....		
	による正規化モデル .....	64
5.1	緒 言 .....	64
5.2	問題の定式化 .....	66
5.2.1	基 础 .....	66
5.2.2	正規化モデルの定式化 .....	68
5.3	正規化モデルの等価条件 .....	72
5.4	解の一意性 .....	81
5.5	正規化に要するリアクタンスの個数の削減	83
5.6	結 言 .....	86
第 6 章 結 論 .....		
		87
謝 辞 .....		89
文 献 .....		90

## 諸記号

$\dot{x}(t)$	: $(d/dt)x(t)$
$\triangleq$	: 定義によって等しい
$\equiv$	: 恒等的に等しい
$R$	: 実数体
$R^n$	: $n$ 次元実数空間
$R^+$	: 全ての非負実数の集合
$\  \cdot \ $	: $l_2$ norm
$I$	: 単位行列
$0$	: 零ベクトル, 零行列
$A'$	: 行列(ベクトル) $A$ の転置
$\lambda(A)$	: 行列 $A$ の固有値
$A > 0$	: 行列 $A$ は正定, すなわち $x'Ax > 0$ ( $R^n \ni x \neq 0$ )
$A \geq 0$	: 行列 $A$ は準正定
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	: $a_1, \dots, a_n$ を対角成分とする対角行列
$1(\cdot)$	: 単位階段関数
$R^n \times R^m$	: $n$ 次元実数空間と $m$ 次元実数空間の直積空間
$R^{n \times n}$	: $n$ 次実正方形行列の全体
$A^{n \times n}$	: $n$ 次実歪対称行列の全体 すなわち $A \in A^{n \times n}, A = -A'$
$L-K$	: 集合 $L$ と $K \subset L$ の差集合
$A \iff B$	: $A$ と $B$ は等価である。

# 第 1 章 緒 論

非線形回路網の解析と構成は近年多種の非線形素子が開発され、また回路の大規模化に伴いますます重要なテーマとなりつつある。この分野の研究は比較的一般な回路網を対象として解の存在、一意性、安定性および回路構造などに対して基本的事実を解明し非線形回路理論における解析・構成の基礎を有する“定性的研究”<sup>(1)</sup>,<sup>(40)～(42)</sup>と具体的回路についての特徴的現象の解析や構成（モデル化）および数値計算における結果などを扱う“定量的研究”<sup>(2),<sup>(3)</sup></sup>の2つの流れがある。前者は後者の基礎をなし定性的研究は非線形回路網の研究においては重要な部門をなしている。ところで線形回路網理論においては解を具体的に計算することが可能であるため定性的研究と定量的研究が区別されるることは少ないが、線形九ポートに対する相反性、受動性などの概念は解析・構成における最も基本的な定性的性質である。非線形回路網理論においてもこれは同様であるが、非線形の場合には解を解析的に計算することが不可能であるため定性的研究により解の性質や回路構造を知る事はさらに重要な意味を持つ。

非線形回路網の定性的研究においては対象とする回路の表現を求めることが基本となるが、この場合九ポート系の概念が基礎となっている。九ポートの概念は2端子素子を1ポートと見なし一般の場合に拡張したものであり、図1.1に示す様に9個の端子対を持つ暗箱でありポート変数の組 $(X, Y)$ に対して関係

$$g(X, Y) = 0 \quad (1.1)$$

を有するものとして定義される。電気回路網理論における九ポート系の概念は実際に存在する素子の表現として、また解析・構成上の概念としても基本をなすものである。

本研究ではこの非線形九ポート回路理論における解析・構成の基礎と

して  $n$  ポート系の定性的研究を行ない、 $n$  ポート回路理論の統一と整備を行なう事を目的とする。ところで非線形  $n$  ポートには大別して式(1.1)で与えられたポート特性が代数関数で表される代数的  $n$  ポートと、ポート特性が代数関数で示せない混成  $n$  ポートの2種類がある。代数的  $n$  ポートの例としては、 $n$  ポート抵抗、 $n$  ポートリアクタンスなどがあり、混成  $n$  ポートの例としては抵抗

とリアクタンスの混合から成る  $n$  ポートが考えられる。代数的非線形  $n$  ポートに関しては現在までに多くの研究がなされている<sup>(1)(4)(5)(13)</sup>。特に  $n$  ポート抵抗に関する可解性についての研究は数多くある<sup>(6)</sup>。一方で代数的  $n$  ポートの相反性と非相反性についてはこの概念が  $n$  ポートの解析・構成上重要であるにもかかわらず線形の場合の様に、

一般的な結果<sup>(16)</sup>は知られていない。原因は数学的難しさもあるが、相反性・非相反性の統一的定義が存在しないことに起因している。混成  $n$  ポートに関しては現在までに、まとまつた研究はなされていない。これは線形の場合にはラプラス変換法により混成  $n$  ポートの研究は代数的  $n$  ポートの場合の直接的拡張となるのに對し非線形の場合にはラプラス変換に相等する解析法が存在しない事が主な原因であろう。しかし、実際の  $n$  ポート素子はすべて混成  $n$  ポートとして定式化されるので混成  $n$  ポートの研究は探究する価値がある。

本研究では以下の第2章から第6章において、代数的  $n$  ポートに関しては相反性、非相反性に着目して解析・構成に必要な一般的結果を示し

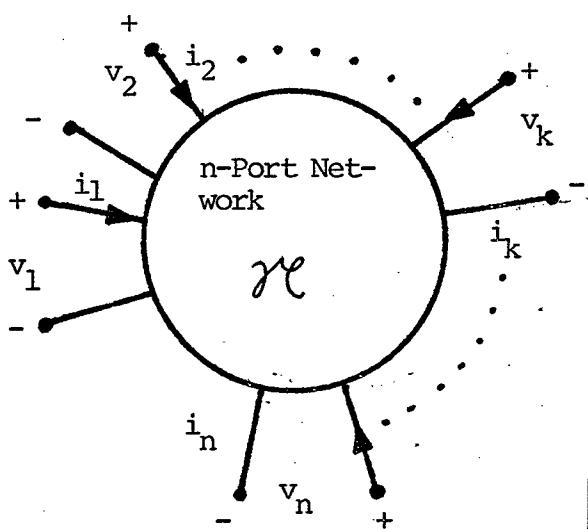


図 1.1  $n$  ポートの図式化

Fig.1.1-Symbolic representation of an  $n$ -port network

混成ハポートに関しては受動性などのエネルギー的性質について論じ解析・構成に関する基本的結果を示す。さらに、ハポート抵抗の寄生リアクタンスによる正規化について論ずる。

まず第2章では一般的な代数的ハポートの解析・構成について述べる。この章では微分幾何的手法を用いて代数的非線形ハポート相反性・歪相反性を線形の場合の自然な拡張として定義し、ハポート抵抗の構成に応用する。非線形ハポート抵抗の相反性については現在までに多くの研究者により、いろいろな定義が与えられている<sup>(4)(6)(10)</sup>が、非相反性については意味のある一般的な定義が存在せず、線形の場合の分解定理の非線形の場合への一般化は未解決であつた<sup>(5)</sup>。本章は微分形式により従来の手法による定義をすべて含む相反性、および非相反性の統一的定義を与え、線形の場合の分解定理を非線形の場合へ一般化する。さらにこれらの結果を応用し、一般的非相反非線形ハポートの構成問題が相反ハポートの構成問題に帰着することを示し、また相反非線形ハポートは理想変成器と非線形2端子抵抗から構成できることを示す事により線形の場合と類似の結果を導く。

第3章では混成ハポートの解析・構成について述べる。この章では集中素子から成る混成ハポートの受動性の必要・十分条件と受動混成ハポートの構成について論じ、ハポート素子のモデル化に対する基本的結果を導く。混成ハポートの受動性は Rohrer<sup>(14)</sup> により最適制御理論の Hamilton-Jacobi の方程式を用いて定式化された。本章ではこの結果を用いて（実質）受動混成ハポートが受動抵抗素子と受動リアクタンス素子を用いてモデル化されることを示し、更に線形受動回路構成の基本的補題である正実補題<sup>(16)</sup>の非線形への一般化を導き、非線形受動混成ハポートの構成に関する基本的結果の導出に応用する。

第4章ではいくつかのハポートを接続してできる複合ハポートについて考察する。まず、複合代数的ハポートに関しては相反性が接続により

保たれることを示し、複合混成ルポートに関しては受動性が保存されることを示す。とくに代数的ルポートの相反性に関する系4.1は微分幾何学的手法により、はじめて厳密に証明されたものであり、この手法が非線形代数的ルポートの相反性の議論に対して妥当であることを示すものである。

第5章ではルポート抵抗の寄生リアクタンスによる正規化モデルについて考察する。この問題は正規形による表現を持たない回路の応答を数値計算する際の回路理論的な問題である。一般に正規形微分方程式による表現を持たない回路を寄生リアクタンスを考慮することにより回路に正規形表現を持たせ解析を行なう場合正規化する仕方は一通りとは限らない。この場合、異なる仕方で正規化したとき回路のふるまいが定性的に同一か否かという問題が起る。5.3では異なる正規化により回路のふるまいが定性的に同一になるための十分条件について考察する。5.4では寄生リアクタンスを含む回路が正規形微分方程式による表現を持つ場合でも回路の応答が一意に定まらない様に見える場合があることを述べこの原因と一意解が存在するための十分条件について考察する。5.5では計算機で数値計算する際、方程式の次数を正規化に要する寄生リアクタンスを減らすことにより削減する方法について述べる。

第6章結論では本研究で得られた結果の意義と残された問題についての展望を行なう。

以上本研究と従来の研究についての関係と概要を述べた。

## 第2章 代数的非線形nポートの解析と構成

### 2.1. 緒言

一般的な線形nポート抵抗(ポート特性行列  $M$ )は図2.1に示す様に相反nポート抵抗(ポート特性行列  $M_R$  が対称)と歪相反nポート(ポート特性行列  $M_A$  が歪対称)に分解され、これは行列  $M$  が

$$M = M_R + M_A \triangleq \frac{1}{2}(M+M') + \frac{1}{2}(M-M')$$

と分解されるのにに対応している。相反nポート抵抗は理想変成器と抵抗から構成され、歪相反nポート抵抗は理想変成器と理想ジャイレータから構成出来ることはよく知られている<sup>(6)</sup>。非線形nポート抵抗に対してこれと同様の事を考察する場合には相反性・非相反性の明確な定義が必要である。非線形nポートの相反性については従来、Stern<sup>(10)</sup>による定義「ポート特性  $i=f(v)$  を持つ非線形nポート抵抗はJacobian行列  $(\partial f / \partial v)$  が対称となるとき相反である。」や Brayton<sup>(6)</sup>による定義「非線形nポート抵抗はポート電流ベクトル  $I$  とポート電圧ベクトル  $V$  に対して  $\sum_{j=1}^n d i_j \wedge d v_j = 0$  が成立するとき相反である。」などがあり、表現は異なるが同類の定義が Chua<sup>(4)</sup> らによりさらに一般的な代数的nポートに対して与えられている。またこれらは線形の場合の自然な拡張となっている。問題

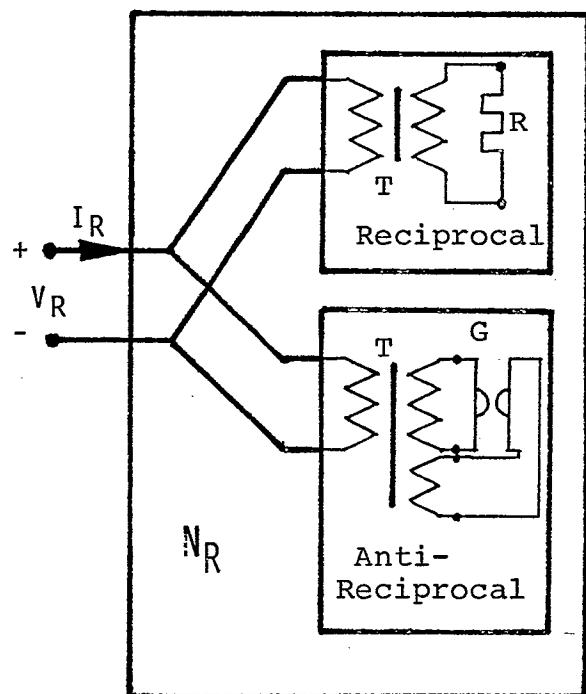


図2.1 一般的線形nポート抵抗

Fig. 2.1-General linear n-Port Resistor

は非相反（相反でない）ルポートの意味のある定式化であるが、これについて Chua らは文献<sup>(5)</sup>で i(v)-制御形非線形ルポート抵抗に対して擬ひずみ相反（quasi antireciprocal）というクテスの非相反ルポートを定義しそれを単純結合を有するルポートの構成に応用している。しかし擬ひずみ相反ルポートは非相反ルポートのうちの極めて狭い範囲のルポートであり非線形回路網の解析・構成問題に必要な一般的定義は現在まで得られていない。

本章では Chua<sup>(5)</sup>により提出されたこの未解決問題を考察するとともにこれを非線形ルポート抵抗の構成に応用し、任意の特性を持つハイブリッド形非線形ルポート抵抗の構成問題が非線形 2 端子抵抗の構成問題に帰着できることを示す。

まず 2.2 では一般的な代数的ルポートに対して微分形式による相反性、非相反性の統一的な定義を取る、とくに相反性についてはこれが従来の定義を含むものであることを示す。次に 2.3 では相反性、非相反性の必要十分条件と、線形の場合の分解定理を非線形の場合へ一般化し、これが線形の場合の自然な拡張となっていることを示す。2.4 では 2.3 の結果に基づいて非相反非線形ルポート抵抗の構成が相反非線形ルポート抵抗を構成する問題に帰着できることを示す。さらに 2.5 では 2.3 の結果に基づいて相反非線形ルポートが非線形 2 端子抵抗と理想変成器から構成できることを示す。

本章では文字を節約するため異なるポート数を持つルポートを表すのに同じ力を用いる。

## 2.2. 諸 定 義

一般的な代数的非線形ルポートはに示されている。この図に示す時不変ルポート $\pi$ においてポート変数ベクトル

$$v \triangleq (v_1, v_2, \dots, v_n)'$$

$$i \triangleq (i_1, i_2, \dots, i_n)'$$

$$\phi \triangleq (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)'$$

$$q \triangleq (q_1, q_2, \dots, q_n)'$$

をそれぞれポート電圧、電流、磁束、電荷ベクトルとする。ここで  $\phi_j = v_j$ ,  $q_j = i_j$  である。今  $i_j(v_j)$  と  $q_j(\phi_j)$  を電流形(電圧形)変数と呼ぶことにすると 4n 個のポート変数から適当に n 個を選んで得られる混合ベクトル  $\xi \triangleq (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)'$  と  $\eta \triangleq (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)'$  は  $\xi_j$  が電流形(電圧形)ならば  $\eta_j$  は電圧形(電流形)であるとする。いいかえれば  $\xi$  と  $\eta$  は  $\xi_j \neq \eta_j$ ,  $\xi_j \neq \eta_j$  且つ  $\eta_j \neq \xi_j$  が常に成立している様なベクトルであるとする。例えば  $\xi = (\phi_1, q_2)'$ ,  $\eta = (v_1, v_2)'$  のようなポート変数の選択は許されない。本章で扱う代数的非線形 n ポートのポート特性は適当な混合ベクトルの対  $(\xi, \eta)$  と写像  $F: R^n \times R^n \rightarrow R^{2n-m}$  に対して

$$F(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in R^n \times R^n \quad (2.1)$$

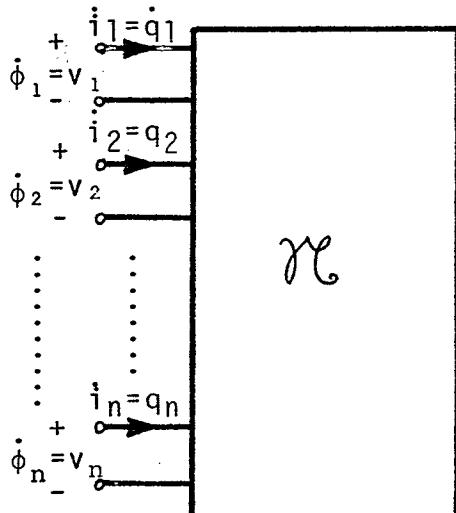


図 2.2 非線形 n ポートの  
ポート変数の定義

Fig. 2.2-An Nonlinear n-  
Port with its  
Associated Port  
Variables and  
Reference Frame

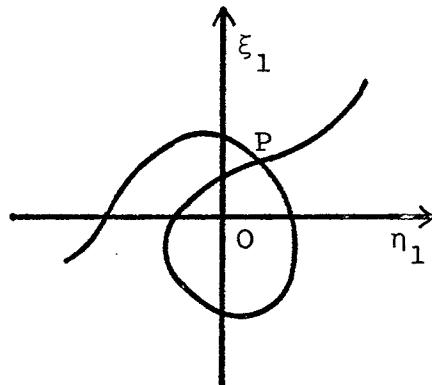


図 2.3 多様体とならない  
特性の例

Fig. 2.3-An Example for a  
Non-manifold  
Characteristic

で与えられ、更に次の仮定2.1が成立する。

[仮定2.1]  $R^n \times R^n$  の部分集合

$$\Sigma \triangleq \{(\xi, \eta) \in R^n \times R^n; F(\xi, \eta) = 0\}$$

は  $m$  次元多様体である。

例えれば、1ポートの場合図2.3で表される様な特性は持たない。仮定2.1は十分一般的な非線形nポートを表す。

[定義2.1]  $\Sigma \subset R^n \times R^n$  が  $m$  次元  $C^1$  級多様体 ( $0 \leq l \leq \omega$ ) であるとき nポート  $\pi$  の次元は  $m$  であるといい記号で  $\pi(1, m)$  と書く。 $R^n \times R^n = \{(\xi, \eta)\}$  を形態空間、 $\Sigma$  を特性多様体といい  $m=n$  ならば  $\pi$  は正則、 $m>n$  ならば密、 $m< n$  ならば特異であるといふ。

例えばノレータは密、ナレータは特異な1ポートである。ここで定義されたnポートは従来の相互結合を有する抵抗、キャパシタ、インダクタ以外に異種素子間の相互結合を有する素子（例えば“traditor”<sup>(1)</sup>）も含む十分広いクラスのnポートである。

今  $A, B$  を  $A_{jj} = 1, B_{jj} = 0$  又は  $A_{jj} = 0, B_{jj} = 1$  を消去する  $n \times n$  対角行列であるとする。n次元状態変数ベクトル  $x, y$  を

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \triangleq T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

により定義する<sup>\*</sup>。 $R^n \times R^n = \{(\xi, \eta)\}$  から  $R^n$  への写像  $\pi$  を  $\pi(\xi, \eta) = A\xi + B\eta$  とする。Tはたかだか2n個の置換を意味しているから  $\pi$  は  $R^n \times R^n$  から  $R^n$  への自然な射影となることが容易に分かる。 $\pi$  の部分多様体  $\Sigma$  への制限を

$$\sigma \triangleq \pi / \Sigma : \Sigma \rightarrow R^n$$

とする。

[定義2.2] 写像  $\sigma : \Sigma \rightarrow R^n$  が  $C^1$  級微分同相であるとき 正則nポート  $\pi(1, n)$  は状態変数ベクトル  $x = A\xi + B\eta$  について  $C^1$  級大域的ハイブリッド表現

---

\* Tには  $T = T^{-1}$  という重要な性質がある。

を持つといふ。さらに  $\sigma$  が  $C^1$  級局所微分同相であるならば局所ハイブリッド表現を持つといふ。

$\pi(\Gamma, n)$  が  $C^1$  級大域的ハイブリット表現を持つとは  $p \in \Sigma$  に対して  $p(\xi, \eta) = \sigma^{-1}x, x \in R^n$  であり、更に  $y = B\xi + A\eta$  であるから  $C^1$  級可微分写像  $h(\cdot)$  が存在して  $y = h(x)$  と書くことができる。従って、以下では凡ポートがハイブリット表現を持つといふときは式 (2.2) により得られるベクトル変数  $x$  と  $y$  の間には関係  $y = h(x)$  が成立することを意味するものとする。

$\Sigma$  の局所座標系<sup>(4)</sup>を  $(U, \psi)$  で表せば<sup>4</sup>  $\forall p \in \Sigma$  に対して  $p$  の  $R^n \times R^m$  における近傍を  $V$  とするとき  $\psi: \Sigma \cap V \rightarrow \psi(\Sigma \cap V) \subset R^m$  は同相となる。このとき  $\pi$  は局所パラメータ  $s \in R^m$  を持つといふ。さらに  $\Sigma$  が  $R^m$  に同相ならば  $\pi$  は大域パラメータ  $s \in R^m$  を持つといふ。

$\pi(\Gamma, m)$  の形態空間  $R^n \times R^m = \{(\xi, \eta)\}$  上の 1 次微分形式を

$$\alpha_1 \triangleq \sum_{i,k=1}^n \xi_i J^i_k d\eta^k$$

とする。ここで  $J = (J^i_k)$ ,  $i, k = 1, \dots, n$  は 1 と -1 のみから成る  $n \times n$  対角行列で  $\xi_i$  が電圧形変数なら  $J^i_i = 1$  電流形変数なら  $J^i_i = -1$  である。恒等写像  $\pi^1: \Sigma \rightarrow R^n \times R^m$  により  $\alpha_1$  から誘導される  $\Sigma$  上の 1 形式<sup>\*</sup>を  $\alpha = \pi^{1*}\alpha_1$  とする。 $\alpha_1$  を基本 1 形式と呼ぶ。

[定義 2.3]  $\pi(\Gamma, m)$  は  $\Sigma$  上で 1 形式  $\alpha$  が

- (1) 閉形式、すなわち  $d\alpha = 0$  のとき相反
- (2) 双対閉形式、すなわち  $\delta\alpha = 0$  のとき双対相反
- (3)  $d\alpha \neq 0$  且つ  $\delta\alpha = 0$  のときひすみ相反
- (4)  $d\alpha = 0$  且つ  $\delta\alpha = 0$  のとき諧和的

であるといふ。ここで  $l \geq 1$ ,  $d$  は外微分  $\delta$  は双対微分(余微分)<sup>(5)\*</sup>を表す。

定義 2.3 は  $\pi$  が正則、特異、密のいかんにかかわらず意味を持つ。

\*  $P$  形式  $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \psi_{i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$  の余微分は

$$\delta\alpha \triangleq \sum_{j_1 < \dots < j_{p-1}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_{i_k}}{\partial x^{j_k}} \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}}$$

(1) は  $\xi$  を電圧形変数ベクトルとすれば  $J=I$  となり次の節で述べる定理 2.1 より Chua<sup>(5)</sup> による相反の定義と等価となる。更に  $\xi=v, n=i$  とすれば Brayton<sup>(6)</sup> の定義と等価となる。

[注意 2.1]  $d\alpha=0$  は  $\Sigma$  の座標変換によって不变であるが  $\delta\alpha=0$  は座標変換で一般には保たれないで又対相反のことを  $n$ -solenoidal<sup>(18)</sup> と呼ぶこともある。

[例 2.1] ポート特性

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2i_1^3 v_2^2 v_3 \\ 2i_1^3 v_2^2 v_3 \end{bmatrix}$$

を持つ 3 ポート抵抗を考える。このとき基本 1 形式の  $\Sigma$  への制限は

$$\alpha = 2i_1^3 v_2^2 v_3^2 dv_2 - 2i_1^3 v_2^2 v_3 dv_3$$

となる。  $\alpha$  の外微分は計算すれば  $* d\alpha \neq 0$  となる。 $\alpha$  の余微分は

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= 4i_1^3 v_2 v_3 - 4i_1^3 v_2 v_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、この 3 ポート抵抗はひずみ相反である。

## 2.3 基本分解定理

この節は 2.2 で定義された相反性と非相反性に関する性質と線形の場合の分解定理の非線形への拡張について論ずる。

次の定理は相反性、非相反性の必要十分条件である。

[定理 2.1]  $\mathcal{R}(1,m), (1 \geq 1)$  の特性多様体  $\Sigma$  の局所パラメータを  $\Psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して  $\Psi(p) \stackrel{\Delta}{=} s(p) = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m$  とすれば

(1)  $\mathcal{R}(1,m)$  が相反であるための必要十分条件は

$* \alpha = \sum_{i=1}^n F_i dx^i$  の外微分は

$$d\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

で与えられる。ここで  $dx^k \wedge dx^k = 0$ ,  $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ .

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial s} \right]^T J \left[ \frac{\partial \xi}{\partial s} \right] = \left[ \frac{\partial \xi}{\partial s} \right]^T J \left[ \frac{\partial \eta}{\partial s} \right] \quad (2.3)$$

が成立することである。更に  $\Sigma$  が単連結であれば<sup>(46)</sup> これは次の条件と等価となる。  $\Sigma$  上で定義された  $C^2$  級ポテンシャル関数  $P: R^m \rightarrow R^1$  が存在して

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial s} \right]^T J \xi = \text{grad } P \quad (2.4)$$

が成立する。

(2)  $\partial C(1,m)$  が双対相反であるための必要十分条件は

$$\text{div} \left( \left[ \frac{\partial \eta}{\partial s} \right]^T J \xi \right) = \text{rot } A^{ij} \quad (2.5)$$

であり、更に  $\Sigma$  が単連結ならば"これは次の条件と等価である。ひずみ対称  $C^2$  級関数行列  $[A^{ij}]$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) が存在して

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial s} \right]^T J \xi = \text{rot } A^{ij} \quad (2.6)$$

が成立する。ここで  $\text{rot } A^{ij}$  は行列  $[A^{ij}]$  の第  $i$  列を  $A_i$  としたときベクトル  $[-\text{div } A_1, \dots, -\text{div } A_m]^T$  を表す\*。

(3)  $\mathcal{H}(1,m)$  が調和的で  $\Sigma$  が単連結ならば"  $\Omega(s) = \int_C \alpha + \Omega_0, \Omega_0 \in R$  で定義される  $C^2$  級関数に対して

$$\nabla^2 \Omega(s) = 0$$

が成立する。但し  $C$  は  $\Sigma$  上の始点  $p_0$ , 終点  $p$  である任意の連続曲線で,  $\nabla^2 \triangleq \sum_{i=1}^m \partial^2 / \partial s_i^2$  とする。  $\Omega$  は content<sup>(47)</sup> の拡張である。

(証明) (1)  $\alpha = \pi^1 * \sum_{i,k=1}^n \xi_i J^i_k d\eta^k$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \pi^1 * \sum_{i,k=1}^n J^i_k d\xi_i \wedge d\eta^k \\ &= \sum_{i,k=1}^n \sum_{l,j=1}^m J^i_k \frac{\partial \xi_i}{\partial s_l} \frac{\partial \eta^k}{\partial s_j} ds_l \wedge ds_j \end{aligned}$$

\* 前々ページの脚注\*より  $\alpha$  が 1 形式'  $\alpha = \sum_{i=1}^n \psi_i dx^i$  の場合には余微分は  $\delta \alpha = \sum_{i=1}^n \partial \psi_i / \partial x^i$  となる。  $m=3$  のときは通常の rot と一致する。

$$= \sum_{i,k=1}^n \sum_{j=1}^m J^i_k \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial s_1} \frac{\partial \eta^k}{\partial s_j} - \frac{\partial \xi_i}{\partial s_j} \frac{\partial \eta^k}{\partial s_1} \right) ds_1 \wedge ds_j$$

となり  $d\alpha = 0 \iff$  式 (2.1) である。後半は (3) と同様にして示される。

(2)  $B_j \triangleq \sum_{i,k=1}^n J^i_k \xi_i \partial \eta^k / \partial s_j$  とすれば  $\alpha = \sum_{j=1}^m B_j ds_j$  と書けるから  $B = [B_1, B_2, \dots, B_m]'$  における  $\delta \alpha = -\operatorname{div} B$  となるから最初の部分が分かる。次に  $\Sigma$  が単連結であるならば De Rahm の定理<sup>(46)</sup>により  $\delta \alpha = 0$  ならば  $\Sigma$  上に  $\alpha = \delta \beta$  を満足する  $C^2$  級 2 次形式  $\beta$  が存在する。今それを

$$\beta = (1/2!) \sum_{i,j=1}^m A^{ij} ds_i \wedge ds_j$$

とおくと  $A^{ij}(s)$  は 2 階  $C^2$  級ひずみ対称テンソルであり<sup>(7)</sup>

$$\delta \beta = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial A^{ij}}{\partial s_i} ds_j$$

であるから  $B_j = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial A^{ij}}{\partial s_j}$  となり成立する。

(3)  $\Sigma$  が単連結であり  $\Sigma$  上で  $d\alpha = 0$  であるから De Rahm の定理より  $\Sigma$  上に  $C^2$  級関数  $\Omega$  が存在して  $\alpha = d\Omega$  とかくことができる。 $P_0 = P(s_0)$  とすれば

$$\int_C \alpha = \int_{s_0}^s d\Omega = \Omega(s) - \Omega(s_0)$$

となり更に  $\delta \alpha = 0$  は

$$\begin{aligned} \delta \alpha &= \delta \cdot d\Omega \\ &= \nabla^2 \Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $\Omega$  が content の拡張であることは明らか。

(証明終)

[系2.1]  $\mathcal{H}(1,n)$  が  $C^1$  級ハイブリッド表現  $y = h(x)$  を持つならば

(1)  $\mathcal{H}(1,n)$  が相反であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \left[ B + A \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]' J \left[ A + B \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \\ = \left[ A + B \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] J \left[ B + A \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]' \end{aligned}$$

であり、さらにこれは次の条件と等価である。 $C^2$  級関数  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  が存在して関係式

$$\left[ B + A \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]' J(Ax+Bh) = \text{grad } P(x)$$

が成立する。

(2)  $\pi(1, n)$  が双対相反であるため必要十分条件は

$$\text{div} \left( \left[ B + A \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]' J[Ax+Bh] \right) = 0$$

であり、更にこれは次の条件と等価である。 $C^2$  級行列関数  $A \in \mathbb{A}^{n \times n}$  が存在し

$$\left[ B + A \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]' J[Ax+Bh] = \text{rot } A^{ij}(x)$$

(3)  $\pi(1, n)$  が調和的ならば  $\nabla^2 \Omega(x) = 0$  が成立する。但し  $\nabla^2 \triangleq \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)'$  であり  $\Omega$  は

$$\Omega(x) = \int_{x_0}^x [Ax+Bh]' J[Bdx+Adh] + \Omega_0$$

で与えられる。

(証明)  $\xi = Ax+Bh$ ,  $\eta = Bx+Ah$  を定理 2.1 の結果において  $m=n$ ,  $s=x$  として代入すればよい。この場合ハイブリッド表現(大域)を持つという条件から  $\Sigma$  の単連結性は自動的に満足されている。

(証明終)

系 2.1 から  $\pi(1, n)$  がハイブリッド表現  $\xi = h(\eta)$  を持つならば条件 (1) は  $J(\partial h / \partial \eta) = (\partial h / \partial \eta)'$  となり、条件 (2) は  $\text{div } Jh(\eta) = 0$  又は  $Jh(\eta) = \text{rot } A^{ij}(\eta)$  となる。 $\text{div } Jh(\eta) = 0$  は  $\text{trace } J(\partial h / \partial \eta) = 0$  と書いてもよい。特に線形れポートの場合は  $Z$  をインヒーリンス特性行列とすれば  $J = I$  とおくことにより  $\text{trace } Z = 0$  となる。同様にアドミタンス特性行列の場合も  $\text{trace } Y = 0$  となる。正則れポート  $\pi(1, n)$  が調和的であるための必要十分条件は  $\text{trace } J(\partial h / \partial \eta) = 0$  且つ  $J(\partial h / \partial \eta) = (\partial h / \partial \eta)'$  であり、ひすみ相反であるための必要十分条件は  $\text{trace } J(\partial h / \partial \eta) = 0$  且つ  $J(\partial h / \partial \eta) \neq (\partial h / \partial \eta)'$  と

なる。線形 n ポートの場合はハイブリッドポート特性行列  $H$  に対して、調和的であるための必要十分条件は  $JH=H'J$  且つ  $\text{trace } JH=0$  であり、ひすみ相反であるための必要十分条件は  $JH \neq H'J$  且つ  $\text{trace } JH=0$  である。例えばマルチポート理想変成器は表現

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

を持つから調和的であり、2 ポートジャイレータは表現

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

を持つからひすみ相反である。

[性質 2.1] ナレータは相反、ノレータはひすみ相反 1 ポートである。

[注意 2.2] 一般に正則な 1 ポートは常に相反であることは、1 次元多様体上の 2 次形式はすべて零であるという事実から明らかであるが、1 ポートが密、特異の場合には注意を要する。

(証明) ナレータは  $R^1 \times R^1 = \{(i, v)\}$  の原点 0 をその特性多様体として持つから、その上のすべての微分形式は零であり、従って  $d\alpha=0$  であるから相反であることが分かる。ノレータはその特性多様体として  $\Sigma=R^1 \times R^1 = \{(i, v)\}$  を持つから  $\delta\alpha=\partial i/\partial v=0$  ; 更に  $d\alpha=di \wedge dv \neq 0$  となるからひすみ相反である。  
(証明終)

次に本章の主結果である一般の分解定理を述べる。

[定理 2.2]  $C^2$  級ハイブリッド表現  $\xi=h(\eta)$  を持つ正則非線形 n ポート  $\pi(1, n)$  は任意の有界閉領域  $D \subset R^n$  において相反 n ポートとひすみ相反 n ポートの直並列接続として実現できる。すなわち  $\eta \in D$  に対して  $h(\eta)$  は

$$Jh(\eta) = \text{grad } P(\eta) + \text{rot } A(\eta) \quad (2.7)$$

と分解できる。ここで  $P: R^n \rightarrow R^1$  および  $A: R^n \rightarrow A^{n \times n}$  は  $C^3$  級写像であり、 $J \text{ grad } P(\eta)$  は相反、 $J \text{ rot } A(\eta)$  はひすみ相反部分 n ポートを表す。更に  $h: R^n \rightarrow R^n$  が  $C^\omega$  級であるならば分解は  $\Sigma$  全体で存在し、 $P, A$  は  $C^\omega$  となる。

(証明)  $C^2$  級ハイブリット表現  $\xi = h(\eta)$  に対して  $\Sigma$  上の 1 次微分形式  $\alpha$  は  $\alpha = \pi^1 * \sum_{i,k=1}^n \xi_i J^i_k d\eta^k = \sum_{i,k=1}^n h_i(\eta) J^i_k d\eta^k$  となる。但し,  $h(\eta) = [h_1(\eta), \dots, h_n(\eta)]'$  である。 $C^1$  級関数  $f(\eta)$  を  $f(\eta) \triangleq \delta \alpha = \operatorname{div} J h(\eta)$  とし  $\Sigma$  上で「ポアソンの方程式」 $\nabla^2 P = f(\eta)$  を満たす  $C^2$  級関数  $P(\eta)$  に対して 1 次微分形式  $\alpha_R$  を  $\alpha_R \triangleq dP(\eta)$  とする。 $d\alpha_R = 0$  であるから  $\alpha_A \triangleq \alpha - \alpha_R$  とすれば  $d\alpha_A = 0$  ならば  $d\alpha = 0$  で  $\mathcal{H}(1, n)$  は相反ルポートとなり定理は成立する。今  $d\alpha_A \neq 0$  と仮定すると

$$\begin{aligned}\delta \alpha_A &= \delta(\alpha - \alpha_R) \\ &= \delta \alpha - \delta \alpha_R \\ &= f(\eta) - \delta dP(\eta) \\ &= f(\eta) - \nabla^2 P(\eta) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。このことから分解  $\alpha = \alpha_R + \alpha_A$  は  $\alpha_R$  が相反ルポート,  $\alpha_A$  が「ひすみ相反ルポート」を表すことが分かる。これを次のように書く

$$\alpha = \sum_{i,k=1}^n h_{Ri}(\eta) J^i_k d\eta^k + \sum_{i,k=1}^n h_{Ai}(\eta) J^i_k d\eta^k$$

ここで  $h_{Ri}(\eta) + h_{Ai}(\eta) = h_i(\eta)$  であり  $h_R(\eta) = [h_{R1}(\eta), \dots, h_{Rn}(\eta)]'$  は相反ルポートを,  $h_A(\eta) = [h_{A1}(\eta), \dots, h_{An}(\eta)]'$  は「ひすみ相反ルポート」を表す。これらのがポートをポート変数か電圧形であるか, 電流形であるかによりそれぞれ対応するポートを直並列接続して得られるがポートが求められる分解である。更に系 2.1において  $A=I, B=0$  とおけば(2.7)式が得られる。 $C^\infty$  の場合は  $P$  は  $\mathbb{R}^n$  全体で存在する。 (証明終)

[注意 2.3] 分解(2.7)は  $\mathbb{R}^3$  における Helmholtz 分解の  $\mathbb{R}^n$  への拡張と言っている。Helmholtz 分解は<sup>(48)</sup>

$$F = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} A$$

となる。ここで  $\phi$  はスカラポートニシャル,  $A$  はベクトルポートニシャルである。

**分解の計算:** 基本分解は基本的には次のようにして計算できる。

ハイブリッド特性  $\xi = h(\eta)$  に対してボアソンの方程式

$$\nabla^2 P = \operatorname{div} Jh(\eta) \quad (2.8)$$

を満足する  $P$  を求める。演算子

$$\Delta \beta \stackrel{\Delta}{=} d\delta\beta + \delta d\beta$$

は  $C^\infty$  級 1 形式の全体からそれ自身の上への同形写像である<sup>(7)</sup>。これより、

$$\Delta \beta = (Jh)' d\eta$$

$$P = \delta\beta$$

$$A_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j = d\beta \quad (2.9)$$

とおけば

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial \eta^i}, \quad (\beta = \sum b_i d\eta^i) \quad (2.10)$$

から  $\beta$  が計算できる。(2.9) から  $A$  が計算できる。こうして分解式(2.7)が計算できる。

## 2.4 非相反 N ポートの構成

この節では 2.3 の結果に基づいて非相反 N ポートの構成はより簡単に構成できる相反 N ポートの構成問題に帰着できることを示す。2.3 の結果から一般的な非相反 N ポートは相反 N ポートとひずみ相反 N ポートに分解できるから、ひずみ相反 N ポートか相反 N ポートか構成できることを示せばよいことになる。以下では一般的代数的 N ポートの代わりに N ポート抵抗により議論を進めよう。これは、抵抗素子が応用上重要であることと、一般的な場合も類似の議論が適用できることによる。

### 2.4.1 非相反 2 ポート抵抗の構成

最初に基本となる線形 4 ポートの定義を行おう。ひずみ相反線形 4 ポート  $N_I, N_V, N_H$  は以下に示すようなポート特性を持つもので基本的には従属電源を用いて構成できる。図 2.4 にその構成例を示す。これらの 4 ポートは不活性 (non-energetic) ではないのでシャイレータと理想変成器

のみからは構成できない。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (N_I)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (N_V)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (N_H)$$

一般の電圧制御形非線形 2 ポート

抵抗は

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(v_1, v_2) \\ h_2(v_1, v_2) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

と書ける。分解式 (2.7) と (2.8) から (2.10) に基づいて計算すれば、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial v_2^2} = -\frac{\partial h_1}{\partial v_1} - \frac{\partial h_2}{\partial v_2}$$

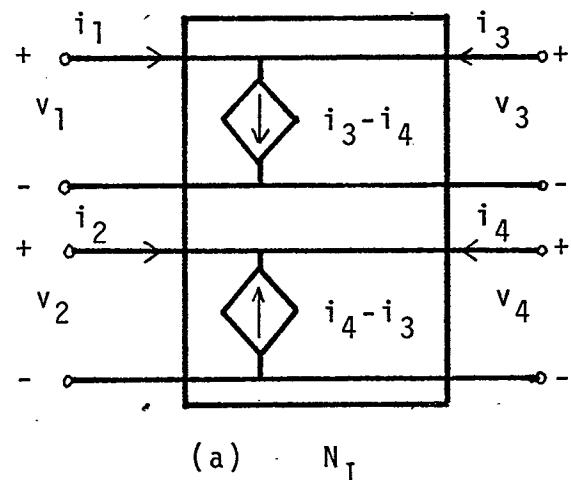
と

$$\nabla^2 P = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial b_i}{\partial v_i}$$

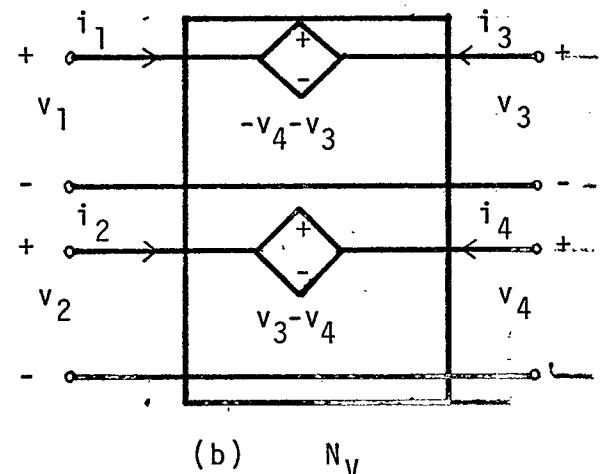
の解  $B = (b_1, b_2)^T$  に対して

$$\begin{pmatrix} h_1(v_1, v_2) \\ h_2(v_1, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial b_1}{\partial v_1} + \frac{\partial b_2}{\partial v_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{\partial b_1}{\partial v_1} + \frac{\partial b_2}{\partial v_2} \right) \end{pmatrix}$$

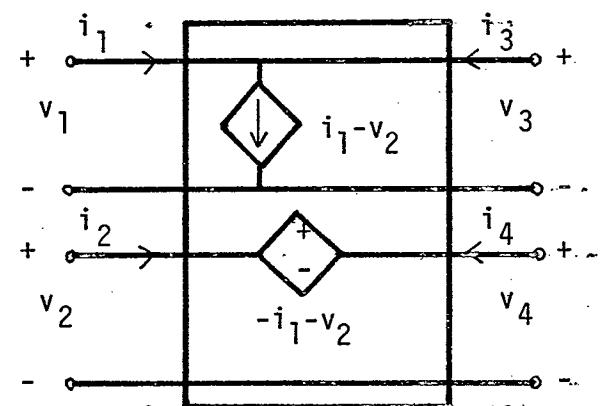
+



(a)  $N_I$



(b)  $N_V$



(c)  $N_H$

図 2.4  $N_I$ ,  $N_V$ ,  $N_H$  の構成例

Fig. 2.4-One possible synthesis of  $N_I$ ,  $N_V$ ,  $N_H$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial b_1}{\partial v_2} - \frac{\partial b_2}{\partial v_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{\partial b_1}{\partial v_2} - \frac{\partial b_2}{\partial v_1} \right) \end{pmatrix}$$

となる。このことから一般的非線形非相反電圧制御形2ポート抵抗は  
2つの相反非線形2ポート抵抗（それぞれポテンシャル  $P = (\partial b_1 / \partial v_1) + \partial b_2 / \partial v_2$ ,  $\Omega = \partial b_1 / \partial v_2 - \partial b_2 / \partial v_1$  をもつ）から図2.5の様に構成することができる。

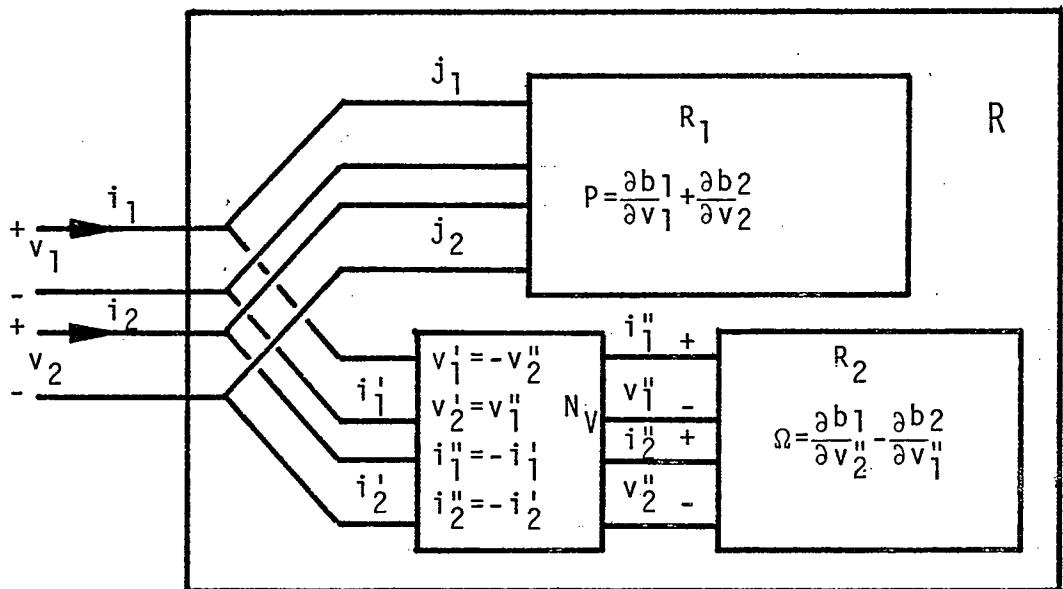


図 2.5 非相反2ポート抵抗の構成  
Fig. 2.5-Synthesis of Non-reciprocal 2-Port

## 2.4.2 非相反2ポート抵抗の構成

定理2.2により任意の  $C^\omega$  級ハイブリッド表現

$$y = h(x)$$

を持つ非線形2ポート抵抗は

$$h(x) = J \cdot \text{grad } P(x) + J \cdot \text{rot } A(x) \quad (2.12)$$

と分解できる。ここで  $P: R^n \rightarrow R^1$ ,  $A: R^n \rightarrow A^{n \times n}$  は  $C^\omega$  級である。

[補題2.1] 式(2.12)において  $P(x)$  と  $A(x)$  は次のように書ける

$$P(x) = \operatorname{div} B(x) \quad (2.13)$$

$$A_{ij}(x) = (\partial b_i / \partial x_j) - (\partial b_j / \partial x_i) \quad (2.14)$$

ここで  $B = (b_1, \dots, b_n)$  である。

証明は“分解の計算”からすぐわかるので略す。

[補題 2.2]  $C^1$  級ハイブリッド表現

$$\xi = \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_v(i_1, v_2) \\ h_I(i_1, v_2) \end{pmatrix} \triangleq h(\eta) \quad (2.15)$$

を持つひすみ相反ルポート  $n(n-1)/2$  個の  $C^2$  級関数を用いて

$$\begin{bmatrix} h_{v_1}(\eta) \\ h_{v_2}(\eta) \\ \vdots \\ h_{v_\ell}(\eta) \\ -h_{I_1}(\eta) \\ \vdots \\ -h_{I_m}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 A_{12} \\ -\partial_1 A_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_3 A_{13} \\ 0 \\ -\partial_1 A_{13} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \partial_n A_{n-1,n} \\ \vdots \\ -\partial_{n-1} A_{n-1,1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

と分解できる。但し  $A_{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , ( $i < j$ ),  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)' = (i_1', v_2')'$   
 $1+m=n$ ,  $\partial_i = \partial / \partial \eta_i$ ,  $\xi = (v_1', i_2')'$  である。

(証明) ひすみ相反ルポートは系 2.1, (2) から

$$Jh = \operatorname{rot} A_{ij}(\eta)$$

と書ける。 $\operatorname{rot} A_{ij}$  の定義(定理 2.1 参照)から

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} A_{ij} &= \begin{bmatrix} -\operatorname{div} A_1 \\ \vdots \\ -\operatorname{div} A_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sum_{i=2}^n \partial_i A_{i,1} \\ \vdots \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \partial_i A_{i,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^n \partial_i A_{1i} \\ -\partial_1 A_{12} + \sum_{i=3}^n \partial_i A_{2i} \\ \dots \\ -\sum_{i=1}^{k-1} \partial_i A_{ik} + \sum_{i=k+1}^n \partial_i A_{ki} \\ \dots \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \partial_i A_{in} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

(2.17) 式を  $n(n-1)/2$  個の  $C^2$  線関数  $A_{ij}$ , ( $i < j, i, j = 1, \dots, n$ ) に分解してかけば補題を得る。 (証明終)

[補題 2.3] 式(2.16) の左辺の各項で表されるひすみ相反れポートは図 2.6 に示すように混合ポテンシャル関数<sup>(4)</sup>  $A_{ij}(n)$ , ( $i \leq j$ ) を持つ相反れポート  $N_{ij}$  の第  $k$  ポート ( $k = 1, \dots, n \neq i, j$ ) に従属電源  $\eta_k$  を接続し更に  
 (1)  $\eta_i = i_i$ ,  $\eta_j = v_j$  ならば線形変換器  $N_H$  を  
 (2)  $\eta_i = i_i$ ,  $\eta_j = i_j$  ならば線形変換器  $N_I$  を  
 (3)  $\eta_i = v_i$ ,  $\eta_j = v_j$  ならば線形変換器  $N_V$  を

図 2.6 に示すように第  $i, j$  ポートに接続することにより構成できること。

(証明) 場合 (1) を示す。(2), (3) についても同様に証明できる。

図 2.6 において  $N_{ij}$  は混合ポテンシャル  $A_{ij}$  を持つ相反れポートである

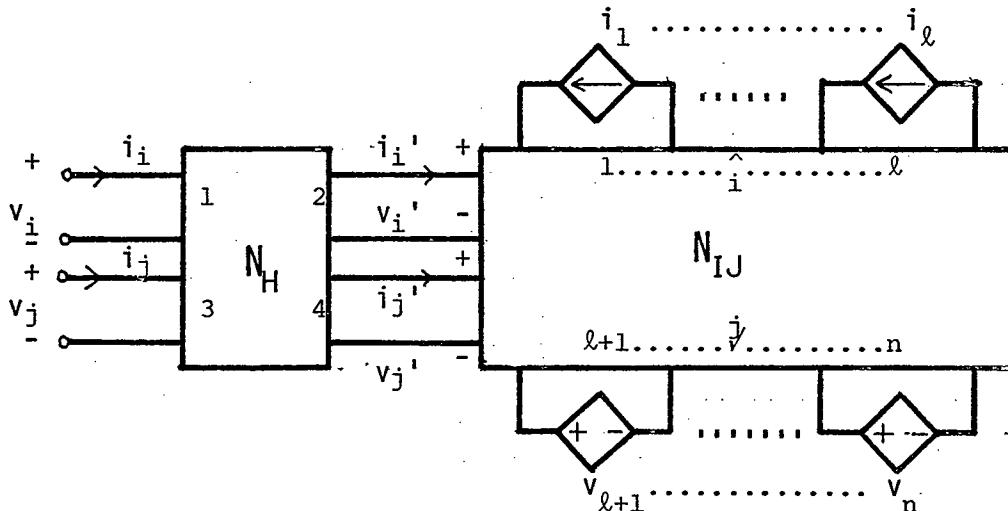


図 2.6 式(2.16) の回路構成図

Fig. 2.6-Circuit Realization for Eq. (2.16)

るから

$$v_i' = -(\partial/\partial i_i) A_{ij}$$

$$i_j' = (\partial/\partial v_j) A_{ij}$$

と書くことができる。線形変換器  $N_H$  の特性より

$$v_i = v_i', \quad i_j = -v_j, \quad i_i = -v_j, \quad v_j = -i_i$$

であるから、これを上式に代入すれば求める特性が得られる。式(2.16)  
の右辺の見号は左辺へつけて考えよ。

(証明終)

[定理 2.3]  $C^1$  級ハイブリッド表現式(2.15)を持つすべてのひずみ相  
反ルポートは最大限  $n(n-1)/2$  個の相反ルポートと基本線形変換器  $N_I$  ( $N_V$   
又は  $N_H$ ) 及び  $n$  個の従属電源を用いて構成することができる。

(証明) 補題 2.2 からハイブリッド表現式 2.15 は式 2.16 のようになる  
ことことができる。更に補題 2.3 により式 2.16 の右辺の各項を表すルポート  
は 1 個の相反ルポートと基本線形 4 ポートおよび従属電源  $\eta_k$  から構成  
されるから、それらをポート変換の形により直並列接続すれば式(2.16)  
が実現できる。

(証明終)

定理 2.3 で構成したひずみ相反ルポートにおいて従属電源  $\eta_k$  と基本線形  
4 ポート  $N_I$ ,  $N_V$ ,  $N_H$  をまとめて線形 2 ルポートとみなすことにより定  
理 2.2 と定理 2.3 から一般的な  $C^\omega$  級ハイブリッド表現  $\xi = h(\eta)$  を持つ正  
則非線形ルポート抵抗  $\chi_c(\omega, n)$  は図 2.7 に示すようにして構成すること  
ができる。

[例 2.2]  $C^1$  級ハイブリッド表現

$$v_1 = h_{V1}(i_1, v_2, v_3)$$

$$i_2 = h_{I1}(i_1, v_2, v_3)$$

$$i_3 = h_{I2}(i_1, v_2, v_3)$$

を持つひずみ相反 3 ポートは補題 2.2 により

$$\begin{pmatrix} h_{V1} \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 A_{12} \\ \partial_1 A_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_3 A_{13} \\ 0 \\ \partial_1 A_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_3 A_{23} \\ \partial_2 A_{23} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

の形に分解できる。今、ポテンシャル関数  $A_{ij}$  ( $i < j = 1, 2, 3$ ) を持つ相反3ポートを  $\mathcal{N}_{ij}$  で表すと、式(2.18)は図2.8に示すようにして実現できる。例えば“3ポート抵抗”

$$\left. \begin{aligned} h_{v1} &= 3i_1^2 v_2^2 v_3^4 + 2i_1^4 v_3 \\ h_{I1} &= 2i_1 v_2^3 v_3^4 - 2i_1^3 v_2 v_3 \\ h_{I2} &= 4i_1^3 v_3^2 + 3i_1^3 v_2^2 v_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

は  $A_{12} = i_1^2 v_2^3 v_3^4$ ,  $A_{13} = i_1^4 v_3^2$ ,  $A_{23} = i_1^3 v_2^2 v_3^2$  とおくことにより分解式(2.18)が得られるからひすみ相反3ポートである。(詳しくはさうにヤコビ行列が非対称である。)。図2.8は式(2.19)の実現を示している。  
 $\mathcal{N}_{12}, \mathcal{N}_{23}$  はそれぞれ混合ポテンシャル  $A_{12}, A_{23}$  を持つ相反3ポート抵抗で、 $\mathcal{N}_{13}$  は混合ポテンシャル  $A_{13}$  を持つ相反2ポート抵抗である。

### [系2.2] 単純結合 C<sup>1</sup>級ハイブリッド表現

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^n f_{jk}(x_j, x_k), \quad (j=1, \dots, n) \quad (2.20)$$

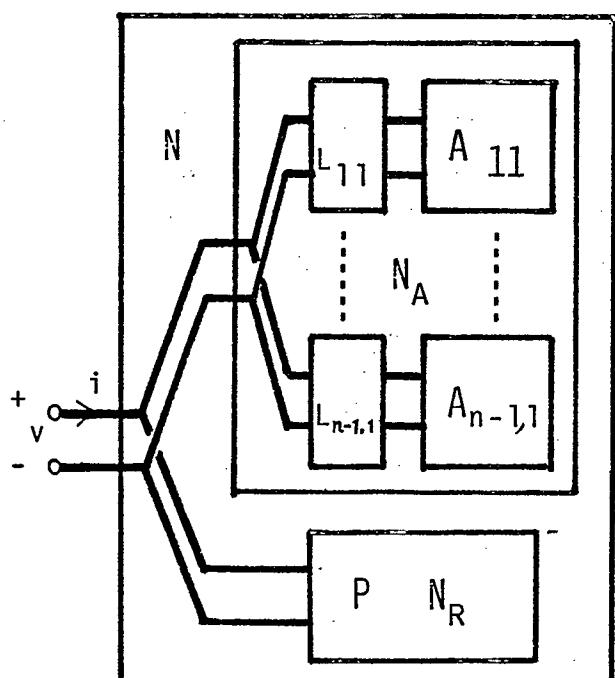


図2.7 一般的非相反nポートの構成  
 Fig.2.7-Synthesis of general non-reciprocal n-port

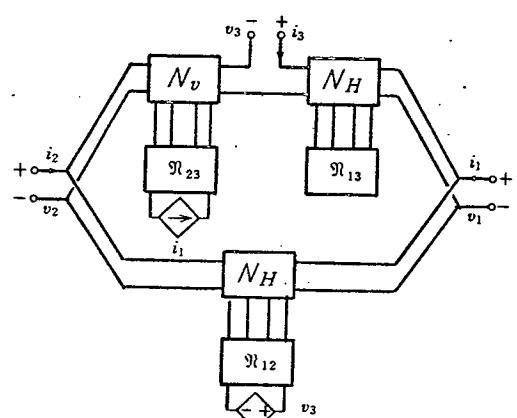


図2.8 式(2.18)の回路構成図

Fig.2.8-Circuit Realization for Eq.(2.18)

を持つ n ポートは  $n(n-1)$  個の相反 n ポートと  $n(n-1)/2$  個の線形変換器  $N_I, N_V$  又は  $N_H$  と  $n$  個の 1 ポートから構成できる

(証明) (2.20) 式を

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n'(x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{n-1,n}(x_{n-1}, x_n) \\ f_{n,n-1}(x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

と分解して書くと (2.21) 式の第 1 項は相反 1 ポートの組を表わしている。第 2 項以下の各項に対応する 2 ポートを定理 2.2 より相反 2 ポートヒずみ相反 2 ポートに分解する。ヒズミ相反 2 ポートは定理 2.3 から  $n(n-1)/2$  個の相反 2 ポートおよび  $N_I, N_V$  又は  $N_H$  で構成できるから系は証明された。

(証明終)

#### 2.4.3 工ネルギー的観点からの考察

最後に受動非線形 n ポート抵抗が受動相反 n ポートと受動ヒズミ相反 n ポートに分解できることか否かについての考察を行なう。これについては特殊な場合について以下に述べる性質が成立する。

代数的 n ポート  $N$  のポート変数  $i, v$  が常に  $P = i'v = 0$  を満足するとき  $N$  は不活性であるといふ。例えは理想変成器は明らかに不活性である。

[性質 2.2]  $i(v)$  制御形ヒズミ相反 2 ポート抵抗は不活性であるか又は能動的である。更に不活性なもののは(非線形)ジャイレータのみである<sup>(15)</sup>。

(証明)  $C^1$  級ヒズミ相反 2 ポートは定理 2.1, (2) 又は系 2.1, (2) から  $C^2$  級関数  $A(x_1, x_2)$  により決定される。ヒズミ相反 2 ポートが消散的であるための条件は

$$\langle x^* \cdot \text{grad } A \rangle > 0, (x \neq 0) \quad (2.22)$$

である。但し、 $x^* = (-x_2, x_1)'$ 。ところが式(2.22)が成立すると仮定すれば図2.9に示すように  $x^*$  と平行に  $dx$  をとれば

$$\langle \text{grad } A, dx \rangle > 0$$

が成立する。 $(x_1, x_2)$ -空間内の単位円Cに沿って積分

$$\Phi = \int_C \langle \text{grad } A, dx \rangle$$

を考えれば  $\Phi > 0$  となる。このことはこの積分の値が0であることに矛盾するから式(2.22)を満足するポテンシャル  $A$  は存在しない。こうして前半が示された。後半は  $\langle x^*, \text{grad } A \rangle = 0$  を満たす  $A$  が  $A = f(x_1^2 + x_2^2)$  の形をしているから非線形ジャイレータの特性

$$h_1(x_1, x_2) = -\frac{d}{dz} f(z) \Big|_{z=x_1^2+x_2^2} \cdot x_2$$

$$h_2(x_1, x_2) = \frac{d}{dz} f(z) \Big|_{z=x_1^2+x_2^2} \cdot x_1$$

を得る。

(証明終)

性質2.2は一般的受動非線形2ポート抵抗は消散的ひずみ相反2ポートが存在しないことから、受動な相反2ポート抵抗と受動(消散的)ひずみ相反2ポート抵抗には分解できないことを意味する。一般の2ポートの場合も調べなければならぬがこれは今後の問題である。

## 2.5 相反2ポート抵抗の構成

2.4節では一般の非相反2ポートは図2.7に示すように相反2ポートの構成問題に帰着することができた。したがってこの節では定理2.1(1)を応用することにより相反2ポート抵抗の構成について考察する。この節ではハイブリッド表現  $y=F(x)$ ,  $(x, y \in \mathbb{R}^n)$  を持つ  $i(v)$  制御形非線形

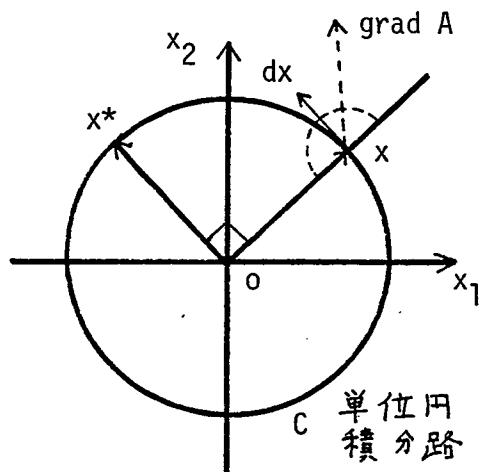


図2.9 性質2.2の証明の図式化

Fig.2.9-The Illustration of the Proof of Property 2.2

抵抗を扱うが一般的の場合についても同様である。  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は一般的  $m$  次代数多項式

$$y_1 = \sum_{\ell=0}^m \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^1 x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = \sum_{\ell=0}^m \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^n x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$$

の形で与えられると仮定する。但し  $a_{j_1, \dots, j_n}^i \in \mathbb{R}^1$  ( $i=1, \dots, n$ )

2.3 節の定理 2.1, (1) から  $n$  ポート  $y=F(x)$  が相反であるための必要十分条件は  $(\partial F / \partial x) = (\partial F / \partial x)'$  であることに注意すれば

[補題 2.4] 式(2.23)で表される非線形ポート抵抗が相反であるための必要かつ十分な条件は

$$j_k a_{j_1 \dots j_{k+1}, \dots, j_n}^k = j_\ell a_{j_1, \dots, j_{\ell+1}, \dots, j_n}^k \quad (2.24)$$

が成立することである。

が得られる。式(2.24)の拘束の下では式(2.23)は定理 2.1, (1) が代数多項式によるポテンシャル  $P(x)$  のグラジエントで表される。  $y=F(x)$  に対してはそのポテンシャルは積分

$$Q(x) = \int_0^1 x' F(tx) dt$$

で与えられる。式(2.23)に対してこの式を計算すれば

$$Q(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n x_k \sum_{\ell=0}^m t^\ell \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^k x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} dt$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{\ell=0}^m \frac{1}{\ell+1} \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^k x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \quad (2.25)$$

となる。 $Q(x)$  は  $m+1$  次代数多項式であることに注意する。

[補題 2.5] (2.23) 式で表される  $i(v)$  制御形非線形ポート抵抗が相反  $\iff$  ポテンシャル関数  $Q(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  で一般形

$$Q(x) = \sum_{s=1}^N \sum_{\ell=0}^{m+1} a_{s,\ell} (x_1 + b_s x_2 + \cdots + d_s x_n)^\ell \quad (2.26)$$

の  $m+1$  次代数多項式の "ラジエント" で表現(2.23) がえられるものが存在する。ここで  $a_{s,\ell}, b_s, \dots, d_s \in R^1$  であり  $N \leq 2^{n-1}$  は適当な自然数である。

(証明) 定理 2.1, (1) からポテンシャル  $Q$  が存在することのはいえるので、 $Q$  が式 (2.26) の形になることを示せばよい。式(2.25) から  $Q$  は  $m+1$  次多項式となるので一般的  $m+1$  次多項式は式 (2.26) の形をしていることを示す。今、式 (2.26) において  $b_s, \dots, d_s = 1, 0, -1$  として  $2^{n-1}$  個のすべての場合の一次独立な多項式

$$(x_1 + \sum_{i=2}^n k_i x_i)^\ell, \quad k_i = \pm 1 \text{ or } 0$$

ができる。係数  $a_{s,\ell}$  を適当に選べば一次結合

$$\sum_{s=1}^N a_{s,\ell} (x_1 + b_s x_2 + \cdots + d_s x_n)^\ell$$

によりすべての  $\ell$  次同次多項式が得られるから結局  $\ell$  を 0 から  $m+1$  まで動かして和をとればすべての  $m+1$  次多項式

$$Q(x) = \sum_{\ell=0}^{m+1} \left( \sum_{i_1+\dots+i_n=\ell} A_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right)$$

が得られる。  
(証明終)

[定理 2.3] (2.23) 式でえられる非線形相反ルポート抵抗  $N$  個の 1 ポート非線形抵抗 ( $f_1, \dots, f_n$  でその特性がえられる) と  $(N+n)$  ポート理想変成器のみを用いて図 2.10 に示す方法で構成することができる。

[証明]  $T_s \in R^n$  を  $T_s \triangleq (1, b_s, \dots, d_s)$  と置き、また  $P_s : R^1 \rightarrow R^1$  を

$$P_s(z_s) = \sum_{\ell=0}^{m+1} a_{s,\ell} z_s^\ell, \quad (z_s \in R^1) \quad (2.27)$$

とする。このとき式 (2.26) でえられる  $Q(x)$  は

$$Q(x) = \sum_{s=1}^N P_s(T_s x) \quad (2.28)$$

と書ける。 $z = (z_1, \dots, z_N) \in R^N$  とすれば

$$P(z) \triangleq \sum_{s=1}^N P_s(z_s) \quad (2.29)$$

$$Q(x) = P(Tx) \quad (2.30)$$

となる。ここで  $T = (T_1', \dots, T_N')$  である。 $(2.30)$ 式は巻線比  $T$ を持つ理想変成器にポテンシャル関数  $P$ を持つ相反抵抗を接続してできる相反  $n$  ポートのポテンシャル関数を表す。相反抵抗

$$(f_1, f_2, \dots, f_N)' = \partial P / \partial z$$

は  $(2.27)$ 式と  $(2.29)$ 式から 1 ポート抵抗のあつまりから成る相反  $n$  ポート抵抗であるから図  $2.10$  に示す様にして回路を構成することができる。

(証明終)

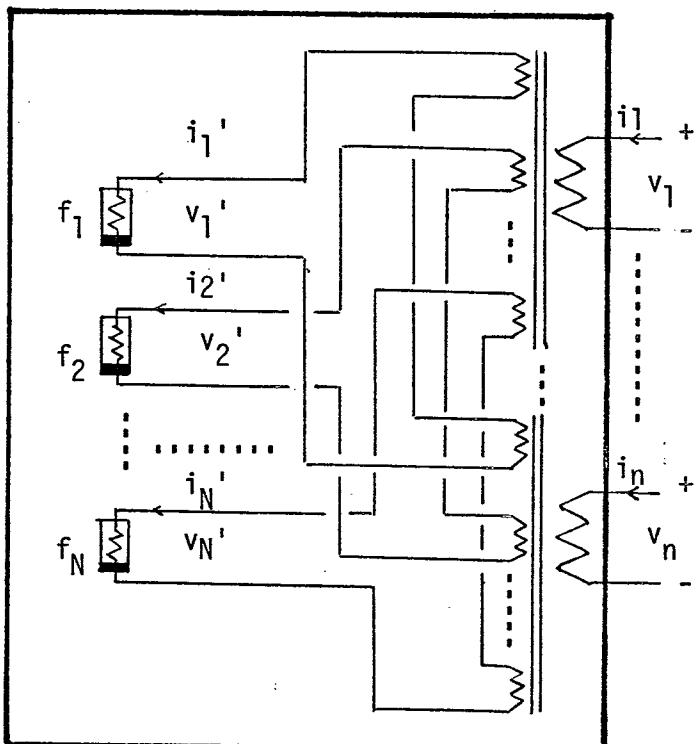


図 2.10 相反  $n$  ポート抵抗構成のための回路接続

Fig.2.10-General Circuit Interconnection used in the Synthesis of Reciprocal Non-linear  $n$ -Ports

$n$  ポート抵抗は式

$$x' F(x) \geq 0, \quad (x \in R^n) \quad (2.31)$$

が成立するならば受動である。また 1 ポート抵抗  $y=f(x)$  は  $x_1 f(x_1) \geq 0$

のとき受動である。特性

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m^m$$

を持つ 1 ポート抵抗が受動であるならば (1)  $a_0 = 0$  (2)  $a_1 \geq 0$  (3)  $m$  は奇数, (4)  $a_m > 0$  が成立する。

[定理 2.4] (2.23) 式で表される非線形受動相反ルポート抵抗は  $N$  個の受動 1 ポート非線形抵抗と  $(n+N)$  ポートの理想変成器から構成できる。

(証明) 定理 2.3 から図 2.10 の回路  $N$  が構成できるから  $F(x)$  が (2.3) 式を満足するならば  $f_i(\cdot)$  は受動となることを示せばよい。今,  $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$  を (2.29) 式で定義される関数とする。ここで  $P_s(z_s)$  は

$$P_s(z_s) = \int_0^{z_s} f_s(\zeta) d\zeta \quad (2.32)$$

で与えられる。このとき  $N$  のポテンシャル関数は (2.30) 式で与えられる。このとき

$$\begin{aligned} 0 < x' F(x) &= x' (\partial Q / \partial x) \\ &= x' T' (\partial P / \partial z) \Big|_{z=Tx} \\ &= z' (\partial P / \partial z) \end{aligned}$$

となり、更に (2.32) と (2.29) 式から

$$= \sum_{s=1}^N z_s f_s(z_s) \quad (2.33)$$

となる。(2.33) 式から  $z_i \equiv 0$  ( $i \neq k$ ) とおくことにより各  $k$  について  $z_k f_k(z_k)$

$\leq 0$  となる。  
(証明終)

[定理 2.5] (2.23) 式で表される相反非線形ルポートが実質受動であるならば非線形抵抗  $f_1, \dots, f_N$  は実質受動となる。

証明は定理 2.4 と同様である。定理 2.4 と 2.5 は受動(実質受動)相反ルポート抵抗を図 2.10 のように構成すれば  $f_1, \dots, f_N$  は必ず受動(実質受動)となることを示す。

以上相反ルポート抵抗が 1 ポート抵抗と理想変成器を用いて構成でき

することを示した。構成は相反回路かポテンシャル  $P$  を持つといふ事実が重要な役割を演す。一般の  $C^{\infty}$  級関数についてここでこの構成法が適用できるか否かは興味深いが無限級数展開で考えれば一般には  $N$  が有限でなくなるためこのことは成立しない。

### [例2.2] 電流制御形非線形3ポート抵抗

$$v_1 = 12i_1^3 - 36i_1^2i_2 + 36i_1i_2^2 - 12i_2^3 + 4i_1 - 2i_2 - 2i_3$$

$$v_2 = -12i_1^3 + 36i_1^2i_2 - 36i_1i_2^2 + 12i_2^3 + 2i_1 - 2i_2$$

$$v_3 = -4i_1 + 4i_3$$

を理想変成器と1ポート非線形抵抗から構成する方法を考える。この3ポートは補題2.4の条件(2.24)を満足するから相反である。この3ポート抵抗のポテンシャル関数  $Q(x)$  は(2.25)式から

$$Q = 2(i_1 - i_3)^2 + 3(i_1 - i_2)^4 - (i_1 - i_2)^2$$

となるから定理2.3から

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、1ポート非線形抵抗の特性は

$$f_1; v=4i$$

$$f_2; 12i^3 - 2i = v$$

となる。2つの1ポート

非線形抵抗は

$$f_1; \text{Passive}$$

$$f_2; \text{Eventually Passive}$$

となる。図2.11にこの3

ポートの回路実現を示す

。  $f_1, f_2$  は実質受動で

あるからこの3ポートは

実質受動である。

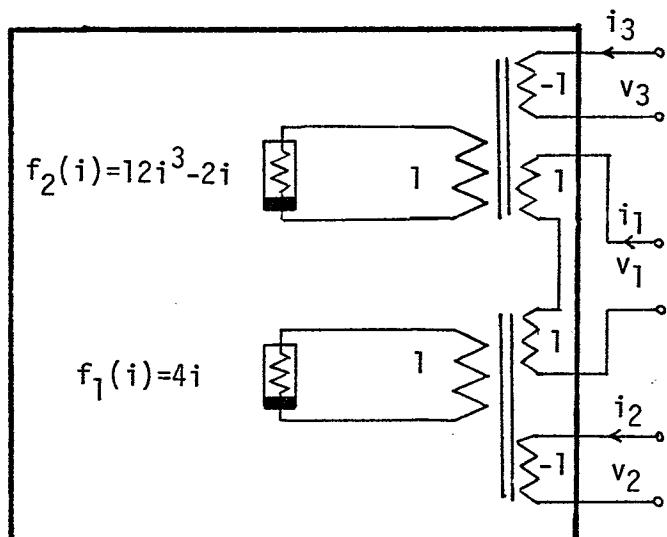


図2.11 例2.2の回路実現

Fig.2.11-Network Realization of Example 2.2

## 2.6 結 言

この章では代数的非線形ルポートの基本的概念とその構成について論じた。まず微分形式を用いた統一的方法でかなり広い範囲の時不变非線形ルポートに対して従来の定義を含むよう反相反性、および非相反性の定義を行ない、これらに関する必要十分条件と分解定理を与えた。更にこれらの結果を利用して任意のハイブリッド特性を有する時不变非線形ルポート抵抗の構成は非線形1ポートを構成する問題に帰着されることを示した。代数多項式での特性が記述されるような非線形1ポート抵抗は電子回路で比較的容易に構成できるものであるためここで示した構成法は工学的にも意味を持つ。ハイブリッド形非線形ルポート抵抗の構成に関するここでの議論はそのまま一般的な代数的ルポートの構成にも応用できるものである。この章の結果はルポート素子のモデルリングに対して重要な応用を持つ。

# 第3章 混成ルポートの解析と構成

## 3.1 緒 言

混成ルポートは大きさ $\neq 0$ に言えれば抵抗素子とエネルギー蓄積素子とか混在するルポートである。線形の場合には混成ルポート系の研究はすでに完成されており、ラプラス変換法により抵抗ルポートの場合の直接的一般化として取り扱える。また線形の場合には分布定数回路の混在するような場合についても研究されている。これに対して非線形の場合にはラプラス変換法に相等する解析法が存在しないためその解析は代数的ルポートの場合の直接的一般化とはならぬ。線形の場合の一般化として非線形混成ルポートの研究を行なう一つの方法として混成ルポートが集中素子のみから成り表現

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}\tag{3.1}'$$

を有すると仮定する仕方が考えられる。また、とくに線形の場合のイミタンス行列表現に相等する表現は Banach 空間上の作用素 $\mathcal{R}$ により

$$y = \mathcal{R}(u(\cdot))\tag{3.2}'$$

と表すことができる。本章ではもつは $\neq 0$  (3.1)' または (3.2)' の形で表される場合を対象として混成ルポートのエネルギー概念(受動性, 実質受動性, 無損失性および不活性)についての考察を行ない解析・構成に必要な基本的性質を導く。

混成ルポートの受動性に関しては Rohrer<sup>(14)</sup> の結果がある。これは最適制御理論の Hamilton-Jacobi の方程式により受動性を定式化したものであり、この方程式による受動条件を論じている。この条件は解に対する情報を必要とするため実際の解析では用いにくく欠点がある。そこで本章ではまず 3.3においてシステム表現 (3.1)' に関するリヤブノフ形

関数の構成による（解に関する情報を必要としない）受動条件を導く。更に 3.4 ではこれらの逆定理を Hamilton-Jacobi の方程式による受動条件から導くことによりルポート素子のモデリングに対する基礎、すなはち受動ルポートは受動素子でモデル化できることを示す。3.5 では混成ルポートが (3.2)' 式' に示す作用素表現で与えられた場合について受動混成ルポートの構成問題を論ずる。基本的な結果として線形の場合の正実補題が非線形の場合へ拡張される。

### 3.2 諸 定 義

以下では文字の節約のため異なるポート数を持つルポートを表すのに同じものを用いる。図 3.1 に特殊な混成ルポート  $N$  を示す。 $N$  は部分ルポートとしてルポート抵抗  $N_R$  ルポートキャパシタ  $N_C$  及びルポートインダクタ  $N_L$  から成る。 $N_R$  は結合を許す非線形マルチポート抵抗素子、從属電源および直流独立電源から成り、 $N_C$  は結合を許す  $n_C$  個の時不变電荷制御形非線形キャパシタから成る。 $N_L$  は結合を許す  $n_L$  個の時不变磁束制御形非線形インダクタから成る。 $v_C, i_C, q_C \in R^{n_C}$  ( $v_L, \phi_L, i_L \in R^{n_L}$ ) をそれぞれキャパシタ (インダクタ) 電圧、電流、電荷 (磁束) ベクトルとする。 $N_C$  および  $N_L$  の特性を

$$v_C = h_C(q_C) \quad (3.1)$$

$$i_L = h_L(\phi_L) \quad (3.2)$$

とする。ここで写像  $h_C: R^{n_C} \rightarrow R^{n_C}$  および  $h_L: R^{n_L} \rightarrow R^{n_L}$  は連続可微分である。p ベクトル ( $p = n_C + n_L$ )  $h(\cdot) \triangleq (h_C'(\cdot), h_L'(\cdot))'$  を用いることにより (3.1) 式 (3.2) 式をまとめて

$$x = h(z) \quad (3.3)$$

とかく。たゞ  $x = (v_C', i_L')'$ ,  $z = (q_C', \phi_L')'$  である。 $N$  の外部ポートに接続する  $s$  個の入力は電圧源の電圧、電流源の電流から成り  $s$  ベクトル  $u \in R^s$  で表す。抵抗 ( $p+s$ ) ポート  $N_R$  は特性

$$\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x, u) \\ g(x, u) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

を持つと仮定する。ここで  $y \in R^S, w \in R^P$  また  $w = (i_C', v_L')'$  である。  $f: R^P \times R^S \rightarrow R^P$  および  $g: R^P \times R^S \rightarrow R^S$  は連続可微分写像である。Nの動的システムによる表現は (3.3) 式と (3.4) 式から

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -f(h(z), u) \\ y &= g(h(z), u) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。以下ではこの混成nポートNに対してエネルギー概念の定義を行なう。

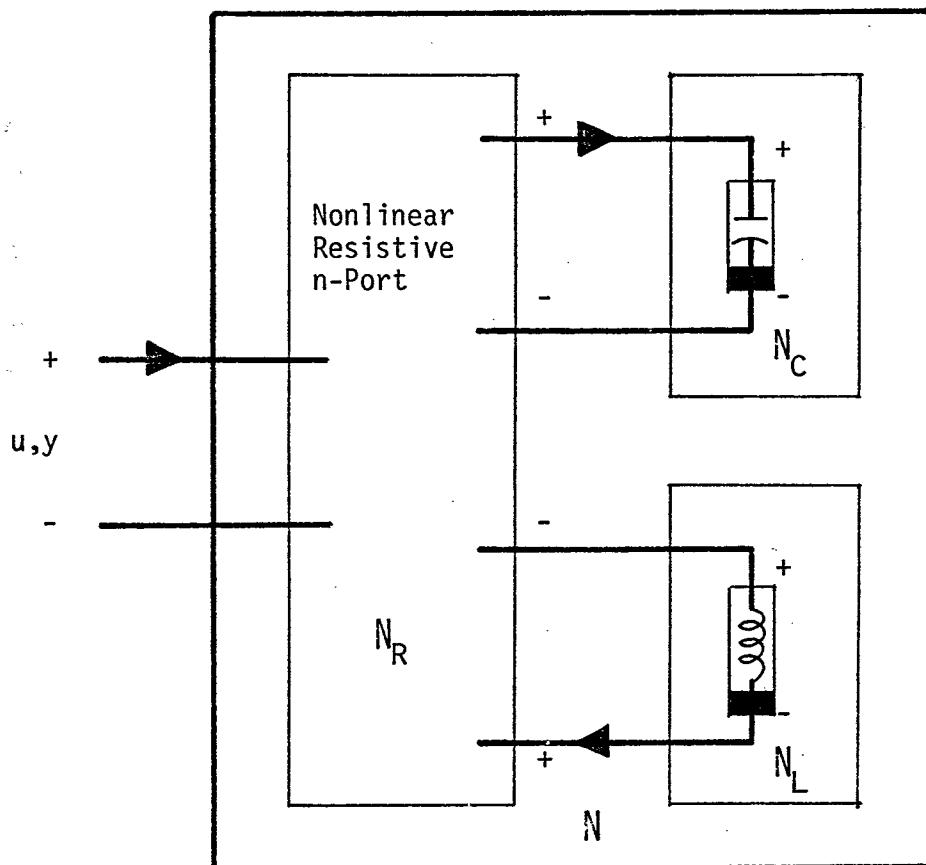


図3.1 非線形混成nポートの特殊なクラス

Fig.3.1-Special Nonlinear Mixed n-Port under

Consideration

区分的に連続なすべての許容入力の全体を  $\mathcal{U}$  で表す、すなはち  $\mathcal{U} = u(\cdot) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  であり初期状態  $z_0$ 、入力  $u \in \mathcal{U}$  のとき  $N$  の出力を

$$y(t) \triangleq y_{z_0, u(\cdot)} \quad (3.6)$$

と表す。す：  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^1$  を式

$$\chi(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} u'(\tau) y(\tau) d\tau + \varepsilon(z_0) \quad (3.7)$$

で定義される（ $N$  に個有の）汎関数とする。ここで

$$\varepsilon(z_0) = \int_{-\infty}^{t_0} h'(z(t)) \dot{z}(t) dt \quad (3.8)$$

は時刻  $t_0$ 、状態  $z_0$  で  $N$  に負えられたいたエネルギーであり  $t_0, t_0 \leq t_f, z_0$  はそれぞれ任意で固定されている。

[定義 3.1] すべての  $u(\cdot) \in \mathcal{U}, t_f \in \mathbb{R}^1$  および  $z_0 \in \mathbb{R}^p$  に対して汎関数 (3.7) が

$$\chi(u(\cdot)) \geq 0 \quad (3.9)$$

を満足するならば混成ルポート  $N$  は受動である。

この定義は次へ定義 3.2 と等価である。

[定義 3.2]  $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$  がすべての  $t_0 \leq t_f, z_0 \in \mathbb{R}^p$  で汎関数  $\chi(\cdot)$  を最適化（極小化）するとき

$$\chi(\hat{u}(\cdot)) \geq 0$$

が成立するならば混成ルポート  $N$  は受動である。

[定義 3.3]  $u(t) \neq 0$  ( $u \in \mathcal{U}$ )、 $t_0 \leq t \leq t_f$  に対して常に

$$\chi(u(\cdot)) > \varepsilon(z(t)) \geq 0 \quad (3.10)$$

のとき  $N$  は  $[t_0, t_f]$  で消散的であるといふ。 $\varepsilon : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$  は (3.8) 式で  $\chi$  えられていく。

[定義 3.4] すべての  $u(\cdot) \in \mathcal{U}, t_f \geq t_0$  に対して常に

$$\chi(u(\cdot)) = \varepsilon(z(t_f))$$

であるならば  $N$  は無損失である。

[定義3.5] すべての  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ,  $t_f \geq t_0$  に対し常に

$$\mathcal{F}(u(\cdot)) = \varepsilon(z_0)$$

のとき  $N$  は不活性 (non-energetic) である。

[定義3.6]  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  と (3.5) の解  $z(t)$  がある正数  $k$  に対して不等式  $\|(u'(t), z'(t))\| > k$ ,  $t > t_0$  を満足するならば (3.9) 式が成立するとき  $N$  は実質受動であるといい、(3.10) 式が成立するならば実質消散的であるといふ。

[定義3.7] すべての許容入出力対  $(u_1(t), y_1(t))$  と  $(u_2(t), y_2(t))$  が式  $u_1(t) \neq u_2(t)$ ,  $y_1(t) \neq y_2(t)$  を満足するとき

$$\int_{-\infty}^t (u_1(t) - u_2(t))' (y_1(t) - y_2(t)) dt \geq 0 \quad (3.11)$$

が成立するならば  $N$  は局所受動 (消散的) という。

単一種類の素子のみから成るルポート (代数的ルポート) については混成ルポートの特殊な場合として次の様に定義される

[定義3.8]  $N_R$  はルポート電圧、電流対  $(v_R, i_R) \in R^{2n}$  のルポート抵抗とする。

(1)  $N_R$  は受動  $\iff$

$$\langle v_R, i_R \rangle \geq 0 \quad (3.12)$$

がすべての許容電圧、電流対に対して成立する。

(2)  $N_R$  は不活性  $\iff \langle v_R, i_R \rangle = 0$  がすべての許容電圧、電流対に対して成立する。

(3)  $N_R$  は消散的  $\iff v_R \neq 0, i_R \neq 0$  で (3.12) 式の不等式が成立。

(4)  $N_R$  は局所受動 (消散)  $\iff$  すべての許容電圧、電流対  $(v_{R1}, i_{R1})$  と  $(v_{R2}, i_{R2})$  に対して

$$(v_{R1} - v_{R2})' (i_{R1} - i_{R2}) \geq 0$$

が成立する。ただし  $v_{R1} \neq v_{R2}$ ,  $i_{R1} \neq i_{R2}$ .

(5)  $R^{2n} \supset M$  をコンパクトな集合とすれば (3.12) 式が  $(v_R, i_R) \in R^{2n} - M$

に対して成立するとき  $N$  は実質受動である、不等号のみが成立するならば実質消散的という。

[定義3.9] リアクタンスルポート  $N_C$  または  $N_L$  のポート電圧・電流対  $(i(t), v(t))$  に対して

$$\int_{-\infty}^t \langle i(\tau), v(\tau) \rangle d\tau \geq 0 \quad (3.13)$$

がすべての  $t \in \mathbb{R}^1$  に対して成立するとき  $N_C$  または  $N_L$  は受動である。

$N_C, N_L$  が相反であるならば (3.13) 式は

$$\int_0^z h'(\zeta) d\zeta \geq 0 \quad (z \in \mathbb{R}^n) \quad (3.14)$$

で置き換えられる。実質受動も同様に定義できる。

### 3.3 受動条件

この節では比較的初等的な考察により混成ルポートに対するいくつかの受動条件を導く。3.2で述べた混成ルポート  $N$  に対しては次の性質 3.1 から 3.3 が成立する。これらの性質は  $N$  のエネルギー平衡条件からすぐ導出されるため証明は省く。

[性質3.1]  $N_R$  が受動（あるいは消散的）で  $N_C, N_L$  が相反かつ受動であるならば混成ルポート  $N$  は受動（あるいは消散的）である。

[性質3.2]  $N_R$  が式

$$x^T f(x, u) = 0 \quad (3.15)$$

$$u^T g(x, u) = 0 \quad (3.16)$$

を満足し、更に  $N_C, N_L$  が相反かつ受動であるならば混成ルポート  $N$  は不活性である。

[性質3.3]  $N_R$  が不活性（または無損失とも言う）で  $N_C, N_L$  が相反かつ受動ならば混成ルポート  $N$  は無損失である。

上の性質 3.2 から性質 3.3 において  $N_C, N_L$  の相反性はこれらのリアクタ

ンスルポートが無損失であるための条件となっている<sup>(21)</sup>。性質3.1から性質3.3はNの受動条件である。

[注意3.1] 3.1図に示す混成ルポートNがすべての  $u \in \mathcal{U}$  に対して式

$$u'(t)y(t) \equiv 0 \quad (t \in \mathbb{R}^1) \quad (3.17)$$

を満足するならばNはzero-powerルポートである。明らかに不活性なルポートはzero-powerである。

混成ルポートNを暗箱と考え抽象化した混成ルポート $\pi$ を考える。 $\pi$ は図3.2に示す図式で与えられるシステム表現

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F(z, u) \\ y &= G(z, u) \end{aligned} \quad (3.18)$$

を持つと仮定する。さらに内部に貯えられた初期エネルギー $\varepsilon(z_0)$ を持つものとする。この $\pi$ に対しては定義3.1から定義3.7は $\pi$ に対しても成立する。

[定理3.1] 2回連続可微分な関数  $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$  ですべての  $z \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^s$  で $P(z) \geq 0, P(0)=0$  および

$$-\frac{\partial P}{\partial z} F(z, u) + u' G(z, u) \geq 0 \quad (z \neq 0) \quad (3.19)$$

を満足しさらに  $\partial P / \partial z: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  が同相すなわち\*

$$\det(\partial^2 P / \partial z^2) \neq 0 \quad (3.20)$$

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|\partial P / \partial z\| = \infty \quad (3.21)$$

となるものが存在するならば $\pi$ は受動（消散的）。

（証明） 仮定から

\* 次の定理から言うことができる

[Palaisの定理]  $C^1$  疋像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $C^1$  同相  $\iff$

i)  $\det(\partial f / \partial x) \neq 0$

ii)  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$

が成立する。

$$h(z) \triangleq \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.22)$$

とすれば  $h: R^n \rightarrow R^n$  は可微分同相となり（前ページ脚注参照）

$$f(\cdot, u) \triangleq F(h^{-1}(\cdot), u) \quad (3.23)$$

$$g(\cdot, u) \triangleq G(h^{-1}(\cdot), u) \quad (3.24)$$

とおくことができる。したがって  $\pi$  の等価回路モデルとして

(3.5) 式と図 3.1 で表される  $N$  を得る。

(3.19) 式は  $h(z)=x$  とおけばすべての

$x \in R^P, u \in R^S$  で

$$-x' f(x, u) + u' g(x, u) \geq 0 \quad (x \neq 0)$$

となり  $N_R$  は受動（消散的）である。更に仮定から

$$P(z) = \int_0^z h'(z) dz \geq 0$$

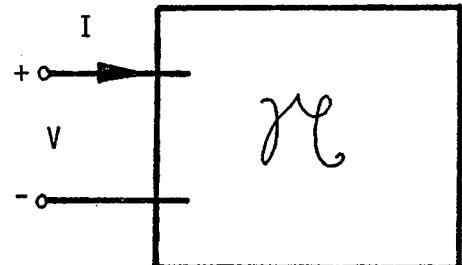


図3.2 混成nポート  $\pi$

Fig.3.2-Mixed n-Ports

であるから  $N_C, N_L$  も受動であり性質1から  $N$  は、したがって  $\pi$  は受動（消散的）となる。（証明終）

定理 3.1 は混成nポート  $\pi$  の受動性をリヤフノフタイフの関数の構成により判定する方法を与えている。文献(14)ではこことは異なる意味のリヤフノフ関数の構成による判定法が与えられているが、 $\pi$  の解を求める必要がある。次の系は定理 3.1 の線形の場合への適用である。

[系 3.1]  $\pi$  が線形混成nポートでありかつ表現

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu \\ y &= Cz + Du \end{aligned} \quad (3.25)$$

を持つならば 実行列  $P, L$  および  $W$  が存在し  $P$  が非負定で式

$$\begin{aligned} PA + A'P &= -LL' \\ PB &= C' - LW \\ WW' &= D + D' \end{aligned} \quad (3.26)$$

が成立するならば  $\pi$  は受動であり更に行列

$$K = \begin{pmatrix} W'W & -(LW)' \\ -LW & LL' \end{pmatrix}$$

が  $\det K \neq 0$  を満たすときには消散的である。

[定理 3.2] 2 变連続可微分な  $P: R^p \rightarrow R^1$  ですべての  $z \in R^p$ ,  $u \in R^S$  で  $P(z) \geq 0$ ,  $P(0)=0$  および

$$-\frac{\partial P'}{\partial z} F(z, u) + u' G(z, u) = 0$$

を満足し更に式(3.20)と(3.21)を満足するものが存在するならばそれは無損失である。更に式

$$-\frac{\partial P'}{\partial z} F(z, u) = 0$$

が成立するときにはそれは不活性である。

[系3.2] 線形混成ルポート  $\mathcal{N}$  は非負定行列  $P$  が存在して

$$PA + A'P = 0$$

$$PB = C \quad (3.27)$$

$$D + D' = 0$$

が成立するとき無損失であり、更に  $C' = 0$  のとき不活性である。

定理 3.2 系 3.2 は定理 3.1 系 3.1 と同様にして示すことができる。証明は省く。

[性質 3.4] つきの条件が成立するならば混成ルポート  $N$  は実質受動（消散的）である。

- (1)  $N_R$  は実質受動（消散的）
- (2)  $N_C$ ,  $N_L$  は受動であり、更に
- (3)  $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|h(z)\| = \infty$

(証明) 条件(2) から任意に与えられた  $\alpha > 0$  に対して  $\|z\| > \beta$  のとき  $\|h(z)\| > \alpha$  となるように  $\beta$  をとることができ。したがって条件(1) から  $\|(z', u')\| > \gamma$ ,  $\gamma \in R^+$  のとき

$$h'(z)f(h(z), u) + u'g(h(z), u) \geq 0 \quad (3.28)$$

となる  $\gamma$  が存在する。N のエネルギー平衡条件から

$$\psi(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} [h'(z)f(h(z), u) + u'g(h(z), u)] dt + \int_{t_0}^{t_f} h'(z) \dot{z} dt + \varepsilon(z_0)$$

となり条件 (2) と (3.28) 式から  $\|(z', u')\| > \gamma$  のとき  $\psi(u(\cdot)) > 0$  となり N は実質受動となる。消散性も同様。 (証明終)

[定理 3.3] 2 回連続可微分な閾数  $P: R^p \rightarrow R^1$  すべての  $z \in R^p$ ,  $u \in R^s$  に対して  $P(z) \geq 0$ ,  $P(0) = 0$  および

$$\frac{\partial P}{\partial z} F(z, u) + u' G(z, u) \geq 0$$

が  $\|(z', u')\| > k$  で成立しさらには式 (3.20) と (3.21) を満足するものが存在するならばそれは実質受動（消散的）混成ルポートであり更にそれは B.I.B.O. 安定である。

(証明) 前半は性質 3.4 から定理 3.1 と同様にして示すことができる。B.I.B.O. 安定性は文献 (22) の定理 1 によりたたかに導出されるので証略する。 (証明終)

### 3.4 受動性の逆定理

この節では 3.3 と逆の問題すなわち  $\pi$  の受動性により  $\pi$  のモデル N を考えたとき N の内部素子の受動性は保証されるか否かについて考察する。この節全体を通して  $\pi$  は電気的に連結しているモデル N を持つと仮定する。 $\pi$  の表現 (3.18) の  $F: R^p \times R^s \rightarrow R^p$  と  $G: R^p \times R^s \rightarrow R^s$  は連続可微分であると仮定する。

最初に受動性の最適制御理論による定式化を行う。定義 3.2 を用いるため (3.7)まで与えられる評価閾数を (3.18) 式の拘束の下で最適化する問題

\*  $\pi$  が B.I.B.O. 安定  $\iff \forall u(\cdot), M_1, M_2 \in R^+$  に対して  $\|u(t)\| \leq M_1 < \infty$   
 $\implies \|y(t)\| \leq M_2 < \infty$  である。

題を考える<sup>(14)</sup>。ハミルトニアン<sup>(23)(24)</sup>を

$$H(z, u, \xi) = u' G(z, u) - \xi' F(z, u) \quad (3.29)$$

とする。 $\xi$ は実状態ベクトルである。 $H$ を極小にする

$$\bar{u} = \bar{u}(z, \xi)$$

とかく、評価関数

$$V(z(t), u(\cdot), t, t_0) = \int_{t_0}^t u' G(z, u) d\tau + \varepsilon(z(t_0)) \quad (3.30)$$

を最適化する入力を

$$\hat{u} = \hat{u}(z(t), t)$$

とする。

[仮定3.1]  $\bar{u}, \hat{u}$  は一意に定まり、  $\bar{u}$  は  $z, \xi$  で連続可微分、  $\hat{u}$  は  $z$  で可微分で  $t$  で連続、更に評価関数 (3.30) の最適値  $V^*(z(t), t)$  は  $z$  および  $t$  で 2 回連続可微分である。ここで  $-\infty < t_0 < +\infty$  とする。

仮定3.1 はシステムの構造的仮定であり  $\bar{u}, \hat{u}$  の一意性に関する部分はシステムの運動で解消できる仮定である。仮定3.1 が成立すればよく知られていく様に<sup>(23)(24)</sup> 評価関数 (3.30) の最適値  $V^*(z, t)$  は Hamilton-Jacobi の方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u H(z, u, \frac{\partial V}{\partial z}) = 0 \quad (3.31)$$

の解であり、また (3.31) の解は評価関数 (3.30) 式の最適値である。したがってつきの受動条件が定義3.2 により得られる。

受動条件：仮定3.1 の下で混成ルート $\bar{x}$ が受動であるための必要かつ十分な条件は Hamilton-Jacobi の方程式 (3.31) の解で境界条件

$$V^*(z(t_0), t_0) = \varepsilon(z(t_0)) \quad (3.32)$$

を満足しさらには

$$V^*(z(t), t) \geq 0 \quad (t \geq t_0) \quad (3.33)$$

を満足する  $V = V^*(z, t)$  が存在することである。

抽象的な混成ルート $\pi$ は初期エネルギー $\varepsilon(z_0)$ と式(3.18)で表される。2回連續微分可能な関数  $P: R^P \rightarrow R^I$  で  $P(z_0) = \varepsilon(z_0)$  を満足する関数のことを $\pi$ の蓄積エネルギー関数と呼ぶ。蓄積エネルギー関数  $P$  を持つ混成ルート $\pi$ において入力  $u=u(t)$  を接続したとき消費されるパワーはエネルギー平衡条件から

$$W(z, u) = u'(t)G(z(t), u(t)) - (\partial P / \partial z)'F(z(t), u(t)) \quad (3.34)$$

となる。 $\pi$ に蓄積エネルギー関数  $P$  と消費パワー  $W$  を与えたとき $\pi$ はモデル化されたと言ふで表す。

受動混成ルート $\pi$ のモデル $\hat{\pi}$ は

$$W(z, u) \geq 0 \quad (z \in R^P, u \in R^S)$$

$$P(z) \geq 0 \quad (z \in R^P)$$

のとき受動モデル $\hat{\pi}$ と呼ぶ。

[定理 3.4] 受動混成ルート $\pi$ は仮定3.1が成立するならば受動モデル $\hat{\pi}$ でモデル化される。更に蓄積エネルギー関数  $P$  が式(3.20)と(3.21)を満足するならば $\pi$ は回路実現  $N$  を持つ。このとき部分ルート  $N_R, N_L, N_C$  はそれぞれ受動ルートとなる。

(証明) 方程式(3.31)の解で(3.32)式と(3.33)式を満足するもののが存在する。この解を  $V^*(z, t)$  とすれば  $t_0$  に依存するから  $V^*(z, t, t_0)$  と表す。 $V^*$  は  $z, t$  を固定したとき  $t_0$  の単調増加関数となる。なぜならば  $t_0 < t_0' \leq t$  としたとき  $u(\cdot)$  を  $[t_0', t]$  では最適入力  $u^*$  に等しく  $[t_0, t_0')$  では 0 となる入力とすれば

$$\begin{aligned} V^*(z, t, t_0) &\leq V(z, u(\cdot), t, t_0) \\ &= V^*(z, t, t_0') \end{aligned}$$

が成立するからである。(3.33) 式から極限  $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V^*(z, t, t_0) = V^0(z, t)$  が存在し、方程式(3.31)は時刻  $t$  に露に依存しないが

$$V^*(z, t, t_0) = V^*(z, 0, t_0 - t)$$

となり極限は  $t$  に依存しない、すなはち  $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V^* = P(z)$  である。 $P(z)$  は

仮定3.1 から  $t_0 \rightarrow \infty$  のときの最適値で Hamilton-Jacobi の方程式(3.31)を満足する。したがって

$$\min_u H(z, u, \partial P / \partial z) = 0$$

が成立する。この式は任意の  $u \in R^p$  では

$$u^T G(z, u) - (\partial P / \partial z)^T F(z, u) \geq 0$$

が成立することを意味し前半が示された。後半は前節での考察と上式からただちに示すことができる。  
（証明終）

[注意3.2] 初期時刻  $t_0$  固定による Hamilton-Jacobi 方程式は回路実現  $N$  で考えればつきのような明白な物理的意味を持つ。  $N$  のエネルギー平衡条件

$$V^*(z(t), t, t_0) = \int_{z(t_0)}^{z(t)} h'(z) dz + \varepsilon(z(t_0)) + \int_{t_0}^t [h'(z) f(h(z), \hat{u}) + \hat{u}^T g(h(z), \hat{u})] dt$$

において  $\partial V^*/\partial t$  は入力  $\hat{u}(t) = u(z(t), t)$  のときの  $N_R$  での消費電力であり  $\min_u H$  は  $N_R$  での消費電力の最小値を与えるから、(3.31)式は  $N_R$  での消費電力が最小のとき  $V^*$  すなあち  $N$  に流入するエネルギーと  $N$  に貯えられたいた初期エネルギーとの和は最小となることを意味する。言い換えれば  $N$  の出入カポートから取り出せるエネルギー  $(\varepsilon(z_0) - V^*)$  は  $N_R$  での消費電力が最小のとき最大となる。

無損失混成ルート化のモデル化は

$$W(z, u) = 0$$

$$P(z) \geq 0$$

のとき 無損失モデルであるといふ。不活性混成ルート化のモデル化は

$$u^T G(z, u) = 0, (\partial P / \partial z)^T F(z, u) = 0$$

$$P(z) \geq 0$$

のとき 不活性モデルであるといふ。

[定理3.5] 仮定3.1 の下で無損失混成ルート化は無損失モデル化によりモデル化され、不活性混成ルート化は不活性モデル化でモデル

化される。さらに蓄積エネルギー関数  $P$  が式 (3.20) と (3.21) を満足するならば  $\pi$  は回路実現  $N$  を持ち部分ネット  $N_L, N_C$  は受動で、 $N_R$  はそれぞれ不活性、 $x^T f(x, u) = 0, u^T g(x, u) = 0, x \in \mathbb{R}^P, u \in \mathbb{R}^S$  となる。

定理 3.5 は定理 3.4 と同様なので証略。つきに実質受動性を最適制御理論で定式化する。

[仮定 3.2]  $\pi$  の出力  $y(t) = y_{z_0, u(\cdot)}$  ( $z_0 \in \mathbb{R}^P, u(\cdot) \in \mathcal{U}, \|u(\cdot)\| < K$ ) はすべての時刻  $t \geq t_0$  で存在する。

[補題 3.1] 仮定 3.2 の下で実質受動混成ネット  $\pi$  に対して定義される汎関数  $\psi(\cdot)$  はすべての入力  $u(\cdot)$  に対して下に有界である。

(証明)  $\psi(u(\cdot))$  が下に有界でないと仮定すれば入力の列  $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$  が存在して

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \psi(u_i(\cdot)) = -\infty$$

となる。仮定 3.2 から有限発散時刻は存在しないから  $t_0 \leq t_1 < t_2 \leq t_f$  となる時刻  $t_1, t_2$  が存在して

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i(t)\| = \infty, \quad t \in (t_1, t_2]$$

であり、このときに限り

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_i^T(\tau) y_{z(t_1), u_i(\cdot)} d\tau = -\infty \quad (3.35)$$

が成立しなくてはならない。ところが  $\pi$  の実質受動性から  $\|u_i(t)\| > k$  のときには

$$\int_{t_1}^{t_2} u_i^T(\cdot) y_{z(t_1), u_i(\cdot)} d\tau + \varepsilon(t_1) \geq 0$$

となる。 $\varepsilon(t_1)$  はを適当に定めれば  $i$  に無関係とすことができたから (3.35) 式に矛盾する。  
(証明終)

補題 3.1 から (3.7) まで定義される汎関数を最適化する入力  $\hat{u}(\cdot)$  が存在するからつきの実質受動条件が得られる。

実質受動条件: 仮定 3.1 と仮定 3.2 が成立すれば  $\pi$  が実質受動である

ための必要かつ十分な条件は Hamilton-Jacobi の方程式' (3.31) の解で境界条件

$$V^*(z(t_0), t_0) = \varepsilon(z(t_0)), \quad \|(\hat{u}'(z(t_0), t_0), z'(t_0))'\| > k$$

を満足し更に

$$V^*(z(t), t) \geq 0, \quad \|(\hat{u}'(z(t), t), z')'\| \geq k, \quad t \geq t_0$$

を満足するものが存在する。

実質受動混成ノポート $\mathcal{R}$ のモデル $\mathcal{R}$ は

$$W(z, u) \geq 0, \quad (\|(z', u')'\| > k)$$

$$P(z) \geq 0 \quad (z \in R^P)$$

が成立するとき 実質受動モデル といふ。

[定理 3.6] 実質受動混成ノポート $\mathcal{R}$ は仮定 3.1, 2 が成立するならば実質受動モデル $\mathcal{R}$ でモデル化できる。更に蓄積エネルギー関数  $P$  が式' (3.20) と (3.21) を満足するならば $\mathcal{R}$ は回路実現  $N$  を持つ部分ノポート  $N_R, N_L, N_C$  は実質受動となる(リアクタンスは受動)。

(証明)  $\|(z', u')'\| > k$  に対して定理 3.4 と同様にして実質受動モデル $\mathcal{R}$ の存在と言うことができる。 (証明終)

### 3.5. 受動非線形混成ノポートの構成問題

この節では混成ノポート $\mathcal{R}$ の表現が作用素で与えられた場合について考える。 $\mathcal{R}$ は $\mathcal{U}$ 上で定義された作用素であり入力  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  に対して時間区間  $[0, T]$  で出力  $t \rightarrow y(t)$  を割り当てる。有限次元システム

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F(z, u) \\ y &= G(z, u), \quad z \in R^P, u \in R^S \end{aligned} \tag{3.36}$$

に於いて初期状態  $z_0 \in R^P$  が与えられたとき入出力写像

$$u(\cdot) \rightarrow y_{z_0, u}$$

が $\mathcal{R}$ に等しいときシステム (3.36) は $\mathcal{R}$ の実現であるという。ここで "y(t) = y\_{z\_0, u}" はシステム (3.36) の入力  $u(\cdot)$  初期状態  $z_0$  のときの出力を表す。

システム(3.36)が図3.1に示す回路Nの表現となつていればNを作用素 $\mathcal{H}$ の回路実現といふ。とくに入力uが電圧源の電圧と電流源の電流の混合から成ることを表すときには $\mathcal{H}$ をハイブリッド作用素と呼ぶ。

[定義3.10] 混成ルポート $\mathcal{H}$ が完全可制御であるとは任意に選んだ状態 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^p$ に対して $\mathcal{H}$ を状態 $z_1(t=t_1)$ から $z_2(t=t_2)$ , ( $t_1 \leq t_2$ )へ遷移させる入力 $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ と $t_2 \in \mathbb{R}^1$ が存在するときに言う。

この節を通して、与えられた作用素 $\mathcal{H}$ に対して完全可制御で $(z^*, u^*)$ で連続可微分な実現(3.36)が存在すると仮定する。

[定義3.11] ハイブリッド作用素 $\mathcal{H}$ が受動作用素であるとはすべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ に対して

$$\int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{H}(u(\cdot))_t d\tau \geq 0 \quad (3.37)$$

が成立するときにいう。ここで $t_f \in \mathbb{R}^+$ は任意に固定されている。

[注意3.3] ハイブリッド作用素 $\mathcal{H}$ が $a_i \in \mathbb{R}^1$ ,  $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$ に対して

$$\mathcal{H}\left(\sum_{i=1}^l a_i u_i(\cdot)\right) = \sum_{i=1}^l a_i \mathcal{H}(u_i(\cdot)) \quad (3.38)$$

を満足するとき $\mathcal{H}$ を線形作用素、 $\mathcal{H}$ を線形混成ルポートといふ。線形回路理論でよく知られているように(3.25)式をその実現として持つ線形作用素 $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}(u(\cdot))_t = \int_0^t [D\delta(t-\tau) + C e^{A(t-\tau)} B](t-\tau) u(\tau) d\tau$$

で与えられる。周波数領域で示せば $\mathcal{H}$ はイミタンス行列である。このとき条件式(3.37)はイミタンス行列が正定であることと等価となる。

システム(3.36)に対して初期状態 $z(t_0)=z_0$ が与えられたとき評価関数

$$V(z_0, u(\cdot), t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} u' G(z, u) dt \quad (3.39)$$

を最適化する問題を考える。

つきの補題は線形の場合と同様にして示すことができる。

[補題3.2] システム(3.36)が受動作用素化の完全可制御かつ $(z', u')$ で連続可微分を実現するならば評価関数(3.39)はすべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ と $t_f \in \mathbb{R}^+$ 以下に有界である。

仮定3.1 と同類の仮定が成立していれば評価関数(3.39)の最適値 $V^0$ は終端時刻 $t_f$ 固定による Hamilton-Jacobi の方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \eta(z, u, \partial V / \partial z) = 0 \quad (3.40)$$

の解である。ここで

$$\eta(z, u, \xi) \triangleq H(z, u, -\xi) \quad (3.41)$$

であり、更に $V^0$ は境界条件

$$V^0(z, t_f, t_f) = 0 \quad (3.42)$$

を満足する。補題3.2から連続関数 $\varepsilon: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在してすべての $z \in \mathbb{R}^p$ ,  $-\infty < t \leq t_f$ で

$$-\varepsilon(z) \leq V^0(z, t, t_f) \leq 0 \quad (3.43)$$

となる。

定理3.4の証明と同様に $V^0(z, t, t_f)$ が $t_f$ の単調減少関数であり、更に(3.43)式が成立しているから

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} V^0(z, t, t_f) = P_0(z) \quad (3.44)$$

が存在する。 $P_0(z)$ は $t_f \rightarrow \infty$ のときの(3.39)の最適値であるから Hamilton-Jacobi の方程式を満足し、したがって次の補題が成立する

[補題3.3] (3.44)式で定義される $P_0$ は式

$$\min_u [u^T G(z, u) + (\partial P_0 / \partial z)^T F(z, u)] = 0 \quad (3.45)$$

を満足する。

[補題3.4] システム(3.36)が受動作用素化の連続可微分で完全可制御を実現するための必要十分条件は2回連続可微分な関数 $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ ですべての $z \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^s$ において

$$\frac{\partial P^I}{\partial z} F(z, u) + u^I G(z, u) \geq 0 \quad (3.46)$$

を満足し  $P(0)=0$  となるものが存在する。

(証明) (必要性) (3.44) 式で定義された  $P_0$  は  $P_0(z) \leq 0$  であるから  $P \triangleq P_0$  とおくことにより補題3.3 から任意の  $u \in R^S$ ,  $z \in R^P$  で (3.46) 式が成立することが分る。さらに  $z=0$  のとき  $t_f \rightarrow \infty$  のときの最適値を  $u^0$  とする最適入力  $u^0$  は式 ((3.37)) と  $z_0=0$  のときの  $\mathcal{H}$  の定義から  $u^0=0$  となり (3.39) 式から  $P(0)=0$  となる。

(十分性) 補題の条件を満足する  $P$  が存在するならば、 $\mathcal{H}$  が運動作用素となることを示す。入力  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  に対して初期状態 0 の解を  $z(t)$ , ( $t \geq 0$ ) とすれば

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} u^I(t) \mathcal{H}(u(\cdot))_t dt \\ &= \int_0^{t_f} u^I(t) y_{0, u(\cdot)}(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} u^I(t) G(z(t), u(t)) dt \end{aligned}$$

式 (3.46) から

$$\begin{aligned} & \geq \int_0^{t_f} \frac{\partial P^I}{\partial z} F(z(t), u(t)) dt \\ &= \int_0^{t_f} \frac{d}{dt} P(z(t)) dt \\ &= [P(z(t))]_0^{t_f} \\ &= P(z(t_f)) - P(0) \\ &= P(z(t_f)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となり成立する。

(証明終)

[注意3.4] 補題3.4において $\bar{x}$ はその定義の中で $z_0=0$ と置いてある。以下常に $z_0=0$ とするが、これは例えは線形システム構成理論においても分るよう自然なとり方である。

[定義3.12] 混成ルポート $\bar{x}$ の2つの状態 $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^P$ が $[t_0, t_1]$ で観測不能であるとは0入力に対して

$$y_{z_0,0}(t) = y_{z_1,0}(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

となるときに言う。また $\bar{x}$ が可観測であるとは $[t_0, \infty)$ においてすべての状態が観測不能ではないときに言う。

[補題3.5]  $\bar{x}$ の実現(3.36)が可観測であるならば補題3.4における $P: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^1$ で補題3.4の条件の他に更に式

$$P(z) > 0, \quad (z \neq 0) \quad (3.47)$$

を満足するものが存在する。

(証明)  $P_0(z_1)=0$  となる  $z_1 \neq 0$  が存在したと仮定すれば  $V^0(z_1, 0, t_f) = 0$ ,  $t_f \in [0, \infty)$  が成立する。仮定3.1から最適入力は一意に定まるから  $\hat{u} \equiv 0$  である,  $0 < t_\alpha < t_f$  と令す  $t_\alpha$  に対し  $[t_\alpha, t_f]$  で考えれば  $V^0(z(t_\alpha), t_\alpha, t_f) = 0$  となる。ここで  $z(t_\alpha)$  は初期状態  $z_1$  入力  $u \equiv 0$  のときの解の  $t_\alpha$  における値である。 $t_f \rightarrow \infty$  で考えれば  $P_0(z(t_\alpha)) = 0$ ,  $t_\alpha \in (0, \infty)$  を得る。 $P = -P_0$  と置くと  $P(z) \geq 0$  であるから  $z(t_\alpha)$  が極値になることから  $(\partial P / \partial z)|_{z=z(t_\alpha)} = 0$  となり(3.46)式を用いて  $u'G(z(t_\alpha), u) \geq 0$  を得る。同様にして  $P(0) = 0$  から  $u'G(0, u) \geq 0$  が結論される。少し考察すれば\*これらは  $G(z(t_\alpha), 0) = 0$  および  $G(0, 0) = 0$  を意味することが分る。このことから入力  $u \equiv 0$  のときの初期状態がそれを  $0$  と  $z_1$  の2つの解  $z=0$  と  $z=z(t_\alpha)$  は  $[0, \infty)$  で同一の出力  $y \equiv 0$  を与えるが、これは可観測性に矛盾するから補題は証明された。(証明終)

[例] 線形受動回路のシステム理論的構成理論の基本的補題である正定補題は(16)つきのように表される。

\*  $u'G(z, u) \geq 0 \implies G(z, u) = A(z, u)u, (A \geq 0)$  と書けることが分かる。

[正実補題] 注意 3.3で与えた線形作用素化の最小実現(3.25)を考えると、これに対応するミランス行列が正実であるならば対称正定行列  $P$  よび実行列  $L, W$  が存在して

$$PA + A'P = -LL'$$

$$PB = C' - LW \quad (3.48)$$

$$W^T W = D + D^T$$

が成立する。ここで  $\det(D+D') \neq 0$  と仮定する。

補題3.4 と3.5から正実補題を導く。仮定3.1は $\det(D+D') \neq 0$ であるから成立している<sup>(24)</sup>。いま

$$P(z) = (1/2) z^T P z$$

これはつきの補題から言うことができる。

[補題 A1]  $x, y \in \mathbb{R}^n$  が  $\langle x, y \rangle \geq 0$  を満足するならば準正定行列 B が存在して  $y = Bx$  とかくことができる。

(証明)  $n$ に関する帰納法により示す。 $R^n \supset R^{n-1}$ に対して  $x_{n-1}, y_{n-1} \in R^{n-1}$  のとき  $\langle x_{n-1}, y_{n-1} \rangle \geq 0$  とする。このとき  $R^{(n-1) \times (n-1)} \ni B_{n-1} \geq 0$  が存在して  $y_{n-1} = B_{n-1} x_{n-1}$  と表すことができると仮定する。 $x, y \in R^n$ ,  $\langle x, y \rangle \geq 0$  に対して

が成立するならば直交行列  $P$  が存在して

$$(x_{n-1}, 0) = Px$$

$$(y_{n=1}, 0) = p y$$

と書ける。したがって

$$y = P^{-1} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Px$$

となる。仮定から  $B = P' \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \geq 0$  であるから証明できた。  
 (証明終)

とあれば(3.46)式は

$$\begin{pmatrix} -PA -A'P & -PB + C' \\ C - P'B & D + D' \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.49)$$

を意味する。ここで行列  $P$  はシステム (3.25) が可観測であるから (3.47) 式により正定と仮定してよい。準正定な行列は  $AA'$  の形に分解できるから  $A = (L', W')$  とおくことにより (3.49) 式から等式をつくれば (3.48) 式が得られる。

上例は補題 3.4 と 3.5 が線形の場合の正実補題の非線形への一般化であることを示している。

作用素  $\mathcal{H}$  が与えられたときその実現 (3.36) に対してエネルギー蓄積関数  $P$  と消費パワー  $W$  を与えたとき  $\mathcal{H}$  は モデル実現された といふ。このモデルは  $P$  が式 (3.20) と (3.21) を満足するならば回路実現  $N$  を持つ。

[定義 3.13] 受動作用素  $\mathcal{H}$  が無損失であるとは  $K \in \mathbb{R}^+$  に対して  $\|u(t)\| < K$  ならば  $\|\mathcal{H}(u(\cdot))_t\| < K$  となるすべての  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  に対して

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{H}(u(\cdot))_\tau d\tau = 0 \quad (3.50)$$

が成立するときに言う。

[定義 3.14] 受動作用素  $\mathcal{H}$  が不活性であるとはすべての  $u(\cdot) \in \mathcal{U}, t_f \in \mathbb{R}^+$  に対して

$$\int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{H}(u(\cdot))_\tau d\tau = 0 \quad (3.51)$$

が成立するときに言う。

[定理 3.7] 受動作用素  $\mathcal{H}$  が完全可制御な実現 (3.36) を持つならば

- (1) モデル実現中受動モデルが存在する。更に受動モデルは
- (2)  $\mathcal{H}$  が無損失ならばモデル実現は無損失モデルとなる。
- (3)  $\mathcal{H}$  が不活性ならばモデル実現は不活性モデルとなる。

さらに回路実現  $N$  が存在するならば

$N_L, N_C$  は受動であり  $N_R$  はそれぞれ受動、不活性、不活性かつ  $u^T g(x, u) = 0$  となる。

(証明) (2) について示す。S の受動モデルにおいて  $z^* \in R^P, u^* \in R^S$  が存在して  $W(z^*, u^*) > 0$  であると仮定する。(3.34)式からエネルギー平衡条件によつて

$$\int_0^{t_f} u^T(\tau) \mathcal{H}(u(\cdot))_{\tau} d\tau = P(z(t_f)) + \int_0^{t_f} W(z(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (3.52)$$

が成立する。実現(3.36)は完全可制御であるから  $[0, T]$  において  $z=0$  から  $z=z^*$  へ状態を遷移させ、更に  $z^*$  から 0 へもどす入力  $u_S(\cdot) \in \mathcal{U}$  が存在する。 $W$  の連続性と受動性から

$$\int_0^T W(z(t), u_S(t)) dt = c > 0 \quad (3.53)$$

となる。今、周期入力  $u=u(t)$  を  $[0, \infty]$  において  $[0, T]$  では  $u_S$  に等しく  $[T, 2T]$  では  $u_S(t-T)$  に等しく順に定義される入力とすれば  $P(z) \geq 0$  であるから(3.52)式と(3.53)式から

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} u^T(\tau) \mathcal{H}(u(\cdot))_{\tau} d\tau = a \geq \frac{c}{T} > 0$$

となりこれは(3.50)式に矛盾するから証明できた。(3)も同様にして証明することができる。後半は明りかである。  
(証明終)

### 3.6 結 言

本章では集中素子から成る混成ルポートについてエネルギー的考察を行ない、モデル化の基礎をえた。新たに混成ルポートのモデルという概念を導入しモデルのエネルギー的性質と混成ルポートのエネルギー的性質との関係を調べ、とくにモデルが回路実現できる場合には、回路を構成する素子のエネルギー的性質になることを述べた。ここで混成ルポートが考えられたとき、任意のモデルについてその回路実現は存在するか、また存在するならばそれはどんな種類の素子を用いればよいかとい

う問題があるか、これについて本文中ではエネルギー蓄積関数がある特定の条件を満足する場合にはリアクタンス素子と抵抗素子により実現できることが示されている。一般の場合は今後の問題である。

# 第4章 複合ルポート

## 4.1. 緒言

第2章および第3章では1つのルポートに対する特定の性質（相反性や受動性など）を調べた。実際に解析を行なう場合にはルポートはいくつかのルポートの接続として表される場合が多い。ルポート系が大規模化するのに従いこの様な分割による解析法の方が解析における手間を省く上でも都合がよくなる場合も多くある<sup>(50)(51)</sup>。

本章では以上のこと念頭に置いた上で、いくつかのルポートを接続してできる複合ルポートがその構成単位である1つ1つのルポートの持つ性質を保存するか否かについての考察を行う。

まず4.2において代数的ルポートの相反性についての考察を行ない、この性質がルポートの接続により不变であることを示す。とくに系4.1は微分幾何的手法によりはじめて一般的に証明された結果であり、この手法が非線形ルポートの解析上重要な応用を持つことを示すものである。4.3では混成ルポートの受動性について上と同様の結果を示す。

## 4.2. 複合代数的ルポート

この節ではいくつかの代数的非線形ルポートを接続して保たれる性質を調べる。

### 4.2.1. 結線ルポート

代数的ルポートを接続するための結線ルポート（コネクションルポートとも言う）について調べる。代数的ルポートを接続する場合にはコネクションルポートはつきに示す制限が必要である。今ルポートの各ポート変数を次に示す4種類の組に分類する。

1.  $(v, i) : R$  タイプ  
 2.  $(v, q) : C$  タイプ  
 3.  $(\phi, i) : L$  タイプ  
 4.  $(\phi, q) : M$  タイプ

[定義 4.1] ルポート  $N_C$  がコネクションルポートであるとは  $N_C$  の内部は結線のみであり、1つのポートを枝に、結線を接続に対応させてできるグラフが連結であり、しかも各ポートのポート変数の組は同一のタイプのものであるとする。

[性質 4.1] コネクションルポート  $N_C$  は調和的である。

(証明) 相反性: ポート変数をすべて  $R$  タイプとしたときは Brayton<sup>(6)</sup> により示されている。ここでは  $C$  タイプについて示す。他のタイプについても同様に示すことが可能である。 $Q = [I : F]$  ( $B = [-F^T : I]$ ) を  $N_C$  のグラフの基本カットセット(基本ループ)行列とすると  $Qq = q_0, Bv = 0$ , 但し  $q_0$  は定数ベクトルである。今  $q = [q_1' \ q_2']'$ ,  $v = [v_1' \ v_2']'$  とし  $q_1 = -Fq_2 + q_0$ ,  $v_2 = F^T v_1$  と書く。パラメータ  $s$  として  $[q_2' \ v_1']'$  をとれば

$$\left( \frac{\partial q}{\partial s} \right) = \begin{pmatrix} -F & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & F^T \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$\left( \frac{\partial q}{\partial s} \right)' \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -F^T + F^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

となり定理 2.1 より相反である\*。

双対相反性:  $M$  タイプ変数について示す。他のタイプでも同様である。前と同様  $\phi = [\phi_1' \ \phi_2']'$ ,  $q = [q_1' \ q_2']'$  とする。  $B\phi = \phi_0$ ,  $Qq = q_0$  但し  $\phi_0, q_0$  は定数ベクトル, であるから  $q_1 = -Fq_2 + q_0$ ,  $\phi_2 = F^T \phi_1 + \phi_0$  となる。パラメータ  $s$  を  $s = [q_2' \ \phi_1']'$  とし適当な置換行列  $A$ ,  $B$  に対して  $\xi = Aq + B\phi$ ,  $\eta = Bq + A\phi$  とする。このとき

$$Z(s) \triangleq \frac{\partial \eta}{\partial s} J\xi$$

\* 相反性は各ポートの特性多様体の座標系(パラメータ)のとり方により不变性質であるから,  $\eta$  として特に  $v, q$  を選んで示せば十分。

$$= \left[ B \frac{\partial q}{\partial s} + A \frac{\partial \phi}{\partial s} \right]' (B-A)[A(-q_2' F' + q_0' q_2')' + B(\phi_1', \phi_1' F + \phi_0')]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ FA_2 - A_1 F \end{bmatrix} q_2 + \begin{bmatrix} B_2 F' - F' B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \phi_1 + C'$$

但し  $C$  は  $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0' A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_0' B_2 \\ 0 \end{pmatrix}$  で定義される定数ベクトルである。

$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$  は適当な分割である。このとき

$$\operatorname{div} Z(s) = \nabla Z(s)$$

$$= (\nabla_{q_2} + \nabla_{\phi_1}) Z(s)$$

$$= 0$$

したがって定理 3.1, (2) より成立する

(証明終)

#### 4.2.2. 代数的ルポートの接続

本節では幾つかの非線形ルポートを 4.2.1. で述べたユネクションルポートを介して接続することにより得られるルポートについて考察する。

2つの代数的非線形ルポート  $N_1, N_2$  をユネクションルポート  $N_C$  を用いて接続する。こうしてできるルポート  $N$  は  $n_1 + n_2 + k - 2k_C$  個のポート数を持つ。但し  $n_1$  は  $N_1$  のポート数,  $n_2$  は  $N_2$  のポート数,  $k$  は  $N_C$  のポート数,  $k_C$  は  $N_C$  のポートのうちで接続に用いられたポートの数を表す。

今,  $N_1$  の形態空間を  $\Psi_1 = \{(\xi^1, \eta^1)\}$ ,  $N_2$  の形態空間を  $\Psi_2 = \{(\xi^2, \eta^2)\}$ ,  $N_C$  の形態空間を  $\Psi_C = \{(\xi^C, \eta^C)\}$  とし, それぞれの特性多様体を  $\Sigma_1 (\dim \Sigma_1 = m_1)$ ,  $\Sigma_2 (\dim \Sigma_2 = m_2)$  とする。形態空間の積空間を  $\Psi = \Psi_1 \times \Psi_2 \times \Psi_C$  とし  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  のでの積多様体を  $\Lambda$  とする。すると  $\Lambda$

$$\Lambda = \{(\xi^1, \eta^1, \xi^2, \eta^2, \xi^C, \eta^C) \in \Psi \mid (\xi^1, \eta^1) \in \Sigma_1, (\xi^2, \eta^2) \in \Sigma_2\}$$

である。今  $N_C$  の各ポートのうち第 1 ポートから第  $k_1$  ポートに  $N_1$  の第 1 ポートから第  $k$  ポートをそれぞれの番号に対応する様に接続し  $N_C$  の第  $k_1+1$

ポートから  $k_C = k_1 + k_2$  ポートに  $N_2$  の第1から第  $k_2$  ポートを接続するものをとする。第2章の式(2.2)において  $T_1, T_2, T_C$  を次のように選ぶ:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \eta^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_C \\ U_C \end{pmatrix} = T_C \begin{pmatrix} \xi^C \\ \eta^C \end{pmatrix}$$

但し  $J_1, J_2, J_C (U_L, U_2, U_V)$  はそれぞれ  $N_1, N_2, N_C$  の電流形(電圧形)ポート変数ベクトルとする。変換  $T_1, T_2, T_C$  に対して  $\Psi$  の部分空間  $K$  を

$$K = \{(\xi^1, \eta^1, \xi^2, \eta^2, \xi^C, \eta^C) \in \Psi \mid J_1^i = -J_C^i, U_1^i = U_C^i (i=1 \sim k_1), \\ J_2^\ell = -J_C^{\ell+k_1}, U_2^\ell = U_C^{\ell+k_1} (\ell=1 \sim k_2), QJ_C = 0, BU_C = 0\}$$

とする。但し  $Q(B)$  は  $N_C$  の基本カットセット(ループ)行列を表す。 $\Psi$  の線形部分多様体  $K$  は  $N_1$  と  $N_2$  の接続におけるキルヒホッフ則を表す。

[仮定 4.1]  $\Lambda$  と  $K$  は横断的(transversal)である。

この仮定は実際のシステムでは通常満足されている成生的仮定である。仮定 4.1 が満たされていれば  $\Sigma' \stackrel{\Delta}{=} \Lambda \cap K$  は  $\Psi$  の部分多様体となり、 $N_1$  と  $N_2$  を  $N_C$  を介して接続して得られるポート特性を表す。

今  $\Psi_r \subset \Psi_1 \times \Psi_2$  で  $N_1$  と  $N_2$  のうち接続に用いられない各ポートに対応する部分形態空間を表し  $\Psi_n \subset \Psi_C$  で  $N_C$  のポートのうち接続に使用されないポートに対応する部分形態空間を表せば  $L \stackrel{\Delta}{=} \Psi_r \times \Psi_n \subset \Psi$  は新しくでまるねポート  $N$  の形態空間と同相である。自然な射影  $\pi'$  を  $\pi' : \Psi \rightarrow L$  としその  $\Sigma'$  への制限を  $\sigma'$  とする、すなわち  $\sigma' \stackrel{\Delta}{=} \pi' : \Sigma' / \Sigma' \rightarrow L$  とすれば  $\Sigma' \stackrel{\Delta}{=} \sigma'(\Sigma')$  は  $N$  のポート変数間の拘束を表す。

[仮定 4.2]  $\sigma' : \Sigma' \xrightarrow{\text{into}} L$  は退化しない(中への局所同相)。

仮定 4.2 が満たされない例として 2つのエサキダイオードを直列接続した場合がある<sup>(8)</sup>。さらに詳しい豊富な例と解析が Chua らの最近の論文(40)で論じられている。仮定 4.2 が満たされていれば  $\Sigma$  は  $N$  の(各處で縮退しない)特性多様体となり、その次元(第2章を参照)について  $\dim \Sigma' = \dim \Sigma$  が成立する。仮定 4.1 から

$$\dim \Lambda - \dim \Sigma' = \dim \Psi - \dim K$$

が成立するから<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned}\dim \Sigma &= \dim \Lambda - \dim \Psi + \dim K \\ &= m_1 + m_2 + k - 2k_c\end{aligned}\quad (4.1)$$

となる。 $\dim L = 2(n_1 + n_2 + k - 2k_c)$  であるから  $n_1 + n_2 > m_1 + m_2$  ならば  $N$  は特異であり  $n_1 + n_2 = m_1 + m_2$  ならば  $N$  は正則、それ以外では密となる。以上の議論は一般に 2 つ以上のルポートを接続する場合にも同様にして適用できる。

[定理 4.1] 假定 4.1 と假定 4.2 が満たされていれば

- (1) 相反なルポートを接続してできるルポートは相反である
- (2) 双対相反なルポートを接続してできるルポートは双対相反である
- (3) 調和的ルポートを接続してできるルポートは調和的である

更に新しくできるルポートの次元は式(4.1)で与えられる。

定理 4.1 の証明をする前に次元に関する部分を省くために次に示す例を考えてみる。

[例] 定理 4.1 のルポートの次元に関する部分の例として図 4.1 に示す回路例を考える。こ

の図はナレータ、ノレータおよび電流負インピーダンスコンバータ（それ

ぞれ記号  $0, \infty, \text{INIC}$  で表す）すなわちその特性が

$$v_1 = v_2, i_1 = -i_2$$

で与えられる 2 ポートから構成される 4 ポートである。

ナレータは次元 0

ノレータは次元 2 であり

INIC は正則で次元は 2 で

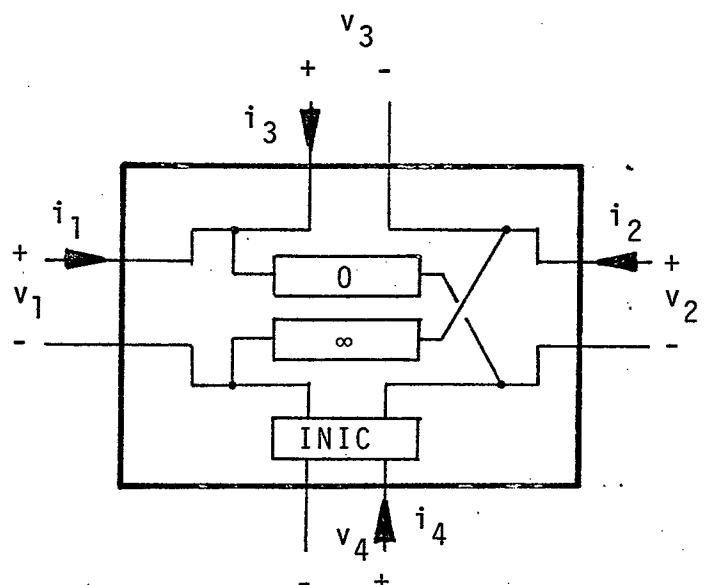


図 4.1 回路例

Fig. 4.1-Network for Example

あるからポート数の和は  $2+1+1=4$  で次元の和  $0+2+2=4$  と等しくなるためこの4ポートは仮定4.1と仮定4.2が満足されれば正則となる。実際この4ポートは表現

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}$$

を持ち正則4ポートとなる。

[注意4.1] 仮定4.2は複合4ポートの特性が多様体となるための条件であり、相反性をどの定義を行うに当り本質的なものではない。この様な(仮定4.2が満足されていない)場合にも相反性が(空間上で考えることにより)定義できることか文献(40)で述べられている。

定理4.1の特別の系として

[系4.1] 仮定4.1と仮定4.2が満たされているならば“正則1ポートを接続してできる4ポートは相反であり次元は4である。

(定理4.1の証明) 2つの4ポートを接続した場合について定理を示せば十分である。今、仮定4.1と仮定4.2が成立しているならば  $N_1$  と  $N_2$  の接続により新しくできる4ポート  $N$  は2章で述べた意味での非線形4ポートになり、その次元は式(4.1)により与えられる。 $N$  の形態空間  $L \subset \Psi$  上での基本1形式を  $\alpha'$  とし  $\pi: \Sigma \rightarrow L$  を恒等写像(insertion)とする。

このとき  $\alpha \triangleq \pi^* \alpha'$  を定義する。更に  $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_c'$  をそれぞれ  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_c$  での  $N_1, N_2, N_c$  の基本1形式とする。このとき  $\alpha_T' = \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_c'$  は  $\Psi$  の1次微分形式となる。今  $\Sigma_1', \Sigma_2', \Sigma_c'$  をそれぞれ  $\Sigma = \Lambda \cap K \subset \Psi$  の  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_c$  への射影多様体とする。このとき  $\Sigma_1 \subset \Psi_1, \Sigma_2 \subset \Psi_2, \Sigma_c \subset \Psi_c$  をそれぞれ  $N_1, N_2, N_c$  の特性多様体とすれば明らかに  $\Sigma_1' \subset \Sigma_1, \Sigma_2' \subset \Sigma_2, \Sigma_c' \subset \Sigma_c$  となる。ここで  $\Sigma_c = \{(\xi^c, \eta^c) \in \Psi \mid QJ_c = 0, BU_c = 0\}$  となることを注意しておく。今  $\alpha_T'$  のうち  $\alpha_1' + \alpha_2'$  を  $N_c$  と接続されるポートの集合とそうでないものの和に

対応する分解により  $\alpha_1' + \alpha_2 = \Sigma(\text{接続}) + \Sigma(\text{残り})$  と書く。同様に  $\alpha_C'$  を  $N_1, N_2$  と接続されているポートの集合とそうでないものとの和に分解して  $\alpha_C' = \Sigma_C(\text{接続}) + \Sigma(\text{新})$  と書くと  $\alpha_T' = \Sigma(\text{接続}) + \Sigma_C(\text{接続}) + \Sigma(\text{残り}) + \Sigma(\text{新})$  となる。ここで  $\pi_T: \Sigma' \rightarrow \Psi, \pi_1: \Sigma_1' \rightarrow \Psi_1, \pi_2: \Sigma_2' \rightarrow \Psi_2, \pi_C: \Sigma_C' \rightarrow \Psi_C$  を恒等写像とすれば  $\alpha_T'$  の  $\Sigma$ への制限  $\alpha_T$  は  $\alpha_T = \pi_T^* \alpha_T' = \pi_1^* \alpha_1' + \pi_2^* \alpha_2' + \pi_C^* \alpha_C'$  と書くことができる。 $\pi_T^* [\Sigma(\text{接続}) + \Sigma_C(\text{接続})] = 0$  が成立するから  $\alpha_T = \pi_T^* [\Sigma(\text{残り}) + \Sigma(\text{新})] = \pi_T^* \pi' * \alpha'$  となる。但し  $\pi': \Psi \rightarrow L$  で定義される自然な射影である。ここで  $\Sigma' \xrightarrow{\pi_T} \Psi \xrightarrow{\pi'} L$  であるまでも  $\Sigma' \xrightarrow{\sigma'} \Sigma \xrightarrow{\pi} L$  であるから

$$\pi' * \pi_T = \pi * \sigma'$$

となる。したがって

$$\pi_T^* \pi' * \alpha' = (\pi * \sigma') * \alpha' = \sigma' * \pi * \alpha'$$

であるから  $\alpha_T = \sigma' * \alpha$  となる。定理 4.1 の(1) は仮定から

$$d\pi_1^* \alpha_1' = 0, \quad d\pi_2^* \alpha_2' = 0, \quad d\pi_C^* \alpha_C' = 0$$

であるから

$$d\alpha_T = 0 \iff d * \sigma' * \alpha = \sigma' * d\alpha = 0 \iff d\alpha = 0$$

となり成立する。(2) も同様にして成立し、(3) は(1) と(2) から導かれる。

(証明終)

2 ポートジャイレータと理想変成器は双対相反である、わしくはジャイレータはひすみ相反で理想変成器は調和的であることは 2 章の結果より分かる。定理 4.1 の例として 2 ポートジャイレータを 2 個縦列接続したもののが理想変成器になることはよく知られている。(7)

例えば  $\xi_i^1 d\eta_i^1 + \xi_i^C d\eta_i^C$  が  $\xi_i^1 = q_i^{-1}, \eta_i^1 = v_i^1, \xi_i^C = q_i^C, \eta_i^C = v_i^C$ とした場合ポートの接続により 0 になることは  $dv_i^C = dv_i^1$  であり  $q_i^C = \frac{t}{t_0} i_i^C dt$   $= -\frac{t}{t_0} i_i^1 dt = -q_i^1$  より分かる。

### 4.3 複合混成 n ポート

複合混成 n ポート  $\mathcal{H}$  は  $\ell$  個の部分混成 n ポート  $\mathcal{H}_i$  の接続により図 4.3 に示す様に構成されるものとする。各部分混成 n ポート  $\mathcal{H}_i$  は表現

$$\dot{z}_i = -f_i(h_i(z_i), u_i)$$

$$y_i = g_i(h_i(z_i), u_i)$$

を持つ。ここで  $f_i: R^{p_i} \times R^{s_i} \rightarrow R^{p_i}$ ,  $g_i: R^{p_i} \times R^{s_i} \rightarrow R^{s_i}$ ,  $h_i: R^{p_i} \rightarrow R^{p_i}$  はそれぞれ連続微分可能であり、更に  $\partial h_i / \partial z_i = (\partial h_i / \partial z_i)'$  が成立する。 $\mathcal{H}$  は電流源とインタクタのみから成るカットセット及び電圧源とキャパシタのみから成るループを持たないと仮定する。 $\mathcal{H}$  の表現式が存在すると仮定すれば

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -F(H(z), u) \\ y &= G(H(z), u) \end{aligned} \tag{4.2}$$

と書ける。ここで  $F: R^p \times R^S \rightarrow R^p$ ,  $G: R^p \times R^S \rightarrow R^S$ ,  $H: R^p \times R^P$  は連続微分可能

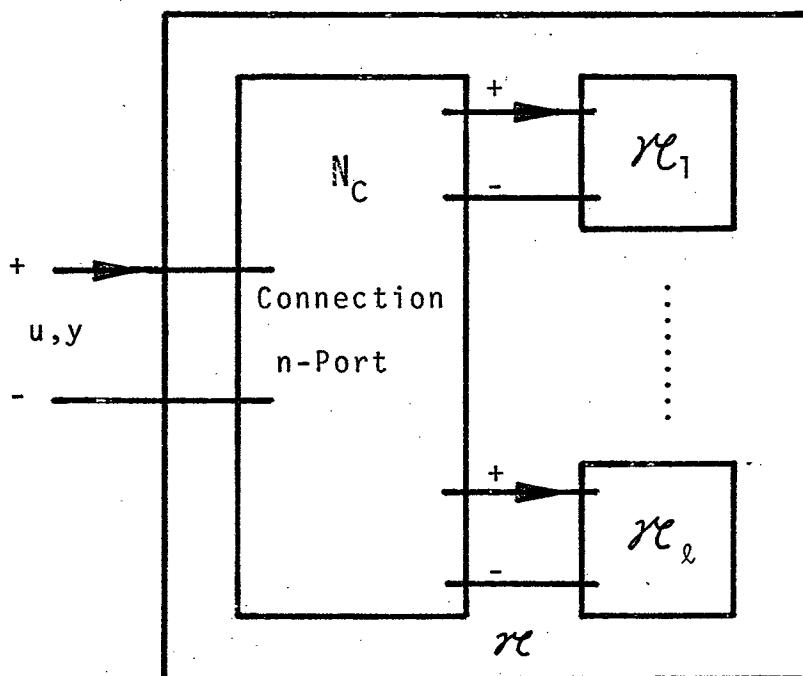


図 4.2 複合混成 n ポート

Fig. 4.2-Composite Mixed n-Port

であり  $\partial H / \partial z = (\partial H / \partial z)^T$  が成立する。更に  $p = \sum_{i=1}^{\ell} p_i$ ,  $z = (z_1^T, \dots, z_\ell^T)^T$  である。

[定理4.2]  $\mathcal{H}$ を式(4.2)で表される複合混成ノードとする。このとき

(1) 部分ノード  $\mathcal{H}_i$ , ( $i=1, \dots, \ell$ ) がすべて局所受動ならば  $\mathcal{H}$  も局所受動である。

(2) 部分ノード  $\mathcal{H}_i$ , ( $i=1, \dots, \ell$ ) がすべて受動であるならば  $\mathcal{H}$  は受動である。

(証明) (2)について示す。Tellegen の定理<sup>(52)</sup>によリ

$$u^T y = \sum_{i=1}^{\ell} u_i y_i \quad (4.3)$$

が成立する。 $\mathcal{H}_i$  は受動であるから  $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$  に対して

$$\int_0^t u_i^T(\tau) y_i(\tau) d\tau + \varepsilon_i(z_i(0)) \geq 0$$

$$\text{ここで } \varepsilon_i(z_i) = \int_0^{z_i} h_i(\zeta_i) d\zeta_i \text{ である。}$$

したがって

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{\ell} u_i^T(\tau) y_i(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{\ell} \varepsilon_i(z_i(0)) \geq 0 \quad (4.4)$$

ここで ループ、カットセットは存在しないという仮定から

$$\sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i(z_i(0)) = \varepsilon(z(0))$$

である。(4.4)式を書き換えると

$$\int_0^t u^T y d\tau + \varepsilon(z(0)) \geq 0$$

となり成立する。(1) は Tellegen の定理から

$$(u^T - u^T)(y^T - y^T) = \sum_{i=1}^{\ell} (u_i^T - u_i^T)(y_i^T - y_i^T)$$

であるから同様に証明できる。但し、ここで  $u_i^T, y_i^T, u_i^T, y_i^T$  は  $\mathcal{H}_i$  の許容入出力対である。

(証明終)

[定理 4.3]  $\pi$  を式 (4.2) で表される複合混成ゲートとする。 $\pi$  の外部ゲートがループおよびカットセットを作らないならば

- (1) 部分ゲート  $\pi_i$  がすべて消散的であるならば  $\pi$  は消散となる
- (2) 部分ゲート  $\pi_i$  がすべて局部消散的ならば  $\pi$  も局部消散的となる
- (3) 部分ゲート  $\pi_i$  がすべて実質消散的ならば  $\pi$  も実質消散。

(証明)  $u_I = (u_1', \dots, u_\ell')'$ ,  $y_I = (y_1', \dots, y_\ell')$  とすれば外部ゲートのカットヒットとループが存在しないから文献(34)の定理 2 より

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_I \\ y_I \end{pmatrix}$$

とかけろ。ここで  $P \in R^{2n \times 2\ell}$  は  $+1, -1, 0$  から成り各行は非零要素を含む。したがって  $u(t) \equiv 0 \Rightarrow u_I(t) \equiv 0$  となり定理 4.2 の証明から従う。

(証明終)

#### 4.4 結 言

この章ではいくつかのゲートを組合せができる複合ゲート系について考察した。4.2.では代数的ゲートについて相反性か、4.3.では混成ゲートについて受動性か、それぞれ接続により保存されることを述べた。

## 第 5 章 非線形ゲート抵抗の寄生リアクタンスによる正規化モデル

### 5.1. 緒 言

陽極同調発振器や自走マルチバイブレーターの様に跳躍現象を伴う応答を持つ回路網は寄生リアクタンスの存在を考慮することにより厳密な解析がえることはよく知られている。一方正規形微分方程式で記述できない回路網の動的挙動の定性的・定量的解析を行う際に自然に存在する寄生リアクタンスを考慮することにより正規形回路微分方程式を得て解析を容易にすくことができる。例えは、図 5.1 に示す回路を考える。この回路の非線形抵抗は回路 (b) の様な電圧制御形抵抗とすると正規形微分方程式による記述はできないがポート 1, 1' に  $\epsilon C_1$  なる寄生キャパシタの存在を考慮すると回路微分方程式は正規形となる。一方ポート 2, 2' に  $\epsilon C_2$  なる寄生キャパシタの存在を考慮してもやはり正規形表現が可能である。この様な回路モデルを寄生リアクタンスによる正規化モデルと呼ぶが今の例でも分子通り正規化の方法は一通りとは限らず寄生リアク

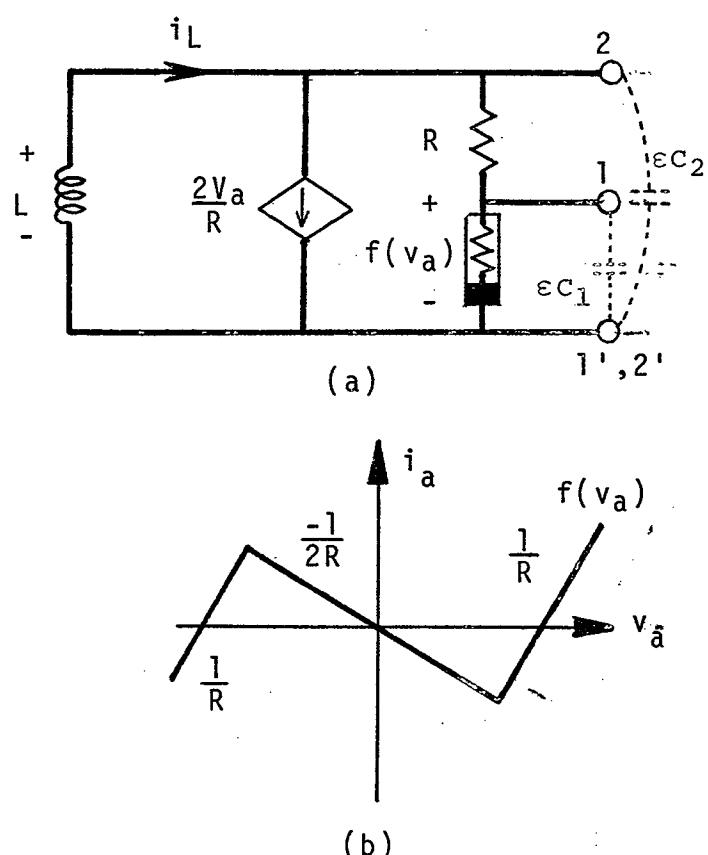


図 5.1 非正規回路の例

Fig. 5.1-Example of an Improper Network

クタンスの付加の方法に従って異った正規化モデルが得られる。この回路例で  $\varepsilon c_1$  による正規化モデルを  $N_1$ ,  $\varepsilon c_2$  による正規化モデルを  $N_2$  とし、それぞれの状態方程式の平衡点  $(0,0)$  の性質について調べてみると  $N_1$  では鞍点,  $N_2$  では安定結節点あるいは安定過心点となることが判る。このことは  $N_1$  と  $N_2$  の平衡点近傍でのふるまいが本質的に異なることを意味し、従つていつれか一方を原回路網のモデルとして採用するとか妥当ではないということになる。正規化モデルの妥当性を調べうこと、すなわち異った正規化法によって得られたいくつかの正規化モデルの原回路網の電子枝に対応する枝の応答の(各時刻での)差が寄生リアクタンスの大きさとのオーダーで抑えられるかどうかを調べることは非線形回路網のモデル化に際して重要な問題である。Chua, Alexander<sup>(28)</sup> は一つの寄生リアクタンスを用いて正規化できる非正規回路の正規化モデルについて上記の意味における等価性を考察している。本章では一般に複数個の寄生キャパシタ(またはインダクタ)による正規化について、その正規化モデルのとに関する漸近的等価性を考察し、いくつかの十分条件を示すこととする目的である。本章ではさらに正規化により発生する他の問題についての考察も行う。

まず 5.2 では問題の定式化と寄生パラメータを持つ微分方程式についての Pontryagin<sup>(30)</sup> の結果のまとめを行う。

5.3 では 2 つの異なる正規化の等価条件を述べる。

5.4 では寄生リアクタンスを持たせたモデルが正規形表現を持つにむかかわらず解の唯一性が破れる様に見える場合のあることを述べ解の一意性?についての十分条件を考察する。

5.5 では数値計算に要する手間を省くための正規化に要するリアクタンスを削減する方法について述べる。

## 5.2 問題の定式化

この節は微小パラメータを含む微分方程式の特異擾動に関するポイントリヤー・モン<sup>(3)</sup>の結果の解説と問題の定式化について述べる。

### 5.2.1 基 础

寄生素子の値は一般的に十分小さいと考えられる。非線形回路理論の分野ではこれを十分小さな正数 $\epsilon$ に比例して小さな値をとる線形素子として扱う<sup>(2)</sup>。回路変数の集合 $X$ が完全であるとはその回路網の他のすべての変数が $X$ から定まりしかも $X$ がその性質を持つ回路変数の集合のうちで最小のものであるときに言う。また動的非線形回路がプロバーであるとは動的に独立な完全集合 $X$ が存在して回路方程式が正規形

$$\dot{x} = f(x, t)$$

で表され、更に任意に与えられた初期値と初期時刻に対して一意解が存在するときに言う。そうでないときはインプロバーであると言う。

[定義5.1] 与えられた回路網 $N$ からすべての寄生容量を解放除去しすべての寄生インタクタを短絡除去してできる回路網 $\hat{N}$ を $N$ の原回路と言う。

[定義5.2] 与えられた2つの寄生素子を含む回路網 $N_1$ と $N_2$ はその原回路 $\hat{N}_1, \hat{N}_2$ が等しいとき $\epsilon$ -等価であると言う。

[定義5.3] 2つの $\epsilon$ -等価な回路網 $N_1$ と $N_2$ の初期状態が両立するとは

- (i) 寄生容量枝の初期電流と寄生インタクタ枝の初期電圧がともにオーダー $= 0(\epsilon)$ であり、かつ
- (ii)  $\hat{N}_1$ と $\hat{N}_2$ の対応する枝の初期電流と初期電圧が共に相等しい、更に
- (iii) 回路は安定状態にある、すなわち状態が瞬時に他の状態に移行する様なことがない。

[定義5.4] 原回路 $\hat{N}$ の寄生リアクタンスによるプロバーを正規化モデル $N$ の初期値 $x_0$ が有効であるとは $N$ の初期値が $\hat{N}$ の初期値と両立するとき(すなわち、 $\hat{N}=N$ とみなして) はいふても $N$ の解答は一意に決定

するときに言う。更にこの条件を満足するすべての  $x_0 \in R^m$  が有効であるとき正規化モデル  $N$  は有効であると言う。

[注意 5.1] プロパーな正規化モデル  $N$  が有効でない様な例は多く存在する。後で述べる  $N$  のはやい動作を記述する方程式の跳躍先が常に安定平衡点であることが有効であるための必要十分条件となる。

[定義 5.5] 2つの有効な  $\varepsilon$ -等価回路  $N_1, N_2$  は初期値が  $x_0$  で両立するとき ( $x_0$  は  $\hat{N} \triangleq \hat{N}_1 = \hat{N}_2$  の状態を表す) それぞれの対応する枝の解が  $[t_0, T]$  において  $\varepsilon \rightarrow 0$  で一様に同一の極限に近づくとき原回路  $\hat{N}$  と初期値  $x_0$  に対して 等価な正規化モデル であるという。更にほとんどすべての初期値  $x_0$  で等価であるならば等価な正規化モデルであるという。

本章では微小パラメータを含む微分方程式

$$\dot{y} = G(x, y), \quad \varepsilon \dot{x} = F(x, y) \quad (5.1)$$

を扱う。ただし  $G$  および  $F$  はそれぞれ連続微分可能な関数で  $G: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ ,  $F: R^n \times R^m \rightarrow R^m$  である。この方程式系については文献(30)において次の事実が証明されている。

[方程式系 (5.1) のふるまい]

今方程式 (5.1) の  $\varepsilon$  を十分小さくとったときの解を

$$x = \phi(t, \varepsilon), \quad y = \psi(t, \varepsilon) \quad (5.2)$$

とすれば、これは初期値が両立するならば、以下で構成される軌道と有限時間内において  $\varepsilon$  のオーダーで一様に近似される。

九次元面  $F = \{(x, y) \in R^{n+m} \mid F(x, y) = 0\}$  上で  $(\partial F / \partial x)$  の固有値が負の実部を持つ領域を“おそい領域”といい  $F^+$  で表す。そうでない領域を  $F^-$  とする。(a)  $F^+$  上に初期状態  $(x_0, y_0) \in R^n \times R^m$  をとると  $F^+$  上では軌道は退化システム

$$\dot{y} = G(f(y), y), \quad y(t_0) = 0 \quad (5.3)$$

但し  $F(f(y), y) = 0$  である。

で与えられる。(b) この軌道は時刻  $t = t^- > t_0$  で  $D = \det(\partial F / \partial x) = 0$  を満

する  $F^+$  の境界  $\gamma$  に到達しそこで  $\lambda(\partial F / \partial x)$  のうち 1 つが 0 になると仮定する。この点を  $(x^-, y^-)$  で表せば軌道はもはや  $F$  上を動くことはできず  $\varepsilon \rightarrow 0$  で無限大の速度をもつ微分方程式

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = F(x, y^-) \quad (5.4)$$

$$x(t^-) = x^-$$

で規定される  $n$  次元空間  $y = y^-$  (一定) を動く。ここで  $\gamma$  上の点から出る (5.4) の解軌道は 1 つでありまた (5.4) のアトラクションとしては平衡点のみであると仮定し、そのうちの 1 つの安定平衡点  $(x^+, y^+) \in F^+$  に軌道は到達すると仮定する。 $(x^-, y^-)$  は跳躍における始点、 $(x^+, y^+)$  は終点でありこれらは跳躍条件

$$\begin{aligned} F(x^-, y^-) &= 0 & \det(\partial F / \partial x)|_{(x^-, y^-)} &= 0 \\ y^+ &= y^- & F(x^+, y^+) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

を満足する。 $(x^-, y^-)$  から  $(x^+, y^+)$  への移動は  $\varepsilon$  が十分小さければ瞬時に行われる。こうして軌道は再度  $F^+$  中を (5.3) 式に従って初期条件  $y(t^+) = y^+$  の下で動く。ここで  $t^- = t^+(\varepsilon \rightarrow 0)$  とする。

### 5.2.2. 正規化モデルの定式化

図 5.2(a) のインプローパーを非線形回路  $\hat{N}$  を考えよう。 $\hat{N}$  は  $p$  個のキャパシタと入力個のインダクタを含む。これらの素子は非線形であり

$$C_i(v_{C_i}) > k > 0, \quad L_j(iL_j) > k > 0$$

の特性を持つ。抵抗素子のみから成る回路  $N_R$  は時不变非線形 2 端子抵抗、相反マルチポートおよび直流独立電源のみから成る。今  $\hat{N}$  に寄生キャパシタンス (インダクタンス) を開放 (短絡) 端子  $1$  から  $S$  に接続して同図 (b) に示す正規化回路  $N^A$  を作る。これらをそれぞれ  $\varepsilon C_1, \dots, \varepsilon C_S$  とする。本論文では寄生キャパシタによる正規化のみを論ずるが寄生インダクタによる場合もまったく同様である。両方が混合した場合はこの章

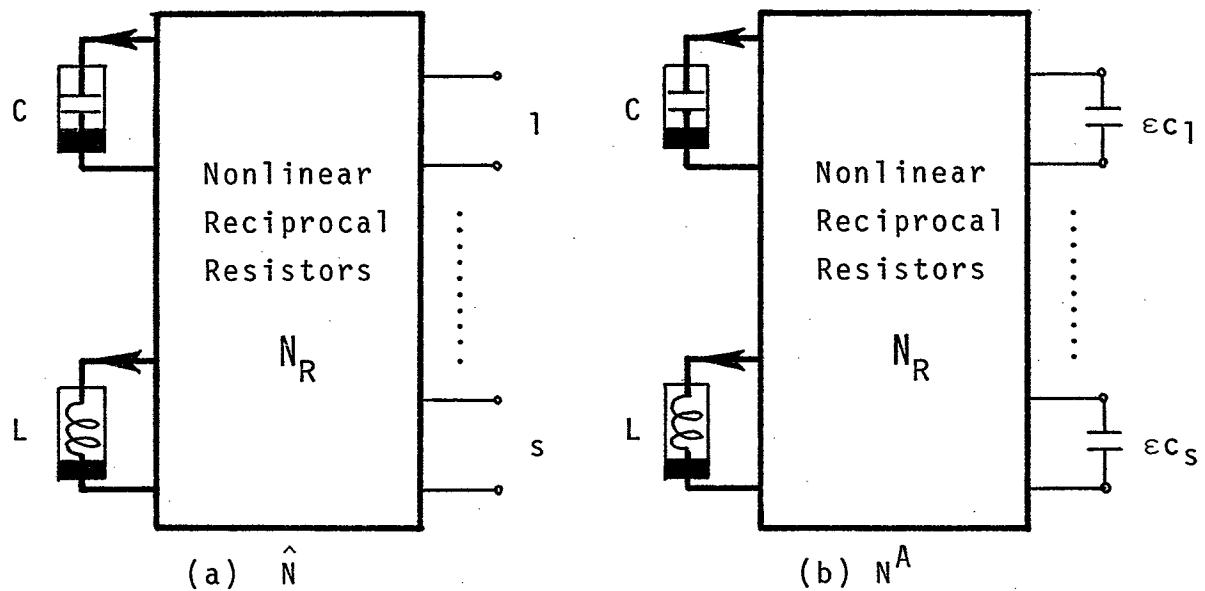


図 5.2 非線形回路網の一般形

Fig.5.2-Form of General Nonlinear Network

では考察しない。今図 5.3 に示す様に 2通りの方法で  $\hat{N}$  が正規化される場合を考える。すなわち、図 5.3においてポート 1, ..., s とポート 1', ..., s' のどちらか一方に寄生キャパシタを付加することにより図 5.2(b) に示す正規化回路が得られる場合を考える。1つの原回路  $\hat{N}$  から構成されるこれら 2つの  $\varepsilon$  等価な回路をそれぞれ  $N_1^A$ ,  $N_2^A$  とする。このとき( $\gamma + \lambda + 2s$ ) - ポート  $N_R$  は

$$\begin{pmatrix} i_C \\ v_L \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_C(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_L(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_1(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_2(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{pmatrix} = f(v_C, i_L, v_1, v_2) \quad (5.6)$$

により特性づけられる。ここで  $f$  は連続可微分である。

電圧源とキャパシタ(寄生キャパシタを含めて)のみから成るループ及び電流源とインダクタのみから成るカットセットは存在しないと仮定する。また状態変数の次元は  $N_1^A$  や  $N_2^A$  の動的自由度に一致していると仮定する。このとき  $v_C, i_L, v_1$  は  $N_1^A$  の状態変数となる。 $N_1^A$  は  $\gamma$  ポロペーである

からこれらは完全集合を構成する。

従がつて  $v_2$  はこれらから一意に定まり  $N_2^A$  に対しても同様に

$$v_i = v_i(v_C, i_L, v_j), i \neq j \in \{1, 2\}$$

と表せる。  $N_1^A, N_2^A$  に対する正規形方程式はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \\ \varepsilon \dot{v}_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C^{-1} f_C(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ L^{-1} f_L(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ D_2^{-1} f_1(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \\ \varepsilon \dot{v}_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C^{-1} f_C(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ L^{-1} f_L(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ D_2^{-1} f_2(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots \quad (5.8)$$

となる。ここで  $C = \text{diag}(c_1(v_C), \dots, c_s(v_C))$ ,  $L = \text{diag}(L_1(i_{L1}), \dots, L_\lambda(i_{L\lambda}))$  で寄生素子以外のキャパシタンス及びインダクタンス行列を表し,  $D_i = \text{diag}(c_{i1}, \dots, c_{is})$ , ( $i=1, 2$ ) は回路  $N_i$  の寄生キャパシタンスに比例する(強さ)を表す行列である。

以上の議論は図 5.4 に示す回路についても適用される。この図では九ポート抵抗  $N_{R1}$  は非相反なマルチポート非線形抵抗を許す。 $N_{R2}$  は相反を抵抗素子のみから成るものとする。 $N_{R1}$  と  $N_{R2}$  を接続する  $\ell$  個のポートにおけるポート変数を  $y \in R^\ell$  とする。  $y$  は各ポートの電圧又は電流の一方から成り非寄生素子の状態から一意に決定されると仮定する。すなわち

$$y = H(v_C, i_L) \quad (5.9)$$

である。 $H$  は連続可微分であるとする。さらに  $y$  と寄生キャパシタ電圧  $v_1$  or  $v_2$  は  $N_{R2}$  の完全集合であると仮定する。2通りの  $\hat{N}$  を正規化するた

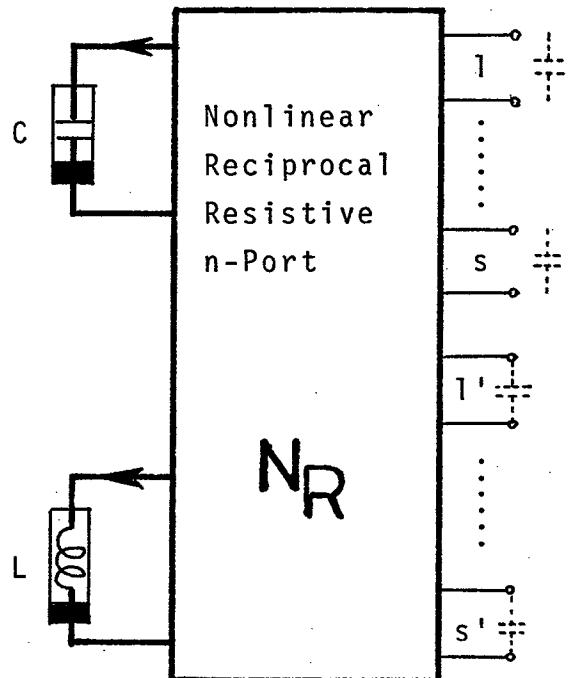


図 5.3 考察する回路モデル  
Fig. 5.3-Network under Consideration

めの寄生素子ポートを相反マルチポート抵抗 $N_{R2}$  から離す。抵抗回路の $N_{R2}$  は特性

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(v_1, v_2, y) \\ F_2(v_1, v_2, y) \\ F_x(v_1, v_2, y) \end{bmatrix} = F'(v_1, v_2, y) \quad (5.10)$$

を持つ。ここで  $F'$  は連続微分可能な関数である。 $N_{R1}$  は特性が

$$\begin{bmatrix} i_C \\ v_L \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_C(v_C, i_L, x) \\ F_L(v_C, i_L, x) \\ H(v_C, i_L) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

で表される。 $F_C, F_L$  はそれぞれ連続微分可能な関数である。5.10) 式' と (5.11)式より 図 5.4 のマルチポート抵抗は

$$\begin{bmatrix} i_C \\ v_L \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_C(v_C, i_L, F_X(v_1, v_2, H(v_C, i_L))) \\ F_L(v_C, i_L, F_X(v_1, v_2, H(v_C, i_L))) \\ F_1(v_1, v_2, H(v_C, i_L)) \\ F_2(v_1, v_2, H(v_C, i_L)) \end{bmatrix} = f(v_C, i_L, v_1, v_2) \quad (5.12)$$

となる。 $f$  は連続微分可能な関数である。 $N_{R2}$  の仮定から  $y \leq v_1, y \leq v_2$

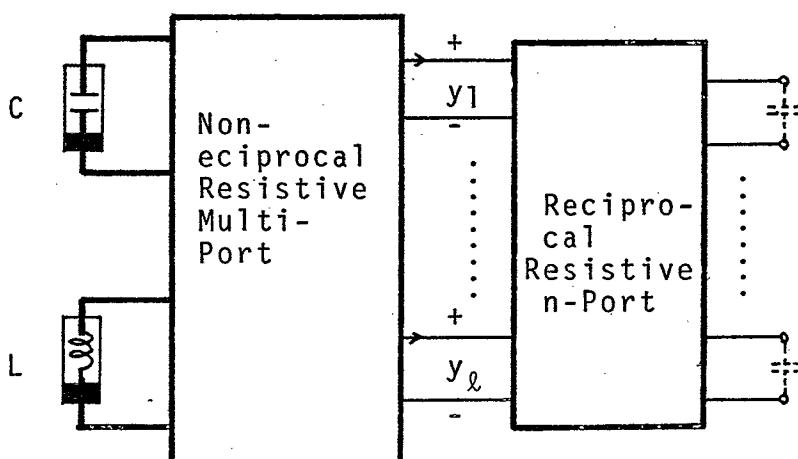


図 5.4 非相反素子を含む場合  
Fig. 5.4-Networks with Nonreciprocal Resistor

はそれぞれ  $N_{R_2}$  の完全集合であるから

$$\begin{aligned} v_2 &= V_2'(H(v_C, i_L), v_1) = V_2(v_C, i_L, v_1) \\ v_1 &= V_1'(H(v_C, i_L), v_2) = V_1(v_C, i_L, v_2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

と表せる (5.12) と (5.13) 式から前と同様  $N_1, N_2$  に対する正規形方程式 (5.7) 式' と (5.8) 式' を得る。

### 5.3 正規化モデルの等価条件

5.2 節で考えた図 5.3 または 5.4 に示す回路モデルを考える。これらの回路の 2通りの正規化回路  $N_1^A, N_2^A$  の状態方程式は (5.7) 式' と (5.8) 式' で与えられる。仮定から双方のモデルにおいて

$$G = \frac{\partial(f_1', f_2')}{\partial(v_1', v_2')}$$

は対称行列となる。従って 2 回連続微分可能な関数  $P: R^{2s+\gamma+\lambda} \rightarrow R^1$  が存在して

$$\begin{aligned} f_1(v_C, i_L, v_1, v_2) &= \frac{\partial P}{\partial v_1}(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_2(v_C, i_L, v_1, v_2) &= \frac{\partial P}{\partial v_2}(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{aligned} \quad (5.14)$$

と表すことができる。

$N$  の正規化モデルを  $N_1^A, N_2^A$  としそれぞれの遅い領域  $S_1, S_2$  の境界  $\partial S_1, \partial S_2$  で跳躍条件が満たされているものとする。また勾配系 (5.14) 式' スカラーポテンシャル  $P$  は

$$\lim_{\|v_1\| \rightarrow \infty} P = \infty, \quad \lim_{\|v_2\| \rightarrow \infty} P = \infty$$

を満足するものとする。これは微分方程式 (5.7) と (5.8) の解の有界性を保証するものである。 $N_1^A, N_2^A$  の任意の跳躍点  $v_1^* \in R^{n_1}, v_2^* \in R^{n_2}$  に対して次の様なレベルセットを定義する。

$$L_1(\lambda) = \{(v_1, v_2) \in R^{n_1+n_2} \mid P(v_1, v_2) \leq \lambda, f_2(v_C^*, i_L^*, v_1, v_2) = 0\}$$

$$L_2(\lambda) = \{(v_1, v_2) \in R^{n_1+n_2} \mid P(v_1, v_2) \leq \lambda, f_1(v_C^*, i_L^*, v_1, v_2) = 0\}$$

[定理5.1] 次の条件が成立するならば  $N_{A_1}^A$  と  $N_{A_2}^A$  は漸近的等価となる。

(1) すべての  $(v_C, i_L, v_1, v_2) \in R^{n_C+n_L+n_1+n_2}$  に対して  $(\partial f_1 / \partial v_1)$  および  $(\partial f_2 / \partial v_2)$  は共に正定である。

(2) 等位集合  $L_1(P(v_1^*, v_2^*)), L_2(P(v_1^*, v_2^*))$  の連結成分のうち跳躍点  $(v_1^*, v_2^*)$  を含むものをそれぞれ  $L_1^0, L_2^0$  とし、すべての  $\lambda \leq P(v_1^*, v_2^*)$  に対して  $L_1(\lambda), L_2(\lambda)$  の  $L_1^0, L_2^0$  に含まれる部分集合を  $L_1^0(\lambda), L_2^0(\lambda)$  としたとき  $L_1^0(\lambda), L_2^0(\lambda)$  のいずれかが凸集合である。

証明を見やすくするために方程式 (5.7) と (5.8) に変数変換

$$R^S \in X_1 = \sqrt{D_1} v_1$$

$$R^S \in X_2 = \sqrt{D_2} v_2$$

$$R^{\lambda+\gamma} \in Y = (y_1, y_2) = (v_C, i_L)$$

を施す。ここで  $D_i = \text{diag}(\sqrt{c_i} i_1, \dots, \sqrt{c_i} i_S)$ ,  $i=1, 2$  である。このとき方程式 (5.7) および (5.8) はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \epsilon \dot{x}_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G(y, x_1, x_2(y, x_1)) \\ F_1(y, x_1, x_2(y, x_1)) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G(y, x_1(y, x_2), x_2) \\ F_2(y, x_1(y, x_2), x_2) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

と表せる。但し、

$$G(y, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} C^{-1} f_C(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \\ L^{-1} f_L(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1(y, x_1, x_2) \\ F_2(y, x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} f_1(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \\ D_2^{-1} f_2(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \end{bmatrix}$$

である。また

$$x_1(y, x_2) = \sqrt{D_1} v_1(y_1, y_2, \sqrt{D_2}^{-1} x_2)$$

$$x_2(y, x_1) = \sqrt{D_2} v_2(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1)$$

である。ここで  $\partial(F_1, F_2)/\partial(x_1, x_2)$  は対称行列となるから 2 回連続微分可能な関数  $\Phi: \mathbb{R}^{2s+\gamma+\lambda} \rightarrow \mathbb{R}^1$  が存在して

$$F_1(y, x_1, x_2) = (\partial \Phi / \partial x_1)(y, x_1, x_2)$$

$$F_2(y, x_1, x_2) = (\partial \Phi / \partial x_2)(y, x_1, x_2)$$

と書くことができる。(5.14) 式の  $P(v_C, i_L, v_1, v_2)$  と  $\Phi$  の間に簡単な計算によつて

$$\Phi(y, x_1, x_2) = P(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1}x_1, \sqrt{D_2}^{-1}x_2) \quad (5.17)$$

が成立していることが分かる。

今  $(y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2s+\gamma+\lambda}$  空間内で  $N_1^A, N_2^A$  に対する(5.15)(5.16)式の  $\varepsilon = 0$ としたときの退化システムを考える。これらのシステムのフローはそれぞれ超曲面

$$M_1 = \{(y, x_1, x_2); F_1 = 0, x_2 = X_2(y, x_1)\}$$

$$M_2 = \{(y, x_1, x_2); F_2 = 0, x_1 = X_1(y, x_2)\}$$

上で存在し,  $x_2 = X_2(y, x_1)$  は  $F_2 = 0$  の解,  $x_1 = X_1(y, x_2)$  は  $F_1 = 0$  の解であるから  $M_1 = M_2 = M = \{(y, x_1, x_2); F_1 = 0, F_2 = 0\}$  となる。さらに  $N_1$  と  $N_2$  は  $\varepsilon$  等価であるから同じ退化システム  $\hat{N}$  を持つ。 $M$  上で  $-(\partial F_1(y, x_1, x_2(y, x_1)) / \partial x_1)$  の固有値が負または 0 の実部を持つ領域  $M_1^+$  はシステム  $N_1^A$  のおそれい領域であり  $M_1^+$  の  $O(\varepsilon)$  近傍から出発する解は  $M_1^+$  の境界に到達するまでは退化システム  $\hat{N}$  に従って  $M_1^+$  の  $O(\varepsilon)$  近傍を動く。今  $\hat{F}_1(y, x_1) = F_1(y, x_1, X_2(y, x_1))$  と書くと陰関数の微分法とチェイン則<sup>(5)</sup>により

$$\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \quad (5.18)$$

を得る。同様に  $\hat{F}_2(y, x_2) = F_2(y, X_1(y, x_2), x_2)$  とおくと

$$\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)^{-1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \quad (5.19)$$

となり  $N_2$  のおそれい領域  $M_2^+$  は  $-\partial \hat{F}_2 / \partial x_2$  が負の実部を持つ領域で与えられる。

[補題5.1]  $A, B$ を $n$ 次正定実対称行列とし、 $C$ を任意の $m \times n$ 実長方形行列とすれば"  $(A - CB^{-1}C')$  が正定であることと  $(B - C'A^{-1}C)$  が正定であることは同値であり明らかに双方とも対称行列である。

(証明)  $(m+n) \times (m+n)$  實対称行列

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix}$$

は補題の条件の下で次の様に分解できる

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ C'A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & CB^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - CB^{-1}C' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}C' & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さらに対称性により適当な $n \times n$ 直交行列 $P_1, P_1'$ および $m \times m$ 直交行列 $P_2, P_2'$ により

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^t & 0 \\ 0 & P_2^t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A - CB^{-1}C' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1' & 0 \\ 0 & P_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \gamma_m \delta_1 \dots \delta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1'^t & 0 \\ 0 & P_2'^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。ここで $\alpha_i > 0, \delta_j > 0$ である。したがって適当なブロック三角行列 $K$ および $K'$ により

$$\begin{aligned} D &= K^t \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} K \\ &= K'^t \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \gamma_m \delta_1 \dots \delta_m \end{pmatrix} K'^t \end{aligned}$$

と書ける。 $\alpha_i > 0, \delta_j > 0$ であるから $\beta_j > 0, \gamma_i > 0$  ( $i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ )となり補題は示された。 (証明終)

[補題5.2] 次式が成立する

$$(a) \quad \hat{F}_1(y, x_1) = (\partial/\partial x_1)\Phi(y, x_1, x_2(y, x_1))$$

$$(b) \quad \hat{F}_2(y, x_2) = (\partial/\partial x_2)\Phi(y, X_1(y, x_2), x_2)$$

[注意 5.2] 補題 5.2 は関数の合成と微分の操作が交換できることを示す。すなわち  $\partial f(x, y)/\partial x|_{y=h(x)} = \partial f(x, h(x))/\partial x$  が成立することを表す。もちろんこのことは一般の場合には成立しない。

[補題 5.2 の証明] (a) について示す。右辺を微分すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Big|_{x_2=X_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \Big|_{x_2=X_2}$$

となり第 2 項は  $x_2=X_2$  が方程式  $\partial \Phi / \partial x_2 = 0$  の解であるから 0 となる。 (b) も同様である。 (証明終)

補題 5.2 は方程式 (5.15) と (5.16) が勾配系であることを示すから、安定平衡点以外のアトラクションを持たない。さらにヤコビ行列  $(\partial \hat{F}_1 / \partial x_1)$  及び  $(\partial \hat{F}_2 / \partial x_2)$  は対称であるから  $M^+$  の境界では  $\det(\partial \hat{F}_2 / \partial x_2) = 0$ ,  $\det(\partial \hat{F}_1 / \partial x_1) = 0$  となる。このときつきの仮定をする。

[仮定 5.1]  $M^+$  の境界でヤコビ行列  $(\partial \hat{F}_1 / \partial x_1)$  の 1 個の固有値のみ 0 となり、さらに方程式 (5.20) の安定平衡点では  $(\partial \hat{F}_1 / \partial x_1)$  は正定である。

[注意 5.3] この仮定は“生成的”な仮定であり、ほとんどすべての場合には成立している。ほとんどすべての場合には成立しているとは実際のシステムでは起こらないといふ意味である。

[定理 5.1 の証明]

条件 (1) と補題 5.1 を式 (5.18) (5.19) に適用すれば  $M_1^+ = M_2^+ = M^+$  を得る。こうして  $N_A^1$  と  $N_A^2$  のおそい領域  $M^+$  は一致するから初期値が両立するならば  $\varepsilon \rightarrow 0$  に対して  $N_A^1$  と  $N_A^2$  の解は  $M^+$  上では退化システム  $\hat{N}$  の解と  $\varepsilon$  のオーダーで一様に近似されるので  $\varepsilon \rightarrow 0$  で同一の極限に近づく。

次に  $N_A^1$  と  $N_A^2$  の解が  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき “はやい領域” で一致することを示そう。ここでは  $N_A^1, N_A^2$  の軌道は退化システムで近似することは出来ずかわりに  $\varepsilon \rightarrow 0$  に対してジャンプ則を満足する。今  $M^+$  上の退化システムの

軌道が  $t=t^-$  に  $M^+$  の境界に到達したと仮定すると “はやい領域” に入る。  
 $N_1$  と  $N_2$  のはやい領域における解は方程式

$$\varepsilon \dot{x}_1 = -\hat{F}_1(y(t^-), x_1) \quad (5.20)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = -\hat{F}_2(y(t^-), x_2) \quad (5.21)$$

により近似される。補題 5.2 から方程式系 (5.20) と (5.21) は勾配系となる。  
 $(x_1, x_2)$  空間で考えるとこれらはそれぞれ超曲面(多様体)  $M_1, M_2$  上の微分方程式と考えられる。 $M_1$  と  $M_2$  の交点が双方の方程式の平衡点である。このことは図 5.6(a), (b) に示されている。いま  $(x_1^*, x_2^*)$  が  $N_1^{A_1}, N_2^{A_2}$  の跳躍点であるとしよう。この跳躍点に対し条件 (2) が成立立つとする。例えば  $L^0_1(\lambda)$  が任意の  $\lambda \leq \Phi(x_1^*, x_2^*)$  に対し凸集合であるとすれば  $\Phi(x_1, x_2(y^*, x_1))$  は  $L^0_1$  の中に唯一の極小値  $(x_1^0, x_2^0)$ ,  $x_1^0 = x_1(y^*, x_1^0)$  を持つ。補題 5.2 から

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^0} = \hat{F}_1(y^*, x_1^0) = 0$$

である。すなわち  $(x_1^0, x_2^0)$  は  $N_1^{A_1}$  の跳躍方程式 (5.20) の安定平衡点であり跳躍点  $(x_1^*, x_2^*)$  の終点となる。 $\hat{F}_1, \hat{F}_2$  の定義により  $(x_1^0, x_2^0) \in L^0_2$  において  $\hat{F}_2(y^*, x_2^0) = 0$  である。すなわち  $(x_1^0, x_2^0)$  は  $N_2^{A_2}$  の跳躍方程式の  $L^0_2$  に含まれる平衡点でもあり、補題 5.1 よりこれは安定な平衡点である。 $N_2^{A_2}$  が  $L^0_2$  の内に  $(x_1^0, x_2^0)$  以外の安定平衡点を持たないことが同様の議論により分かるから  $(x_1^0, x_2^0)$  がやはり  $N_2^{A_2}$  の  $(x_1^*, x_2^*)$  に対応する終点であると結論される。 (証明終)

定理 5.1 の条件 (2) は跳躍方程式の解軌道が入って行く等位集合  $L^0$  内 安定平衡点が唯一存在することを示している。

[例 5.1] 図 5.5(a) に示す回路において開放ポート  $(1, 1')$ ,  $(2, 2')$  にそれぞれ寄生キャパシタンス  $\varepsilon$  を付加して得られる正規化モデルを  $N_1^{A_1}, N_2^{A_2}$  とする。回路方程式はそれぞれ

$$i_L = -R_1 i_L - v_2$$

$$\begin{aligned}\varepsilon v_1 &= -(1/R_3)(v_1 - v_2) - f(v_1) \\ &\triangleq -f_1(i_L, v_1, v_2) \\ 0 &= -i_L - (1/R_3)v_1 + (1/R_2 + 1/R_3)v_2 \\ -E/R_2 &\triangleq f_2(i_L, v_1, v_2)\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}i_L &= -R_1 i_L - v_2 \\ \varepsilon v_2 &= -f_2(i_L, v_1, v_2) \\ 0 &= f_1(i_L, v_1, v_2)\end{aligned}$$

となる。ここで  $f(v_1)$  は非線形抵抗の  $i-v$  特性であり同図 (b) に示す様な特性を持つ。 $f'(v_1) > -1/R_3$  とすると定理 5.1 の条件が満足される。また実数  $k_1, k_2$ ,  $k_1 < k_2$  が存在して  $f'(v_1) > -1/(R_2+R_3)$ , ( $v_1 < k_1$ ,  $v_1 > k_2$ ),  $f'(v_1) < -1/(R_2+R_3)$ , ( $k_1 < v_1 < k_2$ ) であり更に  $f'(k_1) = f'(k_2) = -1/(R_2 + R_3)$  とすると  $f_1 = 0$

の解  $v_1 = V_1(i_L, v_2)$

は同図 (c) の様にな

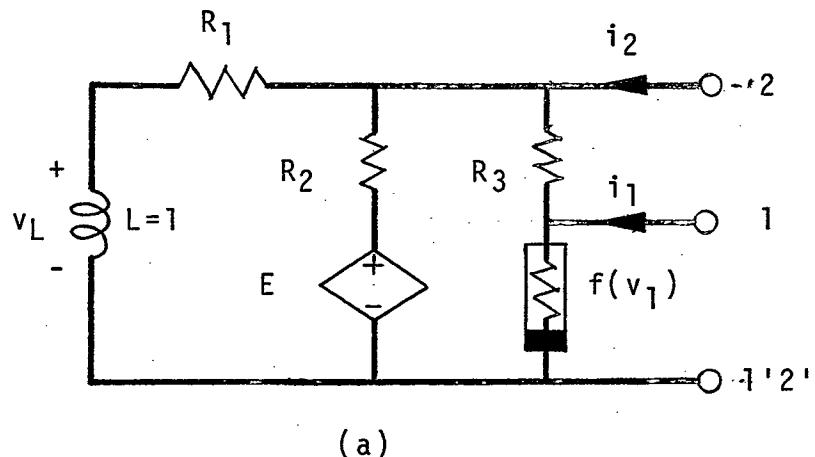
る。 $f_2 = 0$  の解  $v_2 =$

$V_2(i_L, v_1)$  は直線で示されている。このとき  $P_1, P_2$  は定理の

条件 (2) を満足する

跳躍点である。

以上相反回路について一般に  $n$  個の寄生素子を用いて正規化する場合についてのモデルの等価性について考察したが、



(a)

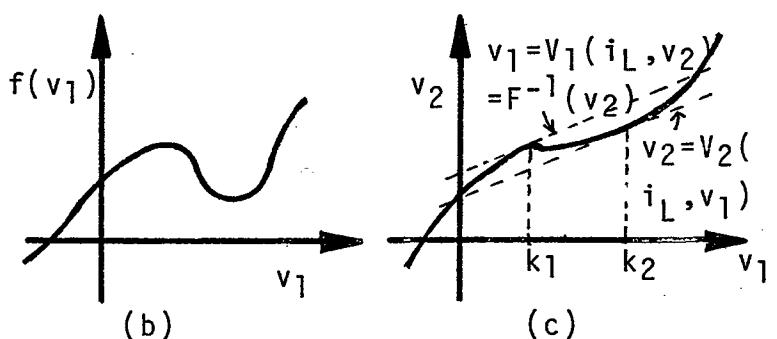


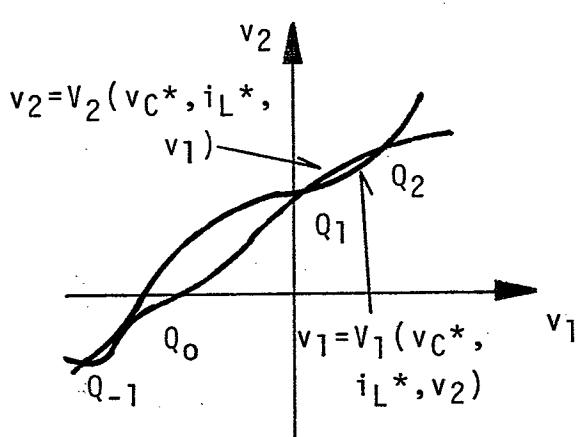
図 5.5 回路例  
Fig. 5.5-Network for example

1つの寄生リアクタンスで正規化できる場合には  $N_R$  の相反性の仮定なしに簡単な等価条件が得られる。次の定理は文献(28)に示されているものであるか証明が不確実であるので、ここで再証明する。

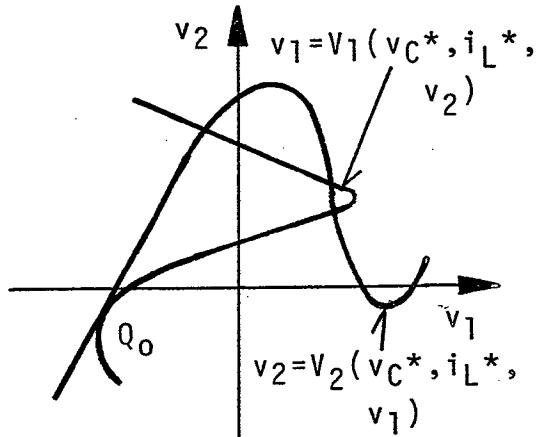
[定理5.2] 図5.3に示す回路で  $N_R$  は相反に限らないものとする。更に  $N_A_1, N_A_2$  は双方とも1つのキャパシタで正規化されていると仮定する。このときつきの条件が満足されれば2つの正規化モデル  $N_A_1, N_A_2$  は漸近的に等価である。

$$(1) \quad (\partial f_1 / \partial v_1)(\partial f_2 / \partial v_2) > 0$$

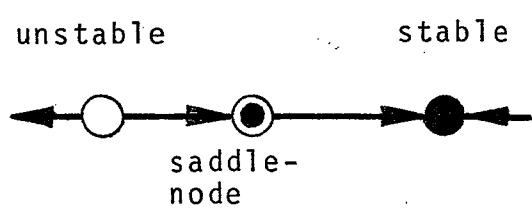
$$(2) \quad \partial f_1 / \partial v_2 \neq 0 \quad \text{または} \quad \partial f_2 / \partial v_1 \neq 0 \quad \text{のどちらかが成立する}.$$



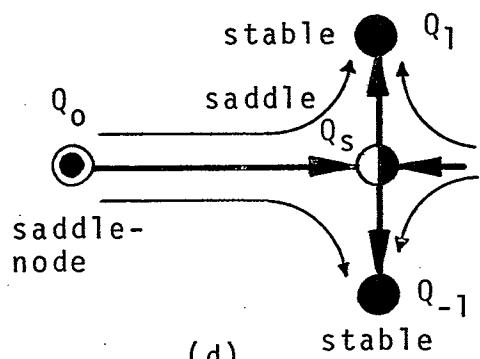
(a)



(b)



(c)



(d)

図5.6  $N_A_1, N_A_2$  の  $(v_1, v_2)$  空間に於ける解曲線

Fig.5.6-Curves showing typical Paths of  $N_A_1$  and  $N_A_2$  in  $(v_1, v_2)$  plane.

(証明) 恒等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_2} - \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \right) \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_1} - \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right)^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

と条件(1)を用いれば

$$\begin{aligned} \hat{\frac{\partial f_1}{\partial v_1}} &= \frac{\partial f_1}{\partial v_1} - \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right)^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial v_1} > 0 \\ \hat{\frac{\partial f_2}{\partial v_2}} &= \frac{\partial f_2}{\partial v_2} - \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial v_2} > 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

となるから前と同様におそい領域での一致が得られる。つきに跳躍先の一致を言う。モデル  $N_{A_1}^A$  の跳躍曲線は図5.6 (a) 又は(b) に示す様に曲線  $v_2 = V_2(i_L^*, v_C^*, v_2)$  に沿って動く。モデル  $N_{A_2}^A$  では同じく曲線  $v_1 = V_1(i_L^*, v_C^*, v_2)$  に沿って跳躍する。条件(2) は  $\partial V_1 / \partial v_1 \neq 0$  または  $\partial V_2 / \partial v_2 \neq 0$  を意味し、このことは曲線  $v_1 = V_1$  または  $v_2 = V_2$  のどちらか少なくとも一方は単調であることを意味する。図5.6 (a) にはこの状態が示されている。この図から分る様にこの場合は跳躍点  $Q_0$  カラの跳躍先の候補は隣接する点  $Q_1$  または  $Q_{-1}$  の2つのみである。図5.6 (b) にはこの条件が満足されていない場合の例を示す。今跳躍方程式は1次元であるからアトラクションとしては安定平衡点しかなく、また平衡点は跳躍点は鞍点ノードと不安定または完全不安定平衡点のみである。図5.6 (c) にこの状況が示されている。この図が示す様に鞍点・ノードは一方からフローが流れ込み他方から流れ出る平衡点である。このことからもし  $N_{A_1}^A$  に於いて跳躍点  $Q_0$  カラ流れ出るフローが例えば  $Q_1$  方向へ向かうならば  $N_{A_1}^A$  に於いて  $Q_1$  が安定平衡点であることになる。(もちろんこのときには  $Q_{-1}$  は完全不安定平衡点となる) こうして点  $Q_1$  では  $\hat{\partial f_1} / \partial v_1 > 0$  である。式(5.23)からこのことは  $\hat{\partial f_2} / \partial v_2 > 0$  と等価となる。こうしてモデル  $N_{A_2}^A$  に

於いても  $Q_1$  が安定平衡点となり  $Q_0$  から流れ出るフローは  $Q_1$  へ向かうから  $N_{A_1}^A, N_{A_2}^A$  の終点（跳躍先）の一一致がいえる。以上で証明は終るが、ここでは軸・ノードがの他には存在しないこと暗に使われている。これはほとんどの場合には正しい、すなわち生成的な性質であることを注意しておく。

(証明終)

## 5.4. 解の一意性

この節では有効なモデルであるための条件と解の一意性の破れる原因について考察する。寄生リアクタンスによる正規化モデルに於いてはしばしば回路が正規形による表現を持つにもかかわらず“解が一意に定まらない場合がある”ことが数値計算による実験から知られていた<sup>(54)</sup>。これは本章で定義した有効でないモデルの例である。5.3 に於いて跳躍方程式の跳躍先が常に安定平衡点である場合を考察したがこの場合跳躍点近傍より出発する解軌道はその差から以下に保たれる。しかし跳躍曲線の収束先がサドルの場合には図 5.6(d) に示す様に跳躍点近傍から出発する解は同じ安定平衡点に収束するとは限らない、この図では  $Q_1$  または  $Q_{-1}$  へ収束する。このときおそい領域における、この跳躍点に到達する曲線の初期値は有効とはならない。したがってモデルが有効であるための一つの十分条件はすべての跳躍点  $y(t^-) = (v_C^-, i_L^-)$  に対して跳躍方程式(5.20)または(5.21)が一つの安定平衡点しか持たないことであり定理 5.1 はこのための十分条件となっている。この節ではこの条件の大域的表現を取る。

今、図 5.2 で表されるモデルを考える。このモデルのシステム表現は適当に変数変換すれば

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -G(x, y) \\ \varepsilon \dot{x} &= -(\partial/\partial x)\Phi(x, y)\end{aligned}\quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \quad (5.24)$$

で与えられる。今  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  の集合  $M$  を  $\partial\Phi/\partial x = 0$  と  $\det(\partial^2\Phi/\partial x^2) = 0$  を同時に

に満足するものとして定義す。 $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  を自然な射影とすれば"

[定理5.3] 式(5.24)で表されるシステムは  $\mathbb{R}^m$  の集合

$$D \triangleq \sigma(M)$$

が（互いに交わらない） $n$  次元くさびの集まりに同相ならば有効なモデルである。

(証明) システム(5.24)に於いて  
跳躍点は  $M$  上に存在する。  $D$  はくさび形(図5.7)のあつまりに同相であるから跳躍先は 1 つである。このことは図 5.8 に示す図式化により分る。

(証明終)

1 個の寄生リアクタンスで正規化できる場合には有効でないモデルはほとんど存在しない（サドルがないから）しかし 2 次元以上ではパラメータの変化により図 5.6 (d) に示す様にから流出するフローは最初  $Q_{-1}$  へ流入していたものがパラメータ  $y = y^*_0$  の値においてサドル点  $Q_s$  に入りさらに  $Q_1$  へ移るという状況が起こる。このとき ( $Q_0$  から出るフローがサドル点に入ると) には近傍から出るフローは  $Q_1$  または  $Q_{-1}$  へ収束（跳躍先は一意に定まらない）。定理 5.1 の漸近的等価条件が定理の様な大域的表現を持たないのは以上の理由によるわけである。

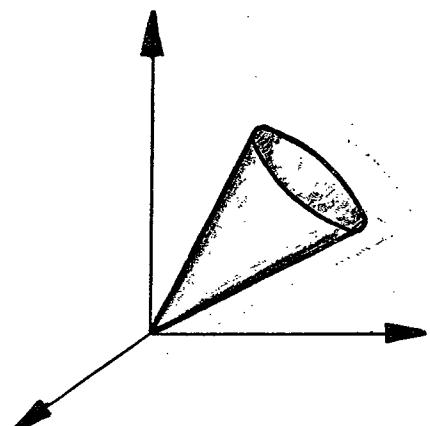


図5.7  $n$  次元くさび  
Fig. 5.7-n-dim Cusp

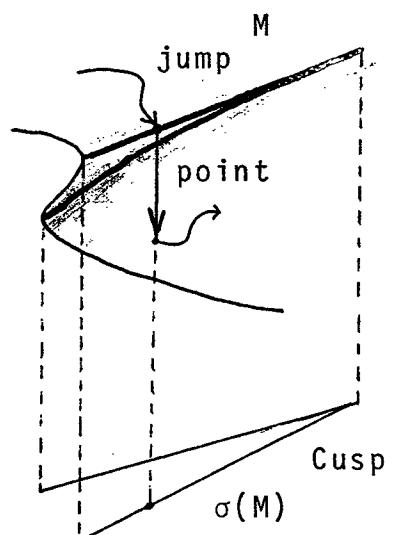


図5.8 証明の図式化  
Fig. 5.8-Illustration of the Proof

## 5.5. 正規化に要するリアクタンスの個数の削減

寄生リアクタンスモデルにより回路を数値計算する際には正規化に要する寄生リアクタンスの個数はなるべく少ない方が計算に要する手間を省く上からも望ましい。この節ではなるべく少ない個数の寄生リアクタンスで正規化モデルを作る方法について考察する。

図5.9に示す一般的寄生リアクタンスによる正規化モデルを考える。nポート抵抗 $N_R$ は相反に限らないものとする。このモデルは微分方程式

$$\begin{aligned} y &= f(x, y) \\ \dot{x} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (5.25)$$

で表される。

[定理5.4] 図5.7に示す回路に於いて寄生リアクタンスの個数は $m$ 個であると仮定すればこのモデルが正規化されているためには

$$\det(\partial g / \partial x) \neq 0$$

でなくてはならない。このとき

(1) 行列 $(\partial g / \partial x)$ の $(i_1, \dots, i_\ell)$ 行から成る主小行列 $A_{i_1, \dots, i_\ell}$ は

$$\det A_{i_1, \dots, i_\ell} \neq 0$$

となるものとする。このときは寄生リアクタンスのうち

$$\{j_1, \dots, j_{m-\ell}\} = \{1, 2, \dots, m\} - \{i_1, \dots, i_\ell\}$$

ポートのもののみで正規化することができます。

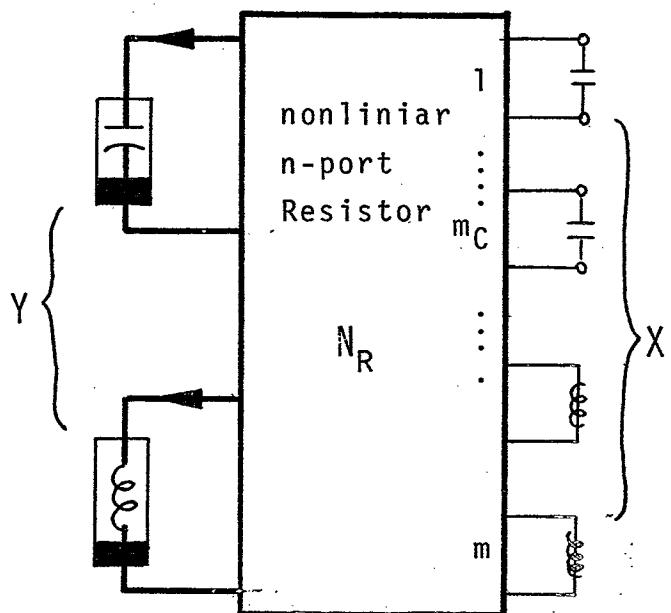


図5.9 一般的寄生リアクタンスモデル

Fig.5.9-General Model with Parasitic Reactance

(2) 更に  $\hat{g} \triangleq (g_{j_1}, \dots, g_{j_{m-l}})', \tilde{g} \triangleq (g_{j_1}, \dots, g_{j_l})'$  のとき  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{g} = \infty, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{g} = 0$

ならばこのモデルは大域的表現

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(\hat{x}, F(\hat{x}, y), y) \\ \dot{\hat{x}} &= \hat{g}(\hat{x}, F(\hat{x}, y), y) \end{aligned} \quad (5.26)$$

ここで  $\tilde{g}(\hat{x}, F(\hat{x}, y), y) = 0$

を持つ。

定理5.4 の証明は陰関数定理および大域陰関数定理により証明できることで省く。

[系5.1] 回路が区分的線形の場合は各区分において行列  $A_{i_1, \dots, i_l}$  の指數（負の実部を持つ固有値の数）が等しければポート  $j_1, \dots, j_{m-l}$  の寄生リアクタンスで正規化できて更にこのモデルは大域的表現(5.26)を持つ。

[例] 図5.10 (a)に示す回路を考える。区分的線形抵抗  $g_1, g_2$  の特性はそれぞれ図5.10 (b), (c)で与えられている。この回路は正規形表現を持たず、例えば図に示す4つのポートに寄生キャパシタを考慮することにより正規化することができる。インターフェースを短絡除去したとき図から得られる4ポート特性は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(v_1) \\ g_2(v_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E}{R_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

この区分的線形4ポートのヤコビ行列  $J_R$  はすぐ求まる。 $J_R$  の3次主小行

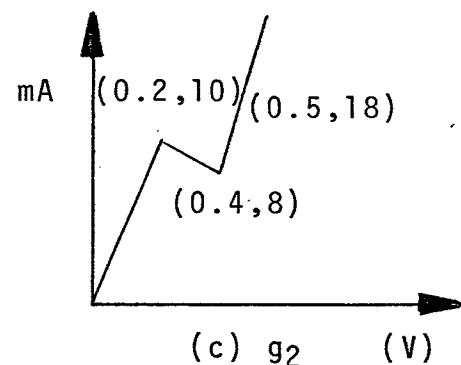
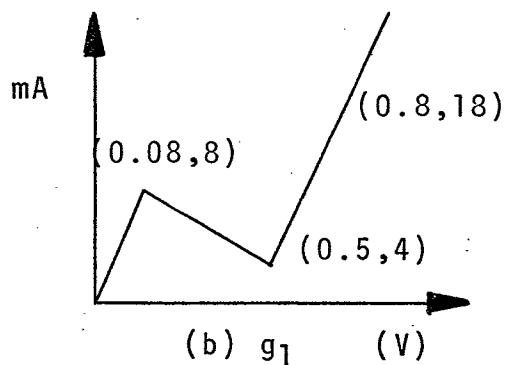
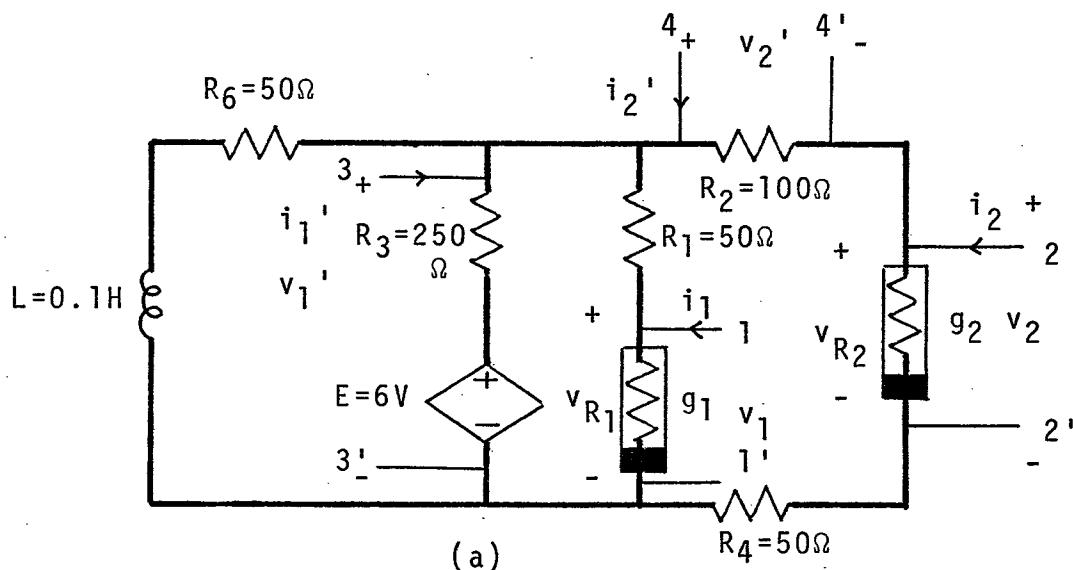


図5.10 回路例  
Fig.5.10-Network for Example

列

$$A_{234} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4} + \frac{g_1}{v_3} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}$$

を考えると  $\frac{1}{R_4} + \frac{g_1}{v_3} > 0$  であり、また

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{pmatrix} > 0$$

であるから補題5.1から  $A_{234} > 0$  となりこの回路例ではポート(1, 1')に寄生キャパシタを考えるだけで回路は大域的に正規化されることが系5.1から分る。

## 5.6. 結 言

この章では九ポート抵抗がハイブリッド表現を持たないとき内部の抵抗に寄生するリアクタンスを考慮してハイブリッド表現を持たせる場合に計算機による数値計算の際に起る問題の回路理論的側面についての検討を行つた。5.2.は問題の定式化と基礎的定義および数学的基礎について述べた。5.3.では異なる正規化によりその定性的ふるまいが同じにならための条件についての考察を行つた。ここでは正規化に零するリアクタンスの個数が一般の場合は相反抵抗の場合のみについて考察し、1つの十分条件をえた。さらに1個の寄生リアクタンスのみで正規化できる場合には相反の仮定なしにかなり一般的な条件がChuaとAlexanderにより得られているが、これに対する厳密な証明をえた。5.4.は寄生リアクタンスを含む回路は正規形表現できても解の一意性が破れた様に見える場合のあることを述べ、その原因と一意性が成立するための十分条件について考察した。5.5.は計算機で計算させた際方程式の次数を正規化に零する寄生リアクタンスの個数を削減することにより減らす方法について述べた。

## 第 6 章 結 論

本研究では非線形れポートの解析・構成の基礎についての研究を行った。まとめはそれぞれの章において行われているがこの章では本研究で行われなかつた事および今後の研究についての展望を行う。

第2章では代数的非線形れポートについて、線形の場合における相反と歪相反れポートへの分解の非線形の場合への一般化を中心にして解析と構成の基礎理論をえた。主な結果として一般的な非線形れポート抵抗か(線形)理想変成器と非線形2端子抵抗および従属電源から構成できることを示した。2.4.3.においてその一部を考察した“エネルギー的考察”的一般的な場合については完全な考察は未完成である。問題として定式化すれば次の様になる。 $y = f(x)$ で与えられるれポート抵抗の相反れポートと歪相反れポートへの分解の仕方は一般にはn個存在するがれポート抵抗か受動の場合、受動相反れポートと受動歪相反れポートへの分解は可能か?ここで2ポートの場合には2.4.3.に於いて示した様に消散的な歪相反2ポートが存在しないことからこの問題は受動相反2ポートと不活性(又は無損失)2ポートへの分解の存在へ帰着されることが分る。この問題は基本的であり重要と思われる所以今後の研究が期待される。

第3章では混成れポートのエネルギー的考察と受動混成れポートの構成問題について論じた。主な結果として受動混成れポートが受動モデルでモデル化できさうにある条件が満たされればこれは回路実現できて、リアクタス部分れポートと抵抗部分れポートは受動となることを示した。さうに線形の場合の正実補題の非線形の場合への一般化を行い、構成に関するヒントをえた。ここで示した構成法が適用されない場合、すなあちエネルギー蓄積関数が回路実現条件を満足しない場合にも回路実現は可能か?可能ならどの様な素子が必要か?という問題は今後の

課題として残されていく。またシステムのクラスを限った場合の構成理論なども検討してみる必要がある。

第4章では第2章および第3章で研究した代数的非線形ルポートまたは混成ルポートについてこれらをいくつか接続してできる複合ルポートについて主として接続により保存される性質について述べた。複合系による定式化は大規模非線形回路網の定式化として有効であると思われる所以この定式化による今後の研究が期待される。

第5章では寄生リアクタンスによる非線形回路網の正規化モデルについて論じた。得られた結果については結論で示されている通りであるが等価モデルの十分条件については相反な回路網のみについて考察した。さらに一般的な場合については今後の問題である。ここで示した十分条件は定理5.2は別として実用的条件とはいい難い。しかし一般的な条件の導出是不可能である様に思われるため今後の問題としてはクラスを限った場合あるいは具体的な回路についての研究となる。また5.4.5の解の一意性についての考察は寄生パラメータを持つ微分方程式系に特有なものであり興味深い。この方面についてはさらに多くの研究が必要と思われる。

最後に非線形ルポート系はまだ統一的理論となるには種々の研究が必要であり今後の研究が必要である。

## 謝 辞

本研究の全過程を通じて、直接理解ある御指導を賜わり、常に励まされ御財言いただいた 水玉慎三教授、前田肇助教授に心から感謝します。

大学院博士課程において御指導、御教示を賜わった尾崎弘教授、寺田浩詔教授に対し厚く御礼申し上げます。

親切な御援助をいただいた 電気通信大学、雁部穎一教授に心から感謝いたします。

本研究の途上、筆者の所属する研究室の熊谷貞俊助手より昼夜を分た  
め御指導、ならびに御厚情を賜りました本研究を終了にあたり心より感  
謝します。

筆者の所属している研究室の楠岡英雄助手には種々の面で御協力をた  
たきました。心から感謝します。

最後に親切な御援助をいただいた 電子工学教室の諸氏に御礼申し上げ  
ます。

## 文獻

- (1) A. N. Willson,Jr. "Nonlinear Networks Theory and Analysis" IEEE PRESS (1974)
- (2) L. O. Chua and P. M. Lin "Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits :Algorithms and Computational Techniques." Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall (1975)
- (3) L. O. Chua "Introduction to Nonlinear Network Theory." New York McGraw-Hill 1969
- (4) L. O. Chua and Pen Min Lin "A Theory of Algebraic n-Ports" ,IEEE Trans. Circuits Theory,CT-20,1 (1973)
- (5) Chua L. O. and Y. Lam "Decomposition and Synthesis of Nonlinear n-Ports", IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-21, 1 (1974)
- (6) R. K. Brayton "Nonlinear reciprocal networks" SIAM-AMS Proc., p1 (1971)
- (7) Nickerson, Spencer and Steenrot,"Advanced Calculus" Princeton: Van Nostrand(1959)
- (8) L. O. Chua and Rohrer"On the Dynamic Equations of a Class of a Nonlinear RLC networks", IEEE Trans. Circuits Theory, CT-12,4 (1965)
- (9) L. O. Chua , "Linear Transformation Converter and its Application to the Synthesis of Nonlinear Networks" IEEE Trans. Circuits Theory., CT-17,4 (1970)
- (10) T. Stern "Theory of Nonlinear Networks and systems" , Addison Wesley (1965)
- (11) R. Abraham and J. Robbin "Transversal mappings and flows" Benjamin(1967)

- (12) 高橋, 熊谷, 永玉 "非線形nポートの一般分解定理と構成について", 信学技報 CST 77-71 (1977)
- (13) S. Duinker,"in Recent Developments in Network Theory" p221, Pergamon Press, Oxford and New York(1963)
- (14) Rohrer,"Lumped Network Passivity Criteria" IEEE Trans. Circuit Theory vol. CT-15, No.1,3 (1968)
- (15) Wyatt, Chua "A Theory of Nonenergic N-Ports" CIRCUIT THEORY AND APPL.,vol.5, 181-208 (1977)
- (16) Anderson, Vongpanitlerd,"Network Analysis and Synthesis" PRENTICE-HALL
- (17) Willson Jr. "Nonlinear Networks:Theory and Analysis" IEEE PRESS (1974)
- (18) Wyatt, Chua ,Oster"Nonlinear n-Port Decomposition via the Laplace Operator" IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-25,9 ,(1978)
- (19) Chua,Curtin,"Synthesis of Reciprocal Piecewise linear N-Port Resistors" Inter National Symposium on Circuits and Systems of 1979
- (20) 高橋,能谷, 永玉 "非線形nポートの一般分解定理と構成" 信学論 (A) 61-A ,8, p698 (昭53-8)
- (21) Chua, Lam,"A Theory of Algebraic n-Ports" IEEE,Trans. CT-20,1 (1973)
- (22) Chua, Green,"Graph Theoretic Properties of Dynamic nonlinear Networks" IEEE ,Trans. CAS, vol, CAS-23,No 5 ,5 (1976)
- (23) Bellman,Ed,"Mathematical Optimization Techniques " Berkeley Univ. of California Press p309, (1963)

- (24) Anderson, Moore, "Linear Optimal Control" PRENTICE-HALL (1971)
- (25) Palais, "Natural Operations on Differential Forms" Trans Amer. Math. Soc., vol. 92, p125-141, 7 (1959)
- (26) Chua, Curtin, "Synthesis of Reciprocal Piecewise Linear N-Port Resistors" 1979 ISCAS.
- (27) A.A. Andronov, A.A. Vitt and S.E. Khaikin, "Theory of Oscillations" New York: Adison Wesley, 1966, P 659-670
- (28) L.O. Chua and Alexander, "The Effects of Parasitic Reactances on Nonlinear Networks", IEEE Trans, on Circuit Theory , vol CT-18, Sep. 1971 P520-532
- (29) H. Hoppensteadt, "Stability in Systems with Parameters" , J. Math. Anal. Appl., vol 18
- (30) L. S. Pontryagin, "Asymptotic behavior of the solutions of systems of differential equations with a small parameter in the higer derivations" ,AMS Transl., ser, 2, vol.18, (1961)
- (31) S. Kumagai, H. Takahashi, "On the Modeling of Improper Reciprocal Nonlinear Networks", ISCAS TOKYO JAPAN 1979
- (32) ハラナイ "微分方程式下" 吉岡書店 P347-351 (1974)
- (33) P.J. Moylan, "Implications of Passivity in a class of Nonlinear Systems", IEEE Trans on Automatic Control. vol. AC-19, No. 4, 8, 1974
- (34) L.O. Chua, D.N. Green, "Graph-theoretic properties of dynamic nonlinear networks", IEEE, Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-23, p292-312, May (1976)
- (35) L.O. Chua, D.N. Green, "Qualitative Analysis of the Behavior of Dynamic Nonlinear Networks: Stability of

- Autonomous Networks", IEEE, Trans Circuits and Systems  
vol.CAS 23, 11, (1976)
- (36) L. O. Chua, D. N. Green,"A Qualitative Analysis of the Behavior of Dynamic Nonlinear Networks : Steady-state Solutions of Non Autonomous Networks", IEEE, Trans on Circuit and Systems, Sept., (1976)
- (37) 高橋, 熊谷, 児玉 " 非線形混成 n ポートの理論 " 信学論 (A)  
投稿中
- (38) 熊谷, 高橋, 児玉 " 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価性について " 信学論 (A) 投稿中
- (39) 高橋, 児玉 " 相反非線形 n ポート抵抗の構成 " 信学論 (A)  
投稿中
- (40) L.O. Chua, Matsumoto, Ichiraku,"Geometric Properties of Resistive Nonlinear n-Ports:Transversality, Structural Stability, Reciprocity and Anti-reciprocity" 1979 ISCAS TOKYO JAPAN
- (41) C. A. Desoer,F.F. Wu,"Trajectories of Nonlinear RLC Networks: A Geometric Approach", IEEE, Trans. on Circuits Theory, vol. CT-19, No. 6, Nov. (1972)
- (42) 松本, " 非線形回路網のいくつかの性質について " 信学論 (A) 75 / 10 vol.58-A , No. 10
- (43) 小西, " 非線形回路網の寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価性について " 昭和54年度大阪大学工学部電子工特別研究
- (44) 熊谷, 高橋, 児玉 " 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価性について " 信学技報 CAS 79-42 (1979)
- (45) 松島, " 多様体入門 " 葉華房 (1965)

- (46) W.V.D. Hodge, "The Theory and Applications of Harmonic Integrals", CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS(1952)
- (47) L.O. Chua, "Stationary Principles and Potential Functions of Nonlinear Networks", J. Franklin Institute vol.296, pp97=114
- (48) 岩波 数学事典
- (49) R.K. Brayton, J.K. Moser "A Theory of Nonlinear Networks I", Quarterly of Applied Mathematics, vol 22 , April (1964)
- (50) 熊谷, "大規模非線形回路網の解の存在について" 信学論  
(A) Vol. 59-A No. 11 (1976)
- (51) 池田, "ダイナミカルシステムの構造と安定化に関する研究"  
昭和 50 年 4 月 大阪大学博士論文
- (52) Peikari, "Fundamentals of Network Analysis and Synthesis"  
PRENTICE-HALL, ELECTRICAL ENGINEERING SERIES
- (53) Ortega, Rheinboldt, "ITERATIVE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS IN SEVERAL VARIABLES", ACADEMIC PRESS INC.  
(1972)
- (54) S. J. Oh, T.E. Stern, H.E. Meadows, "ON THE ANALYSIS OF NONLINEAR IRREGULAR NETWORKS", Symposium on Generalized Networks Polytechnic Institute of Brooklyn , April (1966)

