

Title	非線形nポートの解析と構成に関する研究
Author(s)	高橋, 治久
Citation	大阪大学, 1980, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/49
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

非線形 n ポートの解析と
構成に関する研究

昭和 55 年 1 月

高橋 治久

非線形 n ポートの解析と 構成に関する研究

昭和 55 年 1 月

高橋 治久

内 容 梗 概

本論文は、著者が大阪大学大学院工学研究科博士課程（電子工学専攻）在学中に行なった、非線形 n ポートの解析と構成に関する研究をまとめたもので、本文は次の6章から成る。

第1章は緒論で、本研究の目的と意義およびこの分野での研究の現状について述べ、本研究の諸結果についての概説を行なう。

第2章は代数的非線形 n ポート（代数関数でそのポート特性が規定される n ポート）の解析と構成に関する基本的結果を述べる。この章では従来の概念を一般化した相反性・非相反性に対する統一的な定義を与え代数的 n ポートの分解定理を導く。更に、その応用として非線形 n ポートの構成についての基本的結果を述べる。

第3章は非線形混成 n ポート（代数的 n ポート以外の非線形 n ポート）の解析と構成に関する基本的結果を述べる。混成 n ポートについては定式化の難しさから従来あまり研究されてこなかった分野であるが、この章では、その特別なクラスに対して主としてエネルギー的概念についての基本的結果を示す。まず、混成 n ポートの受動条件をいくつか示し、これらの逆定理を導く。また線形受動回路構成理論の非線形の場合への1つの拡張として受動混成 n ポートの構成理論を述べ、システム理論的線形回路構成理論の基本的補題である正実補題の非線形への拡張を示し、構成問題に関する基本的結果を与える。

第4章は複数個の n ポートを接続してできる複合 n ポートの相反性と受動性に対する基本的考察を行う。

第5章は非線形 n ポート抵抗の寄生リアクタンスによる正規化モデルについて考察する。この章の内容は正規形微分方程式による表現を持たない回路の応答を数値計算する際に生じる問題を回路理論的立場から考察するものである。まず異なる正規化によるモデルの等価性についての

考察を行ない、いくつかの十分条件を示す。次に、微小寄生リアクトランスを含む非線形回路網が正規形微分方程式による表現を持つ場合でも回路が一意解を有さない様に見える場合があることを述べ、一意解を持つための十分条件について考察する。最後に、正規化に要する寄生リアクトランスの個数を減小させる方法を述べる。

第6章は結論で、本研究で得られた結果のまとめと展望を行なう。

関連発表論文

- (1) 高橋, 熊谷, 兎玉 : 非線形 n ポートの一般分解定理と構成, 信学論(A) 61-A, 8, (1978)
- (2) 高橋, 熊谷, 兎玉 : 非線形 n ポートの一般分解定理と構成について, 信学技報 CST 77-71 (1977)
- (3) 高橋, 熊谷, 兎玉 : 非線形混成 n ポートの理論, 信学論(A) (投稿中)
- (4) 熊谷, 高橋, 兎玉 : 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価性について, 信学論(A) (投稿中)
- (5) 熊谷, 高橋, 兎玉 : 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価性について, 信学技報 CAS 79-42 (1979)
- (6) 高橋, 兎玉 : 相反非線形 n ポート抵抗の構成, 信学論(A) (投稿中)
- (7) KUMAGAI, TAKAHASHI: On The Modeling of Improper Reciprocal Nonlinear Networks, ISCAS of 1979 (Tokyo)

目 次

第 1 章	緒 論	1
第 2 章	代数的非線形 n ポートの解析と構成	5
2.1	緒 言	5
2.2	諸 定 義	6
2.3	基本分解定理	10
2.4	非相反 n ポートの構成	16
2.4.1	非相反 2 ポート抵抗の構成	16
2.4.2	非相反 n ポート抵抗の構成	18
2.4.3	エネルギー的観点からの考察	23
2.5	相反 n ポート抵抗の構成	24
2.6	結 言	30
第 3 章	混成 n ポートの解析と構成	31
3.1	緒 言	31
3.2	諸 定 義	32
3.3	受動条件	36
3.4	受動性の逆定理	40
3.5	受動混成 n ポートの構成問題	45
3.6	結 言	52
第 4 章	複合 n ポート	54
4.1	緒 言	54
4.2	複合代数的 n ポート	54

4.2.1	結線 n ポート	54
4.2.2	代数的 n ポートの接続	56
4.3	複合混成 n ポート	61
4.4	結 言	63
第 5 章	非線形抵抗 n ポートの寄生リアクタンス による正規化モデル	64
5.1	結 言	64
5.2	問題の定式化	66
5.2.1	基 礎	66
5.2.2	正規化モデルの定式化	68
5.3	正規化モデルの等価条件	72
5.4	解の一貫性	81
5.5	正規化に要するリアクタンスの個数の削減	83
5.6	結 言	86
第 6 章	結 論	87
謝 辞	89
文 献	90

諸 記 号

- $\dot{x}(t)$: $(d/dt)x(t)$
 \triangleq : 定義によって等しい
 \equiv : 恒等的に等しい
 \mathbb{R} : 実数体
 \mathbb{R}^n : n 次元実数空間
 \mathbb{R}^+ : 全ての非負実数の集合
 $\| \cdot \|$: l_2 norm
 I : 単位行列
 0 : 零ベクトル, 零行列
 A' : 行列(ベクトル) A の転置
 $\lambda(A)$: 行列 A の固有値
 $A > 0$: 行列 A は正定, すなわち $x'Ax > 0$ ($\mathbb{R}^n \ni x \neq 0$)
 $A \geq 0$: 行列 A は準正定
 $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$: a_1, \dots, a_n を対角成分とする対角行列
 $1(\cdot)$: 単位階段関数
 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: n 次元実数空間と m 次元実数空間の直積空間
 $\mathbb{R}^{n \times n}$: n 次実正方行列の全体
 $A^{n \times n}$: n 次実歪対称行列の全体すなわち $A \in A^{n \times n}, A = -A'$
 $L - K$: 集合 L と $K \subset L$ の差集合
 $A \iff B$: A と B は等価である。

第 1 章 緒 論

非線形回路網の解析と構成は近年多種の非線形素子が開発され、また回路の大規模化に伴いますますます重要なテーマとなりつつある。この分野の研究は比較的一般的な回路網を対象として解の存在、一意性、安定性および回路構造などに対して基本的事実を解明し非線形回路理論における解析・構成の基礎を与える“定性的研究”^{(1),(40)~(42)}と具体的回路についての特徴的現象の解析や構成(モデル化)および数値計算における結果などを扱う“定量的研究”^{(2),(3)}の2つの流れがある。前者は後者の基礎をなし定性的研究は非線形回路網の研究においては重要な部門をなしている。ところで線形回路網理論においては解を具体的に計算することが可能であるため定性的研究と定量的研究が区別されることは少ないが、線形nポートに対する相反性、受動性などの概念は解析・構成における最も基本的な定性的性質である。非線形回路網理論においてもこれは同様であるが、非線形の場合には解を解析的に計算することが不可能であるため定性的研究により解の性質や回路構造を知る事はさらに重要な意味を持つ。

非線形回路網の定性的研究においては対象とする回路の表現を求めることが基本となるが、この場合nポート系の概念が基礎となっている。nポートの概念は2端子素子を1ポートと見なし一般の場合に拡張したものであり、図 1.1 に示す様にn個の端子対を持つ暗箱でありポート変数の組 (X, Y) に対して関係

$$\mathcal{N}(X, Y) = 0 \quad (1.1)$$

を与えるものとして定義される。電気回路網理論におけるnポート系の概念は実際に存在する素子の表現として、また解析・構成上の概念としても基本をなすものである。

本研究ではこの非線形nポート回路理論における解析・構成の基礎と

して n ポート系の定性的研究を行ない、 n ポート回路理論の統一と整備を行なう事と目的とする。ところで非線形 n ポートには大別して式(1.1)で与えられるポート特性が代数関数で表される代数的 n ポートと、ポート特性が代数関数で示せない混成 n ポートの2種類がある。代数的 n ポートの例としては、 n ポート抵抗、 n ポートリアクタンスなどがあり、混成 n ポートの例としては抵抗

とリアクタンスの混合から成る n ポートが考えられる。代数的非線形 n ポートに関しては現在までに多くの研究がなされている⁽¹⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽¹⁷⁾。特に n ポート抵抗に関する可解性についての研究は数多くある⁽¹⁾。一方で代数的 n ポートの相反性と非相反性についてはこの概念が n ポートの解析・構成上重要であるにもかかわらず線形の場合の様に、

一般的結果⁽¹⁶⁾は知られていない。原因は数学的難しさもあるが、相反性・非相反性の統一的定義が存在しないことに起因している。混成 n ポートに関しては現在までに、まともな研究はなされていない。これは線形の場合にはラプラス変換法により混成 n ポートの研究は代数的 n ポートの場合の直接的拡張となるのに対し非線形の場合にはラプラス変換に相等する解析法が存在しない事が主な原因であろう。しかし、実際の n ポート素子はすべて混成 n ポートとして定式化されるので混成 n ポートの研究は探究する価値がある。

本研究では以下の第2章から第6章において、代数的 n ポートに関しては相反性、非相反性に着目して解析・構成に必要な一般的結果を示し

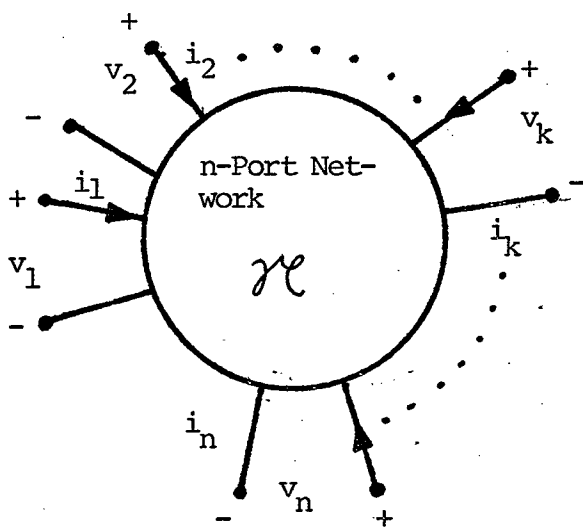


図 1.1 n ポートの図式化

Fig.1.1-Symbolic representation of an n -port network

混成 n ポートに関しては受動性などのエネルギー的性質について論じ解析・構成に関する基本的結果を示す。さらに、 n ポート抵抗の寄生リアクタンスによる正規化について論ずる。

まず第2章では一般的な代数的 n ポートの解析・構成について述べる。この章では微分幾何的手法を用いて代数的非線形 n ポート相反性・歪相反性を線形の場合の自然な拡張として定義し、 n ポート抵抗の構成に応用する。非線形 n ポート抵抗の相反性については現在までに多くの研究者により、いろいろな定義が与えられている⁽⁴⁾⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾が、非相反性については意味のある一般的な定義が存在せず、線形の場合の分解定理の非線形の場合への一般化は未解決であった⁽⁵⁾。本章は微分形式により従来の手法による定義をすべて含む相反性、および非相反性の統一的定義を与え線形の場合の分解定理を非線形の場合へ一般化する。さらにこれらの結果を応用し、一般的非相反非線形 n ポートの構成問題が相反 n ポートの構成問題に帰着することと示し、また相反非線形 n ポートは理想変成器と非線形2端子抵抗から構成できることと示す事により線形の場合と類似の結果を導く。

第3章では混成 n ポートの解析・構成について述べる。この章では集中素子から成る混成 n ポートの受動性の必要・十分条件と受動混成 n ポートの構成について論じ、 n ポート素子のモデル化に対する基本的結果を導く。混成 n ポートの受動性はRohrer⁽¹⁴⁾により最適制御理論のHamilton-Jacobiの方程式を用いて定式化された。本章ではこの結果を用いて(実質)受動混成 n ポートが受動抵抗素子と受動リアクタンス素子を用いてモデル化されることを示し、更に線形受動回路構成の基本的補題である正実補題⁽¹⁶⁾の非線形への一般化を導き、非線形受動混成 n ポートの構成に関する基本的結果の導出に応用する。

第4章ではいくつかの n ポートを接続してできる複合 n ポートについて考察する。まず、複合代数的 n ポートに関しては相反性が接続により

保たれることを示し、複合混成 n ポートに関しては受動性が保存されることを示す。とくに代数的 n ポートの相反性に関する系4.1は微分幾何学的手法により、はじめて厳密に証明されたものであり、この手法が非線形代数的 n ポートの相反性の議論に対して妥当であることを示すものである。

第5章では n ポート抵抗の寄生リアクタンスによる正規化モデルについて考察する。この問題は正規形による表現を持たない回路の応答を数値計算する際の回路理論的な問題である。一般に正規形微分方程式による表現を持たない回路と寄生リアクタンスも考慮することにより回路に正規形表現を持たせ解析を行なう場合正規化する仕方は一通りとは限らない。この場合、異なる仕方で正規化したとき回路のふるまいが定性的に同一か否かという問題が起る。5.3では異なる正規化により回路のふるまいが定性的に同一になるための十分条件について考察する。5.4では寄生リアクタンスを含む回路が正規形微分方程式による表現を持つ場合でも回路の応答が一意に定まらない様に見える場合があることを述べこの原因と一意解が存在するための十分条件について考察する。5.5では計算機で数値計算する際、方程式の次数を正規化に要する寄生リアクタンスを減らすことにより削減する方法について述べる。

第6章結論では本研究で得られた結果の意義と残された問題についての展望を行なう。

以上本研究と従来の研究についての関係と概要を述べた。

第 2 章 代数的非線形 n ポートの解析と構成

2.1. 緒言

一般的な線形 n ポート抵抗 (ポート特性行列 M) は図 2.1 に示す様に相反 n ポート抵抗 (ポート特性行列 M_R が対称) と歪相反 n ポート (ポート特性行列 M_A が歪対称) に分解され, これは行列 M が

$$M = M_R + M_A \triangleq \frac{1}{2}(M+M') + \frac{1}{2}(M-M')$$

と分解されるのに対応している。相反 n ポート抵抗は理想変成器と抵抗から構成され, 歪相反 n ポート抵抗は理想変成器と理想シャイレータから構成出来ることはよく知られている⁽⁶⁾。非線形 n ポート抵抗に対してこれと同様の事を考察する場合

には相反性・非相反性の明確な定義が必要である。非線形 n ポートの相反性については従来, Stern⁽¹⁰⁾ による定義「ポート特性 $i=f(v)$ を持つ非線形 n ポート抵抗は Jacobi 行列 $(\partial f/\partial v)$ が対称となるとき相反である。」

や Brayton⁽⁶⁾ による定義「非線形 n ポート抵抗はポート電流ベクトル I とポート電圧ベクトル V に対して $\sum_{j=1}^n d i_j \wedge d v_j = 0$ が成立するとき相反である。」などがあり, 表現は異なるが同類

の定義が Chua⁽⁴⁾ らによりさらに一般的な代数的 n ポートに対して与えられている。またこれらは線形の場合の自然な拡張となっている。問題

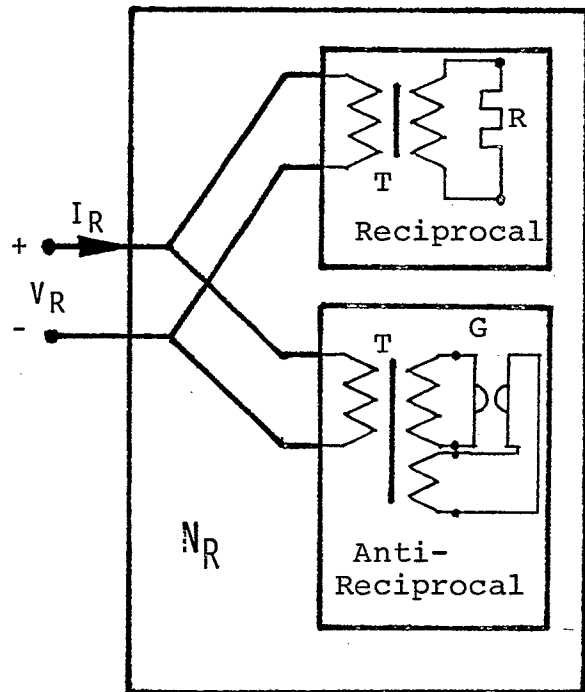


図 2.1 一般的な線形 n ポート抵抗
Fig. 2.1-General linear n-Port Resistor

は非相反(相反でない) n ポートの意味のある定式化であるが、これについては Chua らは文献⁽⁵⁾で $i(v)$ -制御形非線形 n ポート抵抗に対して擬ひずみ相反(quasi antireciprocal) というクラスの非相反 n ポートを定義しそれを単純結合を有する n ポートの構成に應用している。しかし擬ひずみ相反 n ポートは非相反 n ポートのうちの極めて狭い範囲の n ポートであり非線形回路網の解析・構成問題に必要な一般的定義は現在まで得られていない。

本章では Chua⁽⁵⁾により提出されたこの未解決問題を考察するとともにこれを非線形 n ポート抵抗の構成に應用し、任意の特性を持つハイブリッド形非線形 n ポート抵抗の構成問題が非線形 2端子抵抗の構成問題に帰着できることを示す。

まず 2.2 では一般的な代数的 n ポートに対して微分形式による相反性、非相反性の統一的な定義を与え、とくに相反性についてはこれが従来の定義と含むものであることを示す。次に 2.3 では相反性、非相反性の必要十分条件と、線形の場合の分解定理を非線形の場合へ一般化し、これが線形の場合の自然な拡張となっていることを示す。2.4 では 2.3 の結果に基づいて非相反非線形 n ポート抵抗の構成が相反非線形 n ポート抵抗を構成する問題に帰着できることを示す。さらに 2.5 では 2.3 の結果に基づいて相反非線形 n ポートが非線形 2端子抵抗と理想変成器から構成できることを示す。

本章では文字を節約するため異なるポート数を持つ n ポートを表すのに同じ n を用いる。

2.2. 諸 定 義

一般的な代数的非線形 n ポートはに示されている。この図に示す時不変 n ポート \mathcal{N} においてポート変数ベクトル

$$v \triangleq (v_1, v_2, \dots, v_n)'$$

$$i \triangleq (i_1, i_2, \dots, i_n)'$$

$$\phi \triangleq (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)'$$

$$q \triangleq (q_1, q_2, \dots, q_n)'$$

をそれぞれポート電圧, 電流, 磁束, 電荷ベクトルとする。ここで $\dot{\phi}_j = v_j, \dot{q}_j = i_j$ である。今 $i_j(v_j)$ と $q_j(\phi_j)$ を電流形(電圧形)変数と呼ぶことにすると n 個のポート変数から適当に m 個を選んで得られる混合ベクトル $\xi \triangleq (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)'$ と $\eta \triangleq (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-m})'$ は ξ_j が電流形(電圧形)ならば η_j は電圧形(電流形)であるとする。いいかえれば ξ と η は $\xi_j \neq \eta^j, \xi_j \neq \eta^j$ 且 $\eta^j \neq \xi_j$ が常に成立している様なベクトルであるとする。例えば $\xi = (\phi_1, q_2)'$, $\eta = (v_1, v_2)'$ のようなポート変数の選択は許されない。

本章で扱う代数的非線形 n ポート \mathcal{N} のポート特性は適当な混合ベクトルの対 (ξ, η) と写像 $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-m}$ に対して

$$F(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

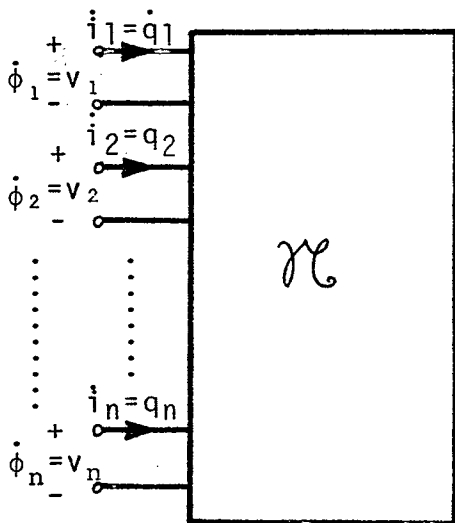


図2.2 非線形 n ポートのポート変数の定義

Fig.2.2-An Nonlinear n -Port with its Associated Port Variables and Reference Frame

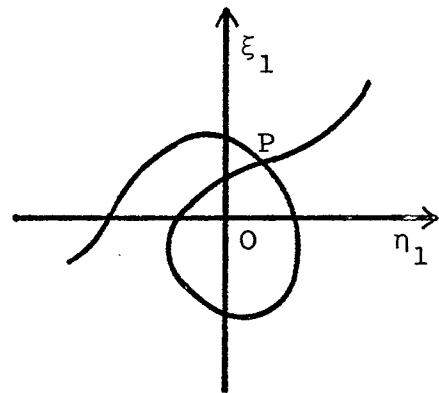


図2.3 多様体とならない特性の例

Fig.2.3-An Example for a Non-manifold Characteristic

で与えられ、更に次の仮定2.1が成立する。

[仮定2.1] $R^n \times R^n$ の部分集合

$$\Sigma \triangleq \{(\xi, \eta) \in R^n \times R^n; F(\xi, \eta) = 0\}$$

は m 次元多様体である。

例えば、1ポートの場合図2.3で表される様な特性は扱わない。仮定2.1は十分一般的非線形 n ポートを表す。

[定義2.1] $\Sigma \subset R^n \times R^n$ が m 次元 C^1 級多様体 ($0 \leq m \leq n$) であるとき n ポート \mathcal{N} の次元は m であるといい記号で $\mathcal{N}(1, m)$ と書く。 $R^n \times R^n = \{(\xi, \eta)\}$ を形態空間、 Σ を特性多様体といい $m=n$ ならば \mathcal{N} は正則、 $m>n$ ならば密、 $m<n$ ならば特異であるという。

例えばノレータは密、ナレータは特異な1ポートである。ここで定義された n ポートは従来の相互結合を有する抵抗、キャパシタ、インダクタ以外に異種素子間の相互結合を有する素子(例えば traditor⁽¹¹⁾)を含む十分広いクラスの n ポートである。

今 A, B を $A_{jj}=1, B_{jj}=0$ 又は $A_{jj}=0, B_{jj}=1$ を消えた $n \times n$ 対角行列であるとする。 n 次元状態変数ベクトル x, y を

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \triangleq T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

により定義する*。 $R^n \times R^n = \{(\xi, \eta)\}$ から R^n への写像 π を $\pi(\xi, \eta) = A\xi + B\eta$ とする。 T はたかだか2 n 個の置換を意味しているから π は $R^n \times R^n$ から R^n への自然な射影となることが容易に分かる。 π の部分多様体 Σ への制限を

$$\sigma \triangleq \pi|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow R^n$$

とする。

[定義2.2] 写像 $\sigma: \Sigma \rightarrow R^n$ が C^1 級微分同相であるとき正則 n ポート $\mathcal{N}(1, n)$ は状態変数ベクトル $x = A\xi + B\eta$ について C^1 級大域的ハイスリッド表現

* T には $T = T^{-1}$ という重要な性質がある。

を持つという。さらに σ が C^1 級局所微分同相であるならば局所ハイフリッド表現を持つという。

$\mathcal{M}(1, n)$ が C^1 級大域的ハイフリッド表現を持つとは $\forall p \in \Sigma$ に対し $p(\xi, \eta) = \sigma^{-1}x, x \in R^n$ であり, 更に $y = B\xi + A\eta$ であるから C^1 級可微分写像 $h(\cdot)$ が存在して $y = h(x)$ と書くことができる。従って, 以下では n ポートがハイフリッド表現を持つというときは式 (2.2) により得られるベクトル変数 x と y の間には関係 $y = h(x)$ が成立することを意味するものとする。

Σ の局所座標系 (U, ψ) を (U, ψ) で表せば $\forall p \in \Sigma$ に対して p の $R^n \times R^n$ における近傍を V とするとき $\psi: \Sigma \cap V \rightarrow \psi(\Sigma \cap V) \subset R^m$ は同相となる。このとき \mathcal{M} は局所パラメータ $s \in R^m$ を持つという。さらに Σ が R^m に同相ならば \mathcal{M} は大域パラメータ $s \in R^m$ を持つという。

$\mathcal{M}(1, m)$ の形態空間 $R^n \times R^n = \{(\xi, \eta)\}$ 上の 1 次微分形式を

$$\alpha_1 \triangleq \sum_{i,k=1}^n \xi_i J_{i,k}^1 d\eta^k$$

とする。ここで $J = (J_{i,k}^1), i, k = 1, \dots, n$ は 1 と -1 のみから成る $n \times n$ 対角行列で ξ_i が電圧形変数なら $J_{i,i}^1 = 1$ 電流形変数なら $J_{i,i}^1 = -1$ である。恒等写像 $\pi^1: \Sigma \rightarrow R^n \times R^n$ により α_1 から誘導される Σ 上の 1 形式を $\alpha = \pi^1 * \alpha_1$ とする。 α_1 を基本 1 形式と呼ぶ。

[定義 2.3] $\mathcal{M}(1, m)$ は Σ 上で 1 形式 α が

- (1) 閉形式, すなわち $d\alpha = 0$ のとき相反
- (2) 双対閉形式, すなわち $\delta\alpha = 0$ のとき双対相反
- (3) $d\alpha \neq 0$ 且つ $\delta\alpha = 0$ のとき必ずみ相反
- (4) $d\alpha = 0$ 且つ $\delta\alpha = 0$ のとき調和的

であるという。ここで $l \geq 1, d$ は外微分 δ は双対微分 (余微分) ^{(5)*} を表す。

定義 2.3 は \mathcal{M} が正則, 特異, 密のいかにかわらず意味を持つ。

* p 形式 $\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \psi_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ の余微分は $\delta\alpha \triangleq -\sum_{j_1 < \dots < j_{p-1}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^k} \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}}$

(1) は ξ を電圧形変数ベクトルとすれば $J=I$ となり次の節で述べる定理 2.1 より Chua⁽⁵⁾ による相反の定義と等価となる。更に $\xi=v, n=i$ とすれば Brayton⁽⁶⁾ の定義と等価となる。

[注意 2.1] $d\alpha=0$ は Σ の座標変換によって不変であるが $\delta\alpha=0$ は座標変換で一般には保たれないので双対相反のことを n -solenoidal⁽¹⁸⁾ と呼ぶこともある。

[例 2.1] ポート特性

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2i_1^3 v_2^2 v_3 \\ 2i_1^3 v_2 v_3^2 \end{bmatrix}$$

を持つ 3 ポート抵抗を考える。このとき基本 1 形式の Σ への制限は

$$\alpha = 2i_1^3 v_2 v_3^2 dv_2 - 2i_1^3 v_2^2 v_3 dv_3$$

となる。 α の外微分は計算すれば $d\alpha \neq 0$ となる。 α の余微分は

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= 4i_1^3 v_2 v_3^2 - 4i_1^3 v_2^2 v_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、この 3 ポート抵抗は必ずみ相反である。

2.3 基本分解定理

この節は 2.2 で定義された相反性と非相反性に関する性質と線形の場合の分解定理の非線形への拡張について論ずる。

次の定理は相反性、非相反性の必要十分条件である。

[定理 2.1] $\mathcal{R}(1, m)$, ($1 \geq 1$) の (特性多様体 Σ の) 局所パラメータを $\Psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$

$p \in \Sigma$ に対して $\Psi(p) \triangleq s(p) = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m$ とすれば

(1) $\mathcal{R}(1, m)$ が相反であるための必要十分条件は

* $\alpha = \sum_{i=1}^n F_i dx^i$ の外微分は

$$d\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

で与えられる。ここで $dx^k \wedge dx^k = 0$, $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial s}\right]' J \left[\frac{\partial \xi}{\partial s}\right] = \left[\frac{\partial \xi}{\partial s}\right]' J \left[\frac{\partial \eta}{\partial s}\right] \quad (2.3)$$

が成立することである。更に Σ が単連結であれば⁽⁴⁶⁾これは次の条件と等価となる。 Σ 上で定義された C^2 級ポテンシャル関数 $P: R^m \rightarrow R^1$ が存在して

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial s}\right]' J \xi = \text{grad } P \quad (2.4)$$

が成立する。

(2) $\mathcal{M}(1, m)$ が双対相反であるための必要十分条件は

$$\text{div} \left(\left[\frac{\partial \eta}{\partial s}\right]' J \xi \right) = \text{rot } A^{ij} \quad (2.5)$$

であり、更に Σ が単連結ならばこれは次の条件と等価である。必ずみ対称 C^2 級関数行列 $[A^{ij}]$, $(i, j=1, 2, \dots, m)$ が存在して

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial s}\right]' J \xi = \text{rot } A^{ij} \quad (2.6)$$

が成立する。ここで $\text{rot } A^{ij}$ は行列 $[A^{ij}]$ の第 i 列を A_i としたときベクトル $[-\text{div } A_1, \dots, -\text{div } A_m]'$ を表す*。

(3) $\mathcal{M}(1, m)$ が調和的で Σ が単連結ならば $\Omega(s) = \int_C \alpha + \Omega_0, \Omega_0 \in R$ で定義される C^2 級関数に対して

$$\nabla^2 \Omega(s) = 0$$

が成立する。但し c は Σ 上の始点 p_0 , 終点 p である任意の連続曲線で、

$\nabla^2 \triangleq \sum_{i=1}^m \partial^2 / \partial s_i^2$ とする。 Ω は content⁽⁴⁷⁾ の拡張である。

(証明) (1) $\alpha = \pi^1 * \sum_{i,k=1}^n \xi_i J_k^i d\eta^k$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \pi^1 * \sum_{i,k=1}^n J_k^i d\xi_i \wedge d\eta^k \\ &= \sum_{i,k=1}^n \sum_{l,j=1}^m J_k^i \frac{\partial \xi_i}{\partial s_l} \frac{\partial \eta^k}{\partial s_j} ds_l \wedge ds_j \end{aligned}$$

* 前々ページの脚注*より α が 1 形式 $\alpha = \sum_{i=1}^n \psi_i dx^i$ の場合には余微分は

$$\delta\alpha = \sum_{i=1}^n \partial \psi_i / \partial x^i \quad \text{となる。 } m=3 \text{ のときは通常の rot と一致する。}$$

$$= \sum_{i,k=1}^n \sum_{1,j=1}^m J_k^i \left(\frac{\partial \xi_i \partial \eta^k}{\partial s_1} - \frac{\partial \xi_i \partial \eta^k}{\partial s_j} \right) ds_1 \wedge ds_j$$

となり $d\alpha=0 \iff$ 式 (2.1) である。後半は (3) と同様にして示される。

(2) $B_j \triangleq \sum_{i,k=1}^n J_k^i \xi_i \partial \eta^k / \partial s_j$ とすれば $\alpha = \sum_{j=1}^m B_j ds_j$ と書けるから $B = [B_1, B_2, \dots, B_m]'$ とおけば $\delta\alpha = -\text{div} B$ となるから最初の部分が分かった。次に Σ が単連結であるならば De Rahm の定理⁽⁴⁶⁾により $\delta\alpha=0$ ならば Σ 上に $\alpha = \delta\beta$ を満足する C^2 級 2 次形式 β が存在する。今それを

$$\beta = (1/2!) \sum_{i,j=1}^m A^{ij} ds_i \wedge ds_j$$

とおくと $A^{ij}(s)$ は 2 階 C^2 級 ひずみ対称テンソルであり⁽⁷⁾

$$\delta\beta = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial A^{ij}}{\partial s_i} ds_j$$

であるから $B_j = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial A^{ij}}{\partial s_j}$ となり成立する。

(3) Σ が単連結であり Σ 上で $d\alpha=0$ であるから De Rahm の定理より Σ 上に C^2 級関数 Ω が存在して $\alpha = d\Omega$ とかくことができる。 $P_0 = P(s_0)$ とすれば

$$\int_C \alpha = \int_{s_0}^s d\Omega = \Omega(s) - \Omega(s_0)$$

となり更に $\delta\alpha=0$ は

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \delta \cdot d\Omega \\ &= \nabla^2 \Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。 Ω が content の拡張であることは明らか。

(証明終)

[系 2.1] $\mathcal{R}(1, n)$ が C^1 級 ハイフソッド表現 $y=h(x)$ を持つならば

(1) $\mathcal{R}(1, n)$ が相反であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \left[B + A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]' J \left[A + B \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \\ = \left[A + B \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] J \left[B + A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]' \end{aligned}$$

であり、さらにこれは次の条件と等価である。 C^2 級関数 $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ が存在して関係式

$$\left[B + A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)' \right]' J(Ax + Bh) = \text{grad } P(x)$$

が成立する。

(2) $\mathcal{R}(1, n)$ が双対相反であるため必要十分条件は

$$\text{div} \left(\left[B + A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)' \right]' J[Ax + Bh] \right) = 0$$

であり、更にこれは次の条件と等価である。 C^2 級行列関数 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在し

$$\left[B + A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)' \right]' J[Ax + Bh] = \text{rot } A^{i,j}(x)$$

(3) $\mathcal{R}(1, n)$ が調和的ならば $\nabla^2 \Omega(x) = 0$ が成立する。但し $\nabla^2 \triangleq \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$, $x = (x_1, \dots, x_n)'$ であり Ω は

$$\Omega(x) = \int_{x_0}^x [Ax + Bh]' J[Bdx + Adh] + \Omega_0$$

で表えられる。

(証明) $\xi = Ax + Bh, \eta = Bx + Ah$ を定理 2.1 の結果において $m=n, s=x$ として代入すればよい。この場合ハイフリッド表現(大域)を持つという条件から Σ の単連結性は自動的に満足されている。

(証明終)

系 2.1 から $\mathcal{R}(1, n)$ がハイフリッド表現 $\xi = h(\eta)$ を持つならば条件 (1) は $J(\partial h / \partial \eta) = (\partial h / \partial \eta)'$ となり、条件 (2) は $\text{div } Jh(\eta) = 0$ 又は $Jh(\eta) = \text{rot } A^{i,j}(\eta)$ となる。 $\text{div } Jh(\eta) = 0$ は $\text{trace } J(\partial h / \partial \eta) = 0$ と書いてもよい。特に線形 n ポートの場合は Z をインピーダンス特性行列とすれば $J = I$ とおくことにより $\text{trace } Z = 0$ となる。同様にアドミタンス特性行列の場合も $\text{trace } Y = 0$ となる。正則 n ポート \mathcal{R} が調和的であるための必要十分条件は $\text{trace } J(\partial h / \partial \eta) = 0$ 且つ $J(\partial h / \partial \eta) = (\partial h / \partial \eta)'$ であり、必ずみ相反であるための必要十分条件は $\text{trace } J(\partial h / \partial \eta) = 0$ 且つ $J(\partial h / \partial \eta) \neq (\partial h / \partial \eta)'$ と

なる。線形 n ポートの場合はハイブリッドポート特性行列 H に対して、調和的であるための必要十分条件は $JH=H^T J$ 且つ $\text{trace } JH=0$ であり、ひずみ相反であるための必要十分条件は $JH \neq H^T J$ 且つ $\text{trace } JH=0$ である。例之はマルチポート理想変成器は表現

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

を持つから調和的であり、2ポートジャイレータは表現

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

を持つからひずみ相反である。

[性質2.1] ナレータは相反、ノレータはひずみ相反1ポートである。

[注意2.2] 一般に正則な1ポートは常に相反であることは、1次元多様体上の2次形式はすべて零であるという事実から明らかであるが、1ポートが密、特異の場合には注意を要する。

(証明) ナレータは $R^1 \times R^1 = \{(i, v)\}$ の原点 0 をその特性多様体として持つから、その上のすべての微分形式は零であり、従って $d\alpha=0$ であるから相反であることが分かる。ノレータはその特性多様体として $\Sigma = R^1 \times R^1 = \{(i, v)\}$ を持つから $\delta\alpha = \partial i / \partial v = 0$; 更に $d\alpha = di \wedge dv \neq 0$ となるからひずみ相反である。 (証明終)

次に本章の主結果である一般の分解定理を述べる。

[定理2.2] C^2 級ハイブリッド表現 $\xi = h(n)$ を持つ正則非線形 n ポート $\pi(1, n)$ は任意の有界閉領域 $D \subset R^n$ において相反 n ポートとひずみ相反 n ポートの直並列接続として実現できる。すなわち $n \in D$ に対して $h(n)$ は

$$Jh(n) = \text{grad } P(n) + \text{rot } A(n) \quad (2.7)$$

と分解できる。ここで $P: R^n \rightarrow R^1$ および $A: R^n \rightarrow R^{n \times n}$ は C^3 級写像であり、 $J \text{ grad } P(n)$ は相反、 $J \text{ rot } A(n)$ はひずみ相反部分 n ポートを表す。更に $h: R^n \rightarrow R^n$ が C^ω 級であるならば分解は Σ 全体で存在し、 P, A は C^ω となる。

(証明) C^2 級ハイブリッド表現 $\xi=h(\eta)$ に対して Σ 上の 1 次微分形式 α は $\alpha=\pi^1*\sum_{i,k=1}^n \xi_i J_k^i d\eta^k = \sum_{i,k=1}^n h_i(\eta) J_k^i d\eta^k$ となる。但し, $h(\eta)=[h_1(\eta), \dots, h_n(\eta)]'$ である。 C^1 級関数 $f(\eta)$ を $f(\eta) \triangleq \delta\alpha = \text{div } Jh(\eta) \triangleq \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial \eta^k} J_k^i d\eta^k$ とし Σ D を Σ の任意の有界部分多様体とすれば D 上でポアソンの方程式 $\nabla^2 P=f(\eta)$ を満たす C^2 級関数 $P(\eta)$ に対して 1 次微分形式 α_R を $\alpha_R \triangleq dP(\eta)$ とする。 $d\alpha_R=0$ であるから $\alpha_A \triangleq \alpha - \alpha_R$ とすれば $d\alpha_A=0$ ならば $d\alpha=0$ で $\mathcal{C}(1, n)$ は相反 n ポートとなり定理は成立する。今 $d\alpha_A \neq 0$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \delta\alpha_A &= \delta(\alpha - \alpha_R) \\ &= \delta\alpha - \delta\alpha_R \\ &= f(\eta) - \delta dP(\eta) \\ &= f(\eta) - \nabla^2 P(\eta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。このことから分解 $\alpha = \alpha_R + \alpha_A$ は α_R が相反 n ポート, α_A がひずみ相反 n ポートを表すことが分かる。これを次のように書く

$$\alpha = \sum_{i,k=1}^n h_{Ri}(\eta) J_k^i d\eta^k + \sum_{i,k=1}^n h_{Ai}(\eta) J_k^i d\eta^k$$

ここで $h_{Ri}(\eta) + h_{Ai}(\eta) = h_i(\eta)$ であり $h_R(\eta) = [h_{R1}(\eta), \dots, h_{Rn}(\eta)]'$ は相反 n ポートを, $h_A(\eta) = [h_{A1}(\eta), \dots, h_{An}(\eta)]'$ はひずみ相反 n ポートを表す。これらの n ポートをポート変数が電圧形であるか, 電流形であるかによりそれぞれ対応するポートを直並列接続して得られる n ポートが求める分解である。更に系 2.1 において $A=I, B=0$ とおけば (2.7) 式が得られる。 C^∞ の場合は P は R^n 全体で存在する。 (証明終)

[注意 2.3] 分解 (2.7) は R^3 における Helmholtz 分解の R^n への拡張となっている。Helmholtz 分解は (48)

$$F = \text{grad } \phi + \text{rot } A$$

となる。ここで ϕ はスカラーポテンシャル A はベクトルポテンシャルである。

分解の計算: 基本分解は基本的には次のようにして計算できる。

ハイブリッド特性 $\xi=h(\eta)$ に対してポアソンの方程式

$$\nabla^2 P = \text{div } Jh(\eta) \quad (2.8)$$

を満足する P を求める。演算子

$$\Delta \beta \triangleq d\delta\beta + \delta d\beta$$

は C^ω 級 1 形式の全体からそれ自身の上への同形写像である⁽⁷⁾。これより、

$$\Delta \beta = (Jh)' d\eta$$

$$P = \delta \beta$$

$$A_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j = d\beta \quad (2.9)$$

とあけば

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial \eta^i}, \quad (\beta = \sum b_i d\eta^i) \quad (2.10)$$

から β が計算できる。(2.9) から A が計算できる。こうして分解式 (2.7) が計算できる。

2.4 非相反 N ポートの構成

この節では 2.3 の結果に基づいて非相反 N ポートの構成はより簡単に構成できる相反 N ポートの構成問題に帰着できることを示す。2.3 の結果から一般的に非相反 N ポートは相反 N ポートとひずみ相反 N ポートに分解できるから、ひずみ相反 N ポートが相反 N ポートから構成できることを示せばよいことになる。以下では一般的代数的 N ポートの代わりに N ポート抵抗により議論を進める。これは、抵抗素子が応用上重要であることと、一般の場合も類似の議論が適用できることによる。

2.4.1 非相反 2 ポート抵抗の構成

最初に基本となる線形 4 ポートの定義を行なう。ひずみ相反線形 4 ポート N_I, N_V, N_H は以下に示すようなポート特性を持つもので基本的には従属電源を用いて構成できる。図 2.4 にその構成例を示す。これらの 4 ポートは不活性 (non-energetic) ではないのでジェネレータと理想変成器

のみからは構成できない。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (N_I)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (N_V)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (N_H)$$

一般の電圧制御形非線形2ポート

抵抗は

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(v_1, v_2) \\ h_2(v_1, v_2) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

と書ける。分解式(2.7)を(2.8)から(2.10)に基づいて計算すれば、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial v_2^2} = -\frac{\partial h_1}{\partial v_1} - \frac{\partial h_2}{\partial v_2}$$

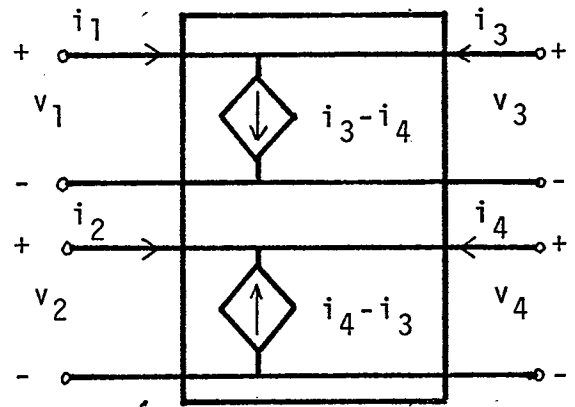
と

$$\nabla^2 P = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial b_i}{\partial v_i}$$

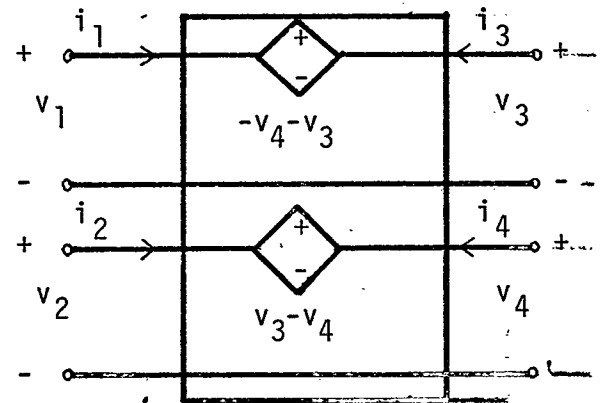
の解 $B = (b_1, b_2)'$ に対して

$$\begin{pmatrix} h_1(v_1, v_2) \\ h_2(v_1, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial b_1}{\partial v_1} + \frac{\partial b_2}{\partial v_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial b_1}{\partial v_1} + \frac{\partial b_2}{\partial v_2} \right) \end{pmatrix}$$

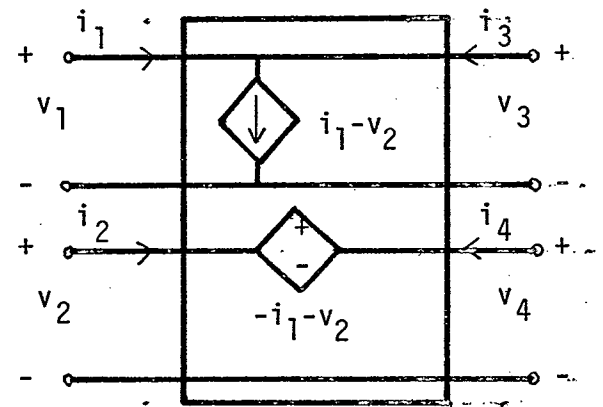
+



(a) N_I



(b) N_V



(c) N_H

図 2.4 N_I, N_V, N_H の構成例

Fig.2.4-One possible synthesis of N_I, N_V, N_H

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial b_1}{\partial v_2} - \frac{\partial b_2}{\partial v_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial b_1}{\partial v_2} - \frac{\partial b_2}{\partial v_1} \right) \end{pmatrix}$$

となる。このことから一般的非線形非相反電圧制御形2ポート抵抗は
 と2つの相反非線形2ポート抵抗（それぞれポテンシャル $P = (\partial b_1 / \partial v_1) + \partial b_2 / \partial v_2$, $\Omega = \partial b_1 / \partial v_2 - \partial b_2 / \partial v_1$ をもつ）から図 2.5 の様に構成することができる。

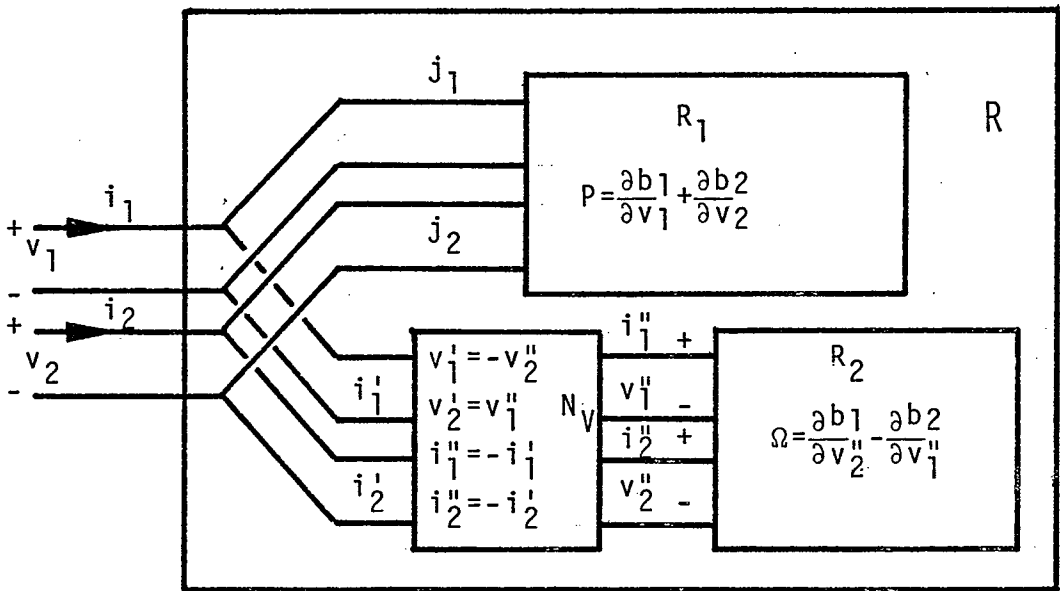


図 2.5 非相反2ポート抵抗の構成
 Fig. 2.5-Synthesis of Non-reciprocal 2-Port

2.4.2 非相反nポート抵抗の構成

定理 2.2 により任意の C^ω 級ハイブリッド表現

$$y = h(x)$$

を持つ非線形 n ポート抵抗は

$$h(x) = J \cdot \text{grad } P(x) + J \cdot \text{rot } A(x) \quad (2.12)$$

と分解できる。ここで $P: R^n \rightarrow R^1$, $A: R^n \rightarrow R^{n \times n}$ は C^ω 級である。

[補題 2.1] 式(2.12)において $P(x)$ と $A(x)$ は次のように書ける

$$P(x) = \text{div } B(x) \quad (2.13)$$

$$A_{ij}(x) = (\partial b_i / \partial x_j) - (\partial b_j / \partial x_i) \quad (2.14)$$

ここで $B = (b_1, \dots, b_n)$ である。

証明は“分解の計算”からすぐわかるので略す。

[補題 2.2] C^1 級ハイフロッッド表現

$$\xi = \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_v(i_1, v_2) \\ h_I(i_1, v_2) \end{pmatrix} \triangleq h(\eta) \quad (2.15)$$

を持つ必ずみ相反 n ポート $n(n-1)/2$ 個の C^2 級関数を用いて

$$\begin{bmatrix} h_{v_1}(\eta) \\ h_{v_2}(\eta) \\ \vdots \\ h_{v_l}(\eta) \\ -h_{I_1}(\eta) \\ \vdots \\ -h_{I_m}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 A_{12} \\ -\partial_1 A_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_3 A_{13} \\ 0 \\ -\partial_1 A_{13} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_n A_{n-1,n} \\ -\partial_{n-1} A_{n-1,1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

と分解できる。但し $A_{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, (i < j), \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)' = (i_1', v_2)'$

$l+m=n, \partial_i = \partial / \partial \eta_i, \xi = (v_1', i_2)'$ である。

(証明) 必ずみ相反 n ポートは系 2.1, (2) から

$$Jh = \text{rot } A_{ij}(\eta)$$

と書ける。rot A_{ij} の定義 (定理 2.1 参照) から

$$\begin{aligned} \text{rot } A_{ij} &= \begin{bmatrix} -\text{div } A_1 \\ \vdots \\ -\text{div } A_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sum_{i=2}^n \partial_i A_{i,1} \\ \vdots \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \partial_i A_{i,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^n \partial_i A_{1i} \\ -\partial_1 A_{12} + \sum_{i=3}^n \partial_i A_{2i} \\ \dots\dots\dots \\ -\sum_{i=1}^{k-1} \partial_i A_{ik} + \sum_{i=k+1}^n \partial_i A_{ki} \\ \dots\dots\dots \\ -\sum_{i=1}^{n-1} \partial_i A_{in} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

(2.17) 式を $n(n-1)/2$ 個の C^2 関数 $A_{ij}, (i < j, i, j = 1, \dots, n)$ に分解してかけば補題を得る。 (証明終)

[補題 2.3] 式(2.16) の右辺の各項で表されるみずみ相反ルポートは 図 2.6 に示すように混合ポテンシャル関数⁽⁴⁹⁾ $A_{ij}(\eta), (i \leq j)$ を持つ相反ルポート N_{ij} の第 k ポート ($k=1, \dots, n \neq i, j$) に従属電源 η_k を接続し更に

- (1) $\eta_i = i_i, \eta_j = v_j$ ならば線形変換器 N_H を
- (2) $\eta_i = i_i, \eta_j = i_j$ ならば線形変換器 N_I を
- (3) $\eta_i = v_i, \eta_j = v_j$ ならば線形変換器 N_V を

図 2.6 に示すように第 i, j ポートに接続することにより構成できる。

(証明) 場合 (1) を示す。(2),(3) についても同様に証明できる。

図 2.6 において N_{ij} は混合ポテンシャル A_{ij} を持つ相反ルポートであ

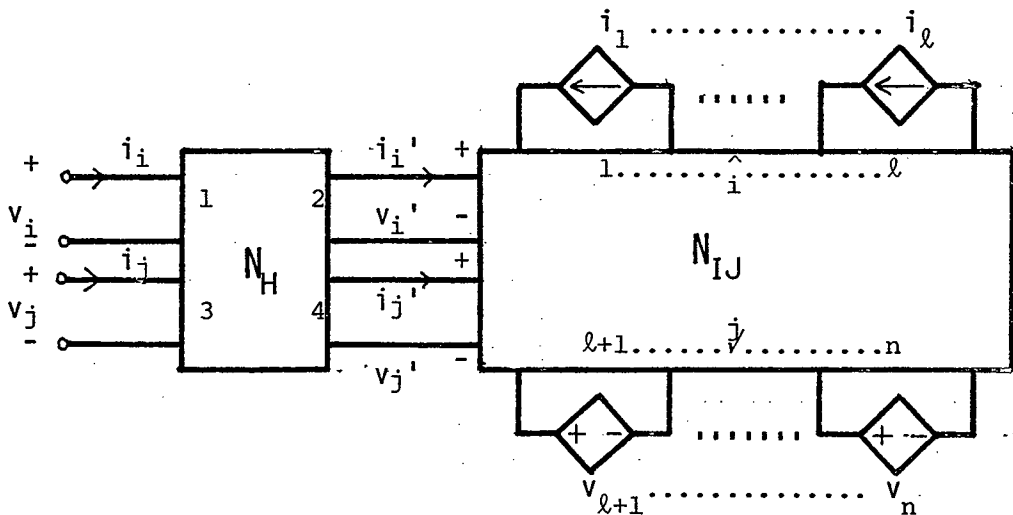


図 2.6 式(2.16) の回路構成図
Fig.2.6-Circuit Realization for Eq.(2.16)

るから

$$v_i' = -(\partial/\partial i_i') A_{ij}$$

$$i_j' = (\partial/\partial v_j') A_{ij}$$

と書くことができる。線形変換器 N_H の特性より

$$v_i = v_i', \quad i_j' = -v_j, \quad i_i' = -v_j, \quad v_j' = -i_i$$

であるから、これを上式に代入すれば求める特性が得られる。式(2.16)

の右辺の負号は左辺へつけて考える。(証明終)

[定理 2.3] C^1 級ハイブリッド表現式(2.15)を持つすべてのひずみ相反 n ポートは最大限 $n(n-1)/2$ 個の相反 n ポートと基本線形変換器 N_I (N_V 又は N_H) 及び n 個の従属電源を用いて構成することができる。

(証明) 補題 2.2 からハイブリッド表現式 2.15 は式 2.16 のように表すことができる。更に補題 2.3 により式 2.16 の右辺の各項を表す n ポートは 1 個の相反 n ポートと基本線形 n ポートおよび従属電源 η_k から構成されるから、それらをポート変類の形により直並列接続すれば式(2.16)が実現できる。(証明終)

定理 2.3 で構成したひずみ相反 n ポートにおいて従属電源 η_k と基本線形 n ポート N_I, N_V, N_H をまとめて線形 $2n$ ポートとみなすことにより定理 2.2 と定理 2.3 から一般的な C^ω 級ハイブリッド表現 $\xi = h(\eta)$ を持つ正則非線形 n ポート抵抗 $\mathcal{N}(\omega, n)$ は図 2.7 に示すようにして構成することができる。

[例 2.2] C^1 級ハイブリッド表現

$$v_1 = h_{v1}(i_1, v_2, v_3)$$

$$i_2 = h_{I1}(i_1, v_2, v_3)$$

$$i_3 = h_{I2}(i_1, v_2, v_3)$$

を持つひずみ相反 3 ポートは補題 2.2 により

$$\begin{pmatrix} h_{v1} \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 A_{12} \\ \partial_1 A_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_3 A_{13} \\ 0 \\ \partial_1 A_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_3 A_{23} \\ \partial_2 A_{23} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

の形に分解できる。今、ポテンシャル関数 $A_{ij} (i < j = 1, 2, 3)$ を持つ相反ポートを \mathcal{R}_{ij} で表すと、式(2.18)は図2.8に示すようにして実現できる。例えば"3ポート抵抗

$$\left. \begin{aligned} h_{v1} &= 3i_1^2 v_2^2 v_3^4 + 2i_1^4 v_3 \\ h_{I1} &= 2i_1 v_2^3 v_3^4 - 2i_1^3 v_2 v_3 \\ h_{I2} &= 4i_1^3 v_3^2 + 3i_1^3 v_2^2 v_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

は $A_{12} = i_1^2 v_2^3 v_3^4$, $A_{13} = i_1^4 v_3^2$, $A_{23} = i_1^3 v_2^2 v_3^2$ とおくことにより分解式(2.18)が得られるから必ずみ相反3ポートである。(詳しくはさらにヤコビ行列が非対称である。)。図2.8は式(2.19)の実現を表している。 \mathcal{R}_{12} , \mathcal{R}_{23} はそれぞれ混合ポテンシャル A_{12} , A_{23} を持つ相反3ポート抵抗で、 \mathcal{R}_{13} は混合ポテンシャル A_{13} を持つ相反2ポート抵抗である。

[系2.2] 単純結合 C^1 級ハイブッド表現

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^n f_{jk}(x_j, x_k), \quad (j=1, \dots, n) \quad (2.20)$$

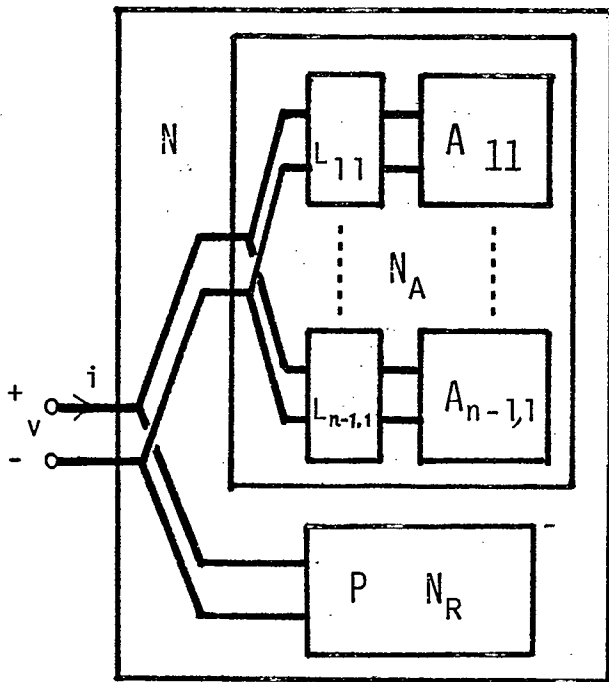


図2.7 一般的非相反nポートの構成
Fig.2.7-Synthesis of general non-reciprocal n-port

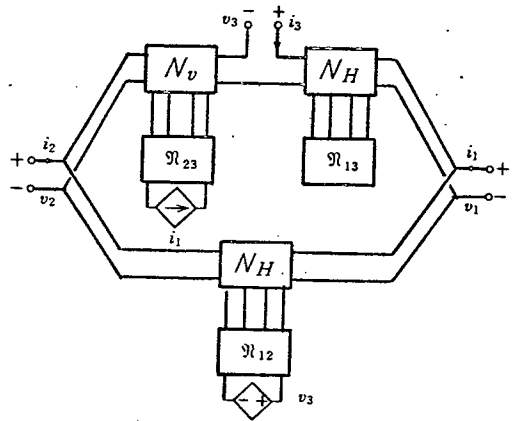


図2.8 式(2.18)の回路構成図

Fig.2.8-Circuit Realization for Eq.(2.18)

を持つ n ポートは $n(n-1)$ 個の相反 n ポートと $n(n-1)/2$ 個の線形変換器 N_I, N_V 又は N_H と n 個の 1 ポートから構成できる

(証明)(2.20) 式を

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) \\ \vdots \\ f_n'(x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{n-1,n}(x_{n-1}, x_n) \\ f_{n,n-1}(x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

と分解して書くと(2.21)式の第1項は相反 1 ポートの組を表わしている。第2項以下の各項に対応する 2 ポートを定理 2.2 より相反 2 ポートとひずみ相反 2 ポートに分解する。ひずみ相反 2 ポートは定理 2.3 から、 $n(n-1)/2$ 個の相反 2 ポートおよび N_I, N_V 又は N_H で構成できるから系は証明された。(証明終)

2.4.3 エネルギー的観点からの考察

最後に受動非線形 n ポート抵抗が受動相反 n ポートと受動ひずみ相反 n ポートに分解できるか否かについての考察を行なう。これについては特殊な場合について以下に述べる性質が成立する。

代数的 n ポート N のポート変数 i, v が常に $P=i'v=0$ を満足するとき N は不活性であるという。例之は理想変成器は明らかに不活性である。

[性質 2.2] $i(v)$ 制御形ひずみ相反 2 ポート抵抗は不活性であるか又は能動的である。更に不活性なものは(非線形)ミャイレータのみである⁽¹⁵⁾。

(証明) C^1 級ひずみ相反 2 ポートは定理 2.1, (2)又は系 2.1, (2)から C^2 級関数 $A(x_1, x_2)$ により決定される。ひずみ相反 2 ポートが消散的であるための条件は

$$\langle x^* \cdot \text{grad } A \rangle > 0, \quad (x \neq 0) \quad (2.22)$$

である。但し、 $x^* = (-x_2, x_1)^T$ ところが式(2.22)が成立すると仮定すれば図2.9に示すように x^* と平行に dx をとれば

$$\langle \text{grad } A, dx \rangle > 0$$

が成立する。 (x_1, x_2) -空間内の単位円 C に沿って積分

$$\Phi = \int_C \langle \text{grad } A, dx \rangle$$

を考れば $\Phi > 0$ となる。このことはこの積分の値が0であることに矛盾するから式(2.22)を満足するポテンシャル A は存在しない。こうして前半が示された。後半は $\langle x^*, \text{grad } A \rangle = 0$ を満足する A が $A = f(x_1^2 + x_2^2)$ の形をしているから非線形ジャイレータの特性

$$h_1(x_1, x_2) = -\frac{d}{dz} f(z) \Big|_{z=x_1^2+x_2^2} \cdot x_2$$

$$h_2(x_1, x_2) = \frac{d}{dz} f(z) \Big|_{z=x_1^2+x_2^2} \cdot x_1$$

を得る。

(証明終)

性質2.2は一般的受動非線形2ポート抵抗は消散的ひずみ相反2ポートが存在しないことから、受動な相反2ポート抵抗と受動(消散的)ひずみ相反2ポート抵抗には分解できないことを意味する。一般の n ポートの場合も調べなければならぬがこれは今後の問題である。

2.5 相反 n ポート抵抗の構成

2.4節では一般の非相反 n ポートは図2.7に示すように相反 n ポートの構成問題に帰着することができた。したがってこの節では定理2.1(1)を応用することにより相反 n ポート抵抗の構成について考察する。この節ではハイブリッド表現 $y = F(x)$, $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ を持つ $i(v)$ 制御形非線形

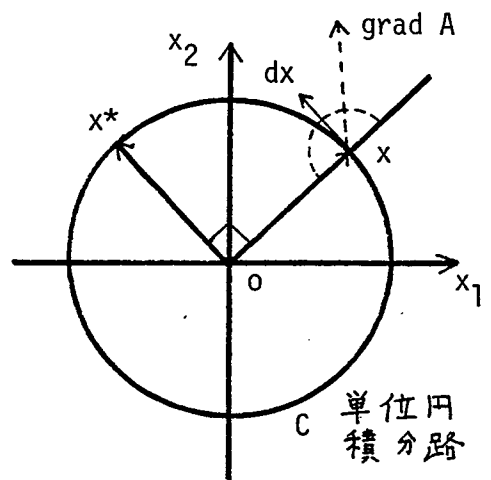


図2.9 性質2.2の証明の図式化

Fig.2.9-The Elustration of the Proof of Property 2.2

抵抗を扱うが一般の場合についても同様である。\$F: R^n \to R^n\$ は一般的 \$m\$ 次代数多項式

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{\ell=0}^m \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^1 x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \\ &\dots \\ y_n &= \sum_{\ell=0}^m \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^n x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \end{aligned} \tag{2.23}$$

の形で与えられると仮定する。但し \$a_{j_1, \dots, j_n}^i \in R^1\$ (\$i=1, \dots, n\$)

2.3 節の定理 2.1, (1) から \$n\$ ポート \$y=F(x)\$ が相反であるための必要十分条件は \$(\partial F/\partial x)=(\partial F/\partial x)^T\$ であることに注意すれば

[補題 2.4] 式(2.23) で表される非線形 \$n\$ ポート抵抗が相反であるための必要かつ十分な条件は

$$j_k a_{j_1 \dots j_{k+1}, \dots, j_n}^\ell = j_\ell a_{j_1, \dots, j_{\ell+1}, \dots, j_n}^k \tag{2.24}$$

が成立することである。

が得られる。式 (2.24) の拘束の下では式(2.23) は定理 2.1, (1) から代数多項式によるポテンシャル \$P(x)\$ のグラジエントで表される。 \$y=F(x)\$ に対してはそのポテンシャルは積分

$$Q(x) = \int_0^1 x^T F(tx) dt$$

で与えられる。式 (2.23) に対してこの式を計算すれば

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n x_k \sum_{\ell=0}^m t^\ell \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^k x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} dt \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{\ell=0}^m \frac{1}{\ell+1} \sum_{j_1+\dots+j_n=\ell} a_{j_1, \dots, j_n}^k x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \end{aligned} \tag{2.25}$$

となる。 \$Q(x)\$ は \$m+1\$ 次代数多項式であることに注意する。

[補題 2.5] (2.23) 式で表される \$i(v)\$ 制御形非線形 \$n\$ ポート抵抗が相反 \$\iff\$ ポテンシャル関数 \$Q(\cdot): R^n \to R^n\$ で一般形

$$Q(x) = \sum_{s=1}^N \sum_{\ell=0}^{m+1} a_{s,\ell} (x_1 + b_s x_2 + \dots + d_s x_n)^\ell \quad (2.26)$$

の $m+1$ 次係数多項式のフーリエ展開で表現(2.23) が与えられるものが存在する。ここで $a_{s,\ell}, b_s, \dots, d_s \in \mathbb{R}^1$ であり $N \leq 2^{n-1}$ は適当な自然数である。

(証明) 定理 2.1, (1) からポテンシャル Q が存在することはいえるので、 Q が式 (2.26) の形になることを示せばよい。式(2.25) から Q は $m+1$ 次多項式となるので一般的 $m+1$ 次多項式は式 (2.26) の形をしていることを示す。今、式 (2.26) において $b_s, \dots, d_s = +1, 0, -1$ として 2^{n-1} 個のすべての場合の一次独立な多項式

$$(x_1 + \sum_{i=2}^n k_i x_i)^\ell, \quad k_i = \pm 1 \text{ or } 0$$

が得られる。係数 $a_{s,\ell}$ を適当に選べば一次結合

$$\sum_{s=1}^N a_{s,\ell} (x_1 + b_s x_2 + \dots + d_s x_n)^\ell$$

によりすべての ℓ 次同次多項式が得られるから結局 ℓ を 0 から $m+1$ まで動かして和をとればすべての $m+1$ 次多項式

$$Q(x) = \sum_{\ell=0}^{m+1} \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=\ell} A_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right)$$

が得られる。

(証明終)

[定理 2.3] (2.23) 式で与えられる非線形相反のポート抵抗 \mathcal{N} は N 個の 1 ポート非線形抵抗 (f_1, \dots, f_n でその特性が与えられる) と $(N+n)$ ポート理想変成器のみを用いて図 2.10 に示す方法で構成することができる。

[証明] $T_s' \in \mathbb{R}^n$ を $T_s \triangleq (1, b_s, \dots, d_s)$ と置き、また $P_s: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ を

$$P_s(z_s) = \sum_{\ell=0}^{m+1} a_{s,\ell} z_s^\ell, \quad (z_s \in \mathbb{R}^1) \quad (2.27)$$

とする。このとき式 (2.26) で与えられる $Q(x)$ は

$$Q(x) = \sum_{s=1}^N P_s(T_s' x) \quad (2.28)$$

と書ける。 $z = (z_1, \dots, z_N)' \in \mathbb{R}^N$ とすれば

$$P(z) \triangleq \sum_{s=1}^N P_s(z_s) \quad (2.29)$$

$$Q(x) = P(Tx) \quad (2.30)$$

となる。ここで $T = (T_1', \dots, T_N')'$ である。(2.30)式は巻線比 T を持つ理想変成器にポテンシャル関数 P を持つ相反抵抗を接続してできる相反 n ポートのポテンシャル関数を表す。相反抵抗

$$(f_1, f_2, \dots, f_N)' = \partial P / \partial z$$

は (2.27) 式と (2.29) 式から 個の 1 ポート抵抗のあつまりから成る相反 n ポート抵抗であるから図 2.10 に示す様にして回路を構成することができる。
(証明終)

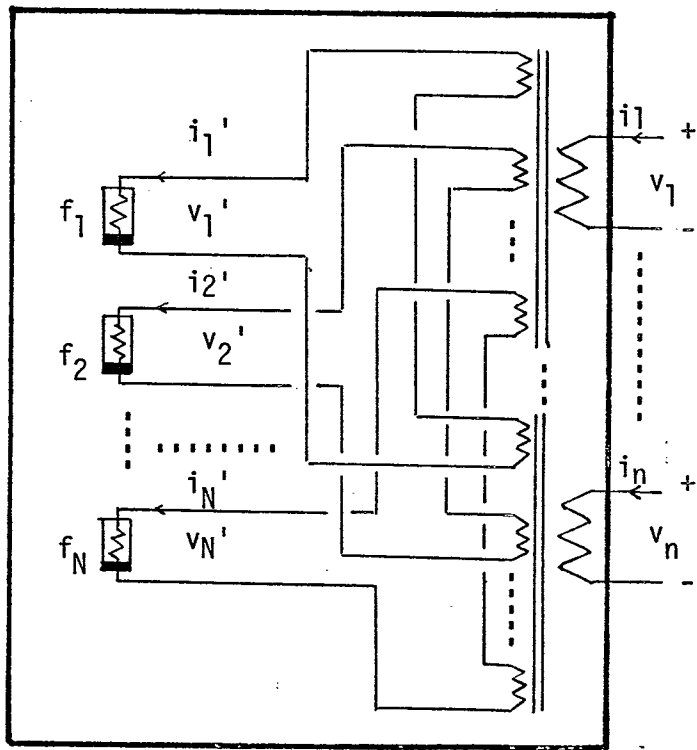


図 2.10 相反 n ポート抵抗構成のための回路接続

Fig.2.10-General Circuit Interconnection used in the Synthesis of Reciprocal Non-linear n -Ports

n ポート抵抗は式

$$x' F(x) \geq 0, \quad (x \in R^n) \quad (2.31)$$

が成立するならば受動である。また 1 ポート抵抗 $y = f(x)$ は $x_1 f(x_1) \geq 0$

のとき受動である。特性

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_m^m$$

を持つ1ポート抵抗が受動であるならば (1) $a_0 = 0$ (2) $a_1 \geq 0$ (3) m は奇数, (4) $a_m > 0$ が成立する。

[定理 2.4] (2.23) 式で表される非線形受動相反 n ポート抵抗は N 個の受動1ポート非線形抵抗と $(n+N)$ ポートの理想変成器から構成できる。

(証明) 定理 2.3 から図 2.10 の回路 \mathcal{N} が構成できるから $F(x)$ が (2.31) 式を満足するならば $f_i(\cdot)$ は受動となることを示せばよい。今, $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$ を (2.29) 式で定義される関数とする。ここで $P_s(z_s)$ は

$$P_s(z_s) = \int_0^{z_s} f_s(\zeta) d\zeta \quad (2.32)$$

で与えられる。このとき \mathcal{N} のポテンシャル関数は (2.30) 式で与えられる。このとき

$$\begin{aligned} 0 \leq x' F(x) &= x' (\partial Q / \partial x) \\ &= x' T' (\partial P / \partial z) \Big|_{z=Tx} \\ &= z' (\partial P / \partial z) \end{aligned}$$

となり, 更に (2.32) と (2.29) 式から

$$= \sum_{s=1}^N z_s f_s(z_s) \quad (2.33)$$

となる。(2.33) 式から $z_i \equiv 0$ ($i \neq k$) とおくことにより各 k について $z_k f_k(z_k)$

≥ 0 となる。

(証明終)

[定理 2.5] (2.23) 式で表される相反非線形 n ポートが実質受動であるならば非線形抵抗 f_1, \dots, f_N は実質受動となる。

証明は定理 2.4 と同様である。定理 2.4 と 2.5 は受動 (実質受動) 相反 n ポート抵抗を図 2.10 のように構成すれば f_1, \dots, f_N は必ず受動 (実質受動) となることを示す。

以上相反 n ポート抵抗が1ポート抵抗と理想変成器を用いて構成でき

ることを示した。構成は相反回路がポテンシャル P を持つという事実が重要な役割と演ずる。一般の C^ω 級関数についてここでの構成法が適用できるか否かは興味深いが無限級数展開で考えれば一般には N が有限でなくなるためこのことは成立しない。

[例2.2] 電流制御形非線形3ポート抵抗

$$v_1 = 12i_1^3 - 36i_1^2i_2 + 36i_1i_2^2 - 12i_2^3 + 4i_1 - 2i_2 - 2i_3$$

$$v_2 = -12i_1^3 + 36i_1^2i_2 - 36i_1i_2^2 + 12i_2^3 + 2i_1 - 2i_2$$

$$v_3 = -4i_1 + 4i_3$$

を理想変成器と1ポート非線形抵抗から構成する方法を考える。この3ポートは補題2.4の条件(2.24)を満足するから相反である。この3ポート抵抗のポテンシャル関数 $Q(x)$ は(2.25)式から

$$Q = 2(i_1 - i_3)^2 + 3(i_1 - i_2)^4 - (i_1 - i_2)^2$$

となるから定理2.3から

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、1ポート非線形抵抗の特性は

$$f_1; v = 4i$$

$$f_2; 12i^3 - 2i = v$$

となる。2つの1ポート

非線形抵抗は

f_1 ; Passive

f_2 ; Eventually Passive

となる。図2.11にこの3ポートの回路実現を示す。

f_1, f_2 は実質受動であるからこの3ポートは実質受動である。

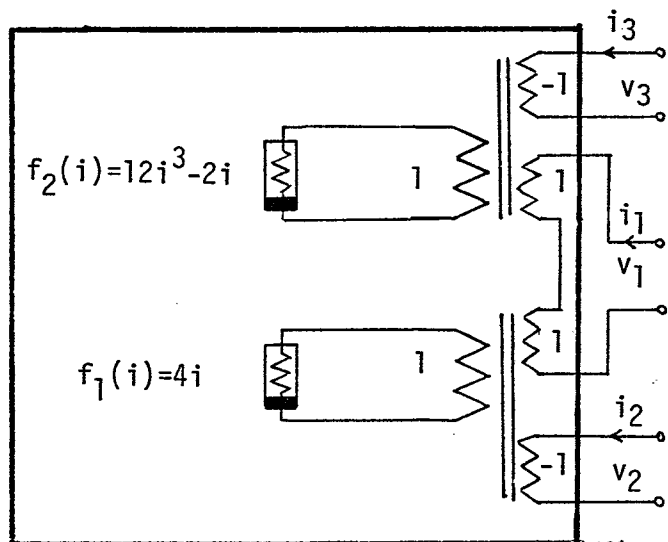


図2.11 例2.2の回路実現

Fig.2.11-Network Realization of Example 2.2

2.6 結 言

この章では代数的非線形Nポートの基本的概念とその構成について論じた。まず微分形式を用いた統一的方法でかなり広い範囲の時不変非線形Nポートに対して従来の定義を含むような相反性、および非相反性の定義を行ない、これらに関する必要十分条件と分解定理を与えた。更にこれらの結果を利用して任意のハイブリッド特性を有する時不変非線形Nポート抵抗の構成は非線形1ポートを構成する問題に帰着されることを示した。代数多項式でその特性が記述されるような非線形1ポート抵抗は電子回路で比較的容易に構成できるものであるためここで示した構成法は工学的にも意味を持つ。ハイブリッド形非線形Nポート抵抗の構成に関するここでの議論はそのまま一般的に代数的Nポートの構成にも応用できるものである。この章の結果はNポート素子のモデリングに対して重要な応用を持つ。

第 3 章 混成 n ポートの解析と構成

3.1 緒言

混成 n ポートは大ざっぱに言えば抵抗素子とエネルギー蓄積素子とが混在する n ポートである。線形の場合には混成 n ポート系の研究はすでに完成されており、ラプラス変換法により抵抗 n ポートの場合の直接的一般化として取り換える。また線形の場合には分布定数回路の混在するような場合についても研究されている。これに対して非線形の場合にはラプラス変換法に相等する解析法が存在しないためその解析は代数的 n ポートの場合の直接的一般化とはならない。線形の場合の一般化として非線形混成 n ポートの研究を行なう 1 つの方法として混成 n ポートが集中素子のみから成り表現

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \tag{3.1}'$$

を有すると仮定する仕方が考えられる。また、とくに線形の場合のイミタンス行列表現に相等する表現は Banach 空間上の作用素 \mathcal{L} により

$$y = \mathcal{L}(u(\cdot)) \tag{3.2}'$$

と表すことができる。本章ではもっぱら (3.1)' または (3.2)' の形で表される場合を対象として混成 n ポートのエネルギー概念 (受動性, 実質受動性, 無損失性および不活性) についての考察を行ない解析・構成に必要な基本的性質を導く。

混成 n ポートの受動性に関しては Rohrer⁽¹⁴⁾ の結果がある。これは最適制御理論の Hamilton-Jacobi の方程式により受動性を定式化したものであり、この方程式による受動条件を論じている。この条件は解に対する情報を必要とするため実際の解析では用いにくい欠点がある。そこで本章ではまず 3.3 においてシステム表現 (3.1)' に関連するリャポノフ形

関数の構成による (解に関する情報を必要としない) 受動条件を与える。更に 3.4 ではこれらの逆定理を Hamilton-Jacobi の方程式による受動条件から導くことにより n ポート素子のモデリングに対する基礎、すなわち受動 n ポートは受動素子でモデル化できることを示す。3.5 では混成 n ポートが (3.2)' 式に示す作用素表現で与えられた場合について受動混成 n ポートの構成問題を論ずる。基本的な結果として線形の場合の正実補題が非線形の場合へ拡張される。

3.2 諸定義

以下では文字の節約のため異なるポート数を持つ n ポートを表すのに同じ n を用いる。図 3.1 に特殊な混成 n ポート N を示す。 N は部分 n ポートとして n ポート抵抗 N_R n ポートキャパシタ N_C および n ポートインダクタ N_L から成る。 N_R は結合を許す非線形マルチポート抵抗素子、従属電源および直流独立電源から成り、 N_C は結合を許す n_C 個の時不変電荷制御形非線形キャパシタから成る。 N_L は結合を許す n_L 個の時不変磁束制御形非線形インダクタから成る。 $v_C, i_C, q_C \in R^{n_C}$ ($v_L, \phi_L, i_L \in R^{n_L}$) をそれぞれキャパシタ (インダクタ) 電圧, 電流, 電荷 (磁束) ベクトルとする。 N_C および N_L の特性を

$$v_C = h_C(q_C) \quad (3.1)$$

$$i_L = h_L(\phi_L) \quad (3.2)$$

とする。ここで写像 $h_C: R^{n_C} \rightarrow R^{n_C}$ および $h_L: R^{n_L} \rightarrow R^{n_L}$ は連続可微分である。 p ベクトル ($p = n_C + n_L$) $h(\cdot) \triangleq (h_C(\cdot), h_L(\cdot))'$ を用いることにより (3.1) 式 (3.2) 式をまとめて

$$x = h(z) \quad (3.3)$$

とかく。ただし $x = (v_C', i_L')'$, $z = (q_C', \phi_L')'$ である。 N の外部ポートに接続する s 個の入力は電圧源の電圧, 電流源の電流から成り s ベクトル $u \in R^s$ で表す。抵抗 $(p+s)$ ポート N_R は特性

$$\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x,u) \\ g(x,u) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

を持つと仮定する。ここで $y \in \mathbb{R}^S, w \in \mathbb{R}^D$ また $w = (i_C', v_L')$ である。 $f: \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^D$ および $g: \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$ は連続可微分写像である。 N の動的システムによる表現は (3.3) 式と (3.4) 式から

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -f(h(z), u) \\ y &= g(h(z), u) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。以下ではこの混成 n ポート N に対してエネルギー概念の定義を行なう。

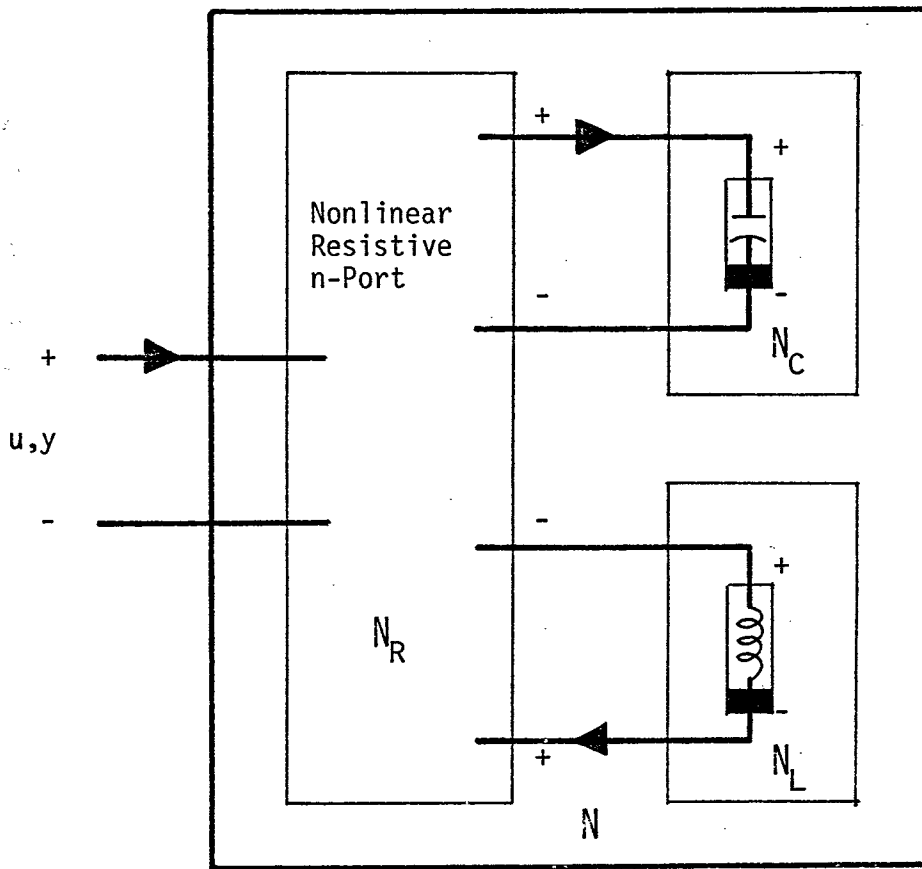


図3.1 非線形混成 n ポートの特殊なクラス
Fig.3.1-Special Nonlinear Mixed n -Port under
Consideration

区分的に連続なすべての許容入力の全体を \mathcal{U} で表わす，すなわち $\mathcal{U} \subset u(\cdot): R^1 \rightarrow R^n$ であり初期状態 z_0 ，入力 $u \in \mathcal{U}$ のとき N の出力を

$$y(t) \triangleq y_{z_0, u(\cdot)} \quad (3.6)$$

と表す。 $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow R^1$ を式

$$\varphi(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} u'(\tau) y(\tau) d\tau + \varepsilon(z_0) \quad (3.7)$$

で定義される (N に個有の) 汎関数とする。ここで

$$\varepsilon(z_0) = \int_{-\infty}^{t_0} h'(z(t)) \dot{z}(t) dt \quad (3.8)$$

は時刻 t_0 ，状態 z_0 で N に貯えられていたエネルギーであり $t_0, t_0 \leq t_f, z_0$ はそれぞれ任意で固定されている。

[定義 3.1] すべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ， $t_f \in R^1$ および $z_0 \in R^p$ に対して汎関数 (3.7) が

$$\varphi(u(\cdot)) \geq 0 \quad (3.9)$$

を満足するならば混成ポート N は受動である。

この定義は次の定義 3.2 と等価である。

[定義 3.2] $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ がすべての $t_0 \leq t_f, z_0 \in R^p$ で汎関数 $\varphi(\cdot)$ を最適化 (極小と) するとき

$$\varphi(\hat{u}(\cdot)) \geq 0$$

が成立するならば混成ポート N は受動である。

[定義 3.3] $u(t) \neq 0$ ($u \in \mathcal{U}$)， $t_0 \leq t \leq t_f$ に対して常に

$$\varphi(u(\cdot)) > \varepsilon(z(t)) \geq 0 \quad (3.10)$$

のとき N は $[t_0, t_f]$ で消散的であるという。 $\varepsilon: R^p \rightarrow R^1$ は (3.8) 式で与えられている。

[定義 3.4] すべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ， $t_f \geq t_0$ に対して常に

$$\varphi(u(\cdot)) = \varepsilon(z(t_f))$$

であるならば N は無損失である。

[定義3.5] すべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $t_f \geq t_0$ に対し常に

$$\mathcal{F}(u(\cdot)) = \varepsilon(z_0)$$

のとき N は不活性 (non-energetic) である。

[定義3.6] $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ と (3.5) の解 $z(t)$ がある正数 k に対して不等式 $\|(u'(t), z'(t))\| > k$, $t > t_0$ を満足するならば (3.9) 式が成立するとき N は実質受動であるといい, (3.10) 式が成立するならば実質消散的であるという。

[定義3.7] すべての許容入出力対 $(u_1(t), y_1(t))$ と $(u_2(t), y_2(t))$ が式 $u_1(t) \neq u_2(t)$, $y_1(t) \neq y_2(t)$ を満足するとき

$$\int_{-\infty}^t (u_1(t) - u_2(t))' (y_1(t) - y_2(t)) dt \geq 0 \quad (3.11)$$

が成立するならば N は局所受動 (消散的) という。

単一種類の素子のみから成る n ポート (代数的 n ポート) については混成 n ポートの特殊な場合として次の様に定義される

[定義3.8] N_R はポート電圧, 電流対 $(v_R, i_R) \in \mathbb{R}^{2n}$ の n ポート抵抗とする。

(1) N_R は受動 \iff

$$\langle v_R, i_R \rangle \geq 0 \quad (3.12)$$

がすべての許容電圧, 電流対に対して成立する。

(2) N_R は不活性 $\iff \langle v_R, i_R \rangle = 0$ がすべての許容電圧, 電流対に対して成立する。

(3) N_R は消散的 $\iff v_R \neq 0, i_R \neq 0$ で (3.12) 式の不等式が成立。

(4) N_R は局所受動 (消散) \iff すべての許容電圧, 電流対 (v_{R1}, i_{R1}) と (v_{R2}, i_{R2}) に対して

$$(v_{R1} - v_{R2})' (i_{R1} - i_{R2}) \geq 0$$

が成立する。ただし $v_{R1} \neq v_{R2}, i_{R1} \neq i_{R2}$ 。

(5) $\mathbb{R}^{2n} \supset M$ をコンパクトな集合とすれば (3.12) 式が $(v_R, i_R) \in \mathbb{R}^{2n} - M$

に対して成立するとき N は実質受動であり、不等号のみが成立するならば実質消散的という。

[定義3.9] リアクタンス N ポート N_C または N_L のポート電圧・電流対 $(i(t), v(t))$ に対して

$$\int_{-\infty}^t \langle i(\tau), v(\tau) \rangle d\tau \geq 0 \quad (3.13)$$

がすべての $t \in \mathbb{R}^1$ に対して成立するとき N_C または N_L は受動である。

N_C, N_L が相反であるならば (3.13) 式は

$$\int_0^z h'(\zeta) d\zeta \geq 0 \quad (z \in \mathbb{R}^n) \quad (3.14)$$

で置き換えられる。実質受動も同様に定義できる。

3.3 受動条件

この節では比較的初等的な考察により混成 N ポートに対するいくつかの受動条件を与える。3.2 で述べた混成 N ポート N に対しては次の性質 3.1 から 3.3 が成立する。これらの性質は N のエネルギー平衡条件からすぐ導出されるため証明は省く。

[性質 3.1] N_R が受動 (あるいは消散的) で N_C, N_L が相反かつ受動であるならば混成 N ポート N は受動 (あるいは消散的) である。

[性質 3.2] N_R が式

$$x'f(x, u) = 0 \quad (3.15)$$

$$u'g(x, u) = 0 \quad (3.16)$$

を満足し、更に N_C, N_L が相反かつ受動であるならば混成 N ポート N は不活性である。

[性質 3.3] N_R が不活性 (または無損失とも言う) で N_C, N_L が相反かつ受動ならば混成 N ポート N は無損失である。

上の性質 3.2 から性質 3.3 において N_C, N_L の相反性はこれらのリアクタ

ンスポートが無損失であるための条件となっている⁽²¹⁾。性質 3.1 から性質 3.3 は N の受動条件である。

[注意 3.1] 3.1 図に示す混成ポート N がすべての $u \in \mathcal{U}$ に対して式

$$u'(t)y(t) \geq 0 \quad (t \in \mathbb{R}^1) \quad (3.17)$$

を満足するならば N は zero-power ポートである。明らかに不活性なポートは zero-power である。

混成ポート N を暗箱と考へ抽象化した混成ポート \mathcal{N} を考へる。 \mathcal{N} は図 3.2 に示す関式で与えられシステム表現

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F(z, u) \\ y &= G(z, u) \end{aligned} \quad (3.18)$$

を持つと仮定する。さらに内部に貯えられる初期エネルギー $\varepsilon(z_0)$ を持つものとする。この \mathcal{N} に対しては定義 3.1 から定義 3.7 は \mathcal{N} に対しても成立する。

[定理 3.1] 2 回連続可微分な関数 $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$ ですべての $z \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^s$ で $P(z) \geq 0, P(0) = 0$ および

$$-\frac{\partial P}{\partial z} F(z, u) + u' G(z, u) \geq 0 \quad (z \neq 0) \quad (3.19)$$

を満足しさらに $\partial P / \partial z: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ が同相すなわち*

$$\det(\partial^2 P / \partial z^2) \neq 0 \quad (3.20)$$

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|\partial P / \partial z\| = \infty \quad (3.21)$$

となるものが存在するならば \mathcal{N} は受動 (消散的)。

(証明) 仮定から

* 次の定理から言うことができる

[Palais の定理]⁽²²⁾ C^1 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が C^1 同相 \iff

i) $\det(\partial f / \partial x) \neq 0$

ii) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$

が成立する。

$$h(z) \triangleq \partial P / \partial z \quad (3.22)$$

とすれば $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は可微分同相となり (前ページ脚注参照)

$$f(\cdot, u) \triangleq F(h^{-1}(\cdot), u) \quad (3.23)$$

$$g(\cdot, u) \triangleq G(h^{-1}(\cdot), u) \quad (3.24)$$

とおくことができる。したがって \mathcal{N} の等価回路モデルとして

(3.5) 式と図 3.1 で表される N を得る。

(3.19) 式は $h(z)=x$ とおけばすべての

$x \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^s$ で

$$-x' f(x, u) + u' g(x, u) \geq 0 \quad (x=0)$$

となり N_R は受動 (消散的) である。更

に仮定から

$$P(z) = \int_0^z h'(z) dz \geq 0$$

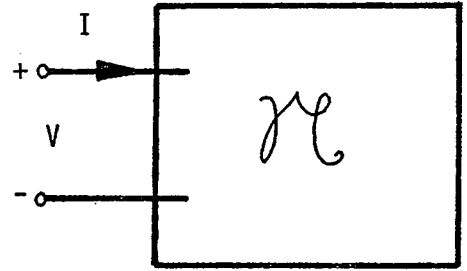


図3.2 混成nポート \mathcal{N}
Fig.3.2-Mixed n-Ports

であるから N_C, N_L も受動であり性質 1 から N は、したがって \mathcal{N} は受動 (消散的) となる。 (証明終)

定理 3.1 は混成 n ポート \mathcal{N} の受動性をリャフノフタイプの関数の構成により判定する方法を与えている。文献(14)ではこのことは異なる意味のリャフノフ関数の構成による判定法が与えられているが、 \mathcal{N} の解を求める必要がある。次の系は定理 3.1 の線形の場合への適用である。

[系 3.1] \mathcal{N} が線形混成 n ポートでありかつ表現

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (3.25)$$

$$y = Cz + Du$$

を持つならば実行列 P, L および W が存在し P が非負定で式

$$PA + A'P = -LL'$$

$$PB = C' - LW \quad (3.26)$$

$$WW' = D + D'$$

が成立するならば \mathcal{N} は受動であり更に行列

$$K = \begin{pmatrix} W'W & -(LW)' \\ -LW & LL' \end{pmatrix}$$

が $\det K \neq 0$ を満たすとき \mathcal{N} は消散的である。

[定理 3.2] 2回連続可微分な $P: \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^1$ ですべての $z \in \mathbb{R}^D, u \in \mathbb{R}^S$ で $P(z) \geq 0, P(0) = 0$ および

$$\frac{\partial P'}{\partial z} F(z, u) + u' G(z, u) = 0$$

を満足し更に式(3.20)と(3.21)を満足するものが存在するならば \mathcal{N} は無損失である。更に式

$$\frac{\partial P'}{\partial z} F(z, u) = 0$$

が成立するときには \mathcal{N} は不活性である。

[系 3.2] 線形混成のポート \mathcal{N} は非負定行列 P が存在して

$$\begin{aligned} PA + A'P &= 0 \\ PB &= C \\ D + D' &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

が成立するとき無損失であり、更に $C' = 0$ のとき不活性である。

定理 3.2 系 3.2 は定理 3.1 系 3.1 と同様にして示すことができるので証明は省く。

[性質 3.4] つぎの条件が成立するならば混成のポート \mathcal{N} は実質受動(消散的)である。

- (1) N_R は実質受動(消散的)
- (2) N_C, N_L は受動であり、更に
- (3) $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|h(z)\| = \infty$

(証明) 条件(2) から任意に与えられた $\alpha > 0$ に対して $\|z\| > \beta$ のとき $\|h(z)\| > \alpha$ となるように β をとることができる。したがって条件(1) から $\|(z', u')\| > \gamma, \gamma \in \mathbb{R}^+$ のとき

$$h'(z)f(h(z),u)+u'g(h(z),u)\geq 0 \quad (3.28)$$

となる γ が存在する。N のエネルギー平衡条件から

$$\dot{\varphi}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} [h'(z)f(h(z),u)+u'g(h(z),u)] dt + \int_{t_0}^{t_f} h'(z)\dot{z} dt + \epsilon(z_0)$$

となり条件 (2) と (3.28) 式から $\|(z',u')\| > \gamma$ のとき $\dot{\varphi}(u(\cdot)) > 0$ となり N は実質受動となる。消散性も同様。 (証明終)

[定理 3.3] 2 回連続可微分な関数 $P: R^p \rightarrow R^1$ ですべての $z \in R^p, u \in R^s$ に対して $P(z) \geq 0, P(0) = 0$ および

$$\frac{\partial P}{\partial z} F(z,u) + u'G(z,u) \geq 0$$

が $\|(z',u')\| > k$ で成立しさらに式 (3.20) と (3.21) を満足するものが存在するならば \mathcal{N} は実質受動 (消散的) 混成ポートであり更に \mathcal{N} は B.I.B.O. 安定である*。

(証明) 前半は性質 3.4 から定理 3.1 と同様にして示すことができる。B.I.B.O. 安定性は文献 (22) の定理 1 によりたまたまに導出されるので証明略す。 (証明終)

3.4 受動性の逆定理

この節では 3.3 と逆の問題すなわち \mathcal{N} の受動性により \mathcal{N} のモデル N を考えたとき N の内部素子の受動性は保証されるか否かについて考察する。この節全体を通して \mathcal{N} は電氣的に連結しているモデル N を持つと仮定する。 \mathcal{N} の表現 (3.18) の $F: R^p \times R^s \rightarrow R^p$ と $G: R^p \times R^s \rightarrow R^s$ は連続可微分であると仮定する。

最初に受動性の最適制御理論による定式化を行う。定義 3.2 を用いるため (3.7) 式で与えられる評価関数を (3.18) 式の拘束の下で最適化する問題

* \mathcal{N} が B.I.B.O. 安定 $\iff \exists \forall u(\cdot), M_1, M_2 \in R^+$ に対して $\|u(t)\| \leq M_1 < \infty \implies \|y(t)\| \leq M_2 < \infty$ である。

題を考へる⁽¹⁴⁾。ハミルトニアン⁽²³⁾⁽²⁴⁾を

$$H(z, u, \xi) = u'G(z, u) - \xi'F(z, u) \quad (3.29)$$

とする。ξは実状態コベクトルである。Hを極小にするuを

$$\bar{u} = \bar{u}(z, \xi)$$

とかく。評価関数

$$V(z(t), u(\cdot), t, t_0) = \int_{t_0}^t u'G(z, u) d\tau + \epsilon(z(t_0)) \quad (3.30)$$

を最適化する入力を

$$\hat{u} = \hat{u}(z(t), t)$$

とする。

[仮定3.1] \bar{u} , \hat{u} は一意に定まり、 \bar{u} はz, ξで連続可微分、 \hat{u} はzで可微分でtで連続、更に評価関数(3.30)の最適値 $V^*(z(t), t)$ はzおよびtで2回連続可微分である。ここで $-\infty < t_0 < +\infty$ とする。

仮定3.1はシステムの構造的仮定であり \bar{u} , \hat{u} の一意性に関する部分はシステムの振動で解消できる仮定である。仮定3.1が成立すればよく知られている様に⁽²³⁾⁽²⁴⁾ 評価関数(3.30)の最適値 $V^*(z, t)$ はHamilton-Jacobiの方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u H(z, u, \frac{\partial V}{\partial z}) = 0 \quad (3.31)$$

の解であり、また(3.31)式の解は評価関数(3.30)式の最適値である。したがってつぎの受動条件が定義3.2により得られる。

受動条件: 仮定3.1の下で混成ポータルが受動であるための必要かつ十分条件はHamilton-Jacobiの方程式(3.31)の解で境界条件

$$V^*(z(t_0), t_0) = \epsilon(z(t_0)) \quad (3.32)$$

を満足しさらに

$$V^*(z(t), t) \geq 0 \quad (t \geq t_0) \quad (3.33)$$

を満足する $V = V^*(z, t)$ が存在することである。

抽象的な混成ポート元は初期エネルギー $\varepsilon(z_0)$ と式 (3.18) で表される。2回連続微分可能な関数 $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$ で $P(z_0) = \varepsilon(z_0)$ を満足する関数のことを元の蓄積エネルギー関数と呼ぶ。蓄積エネルギー関数 P を持つ混成ポート元において入力 $u = u(t)$ を接続したとき消費されるパワーはエネルギー平衡条件から

$$W(z, u) = u'(t)G(z(t), u(t)) - (\partial P / \partial z)' F(z(t), u(t)) \quad (3.34)$$

となる。元に蓄積エネルギー関数 P と消費パワー W を与えたとき元はモデル化されたと言い元で表す。

受動混成ポート元のモデル元は

$$W(z, u) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^s)$$

$$P(z) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{R}^p)$$

のとき受動モデルという。

[定理 3.4] 受動混成ポート元は仮定 3.1 が成立するならば受動モデル元でモデル化される。更に蓄積エネルギー関数 P が式 (3.20) と (3.21) を満足するならば元は回路実現 N を持つ。このとき部分ポート N_R, N_L, N_C はそれぞれ受動ポートとなる。

(証明) 方程式 (3.31) の解で (3.32) 式と (3.33) 式を満足するものが存在する。この解を $V^*(z, t)$ とすれば t_0 に依存するから $V^*(z, t, t_0)$ と表す。 V^* は z, t を固定したとき t_0 の単調増加関数となる。なぜならば $t_0 < t_0' \leq t$ としたとき $u(\cdot)$ を $[t_0', t]$ では最適入力 u^* に等しく $[t_0, t_0')$ では 0 とする入力とすれば

$$\begin{aligned} V^*(z, t, t_0) &\leq V(z, u(\cdot), t, t_0) \\ &= V^*(z, t, t_0') \end{aligned}$$

が成立するからである。(3.33) 式から極限 $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V^*(z, t, t_0) = V^0(z, t)$ が存在し、方程式 (3.31) は時刻 t に露に依存しないから

$$V^*(z, t, t_0) = V^*(z, 0, t_0 - t)$$

となり極限は t に依存しない、すなわち $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V^* \triangleq P(z)$ である。 $P(z)$ は

仮定 3.1 から $t_0 \rightarrow \infty$ のときの最適値で Hamilton-Jacobi の方程式 (3.31) を満足する。したがって

$$\min_u H(z, u, \partial P / \partial z) = 0$$

が成立する。この式は任意の $u \in R^D$ では

$$u'G(z, u) - (\partial P / \partial z)'F(z, u) \geq 0$$

が成立することを意味し前半が示された。後半は前節での考察と上式からただちに示すことができる。 (証明終)

[注意 3.2] 初期時刻 t_0 固定による Hamilton-Jacobi 方程式は回路実現 N で考えればフミのような明白な物理的意味を持つ。 N のエネルギー平衡条件

$$V^*(z(t), t, t_0) = \int_{z(t_0)}^{z(t)} h'(z) dz + \varepsilon(z(t_0)) + \int_{t_0}^t [h'(z)f(h(z), \hat{u}) + \hat{u}'g(h(z), \hat{u})] dt$$

において $\partial V^* / \partial t$ は入力 $\hat{u}(t) = \hat{u}(z(t), t)$ のときの N_R での消費電力であり $\min_u H$ は N_R での消費電力の最小値を与えるから、(3.31) 式は N_R での消費電力が最小のとき V^* すなわち N に流入するエネルギーと N に貯えられていた初期エネルギー ε の和は最小となることを意味する。言い換えると N の入出力ポートから取り出せるエネルギー $(\varepsilon(z_0) - V^*)$ は N_R での消費電力が最小のとき最大となる。

無損失混成 n ポート \mathcal{N} のモデル \mathcal{N} は

$$W(z, u) = 0$$

$$P(z) \geq 0$$

のとき 無損失モデル であるという。不活性混成 n ポート \mathcal{N} のモデル \mathcal{N} は

$$u'G(z, u) = 0, (\partial P / \partial z)'F(z, u) = 0$$

$$P(z) \geq 0$$

のとき 不活性モデル であるという。

[定理 3.5] 仮定 3.1 の下で無損失混成 n ポート \mathcal{N} は無損失モデル \mathcal{N} によりモデル化され、不活性混成 n ポート \mathcal{N} は不活性モデル \mathcal{N} でモデル

化される。さらに蓄積エネルギー関数 P が式 (3.20) と (3.21) を満足するならば Σ は回路実現 N を持ち部分 n ポート N_L, N_C は受動で、 N_R はそれぞれ不活性、 $x'f(x,u)=0, u'g(x,u)=0, x \in R^p, u \in R^s$ となる。

定理 3.5 は定理 3.4 と同様なので証略。つきに実質受動性と最適制御理論を定式化する。

[仮定 3.2] Σ の出力 $y(t)=y_{z_0, u(\cdot)}$ ($z_0 \in R^p, u(\cdot) \in \mathcal{U}, \|u(\cdot)\| < K$) はすべての時刻 $t \geq t_0$ で存在する。

[補題 3.1] 仮定 3.2 の下で実質受動混成 n ポート Σ に対して定義される汎関数 $\varphi(\cdot)$ はすべての入力 $u(\cdot)$ に対して下に有界である。

(証明) $\varphi(u(\cdot))$ が下に有界でないと仮定すれば入力の列 $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$ が存在して

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(u_i(\cdot)) = -\infty$$

となる。仮定 3.2 から有限発散時刻は存在しないから $t_0 \leq t_1 < t_2 \leq t_f$ となる時刻 t_1, t_2 が存在して

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i(t)\| = \infty, \quad t \in (t_1, t_2]$$

であり、このときに限って

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} u_i'(\tau) y_{z(t_1), u_i(\cdot)} d\tau = -\infty \quad (3.35)$$

が成立しなくてはならない。ところが Σ の実質受動性から $\|u_i(t)\| > k$ のときには

$$\int_{t_1}^{t_2} u_i'(\cdot) y_{z(t_1), u_i(\cdot)} d\tau + \varepsilon(t_1) \geq 0$$

となる。 $\varepsilon(t_1)$ を適当に定めれば i に無関係とすることができ、から (3.35) 式に矛盾する。 (証明終)

補題 3.1 から (3.7) 式で定義される汎関数 φ を最適化する入力 $\hat{u}(\cdot)$ が存在するから、つきの実質受動条件が得られる。

実質受動条件: 仮定 3.1 と仮定 3.2 が成立すれば Σ が実質受動である

ための必要かつ十分な条件はHamilton-Jacobi の方程式 (3.31) の解で境界条件

$$V^*(z(t_0), t_0) = \varepsilon(z(t_0)), \quad \|(\hat{u}^*(z(t_0), t_0), z(t_0))\| > k$$

を満足し更に

$$V^*(z(t), t) \geq 0, \quad \|(\hat{u}^*(z(t), t), z')\| \geq k, \quad t \geq t_0$$

を満足するものが存在する。

実質受動混成nポートのモデルは

$$W(z, u) \geq 0, \quad (\|(z', u')\| > k)$$

$$P(z) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{R}^p)$$

が成立するとき実質受動モデルという。

[定理 3.6] 実質受動混成nポートは仮定 3.1, 2 が成立するならば実質受動モデルでモデル化できる。更に蓄積エネルギー関数 P が式 (3.20) と (3.21) を満足するならばは回路実現 N を持つ部分nポート N_R, N_L, N_C は実質受動となる(リアクタンスは受動)。

(証明) $\|(z', u')\| > k$ に対して定理 3.4 と同様にして実質受動モデルの存在と示すことができる。 (証明終)

3.5. 受動非線形混成nポートの構成問題

この節では混成nポートの表現が作用素で与えられた場合について考える。 \mathcal{R} は以上で定義された作用素であり入力 $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ に対して時間区間 $[0, T]$ で出力 $t \rightarrow y(t)$ を割り当てる。有限次元システム

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F(z, u) \\ y &= G(z, u), \quad z \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^s \end{aligned} \quad (3.36)$$

に於いて初期状態 $z_0 \in \mathbb{R}^p$ が与えられたとき入出力写象

$$u(\cdot) \rightarrow y_{z_0, u}$$

が \mathcal{R} に等しいときシステム (3.36) は \mathcal{R} の実現であるという。ここで $y(t) = y_{z_0, u}$ はシステム (3.36) の入力 $u(\cdot)$ 初期状態 z_0 のときの出力を表す。

システム (3.36) が図 3.1 に示す回路 N の表現となっていれば N を作用素 \mathcal{R} の回路実現という。とくに入力 u が電圧源の電圧と電流源の電流の混合から成ることを表すときには \mathcal{R} をハイブリット作用素と呼ぶ。

[定義 3.10] 混成 n ポート \mathcal{R} が完全可制御であるとは任意に選んだ状態 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して \mathcal{R} を状態 $z_1(t=t_1)$ から $z_2(t=t_2)$, $(t_1 \leq t_2)$ へ遷移させる入力 $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ と $t_2 \in \mathbb{R}^+$ が存在するときを言う。

この筋を通して、与えられた作用素 \mathcal{R} に対して完全可制御で (z', u') で連続可微分な実現 (3.36) が存在すると仮定する。

[定義 3.11] ハイブリット作用素 \mathcal{R} が 受動作用素 であるとはすべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ に対して

$$\int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{R}(u(\cdot))_{\tau} d\tau \geq 0 \quad (3.37)$$

が成立するときをいう。ここで $t_f \in \mathbb{R}^+$ は任意に固定されている。

[注意 3.3] ハイブリット作用素 \mathcal{R} が $a_i \in \mathbb{R}^1$, $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i$ に対して

$$\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^l a_i u_i(\cdot)\right) = \sum_{i=1}^l a_i \mathcal{R}(u_i(\cdot)) \quad (3.38)$$

を満足するとき \mathcal{R} を線形作用素, \mathcal{R} を線形混成 n ポートという。線形回路理論でよく知られているように (3.25) 式をその実現として持つ線形作用素 \mathcal{R} は

$$\mathcal{R}(u(\cdot))_t = \int_0^t [D\delta(t-\tau) + Ce^{A(t-\tau)} B] u(\tau) d\tau$$

で与えられる。周波数領域で示せば \mathcal{R} はイミタンス行列である。このとき条件式 (3.37) はイミタンス行列が正実であることと等価となる。

システム (3.36) に対して初期状態 $z(t_0) = z_0$ が与えられたとき評価関数

$$V(z_0, u(\cdot), t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} u' G(z, u) dt \quad (3.39)$$

を最適化する問題を考える。

つぎの補題は線形の場合と同様にして示すことができる⁽¹⁶⁾。

[補題3.2] システム (3.36) が受動作用素の完全可制御かつ (z', u') で連続可微分な実現であるならば評価関数 (3.39) はすべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ と $t_f \in \mathbb{R}^1$ 以下に有界である。

仮定3.1 と同類の仮定が成立していれば評価関数 (3.39) の最適値 V^0 は終端時刻 t_f 固定による Hamilton-Jacobi の方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \eta(z, u, \partial V / \partial z) = 0 \quad (3.40)$$

の解である。ここで

$$\eta(z, u, \xi) \triangleq H(z, u, -\xi) \quad (3.41)$$

であり、更に V^0 は境界条件

$$V^0(z, t_f, t_f) = 0 \quad (3.42)$$

を満足する。補題3.2 から連続関数 $\varepsilon: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在してすべての $z \in \mathbb{R}^p$, $-\infty < t \leq t_f$ で

$$-\varepsilon(z) \leq V^0(z, t, t_f) \leq 0 \quad (3.43)$$

となる。

定理3.4 の証明と同様に $V^0(z, t, t_f)$ が t_f の単調減少関数であり、更に (3.43) 式が成立しているから

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} V^0(z, t, t_f) = P_0(z) \quad (3.44)$$

が存在する。 $P_0(z)$ は $t_f \rightarrow \infty$ のときの (3.39) の最適値であるから Hamilton-Jacobi の方程式を満足し、しをかって次の補題が成立する

[補題3.3] (3.44) 式で定義される P_0 は式

$$\min_u [u'G(z, u) + (\partial P_0 / \partial z)' F(z, u)] = 0 \quad (3.45)$$

を満足する。

[補題3.4] システム (3.36) が受動作用素の連続可微分な完全可制御な実現であるための必要十分条件は2回連続可微分な関数 $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ ですべての $z \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^s$ において

$$-\frac{\partial P'}{\partial z} F(z,u) + u' G(z,u) \geq 0 \quad (3.46)$$

を満足し $P(0)=0$ とするものが存在する。

(証明) (必要性) (3.44) 式で定義された P_0 は $P_0(z) \leq 0$ であるから $P \triangleq -P_0$ とおくことにより補題 3.3 から任意の $u \in R^S$, $z \in R^P$ で (3.46) 式が成立することが分る。さらに $z=0$ のとき $t_f \rightarrow \infty$ のときの最適値を与える最適入力 u^0 は式 ((3.37) と $z_0=0$ のときの \mathcal{L} の定義から $u^0=0$ となり (3.39) 式から $P(0)=0$ となる。

(十分性) 補題の条件を満足する P が存在するならば、 \mathcal{L} が運動作用素となることを示す。入力 $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ に対して初期状態 0 の解を $z(t)$, (状態 0) とすれば

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} u'(t) \mathcal{L}(u(\cdot))_t dt \\ &= \int_0^{t_f} u'(t) y_{0, u(\cdot)}(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} u'(t) G(z(t), u(t)) dt \end{aligned}$$

式 (3.46) から

$$\begin{aligned} & \geq \int_0^{t_f} \frac{\partial P'}{\partial z} F(z(t), u(t)) dt \\ &= \int_0^{t_f} \frac{d}{dt} P(z(t)) dt \\ &= [P(z(t))]_0^{t_f} \\ &= P(z(t_f)) - P(0) \\ &= P(z(t_f)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となり成立する。

(証明終)

[注意3.4] 補題 3.4 において \mathcal{R} はその定義の中で $z_0=0$ と置いてある。以下常に $z_0=0$ とするが、これは例えば線形システム構成理論においても分るように自然なとり方である。

[定義 3.12] 混成 n ポート \mathcal{R} の 2 つの状態 $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^p$ が $[t_0, t_1]$ で観測不能であるとは 0 入力に対して

$$y_{z_0,0}(t) = y_{z_1,0}(t) \quad , \quad t \in [t_0, t_1]$$

となるときに言う。また \mathcal{R} が可観測であるとは $[t_0, \infty)$ においてすべての状態が観測不能ではないときに言う。


[補題 3.5] \mathcal{R} の実現 (3.36) が可観測であるならば補題 3.4 における $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$ で補題 3.4 の条件の他に更に式

$$P(z) > 0, \quad (z \neq 0) \quad (3.47)$$

を満足するものが存在する。

(証明) $P_0(z_1) = 0$ となる $z_1 \neq 0$ が存在したと仮定すれば $V^0(z_1, 0, t_f) = 0$, $t_f \in [0, \infty)$ が成立する。仮定 3.1 から最適入力は一意に定まるから $\hat{u} \equiv 0$ である。 $0 < t_\alpha < t_f$ となる t_α に対し $[t_\alpha, t_f]$ で考えれば $V^0(z(t_\alpha), t_\alpha, t_f) = 0$ となる。ここで $z(t_\alpha)$ は初期状態 z_1 入力 $u \equiv 0$ のときの解の t_α における値である。 $t_f \rightarrow \infty$ で考えれば $P_0(z(t_\alpha)) = 0$, $t_\alpha \in (0, \infty)$ を得る。 $P = -P_0$ と置くと $P(z) \geq 0$ であるから $z(t_\alpha)$ が極値になることから $(\partial P / \partial z)|_{z=z(t_\alpha)} = 0$ となり (3.46) 式を用いて $u'G(z(t_\alpha), u) \geq 0$ を得る。同様にして $P(0) = 0$ から $u'G(0, u) \geq 0$ が結論される。少し考察すれば * これらは $G(z(t_\alpha), 0) = 0$ および $G(0, 0) = 0$ を意味することから分る。このことから入力 $u \equiv 0$ のときの初期状態がそれぞれ 0 と z_1 の 2 つの解 $z=0$ と $z=z(t_\alpha)$ は $[0, \infty)$ で同一の出力 $y \equiv 0$ を与えるが、これは可観測性に矛盾するから補題は証明された。 (証明終)

[例] 線形受動回路のシステム理論的構成理論の基本的補題である正実補題は (16) っきのように表される。

* $u'G(z, u) \geq 0 \implies G(z, u) = A(z, u)u, (A \geq 0)$ と書けることから分る。 

[正実補題] 注意 3.3 で与えた線形作用素 \mathcal{A} の最小実現 (3.25) を考える \mathcal{A} に対応するイミタンス行列が正実であるならば実対称正定行列 P および実行列 L, W が存在して

$$\begin{aligned} PA + A'P &= -LL' \\ PB &= C' - LW \\ W'W &= D + D' \end{aligned} \tag{3.48}$$

が成立する。ここで $\det(D + D') \neq 0$ と仮定する。

補題 3.4 と 3.5 から正実補題を導く。仮定 3.1 は $\det(D + D') \neq 0$ であるから成立している (24)。いま

$$P(z) = (1/2)z'Pz$$

これはつぎの補題から言うことができる。

[補題 A1] $x, y \in \mathbb{R}^n$ が $\langle x, y \rangle \geq 0$ を満足するならば準正定な行列 B が存在して $y = Bx$ とかくことができる。

(証明) n に関する帰納法により示す。 $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}^{n-1}$ に対して $x_{n-1}, y_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ のとき $\langle x_{n-1}, y_{n-1} \rangle \geq 0$ とする。このとき $\mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \ni B_{n-1} \geq 0$ が存在して $y_{n-1} = B_{n-1}x_{n-1}$ と表すことができるかと仮定する。 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle \geq 0$ に対して

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{\langle x_{n-1}, y_{n-1} \rangle}{\|x_{n-1}\| \|y_{n-1}\|} \dots \dots \dots (A1)$$

が成立するならば直交行列 P が存在して

$$\begin{aligned} (x_{n-1}', 0)' &= Px \\ (y_{n-1}', 0)' &= Py \end{aligned}$$

と書ける。したがって

$$y = P' \begin{pmatrix} y_{n-1}' \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} B_{n-1} & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} B_{n-1} & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} Px$$

となる。仮定から $B = P' \begin{pmatrix} B_{n-1} & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} P \geq 0$ であるから証明できた。
(証明終)

とおけば(3.46)式は

$$\begin{pmatrix} -PA-A'P & -PB+C' \\ C-P'B & D+D' \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.49)$$

を意味する。ここで行列 P はシステム (3.25) が可観測であるから (3.47) 式により正定と仮定してよい。準正定な行列は AA' の形に分解できるから $A=(L',W')$ とおくことにより (3.49) 式から等式をつくれば (3.48) 式が得られる。

上例は補題 3.4 と 3.5 が線形の場合の正実補題の非線形への一般化であることを示している。

作用素 \mathcal{R} が与えられたときその実現 (3.36) に対してエネルギー蓄積関数 P と消費パワー W を与えたとき \mathcal{R} は モデル実現 されたという。このモデルは P が式 (3.20) と (3.21) を満足するならば回路実現 N を持つ。

[定義 3.13] 受動作用素 \mathcal{R} が無損失であるとは $K \in \mathbb{R}^+$ に対し $\|u(t)\| < K$ ならば $\|\mathcal{R}(u(\cdot))\|_t < K$ とするすべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ に対して

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{R}(u(\cdot))_\tau d\tau = 0 \quad (3.50)$$

が成立するときを言う。

[定義 3.14] 受動作用素 \mathcal{R} が不活性であるとはすべての $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $t_f \in \mathbb{R}^+$ に対して

$$\int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{R}(u(\cdot))_\tau d\tau = 0 \quad (3.51)$$

が成立するときを言う。

[定理 3.7] 受動作用素 \mathcal{R} が完全可制御な実現 (3.36) を持つならば

- (1) モデル実現中受動モデルが存在する。更に受動モデルは
- (2) \mathcal{R} が無損失ならばモデル実現は無損失モデルとなる。
- (3) \mathcal{R} が不活性ならばモデル実現は不活性モデルとなる。

さらに回路実現 N が存在するならば

N_L, N_C は受動であり N_R はそれぞれ受動, 不活性, 不活性かつ $u'g(x, u) = 0$ となる。

(証明) (2) について示す。 \mathcal{L} の受動モデルにおいて $z^* \in R^p, u^* \in R^s$ が存在して $W(z^*, u^*) > 0$ であると仮定する。(3.34)式からエネルギー平衡条件によつて

$$\int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{L}(u(\cdot))_{\tau} d\tau = P(z(t_f)) + \int_0^{t_f} W(z(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (3.52)$$

が成立する。実現(3.36)は完全可制御であるから $[0, T]$ において $z=0$ から $z=z^*$ へ状態を遷移させ、更に z^* から 0 へもどす入力 $u_S(\cdot) \in \mathcal{U}$ が存在する。 W の連続性と受動性から

$$\int_0^T W(z(t), u_S(t)) dt = c > 0 \quad (3.53)$$

となる。今、周期入力 $u = u(t)$ を $[0, \infty]$ において $[0, T]$ では u_S に等しく $[T, 2T]$ では $u_S(t-T)$ に等しく順に定義される入力とすれば $P(z) \geq 0$ であるから(3.52)式と(3.53)式から

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} u'(\tau) \mathcal{L}(u(\cdot))_{\tau} d\tau = a \geq \frac{c}{T} > 0$$

となりこれは(3.50)式に矛盾するから証明できた。(3)も同様にして証明することかできる。後半は明らかである。(証明終)

3.6 結 言

本章では集中素子から成る混成ネットワークについてエネルギー的考察を行ない、モデル化の基礎を与えた。新たに混成ネットワークのモデルという概念を導入しモデルのエネルギー的性質と混成ネットワークのエネルギー的性質との関係を調べ、とくにモデルが回路実現できる場合には、回路を構成する素子のエネルギー的性質になることを述べた。ここで混成ネットワークが与えられたとき、任意のモデルについてその回路実現は存在するか、また存在するならばそれはどんな種類の素子を用いればよいかとい

う問題があるが、これについて本文中ではエネルギー蓄積関数がある特定の条件を満足する場合にはリアクタンス素子と抵抗素子により実現できることが示されている。一般の場合は今後の問題である。

第 4 章 複合 n ポート

4.1. 緒 言

第 2 章および第 3 章では 1 つの n ポートに対する特定の性質（相反性や受動性など）を調べた。実際に解析を行なう場合には n ポートはいくつかの n ポートの接続として表される場合が多い。 n ポート系が大規模化するのに従いこの様な分割による解析法の方が解析における手間を省く上でも都合がよくなる場合も多くある⁽⁵⁰⁾⁽⁵¹⁾。

本章では以上のことを念頭に置いた上で、いくつかの n ポートを接続してできる複合 n ポートがその構成単位である 1 つ 1 つの n ポートの持つ性質を保存するか否かについての考察を行う。

まず 4.2 において代数的 n ポートの相反性についての考察を行ない、この性質が n ポートの接続により不変であることを示す。とくに系 4.1 は微分幾何的手法によりはじめて一般的に証明された結果であり、この手法が非線形 n ポートの解析上重要な応用を持つことを示すものである。4.3 では混成 n ポートの受動性についてほとんど同様の結果を示す。

4.2. 複合代数的 n ポート

この節ではいくつかの代数的非線形 n ポートを接続して保たれる性質を調べる。

4.2.1. 結線 n ポート

代数的 n ポートを接続するための結線 n ポート（コネクション n ポートとも言う）について調べる。代数的 n ポートを接続する場合にはコネクション n ポートはつきに示す制限が必要である。今 n ポートの各ポート変数を次に示す 4 種類の組に分類する。

1. $(v, i) : R$ タイプ

2. $(v, q) : C$ タイプ

3. $(\phi, i) : L$ タイプ

4. $(\phi, q) : M$ タイプ

[定義 4.1] n ポート N_C がコネクション n ポートであるとは N_C の内部は結線のみであり, 1つのポートを枝に, 結線を接点に対応させてできるグラフが連結であり, しかも各ポートのポート変数の組は同一のタイプのものであるとする。

[性質 4.1] コネクション n ポート N_C は調和的である。

(証明) 相反性: ポート変数をすべて R タイプとしたときは Brayton (6) により示されている。ここでは C タイプについて示す。他のタイプについても同様に示すことが可能である。 $Q=[I:F]$ ($B=[-F':I]$) を N_C のグラフの基本カットセット (基本ループ) 行列とすると $Qq=q_0, Bv=0$, 但し q_0 は定数ベクトルである。今 $q=[q_1' q_2']'$, $v=[v_1' v_2']'$ とし $q_1 = -Fq_2 + q_0$, $v_2 = F'v_1$ と書く。パラメータ s として $[q_2' v_1']$ をとれば

$$\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right) = \begin{pmatrix} -F & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & F' \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)' \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -F'+F' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

となり定理 2.1 より相反である*。

双対相反性: M タイプ変数について示す。他のタイプでも同様である。前と同様 $\phi=[\phi_1' \phi_2']'$, $q=[q_1' q_2']'$ とする。 $B\phi=\phi_0, Qq=q_0$ 但し ϕ_0, q_0 は定数ベクトル, であるから $q_1 = -Fq_2 + q_0, \phi_2 = F'\phi_1 + \phi_0$ となる。パラメータ s を $s=[q_2' \phi_1']'$ とし適当な置換行列 A, B に対して $\xi=Aq+B\phi, \eta=Bq+A\phi$ とする。このとき

$$Z(s) \triangleq \frac{\partial \eta}{\partial s} J \xi$$

* 相反性は n ポートの特性多様体の座標系 (パラメータ) のとり方により不変な性質であるから ξ, η として特に v, q を選んで示せば十分。

$$\begin{aligned}
&= \left[B \frac{\partial q}{\partial s} + A \frac{\partial \phi}{\partial s} \right]' (B-A) [A(-q_2' F' + q_0' q_2')' + B(\phi_1', \phi_1' F + \phi_0')] \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ FA_2 - A_1 F \end{bmatrix} q_2 + \begin{bmatrix} B_2 F' - F' B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \phi_1 + C'
\end{aligned}$$

但し C は $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0' A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_0' B_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ で定義される定数ベクトルであり、

$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ は適当な分割である。このとき

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Z(s) &= \nabla Z(s) \\
&= (\nabla_{q_2} + \nabla_{\phi_1}) Z(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

したがって定理 3.1, (2) より成立する

(証明終)

4.2.2. 代数的 n ポートの接続

本節では幾つかの非線形 n ポートを 4.2.1. で述べたコネクショ n ポートを介して接続することにより得られる n ポートについて考察する。

2つの代数的非線形 n ポート N_1, N_2 をコネクショ n ポート N_C を用いて接続する。こうしてできる n ポート N は $n_1 + n_2 + k - 2k_C$ 個のポート数を持つ。但し n_1 は N_1 のポート数, n_2 は N_2 のポート数, k は N_C のポート数, k_C は N_C のポートのうちで接続に用いられたポートの数を表す。

今, N_1 の形態空間を $\Psi_1 = \{(\xi^1, \eta^1)\}$, N_2 の形態空間を $\Psi_2 = \{(\xi^2, \eta^2)\}$, N_C の形態空間を $\Psi_C = \{(\xi^C, \eta^C)\}$ とし, それぞれの特性多様体を Σ_1 ($\dim \Sigma_1 = m_1$), Σ_2 ($\dim \Sigma_2 = m_2$) とする。形態空間の積空間を $\Psi = \Psi_1 \times \Psi_2 \times \Psi_C$ とし Σ_1 と Σ_2 の Ψ での積多様体を Λ とする。すなわち

$$\Lambda = \{(\xi^1, \eta^1, \xi^2, \eta^2, \xi^C, \eta^C) \in \Psi \mid (\xi^1, \eta^1) \in \Sigma_1, (\xi^2, \eta^2) \in \Sigma_2\}$$

である。今 N_C の各ポートのうち第 1 ポートから第 k_L ポートに N_1 の第 1 ポートから第 k ポートをそれぞれ番号に対応する様に接続し N_C の第 $k+1$

ポートから $k_c = k_1 + k_2$ ポートに N_2 の第1から第 k_2 ポートを接続するものとする。第2章の式(2.2)において T_1, T_2, T_C を次のように選ぶ:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \eta^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_C \\ U_C \end{pmatrix} = T_C \begin{pmatrix} \xi^C \\ \eta^C \end{pmatrix}$$

但し $J_1, J_2, J_C (U_1, U_2, U_C)$ はそれぞれ N_1, N_2, N_C の電流形(電圧形)ポート変数ベクトルとする。変換 T_1, T_2, T_C に対して Ψ の部分空間 K を

$$K = \{ (\xi^1, \eta^1, \xi^2, \eta^2, \xi^C, \eta^C) \in \Psi \mid J_1^i = -J_C^i, U_1^i = U_C^i (i=1 \sim k_1), \\ J_2^\ell = -J_C^{\ell+k_1}, U_2^\ell = U_C^{\ell+k_1} (\ell=1 \sim k_2), QJ_C=0, BU_C=0 \}$$

とする。但し $Q(B)$ は N_C の基本カットセット(ループ)行列を表す。 Ψ の線形部分多様体 K は N_1 と N_2 の接続におけるキルヒホッフ則を表す。

[仮定 4.1] Λ と K は横断的(transversal)である。

この仮定は実際のシステムでは通常満足されている成生的仮定である。仮定 4.1 が満たされていれば $\Sigma' \triangleq \Lambda \cap K$ は Ψ の部分多様体となり、 N_1 と N_2 を N_C を介して接続して得られる n ポート特性を表す。

今 $\Psi_r \subset \Psi_1 \times \Psi_2$ で N_1 と N_2 のうち接続に用いられない各ポートに対応する部分形態空間を表し、 $\Psi_n \subset \Psi_C$ で N_C のポートのうち接続に使用されないポートに対応する部分形態空間を表せば $L \triangleq \Psi_r \times \Psi_n \subset \Psi$ は新しくできる n ポート N の形態空間と同相である。自然な射影 π' を $\pi': \Psi \rightarrow L$ としその Σ' への制限を σ' とする、すなわち $\sigma' \triangleq \pi': \Sigma' / \Sigma' \rightarrow L$ とすれば $\Sigma \triangleq \sigma'(\Sigma')$ は N のポート変数間の拘束を表す。

[仮定 4.2] $\sigma': \Sigma' \xrightarrow{\text{into}} L$ は退化しない(中への局所同相)。

仮定 4.2 が満たされない例として 2つのエサキダイオードを直列接続した場合がある(8)。さらに詳しい豊富な例と解析が Chua らの最近の論文(4)で論じられている。仮定 4.2 が満たされていれば Σ は N の(各点で縮退しない)特性多様体となり、その次元(第2章を参照)については $\dim \Sigma' = \dim \Sigma$ が成立する。仮定 4.1 から

$$\dim \Lambda - \dim \Sigma' = \dim \Psi - \dim K$$

が成立するから (11)

$$\begin{aligned} \dim \Sigma &= \dim \Lambda - \dim \Psi + \dim K \\ &= m_1 + m_2 + k - 2k_c \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。 $\dim L = 2(n_1 + n_2 + k - 2k_c)$ であるから $n_1 + n_2 > m_1 + m_2$ ならば N は特異であり $n_1 + n_2 = m_1 + m_2$ ならば N は正則、それ以外では密となる。以上の議論は一般に2つ以上のポートを接続する場合にも同様にして適用できる。

[定理 4.1] 仮定 4.1 と仮定 4.2 が満たされていれば

- (1) 相反なポートを接続してできるポートは相反である
- (2) 双対相反なポートを接続してできるポートは双対相反である
- (3) 調和的ポートを接続してできるポートは調和的である

更に新しくできるポートの次元は式(4.1)で与えられる。

定理 4.1 の証明をする前に次元に関する部分をおかりやすくするために次に示す例を考える。

[例] 定理 4.1 のポートの次元に関する部分の例として図 4.1 に示す回路例を考える。こ

の図はナレータ、ノレータおよび電流負インピーダンスコンバータ(それぞれ記号 $0, \infty, INIC$ で表す)をなわちその特性が

$$v_1 = v_2, \quad i_1 = -i_2$$

で与えられる2ポートから構成される4ポートである。ナレータは次元0ノレータは次元2であり $INIC$ は正則で次元は2で

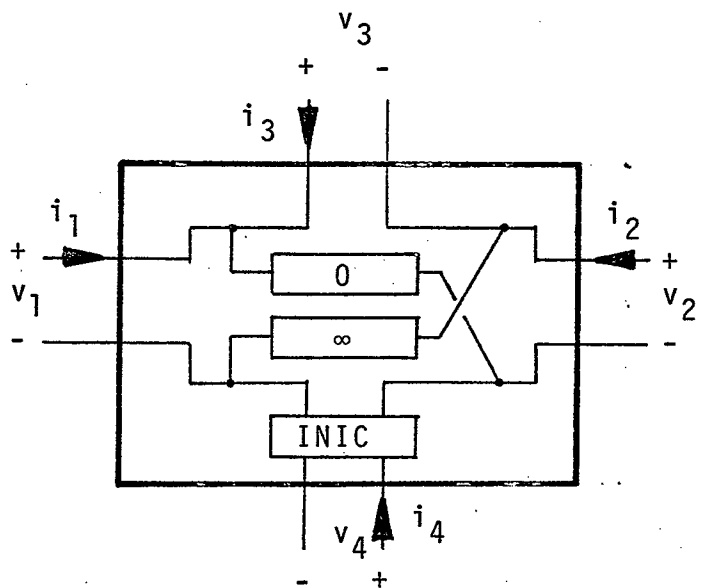


図 4.1 回路例
Fig. 4.1-Network for Example

あるからポート数の和は $2+1+1=4$ の次元の和 $0+2+2=4$ と等しくなるためこの4ポートは仮定 4.1 と仮定 4.2 が満足されていれば正則となる。実際この4ポートは表現

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}$$

を持ち正則4ポートとなる。

[注 4.1] 仮定 4.2 は複合 n ポートの特性が多様体となるための条件であり、相反性などの定義を行うに当り本質的なものではない。この様な(仮定 4.2 が満足されていない)場合にも相反性が(空間 Ψ で考えることにより)定義できることが文献(40)で述べられている。

定理 4.1 の特別の系として

[系 4.1] 仮定 4.1 と仮定 4.2 が満足されているならば正則 1 ポートを接続してできる n ポートは相反であり次元は n である。

(定理 4.1 の証明) 2 つの n ポートを接続した場合について定理を示せば十分である。今、仮定 4.1 と仮定 4.2 が成立しているならば N_1 と N_2 の接続により新しくできる n ポート N は 2 章で述べた意味での非線形 n ポートになり、その次元は式 (4.1) により与えられる。 N の形態空間 $L \subset \Psi$ 上での基本 1 形式を α' とし $\pi: \Sigma \rightarrow L$ を恒等写像(insertion)とする。このとき $\alpha \triangleq \pi^* \alpha'$ を定義する。更に $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_C'$ をそれぞれ Ψ_1, Ψ_2, Ψ_C での N_1, N_2, N_C の基本 1 形式とする。このとき $\alpha_T' = \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_C'$ は Ψ の 1 次微分形式となる。今 $\Sigma_1', \Sigma_2', \Sigma_C'$ をそれぞれ $\Sigma' = \Lambda \cap K \subset \Psi$ の Ψ_1, Ψ_2, Ψ_C への射影多様体とする。このとき $\Sigma_1 \subset \Psi_1, \Sigma_2 \subset \Psi_2, \Sigma_C \subset \Psi_C$ をそれぞれ N_1, N_2, N_C の特性多様体とすれば明らかに $\Sigma_1' \subset \Sigma_1, \Sigma_2' \subset \Sigma_2, \Sigma_C' \subset \Sigma_C$ となる。ここで $\Sigma_C = \{(\xi^C, \eta^C) \in \Psi \mid QJ_C = 0, BU_C = 0\}$ となることを注意しておく。今 α_T' のうち $\alpha_1' + \alpha_2'$ を N_C と接続されるポートの集合とそうでないものの和に

対応する分解により $\alpha_1' + \alpha_2' = \Sigma(\text{接続}) + \Sigma(\text{残り})$ と書く。同様に α_C' を N_1, N_2 と接続されているポートの集合とそうでないものとの和に分解して $\alpha_C' = \Sigma_C(\text{接続}) + \Sigma(\text{新})$ と書くと $\alpha_T' = \Sigma(\text{接続}) + \Sigma_C(\text{接続}) + \Sigma(\text{残り}) + \Sigma(\text{新})$ となる。ここで $\pi_T: \Sigma' \rightarrow \Psi, \pi_1: \Sigma_1' \rightarrow \Psi_1, \pi_2: \Sigma_2' \rightarrow \Psi_2, \pi_C: \Sigma_C' \rightarrow \Psi_C$ を恒等写像とすれば α_T' の Σ への制限 α_T は $\alpha_T = \pi_T^* \alpha_T' = \pi_1^* \alpha_1' + \pi_2^* \alpha_2' + \pi_C^* \alpha_C'$ と書くことができる。 $\pi_T^* [\Sigma(\text{接続}) + \Sigma_C(\text{接続})] = 0$ が成立* するから $\alpha_T = \pi_T^* [\Sigma(\text{残り}) + \Sigma(\text{新})] = \pi_T^* \pi'^* \alpha'$ となる、但し $\pi': \Psi \rightarrow L$ で定義される自然な射影である。ここで $\Sigma': \xrightarrow{\pi_T} \Psi \xrightarrow{\pi'} L$ でありまた $\Sigma: \xrightarrow{\sigma'} \Sigma \xrightarrow{\pi} L$ であるから

$$\pi' \circ \pi_T = \pi \circ \sigma'$$

となる。したがって

$$\pi_T^* \pi'^* \alpha' = (\pi \circ \sigma')^* \alpha' = \sigma'^* \pi^* \alpha'$$

であるから $\alpha_T = \sigma'^* \alpha$ となる。定理 4.1 の (1) は仮定から

$$d\pi_1^* \alpha_1' = 0, \quad d\pi_2^* \alpha_2' = 0, \quad d\pi_C^* \alpha_C' = 0$$

であるから

$$d\alpha_T = 0 \iff d \cdot \sigma'^* \alpha = \sigma'^* d\alpha = 0 \iff d\alpha = 0$$

となり成立する。(2) も同様にして成立し、(3) は (1) と (2) から成り立つ。
(証明終)

2ポートジャイレータと理想変成器は双対相反である、くわしくはジャイレータは必ずみ相反で理想変成器は調和的であることは2章の結果より分かる。定理 4.1 の例として2ポートジャイレータを2個縦列接続したものが理想変成器になることはよく知られている。(7)

例えば $\xi_i^1 d\eta_i^1 + \xi_i^C d\eta_i^C$ が $\xi_i^1 = q_i^{-1}, \eta_i^1 = v_i^1, \xi_i^C = q_i^C, \eta_i^C = v_i^C$ とした場合ポートの接続により 0 になることは $dv_i^C = dv_i^1$ であり $q_i^C = \int_{t_0}^t i_i^C dt = - \int_{t_0}^t i_i^1 dt = -q_i^1$ より分かる。

4.3 複合混成nポート

複合混成nポート \mathcal{N} は l 個の部分混成nポート \mathcal{N}_i の接続により図4.3に示す様に構成されるものとする。各部分混成nポート \mathcal{N}_i は表現

$$\dot{z}_i = -f_i(h_i(z_i), u_i)$$

$$y_i = g_i(h_i(z_i), u_i)$$

を持つ。ここで $f_i: \mathbb{R}^{p_i} \times \mathbb{R}^{s_i} \rightarrow \mathbb{R}^{p_i}$, $g_i: \mathbb{R}^{p_i} \times \mathbb{R}^{s_i} \rightarrow \mathbb{R}^{s_i}$, $h_i: \mathbb{R}^{p_i} \rightarrow \mathbb{R}^{p_i}$ はそれぞれ連続微分可能であり、更に $\partial h_i / \partial z_i = (\partial h_i / \partial z_i)'$ が成立する。 \mathcal{N} は電流源とインダクタのみから成るカットセット及び電圧源とキャパシタのみから成るループを持たないと仮定する。 \mathcal{N} の表現が存在すると仮定すれば

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -F(H(z), u) \\ y &= G(H(z), u) \end{aligned} \tag{4.2}$$

と書ける。ここで $F: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^p$, $G: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$, $H: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ は連続微分可能

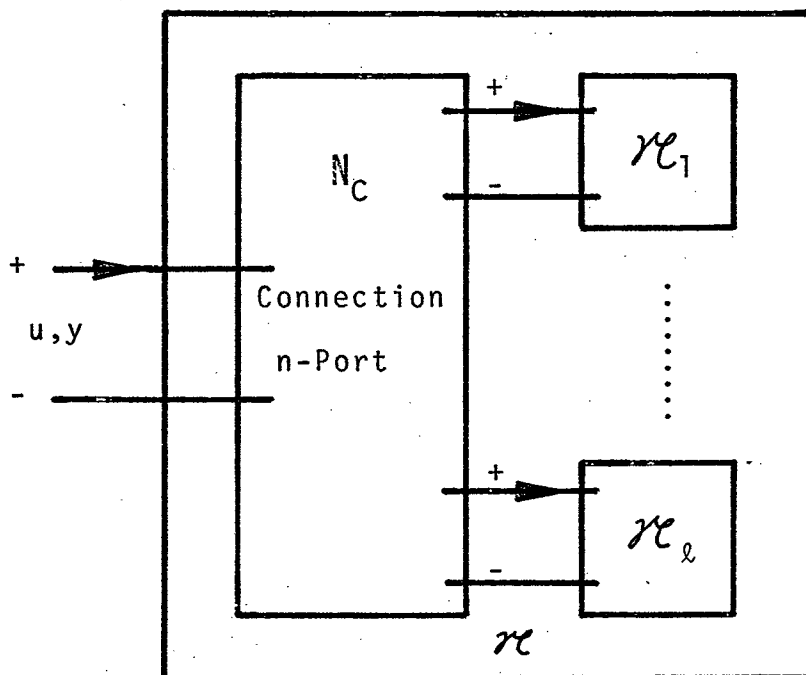


図4.2 複合混成nポート

Fig. 4.2-Composite Mixed n-Port

であり $\partial H/\partial z = (\partial H/\partial z)'$ が成立する。更に $p = \sum_{i=1}^{\ell} p_i$, $z = (z_1', \dots, z_{\ell}')'$ である。

[定理4.2] \mathcal{N} を式 (4.2) に表される複合混成ポートとする。このとき

(1) 部分ポート \mathcal{N}_i , ($i=1, \dots, \ell$) がすべて局所受動ならば \mathcal{N} も局所受動である。

(2) 部分ポート \mathcal{N}_i , ($i=1, \dots, \ell$) がすべて受動であるならば \mathcal{N} は受動である。

(証明) (2) について示す。Tellegen の定理⁽⁵²⁾ により

$$u'y = \sum_{i=1}^{\ell} u_i y_i \quad (4.3)$$

が成立する。 \mathcal{N}_i は受動であるから $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}_i$ に対して

$$\int_0^t u_i'(\tau) y_i(\tau) d\tau + \varepsilon_i(z_i(0)) \geq 0$$

ここで $\varepsilon_i(z_i) = \int_0^{z_i} h_i(\zeta_i) d\zeta_i$ である。

したがって

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{\ell} u_i'(\tau) y_i(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i(z_i(0)) \geq 0 \quad (4.4)$$

ここで ループ、カットセットは存在しないという仮定から

$$\sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i(z_i(0)) = \varepsilon(z(0))$$

である。(4.4) 式を書き換えると

$$\int_0^t u'y d\tau + \varepsilon(z(0)) \geq 0$$

と作り成立する。(1) は Tellegen の定理から

$$(u' - u'')(y' - y'') = \sum_{i=1}^{\ell} (u_i' - u_i'')(y_i' - y_i'')$$

であるから同様に証明できる。但し、ここで u_i', y_i', u_i'', y_i'' は \mathcal{N}_i の許容入出力対である。 (証明終)

[定理 4.3] \mathcal{N} を式 (4.2) で表される複合混成 n ポートとする。 \mathcal{N} の外部ポートがループおよびカットセットを作らないならば

- (1) 部分 n ポート \mathcal{N}_i がすべて消散的であるならば \mathcal{N} は消散となる
- (2) 部分 n ポート \mathcal{N}_i がすべて局所消散的ならば \mathcal{N} も局所消散的となる
- (3) 部分 n ポート \mathcal{N}_i がすべて実質消散的ならば \mathcal{N} も実質消散。

(証明) $u_I = (u_1', \dots, u_\ell')'$, $y_I = (y_1', \dots, y_\ell')'$ とすれば外部ポートのカットセットとループが存在しないから文献(34)の定理 2 より

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_I \\ y_I \end{pmatrix}$$

とかけろ。ここで $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2\ell}$ は $+1, -1, 0$ から成り各行は非零要素を含む。したがって $u(t) \equiv 0 \Rightarrow u_I(t) \equiv 0$ となり定理 4.2 の証明から従う。

(証明終)

4.4 結 言

この章ではいくつかの n ポートを組合わせてできる複合 n ポート系について考察した。4.2. では代数的 n ポートについて相反性が, 4.3. では混成 n ポートについて受動性が, それぞれ接続により保存されることを述べた。

第 5 章 非線形 nポート抵抗の寄生リアクタンスによる 正規化モデル

5.1. 緒 言

陽極同調発振器や自走マルチバイブレーターの様に跳躍現象を伴う応答を持つ回路網は寄生リアクタンスの存在を考慮することにより厳密な解析がえることはよく知られている。一方正規形微分方程式で記述できない回路網の動的挙動の定性的・定量的解析を行う際に自然に存在する寄生リアクタンスを考慮することにより正規形回路微分方程式を得て解析を容易にすることができる。例えば、図 5.1 に示す回路を考える。こ

の回路の非線形抵抗は同図 (b) の様な電圧制御形抵抗とすると正規形微分方程式による記述はできないがポート 1, 1' に ϵC_1 なる寄生キャパシタの存在を考慮すると回路微分方程式は正規形となる。一方ポート 2, 2' に ϵC_2 なる寄生キャパシタンスの存在を考慮してもやはり正規形表現が可能である。この様な回路モデルを寄生リアクタンスによる正規化モデルと呼ぶが今の例でも分る通り正規化の方法は一通りとは限らず寄生リア

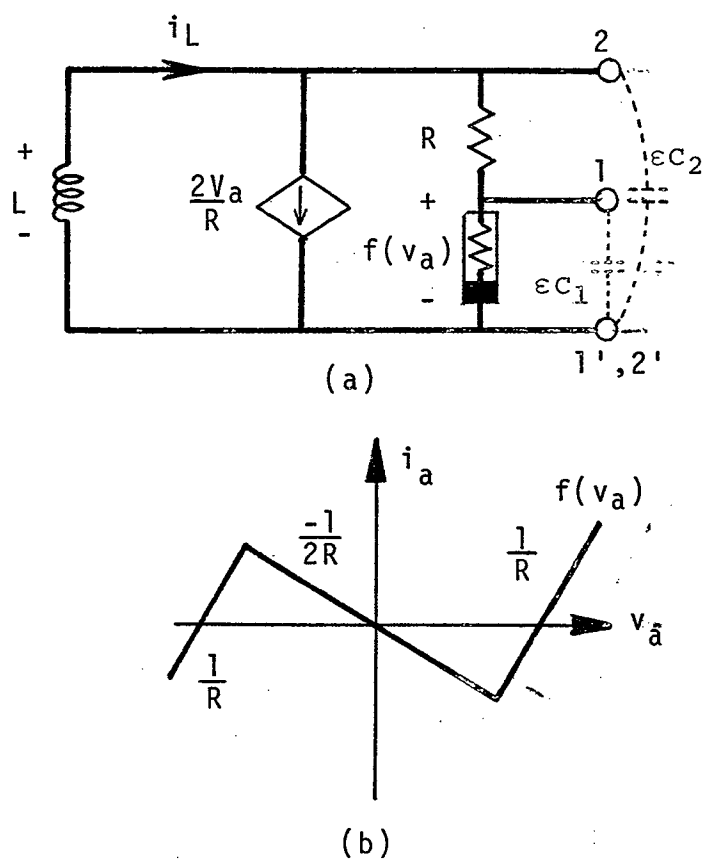


図 5.1 非正規回路の例

Fig.5.1-Example of an Improper Network

ワタンスの付加の方法に従って異った正規化モデルが得られる。この回路例で εc_1 による正規化モデルを N_1 , εc_2 による正規化モデルを N_2 とし、それぞれの状態方程式の平衡点 $(0,0)$ の性質について調べてみると N_1 では鞍点、 N_2 では安定結節点あるいは安定過心点となることが判る。このことは N_1 と N_2 の平衡点近傍でのふるまいが本質的に異なることを意味し、従っていずれか一方を原回路網のモデルとして採用することが妥当ではないということになる。正規化モデルの妥当性を調べることは、すなわち異った正規化法によって得られたいくつかの正規化モデルの原回路網の素子枝に対応する枝の応答の(各時刻での)差が寄生リアクタンスの大きさ ε のオーダーで押えられるかどうかを調べることは非線形回路網のモデル化に際し重要な問題である。Chua, Alexander⁽²⁸⁾ は一つの寄生リアクタンスを用いて正規化できる非正規回路の正規化モデルについて上記の意味における等価性を考察している。本章では一般に複数個の寄生キャパシタ(またはインダクタ)による正規化について、その正規化モデルの ε に関する漸近的等価性を考察し、いくつかの十分条件を示すことが主な目的である。本章ではさらに正規化により発生する他の問題についての考察も行う。

まず5.2では問題の定式化と寄生パラメータを持つ微分方程式についての Pontryagin⁽³⁰⁾ の結果のまとめを行う。

5.3では2つの異なる正規化の等価条件を述べる。

5.4では寄生リアクタンスを持たせたモデルが正規形表現を持つにもかかわらず解の唯一性が破れる様に見える場合のあることを述べ解の一意性? についての十分条件を考察する。

5.5では数値計算に要する手間を省くための正規化に要するリアクタンスを削減する方法について述べる。

5.2. 問題の定式化

この節は微小パラメータを含む微分方程式の特異摂動に関するポントリヤン⁽³⁾の結果の解説と問題の定式化について述べる。

5.2.1 基礎

寄生素子の値は一般的に十分小さいと考えられる。非線形回網理論の分野ではこれを十分小さな正数 ε に比例して小さな値をとる線形素子として扱う⁽²⁾。回路変数の集合 X が完全であるとはその回路網の他のすべての変数が X から定まりしかも X がその性質を持つ回路変数の集合のうちで最小のものであるときに言う。また動的な非線形回路がプロパーであるとは動的に独立な完全集合 X が存在して回路方程式が正規形

$$\dot{x} = f(x, t)$$

で表され、更に任意に与えられた初期値と初期時刻に対して一意解が存在するときに言う。そうでないときはインプロパーであると言う。

[定義5.1] 与えられた回路網 N からすべての寄生容量を解放除去しすべての寄生インダクタを短絡除去してできる回路網 \hat{N} を N の原回路と言う。

[定義5.2] 与えられた2つの寄生素子を含む回路網 N_1 と N_2 はその原回路 \hat{N}_1, \hat{N}_2 が等しいとき ε -等価であると言う。

[定義5.3] 2つの ε -等価な回路網 N_1 と N_2 の初期状態が両立するとは

- (i) 寄生容量枝の初期電流と寄生インダクタ枝の初期電圧がともにオーダー $O(\varepsilon)$ であり、かつ
- (ii) \hat{N}_1 と \hat{N}_2 の対応する枝の初期電流と初期電圧が共に相等しい、更に
- (iii) 回路は安定状態にある、すなわち状態が瞬時にして他の状態に移行する様なことがない。

[定義5.4] 原回路 \hat{N} の寄生リアクタンスによるプロパーな正規化モデル N の初期値 x_0 が有効であるとは N の初期値が \hat{N} の初期値と両立するとき(すなわち、 $\hat{N} = \hat{N}$ とみなして) はいづれでも N の応答は一意に決定

するとき言う。更にこの条件を満足するすべての $x_0 \in R^m$ が有効であるとき正規化モデル N は有効であると言う。

[注意 5.1] フロバーな正規化モデル N が有効でない様な例は多く存在する。後述べる N のはやい動作を記述する方程式の跳躍先が常に安定平衡点であることが有効であるための必要十分条件となる。

[定義 5.5] 2つの有効な ε -等価回路 N_1, N_2 は初期値が x_0 で両立するとき (x_0 は $\hat{N} \triangleq \hat{N}_1 = \hat{N}_2$ の状態を表す) それぞれの対応する枝の解が $[t_0, T]$ において $\varepsilon \rightarrow 0$ で一様に同一の極限に近づくととき原回路 \hat{N} と初期値 x_0 に対して 等価な正規化モデル であるという。更にほとんどすべての初期値 x_0 で等価であるならば等価な正規化モデルであるという。

本章では微小パラメータを含む微分方程式

$$\dot{y} = G(x, y), \quad \varepsilon \dot{x} = F(x, y) \quad (5.1)$$

を扱う。ただし G および F はそれぞれ連続微分可能な関数で $G: R^n \times R^m \rightarrow R^n$, $F: R^n \times R^m \rightarrow R^m$ である。この方程式系については文献(30)において次の事実が証明されている。

[方程式系(5.1)のふるまい]

今方程式(5.1)の ε を十分小さくとったときの解を

$$x = \phi(t, \varepsilon), \quad y = \psi(t, \varepsilon) \quad (5.2)$$

とすれば、これは初期値が両立するならば、以下で構成される軌道と有限時間内において ε のオーダーで一様に近似される。

n 次元面 $F = \{(x, y) \in R^{n+m} \mid F(x, y) = 0\}$ 上で $(\partial F / \partial x)$ の固有値が負の実部を持つ領域を“おそい領域”といい F^+ で表す。そうでない領域を F^- とする。(a) F^+ 上に初期状態 $(x_0, y_0) \in R^n \times R^m$ をとると F^+ 上では軌道は退化システム

$$\dot{y} = G(f(y), y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (5.3)$$

但し

$$F(f(y), y) = 0 \quad \text{である。}$$

で与えられる。(b) この軌道は時刻 $t = t^- > t_0$ で $D = \det(\partial F / \partial x) = 0$ を満

する F^+ の境界 γ に到達しそこで $\lambda(\partial F/\partial x)$ のうち1つが0になると仮定する。この点を (x^-, y^-) で表せば軌道はもはや F 上を動くことはできず $\epsilon \rightarrow 0$ で無限大の速度を帯びる微分方程式

$$\epsilon \frac{\partial x}{\partial t} = F(x, y^-) \quad (5.4)$$

$$x(t^-) = x^-$$

で規定される n 次元空間 $y=y^-$ (一定) を動く。ここで γ 上の点から出る (5.4) の解軌道は1つでありまた (5.4) のアトラクションとしては平衡点のみであると仮定し、そのうちの1つの安定平衡点 $(x^+, y^+) \in F^+$ に軌道は到達すると仮定する。 (x^-, y^-) は跳躍における始点、 (x^+, y^+) は終点でありこれらの点は跳躍条件

$$\begin{aligned} F(x^-, y^-) &= 0 & \det(\partial F/\partial x)|_{(x^-, y^-)} &= 0 \\ y^+ &= y^- & F(x^+, y^+) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

を満足する。 (x^-, y^-) から (x^+, y^+) への移動は ϵ が十分小さければ瞬時に行われる。こうして軌道は再度 F^+ 中を (5.3) 式に従って初期条件 $y(t^+) = y^+$ の下で動く。ここで $t^- = t^+(\epsilon \rightarrow 0)$ とする。

5.2.2. 正規化モデルの定式化

図 5.2(a) のインポーター-非線形回路 \hat{N} を考える。 \hat{N} は ν 個のキャパシタと λ 個のインダクタを含む。これらの素子は非線形であり

$$C_i(v_{C_i}) > k > 0, \quad L_j(i_{L_j}) > k > 0$$

の特性を持つ。抵抗素子のみから成る回路 N_R は時不変非線形2端子抵抗、相反マルチポートおよび直流独立電源のみから成る。今 \hat{N} に寄生キャパシタンス(インダクタンス)を開放(短絡)端子1から s に接続して同図(b)に示す正規化回路 N^A を作る。これらをそれぞれ $\epsilon C_1, \dots, \epsilon C_s$ とする。本論文では寄生キャパシタによる正規化のみを論ずるが寄生インダクタによる場合もまったく同様である。両方が混合した場合はこの章

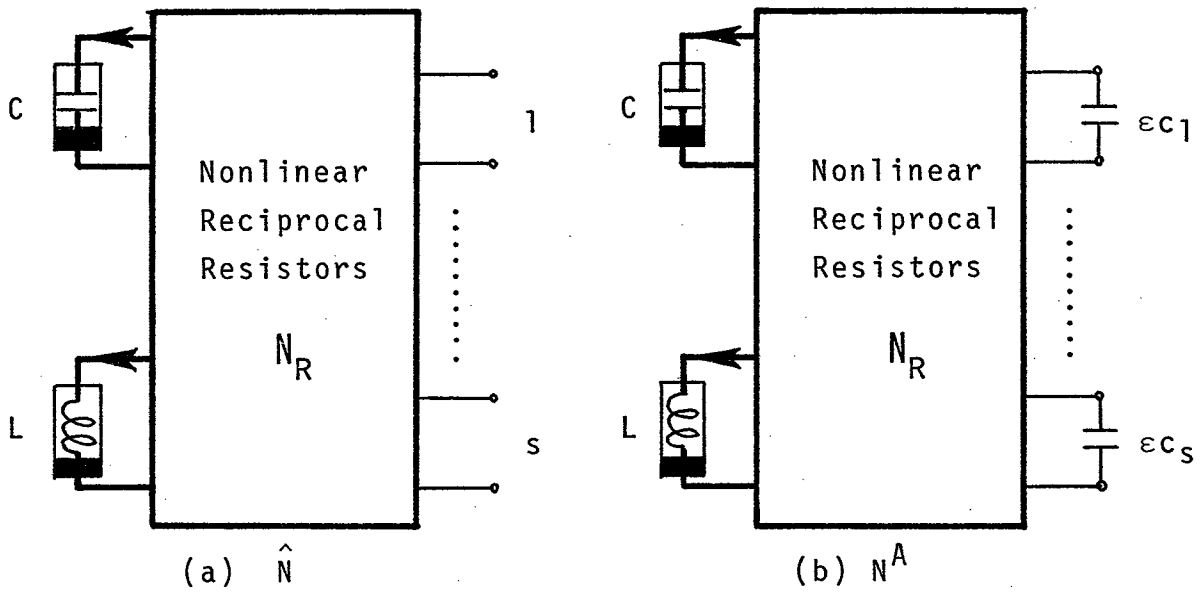


図 5.2 非線形回路網の一般形

Fig.5.2-Form of General Nonlinear Network

では考察しない。今図 5.3 に示す様に 2 通りの方法で \hat{N} が正規化される場合を考える。すなわち、図 5.3 においてポート $1, \dots, s$ とポート $1', \dots, s'$ のどちらか一方に寄生キャパシタを付加することにより図 5.2 (b) に示す正規化回路が得られる場合を考える。1 つの原回路 \hat{N} から構成されるこれら 2 つの ϵ 等価な回路をそれぞれ N_1^A, N_2^A とする。このとき $(\gamma + \lambda + 2s)$ -ポート N_R は

$$\begin{pmatrix} i_C \\ v_L \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_C(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_L(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_1(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_2(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{pmatrix} = f(v_C, i_L, v_1, v_2) \quad (5.6)$$

により特性づけられる。ここで f は連続可微分である。

電圧源とキャパシタ（寄生キャパシタも含めて）のみから成るループ及び電流源とインダクタのみから成るカットセットは存在しないと仮定する。また状態変数の次元は N_1^A と N_2^A の動的自由度に一致していると仮定する。このとき v_C, i_L, v_1 は N_1^A の状態変数となる。 N_1^A は γ 階級である

からこれらは完全集合を構成する。

。従って v_2 はこれらから一意に定まり N_2^A に対しても同様に

$$v_i = V_i(v_C, i_L, v_j), i \neq j \in \{1, 2\}$$

と表せる。 N_1^A, N_2^A に対する正規形

方程式はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ i_L \\ \varepsilon \dot{v}_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C^{-1} f_C(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ L^{-1} f_L(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ D_2^{-1} f_1(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ i_L \\ \varepsilon \dot{v}_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C^{-1} f_C(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ L^{-1} f_L(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ D_2^{-1} f_2(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.8)$$

となる。ここで $C = \text{diag}(C_1(v_C), \dots, C(v_C))$, $L = \text{diag}(L_1(i_{L1}), \dots, L_\lambda(i_{L\lambda}))$ で寄生素子以外のキャパシタンス及びインダクタンス行列を表し, $D_i = \text{diag}(c_{i1}, \dots, c_{is})$, ($i=1, 2$) は回路 N_i の寄生キャパシタンスに比例する(強さ)を表す行列である。

以上の議論は図5.4に示す回路についても適用される。この図では n ポート抵抗 N_{R1} は非相反なマルチポート非線形抵抗も許す。 N_{R2} は相反な抵抗素子のみから成るものとする。 N_{R1} と N_{R2} を接続する 2 個のポートにおけるポート変数を $y \in R^2$ とする。 y は各ポートの電圧又は電流の一方から成り非寄生素子の状態から一意に決定されると仮定する。すなわち

$$y = H(v_C, i_L) \tag{5.9}$$

である。 H は連続可微分であるとする。さらに y と寄生キャパシタ電圧 v_1 or v_2 は N_{R2} の完全集合であると仮定する。2通りの \hat{N} を正規化するた

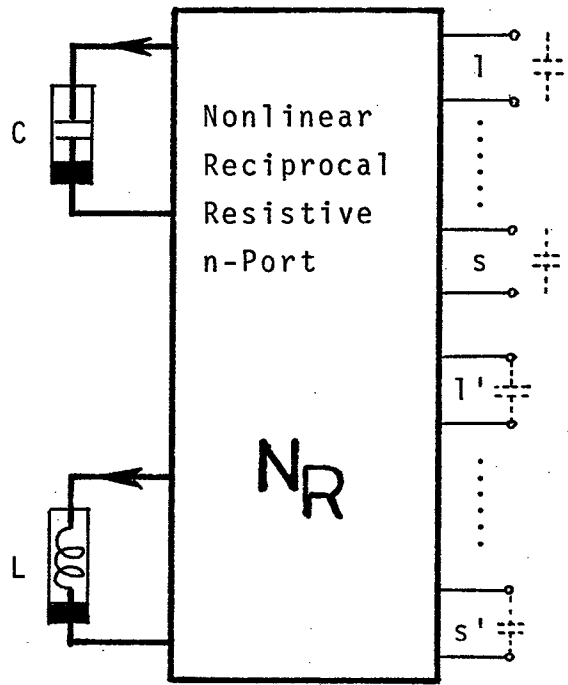


図5.3 考察する回路モデル
Fig.5.3-Network under Consideration

めの寄生素子ポートを相反マルチポート抵抗 N_{R2} から選ぶ。抵抗回路の N_{R2} は特性

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(v_1, v_2, y) \\ F_2(v_1, v_2, y) \\ F_x(v_1, v_2, y) \end{bmatrix} = F'(v_1, v_2, y) \quad (5.10)$$

を持つ。ここで F' は連続微分可能な関数である。 N_{R1} は特性が

$$\begin{bmatrix} i_C \\ v_L \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_C(v_C, i_L, x) \\ F_L(v_C, i_L, x) \\ H(v_C, i_L) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

で表される。 F_C, F_L はそれぞれ連続微分可能な関数である。5.10)式と(5.11)式より図5.4のマルチポート抵抗は

$$\begin{bmatrix} i_C \\ v_L \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_C(v_C, i_L, F_x(v_1, v_2, H(v_C, i_L))) \\ F_L(v_C, i_L, F_x(v_1, v_2, H(v_C, i_L))) \\ F_1(v_1, v_2, H(v_C, i_L)) \\ F_2(v_1, v_2, H(v_C, i_L)) \end{bmatrix} = f(v_C, i_L, v_1, v_2) \quad (5.12)$$

となる。 f は連続微分可能な関数である。 N_{R2} の仮定から y と v_1, y と v_2

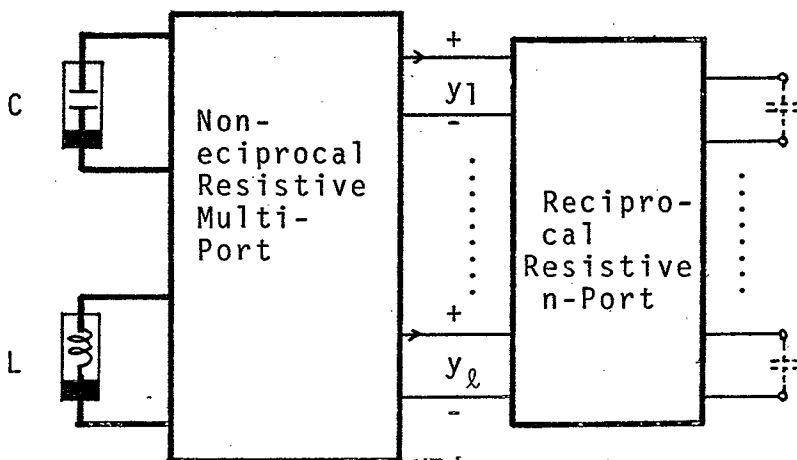


図5.4 非相反素子を含む場合
Fig.5.4-Networks with Nonreciprocal Resistor

はそれぞれ N_{R2} の完全集合であるから

$$\begin{aligned} v_2 &= V_2'(H(v_C, i_L), v_1) = V_2(v_C, i_L, v_1) \\ v_1 &= V_1'(H(v_C, i_L), v_2) = V_1(v_C, i_L, v_2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

と表せる (5.12) と (5.13) 式から前と同様 N_1, N_2 に対する正規形方程式 (5.7) 式' と (5.8) 式' を得る。

5.3 正規化モデルの等価条件

5.2 節で考えた図 5.3 または 5.4 に示す回路モデルを考える。これらの回路の 2 通りの正規化回路 N_1^A と N_2^A の状態方程式は (5.7) 式' と (5.8) 式' で与えられる。仮定から双方のモデルにおいて

$$G = \frac{\partial(f_1', f_2')'}{\partial(v_1', v_2')'}$$

は対称行列となる。従って 2 回連続微分可能な関数 $P: R^{2s+y+\lambda} \rightarrow R^1$ が存在して

$$\begin{aligned} f_1(v_C, i_L, v_1, v_2) &= \frac{\partial P}{\partial v_1}(v_C, i_L, v_1, v_2) \\ f_2(v_C, i_L, v_1, v_2) &= \frac{\partial P}{\partial v_2}(v_C, i_L, v_1, v_2) \end{aligned} \quad (5.14)$$

と表すことができる。

N の正規化モデルを N_1^A, N_2^A としそれぞれの適い領域 S_1, S_2 の境界 $\partial S_1, \partial S_2$ で跳躍条件が満たされているものとする。また勾配系 (5.14) 式' スカラポテンシャル P は

$$\lim_{\|v_1\| \rightarrow \infty} P = \infty, \quad \lim_{\|v_2\| \rightarrow \infty} P = \infty$$

を満足するものとする。これは微分方程式 (5.7) と (5.8) の解の有界性を保証するものである。 N_1^A, N_2^A の任意の跳躍点 $v_1^* \in R^{n1}, v_2^* \in R^{n2}$ に対し次の様なレベルセットを定義する。

$$L_1(\lambda) = \{(v_1, v_2) \in R^{n1+n2} \mid P(v_1, v_2) \leq \lambda, f_2(v_C^*, i_L^*, v_1, v_2) = 0\}$$

$$L_2(\lambda) = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid P(v_1, v_2) \leq \lambda, f_1(v_C^*, i_L^*, v_1, v_2) = 0\}$$

[定理5.1] 次の条件が成り立つならば N_1^A と N_2^A は漸近的等価となる。

(1) すべての $(v_C, i_L, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n_C+n_L+n_1+n_2}$ に対し $L(\partial f_1/\partial v_1)$ および $L(\partial f_2/\partial v_2)$ は共に正定である。

(2) 等値集合 $L_1(P(v_1^*, v_2^*)), L_2(P(v_1^*, v_2^*))$ の連結成分のうち跳躍点 (v_1^*, v_2^*) を含むものをそれぞれ L^0_1, L^0_2 とし、すべての $\lambda \leq P(v_1^*, v_2^*)$ に対して $L_1(\lambda), L_2(\lambda)$ の L^0_1, L^0_2 に含まれる部分集合を $L^0_1(\lambda), L^0_2(\lambda)$ としたとき $L^0_1(\lambda), L^0_2(\lambda)$ のいずれかが凸集合である。

証明を見やすくするため、方程式 (5.7) と (5.8) に変数変換

$$R^S \in x_1 = \sqrt{D_1} v_1$$

$$R^S \in x_2 = \sqrt{D_2} v_2$$

$$R^{\lambda+\gamma} \in y = (y_1, y_2) = (v_C, i_L)$$

を施す。ここで $D_i = \text{diag}(\sqrt{c}^i, \dots, \sqrt{c}^i)$, $i=1, 2$ である。このとき方程式 (5.7) および (5.8) はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \in \dot{x}_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G(y, x_1, x_2(y, x_1)) \\ F_1(y, x_1, x_2(y, x_1)) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G(y, x_1(y, x_2), x_2) \\ F_2(y, x_1(y, x_2), x_2) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

と表せる。但し

$$G(y, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} C^{-1} f_C(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \\ L^{-1} f_L(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1(y, x_1, x_2) \\ F_2(y, x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} f_1(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \\ D_2^{-1} f_2(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1, \sqrt{D_2}^{-1} x_2) \end{bmatrix}$$

である。また

$$x_1(y, x_2) = \sqrt{D_1} v_1(y_1, y_2, \sqrt{D_2}^{-1} x_2)$$

$$x_2(y, x_1) = \sqrt{D_2} v_2(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1} x_1)$$

である。ここで $\partial(F_1, F_2)/\partial(x_1, x_2)$ は対称行列となるから 2 回連続微分可能な関数 $\Phi: \mathbb{R}^{2s+\gamma+\lambda} \rightarrow \mathbb{R}^1$ が存在して

$$F_1(y, x_1, x_2) = (\partial\Phi/\partial x_1)(y, x_1, x_2)$$

$$F_2(y, x_1, x_2) = (\partial\Phi/\partial x_2)(y, x_1, x_2)$$

と書くことができる。(5.14) 式の $P(v_C, i_L, v_1, v_2)$ と Φ の間には簡単な計算によって

$$\Phi(y, x_1, x_2) = P(y_1, y_2, \sqrt{D_1}^{-1}x_1, \sqrt{D_2}^{-1}x_2) \quad (5.17)$$

が成立していることが分かる。

今 $(y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2s+\gamma+\lambda}$ 空間内で N_1^A, N_2^A に対する (5.15)(5.16) 式の $\varepsilon = 0$ としたときの退化システムを考える。これらのシステムのフローはそれぞれ超曲面

$$M_1 = \{(y, x_1, x_2); F_1 = 0, x_2 = X_2(y, x_1)\}$$

$$M_2 = \{(y, x_1, x_2); F_2 = 0, x_1 = X_1(y, x_2)\}$$

上に存在し、 $x_2 = X_2(y, x_1)$ は $F_2 = 0$ の解、 $x_1 = X_1(y, x_2)$ は $F_1 = 0$ の解であるから $M_1 = M_2 = M = \{(y, x_1, x_2); F_1 = 0, F_2 = 0\}$ となる。さらに N_1 と N_2 は ε 等価であるから同じ退化システム \hat{N} を持つ。M 上で $-(\partial F_1(y, x_1, X_2(y, x_1))/\partial x_1)$ の固有値が負または 0 の実部を持つ領域 M_1^+ はシステム N_1^A のおそい領域であり M_1^+ の $0(\varepsilon)$ 近傍から出発する解は M_1^+ の境界に到達するまでは退化システム \hat{N} に従って M_1^+ の $0(\varepsilon)$ 近傍を動く。今 $\hat{F}_1(y, x_1) = F_1(y, x_1, X_2(y, x_1))$ と書くと陰関数の微分法とチェーン則⁽⁵⁾により

$$\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \quad (5.18)$$

を得る。同様に $\hat{F}_2(y, x_2) = F_2(y, X_1(y, x_2), x_2)$ とおくと

$$\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)^{-1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \quad (5.19)$$

となり N_2 のおそい領域 M_2^+ は $-\partial \hat{F}_2/\partial x_2$ が負の実部を持つ領域で与えられる。

[補題5.1] A, B を n 次正定実対称行列とし, C を任意の $m \times n$ 実長方形行列とすれば $(A - CB^{-1}C')$ が正定であることと $(B - C'A^{-1}C)$ が正定であることは同値であり明らかに双方とも対称行列である。

(証明) $(m+n) \times (m+n)$ 実対称行列

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix}$$

は補題の条件の下で次の様に分解できる

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ C'A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & CB^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - CB^{-1}C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}C' & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さらに対称性により適当な $n \times n$ 直交行列 P_1, P_1' および $m \times m$ 直交行列 P_2, P_2' により

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C'A^{-1}C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^t & 0 \\ 0 & P_2^t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A - CB^{-1}C' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1' & 0 \\ 0 & P_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \delta_1 \dots \delta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1'^t & 0 \\ 0 & P_2'^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。ここで $\alpha_i > 0, \delta_j > 0$ である。したがって適当なブロック三角行列 K および K' により

$$\begin{aligned} D &= K^t \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} K \\ &= K'^t \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \delta_1 \dots \delta_m \end{pmatrix} K'^t \end{aligned}$$

と書ける。 $\alpha_i > 0, \delta_j > 0$ であるから $\beta_j > 0, \gamma_j > 0$ ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$) となり補題は示された。 (証明終)

[補題5.2] 次式が成立する

$$(a) \quad \hat{F}_1(y, x_1) = (\partial / \partial x_1) \Phi(y, x_1, X_2(y, x_1))$$

$$(b) \quad \hat{F}_2(y, x_2) = (\partial/\partial x_2)\Phi(y, X_1(y, x_2), x_2)$$

[注意 5.2] 補題 5.2 は関数の合成と微分操作が交換できることを示す。すなわち $\partial f(x, y)/\partial x|_{y=h(x)} = \partial f(x, h(x))/\partial x$ が成立することを表す。もちろんこのことは一般の場合には成立しない。

[補題 5.2 の証明] (a) について示す。右辺を微分すると

$$\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Big|_{x_2=X_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \Big|_{x_2=X_2}$$

となり第 2 項は $x_2=X_2$ が方程式 $\partial \Phi/\partial x_2=0$ の解であるから 0 となり、
 け成立する。(b) も同様である。 (証明終)

補題 5.2 は方程式 (5.15) と (5.16) が勾配系であることを示すから安定平衡点以外のアトラクションを持たない。さらにヤコビ行列 $(\partial \hat{F}_1/\partial x_1)$ 及び $(\partial \hat{F}_2/\partial x_2)$ は対称であるから M^+ の境界では $\det(\partial \hat{F}_2/\partial x_2)=0$, $\det(\partial \hat{F}_1/\partial x_1)=0$ となる。このとき M^+ の仮定をする。

[仮定 5.1] M^+ の境界でヤコビ行列 $(\partial \hat{F}_1/\partial x_1)$ の 1 個の固有値のみ 0 となり、さらに方程式 (5.20) の安定平衡点では $(\partial \hat{F}_1/\partial x_1)$ は正定である。

[注意 5.3] この仮定は“生成的”な仮定であり、ほとんどすべての場合には成立している。ほとんどすべての場合には成立しているとは実際のシステムでは起こらないという意味である。

[定理 5.1 の証明]

条件 (1) と補題 5.1 を式 (5.18) (5.19) に適用すれば $M_1^+ = M_2^+ = M^+$ を得る。こうして N^A_1 と N^A_2 のおそい領域 M^+ は一致するから初期値が両立するならば $\varepsilon \rightarrow 0$ に対して N^A_1 と N^A_2 の解は M^+ 上では退化システム \hat{N} の解と ε のオーダーで一様に近似されるので $\varepsilon \rightarrow 0$ で同一の極限に近づく。

次に N^A_1 と N^A_2 の解が $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき“はやい領域”で一致することを示そう。ここでは N^A_1, N^A_2 の軌道は退化システムで近似することは出来ずかわりに $\varepsilon \rightarrow 0$ に対してジャンプ則を満足する。今 M^+ 上の退化システムの

軌道が $t=t^-$ に M^+ の境界に到達したと仮定すると“はやい領域”に入る。
 N_1 と N_2 のはやい領域における解は方程式

$$\varepsilon \dot{x}_1 = -\hat{F}_1(y(t^-), x_1) \quad (5.20)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = -\hat{F}_2(y(t^-), x_2) \quad (5.21)$$

により近似される。補題 5.2 から方程式系 (5.20) と (5.21) は勾配系となる。 (x_1, x_2) 空間で考えるとこれらはそれぞれ超曲面 (多様体) M_1, M_2 上の微分方程式と考えられる。 M_1 と M_2 の交点に双方の方程式の平衡点がある。このことは図 5.6(a), (b) に示されている。いま (x_1^*, x_2^*) が N_1^A, N_2^A の跳躍点であるとしよう。この跳躍点に対し条件 (2) が成り立つとする。例えば $L^0_1(\lambda)$ が任意の $\lambda \leq \Phi(x_1^*, x_2^*)$ に対し凸集合であるとすれば $\Phi(x_1, x_2(y^*, x_1))$ は L^0_1 の中に唯一の極小値 (x^0_1, x^0_2) , $x^0_2 = x_2(y^*, x^0_1)$ を持つ。補題 5.2 から

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right|_{x_1=x^0_1} = \hat{F}_1(y^*, x^0_1) = 0$$

である。すなわち (x^0_1, x^0_2) は N_1^A の跳躍方程式 (5.20) の安定平衡点であり跳躍点 (x_1^*, x_2^*) の終点となる。 \hat{F}_1, \hat{F}_2 の定義により $(x^0_1, x^0_2) \in L^0_2$ において $\hat{F}_2(y^*, x^0_2) = 0$ である。すなわち (x^0_1, x^0_2) は N_2^A の跳躍方程式の L^0_2 に含まれる平衡点でもあり、補題 5.1 よりこれは安定な平衡点である。 N_2^A が L^0_2 の内に (x^0_1, x^0_2) 以外の安定平衡点を持たないことが同様の議論により分かるから (x^0_1, x^0_2) がやはり N_2^A の (x_1^*, x_2^*) に対応する終点であると結論される。 (証明終)

定理 5.1 の条件 (2) は跳躍方程式の解軌道が入って行く等位集合 L^0 内安定平衡点が唯一存在することを示している。

[例 5.1] 図 5.5(a) に示す回路において開放ポート $(1, 1')$, $(2, 2')$ にそれぞれ寄生キャパシタンス ε を付加して得られる正規化モデルを N_1^A, N_2^A とする。回路方程式はそれぞれ

$$i_L = -R_1 i_L - v_2$$

$$\begin{aligned} \varepsilon v_1 &= -(1/R_3)(v_1 - v_2) - f(v_1) \\ &\triangleq -f_1(i_L, v_1, v_2) \\ 0 &= -i_L - (1/R_3)v_1 + (1/R_2 + 1/R_3)v_2 \\ -E/R_2 &\triangleq f_2(i_L, v_1, v_2) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \dot{i}_L &= -R_1 i_L - v_2 \\ \varepsilon \dot{v}_2 &= -f_2(i_L, v_1, v_2) \\ 0 &= f_1(i_L, v_1, v_2) \end{aligned}$$

となる。ここで $f(v_1)$ は非線形抵抗の $i-v$ 特性であり同図 (b) に示す様な特性を持つ。 $f'(v_1) > -1/R_3$ とすると定理 5.1 の条件が満足される。また実数 k_1, k_2 , $k_1 < k_2$ が存在して $f'(v_1) > -1/(R_2 + R_3)$, $(v_1 < k_1, v_1 > k_2)$, $f'(v_1) < -1/(R_2 + R_3)$, $(k_1 < v_1 < k_2)$ であり更に $f'(k_1) = f'(k_2) = -1/(R_2 + R_3)$ とすると $f_1 = 0$

の解 $v_1 = V_1(i_L, v_2)$

は同図 (c) の様になる。

$f_2 = 0$ の解 $v_2 =$

$V_2(i_L, v_1)$ は点線で

示されている。この

とき P_1, P_2 は定理の

条件 (2) を満足する

跳躍点である。

以上相反回路につ

いて一般に n 個の寄

生素子を用いて正規

化する場合について

のモデルの等価性

について考察したが、

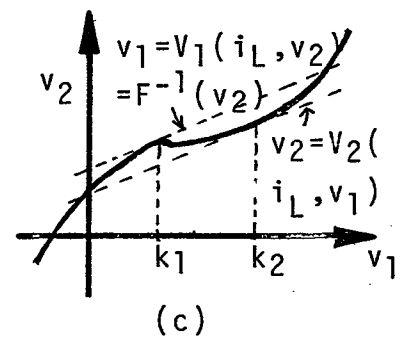
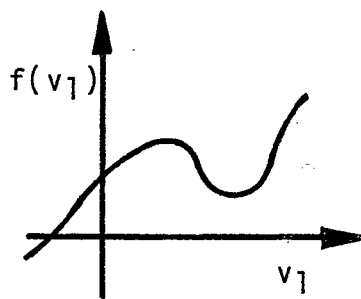
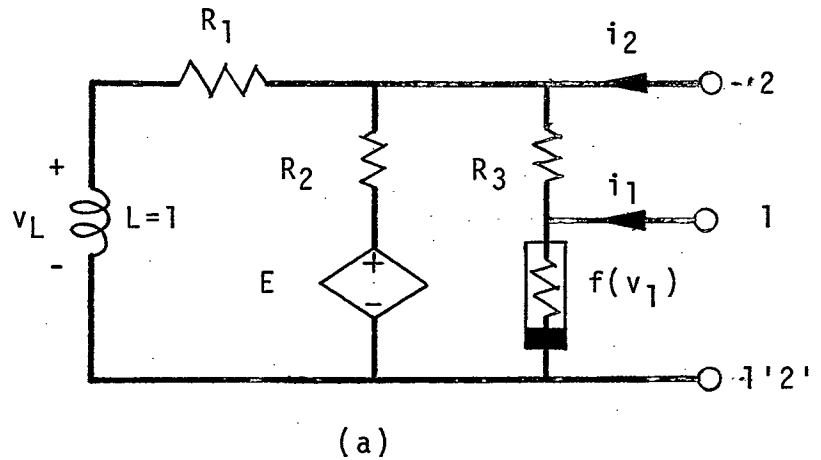


図 5.5 回路例
Fig. 5.5-Network for example

1つの寄生リアクタンスで正規化できる場合には N_R の相反性の仮定なしに簡単な等価条件が得られる。次の定理は文献(28)に示されているものであるが証明が不確実であるので、ここで再証明する。

[定理5.2] 図5.3に示す回路で N_R は相反に限らないものとする。更に N_{A_1}, N_{A_2} は双方とも1つのキャパシタで正規化されていると仮定する。このときつき条件が満足されていれば2つの正規化モデル N_{A_1}, N_{A_2} は漸近的に等価である。

(1) $(\partial f_1 / \partial v_1)(\partial f_2 / \partial v_2) > 0$

(2) $\partial f_1 / \partial v_2 = 0$ または $\partial f_2 / \partial v_2 = 0$ のどちらかが成立する。

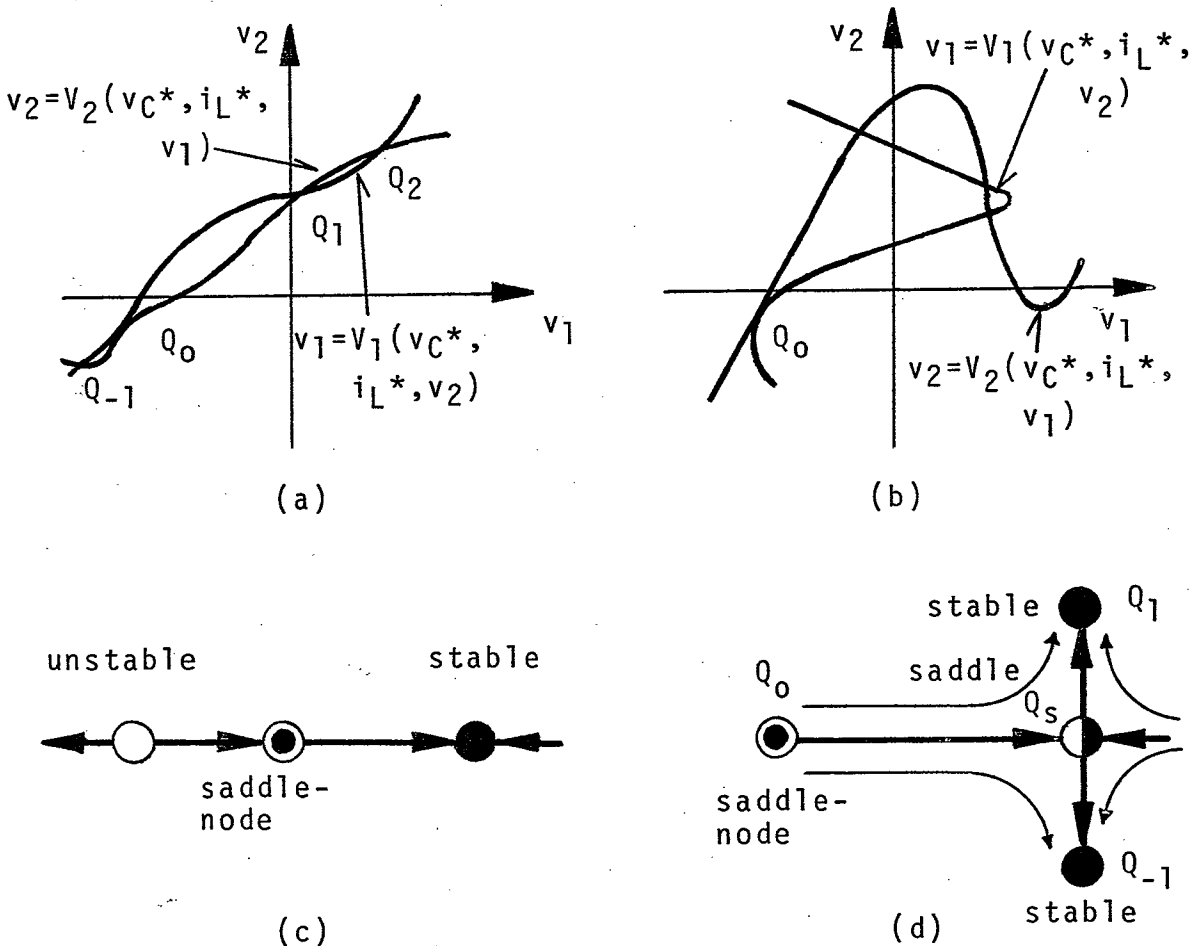


図5.6 N_{A_1}, N_{A_2} の (v_1, v_2) 空間に於ける解曲線
 Fig.5.6-Curves showing typical Paths of N_{A_1} and N_{A_2} in (v_1, v_2) plane.

(証明) 恒等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2} - \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \right) \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1} - \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right)^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

と条件(1)を用いれば

$$\begin{aligned} \hat{\frac{\partial f_1}{\partial v_1}} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1} - \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right)^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \right) > 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_2} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2} - \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \right) > 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

となるから前と同様におそい領域での一致が得られる。つぎに跳躍先の一致を言う。モデル N^A_1 の跳躍曲線は図5.6 (a) 又は (b) に示す様に曲線 $v_2 = V_2(i_L^*, v_C^*, v_2)$ に沿って動く。モデル N^A_2 では同じく曲線 $v_1 = V_1(i_L^*, v_C^*, v_2)$ に沿って跳躍する。条件(2)は $\partial v_1 / \partial v_1 \neq 0$ または $\partial v_2 / \partial v_2 \neq 0$ を意味し、このことは曲線 $v_1 = V_1$ または $v_2 = V_2$ のどちらか少なくとも一方は単調であることを意味する。図5.6 (a) にはこの状態が示されている。この図から分る様にこの場合は跳躍点 Q_0 からの跳躍先の候補は隣接する点 Q_1 または Q_{-1} の2つのみである。図5.6 (b) にはこの条件が満足されていない場合の例を示す。今跳躍方程式は1次元であるからアトラクションとしては安定平衡点しかなく、また平衡点は跳躍点は鞍点・ノードと安定または完全不安定平衡点のみである。図5.6 (c) にこの状況が示されている。この図が示す様に鞍点・ノードは一方からフローが流れ込み他方から流れ出る平衡点である。このことからもし N^A_1 に於いて跳躍点 Q_0 から流れ出るフローが例えば Q_1 方向へ向かうならば N^A_1 に於いて Q_1 が安定平衡点であることになる。(もちろんこのときには Q_{-1} は完全不安定平衡点となる) こうして点 Q_1 では $\hat{\partial f_1} / \partial v_1 > 0$ である。式(5.23)からこのことは $\hat{\partial f_2} / \partial v_2 > 0$ と等価となる。こうしてモデル N^A_2 に

於いても Q_1 が安定平衡点となり Q_0 から流れ出るフローは Q_1 へ向かうから N^A_1, N^A_2 の終点 (跳躍先) の一致がいえる。以上で証明は終るが、ここでは鞍点・ノードが の他には存在しないことが暗に使われている。これはほとんどの場合には正しい、すなわち生成的な性質であることを注意しておく。 (証明終)

5.4. 解の一意性

この節では有効なモデルであるための条件と解の一意性の破れる原因について考察する。寄生リアクタンズによる正規化モデルに於いてはしばしば回路が正規形による表現を持つにもかかわらず解が一意に定まらない場合があることが数値計算による実験から知られていた⁽⁵⁴⁾。これは本章で定義した有効でないモデルの例である。5.3 に於いて跳躍方程式の跳躍先が常に安定平衡点である場合を考察したがこの場合跳躍点近傍より出発する解軌道はその差が ϵ 以下に保たれる。しかし跳躍曲線の収束先がサドルの場合には図 5.6(d) に示す様に跳躍点近傍から出発する解は同じ安定平衡点に収束するとは限らない、この図では Q_1 または Q_{-1} へ収束する。このときおそい領域における、この跳躍点に到る解曲線の初期値は有効とはならない。したがってモデルが有効であるための1つの十分条件はすべての跳躍点 $y(t^-) = (v_C^-, i_L^-)$ に対して跳躍方程式(5.20) または(5.21) が1つの安定平衡点しか持たないことであり定理 5.1 はこのための十分条件となっている。この節ではこの条件の定域的表現と与える。

今、図 5.2 で表されるモデルを考える。このモデルのシステム表現は適当に変数変換すれば

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -G(x, y) \\ \dot{x} &= -(\partial/\partial x)\Phi(x, y) \quad x \in R^n, y \in R^m \end{aligned} \quad (5.24)$$

で与えられる。今 $R^n \times R^m$ の集合 $M \in \partial\Phi/\partial x = 0$ と $\det(\partial^2\Phi/\partial x^2) = 0$ を同時

に満足するものとして定義する。 $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ を自然な射影とすれば

[定理5.3] 式(5.24)で表されるシステムは \mathbb{R}^m の集合

$$D \triangleq \sigma(M)$$

が(互いに交わらない) n 次元くさびの集まりに同相ならば有効なモデルである。

(証明) システム(5.24)に於いて跳躍点は M 上に存在する。 D はくさび形(図5.7)の集まりに同相であるから跳躍先は1つである。このことは図5.8に示す図式化により分る。

(証明終)

1個の寄生リアクタンズで正規化できる場合には有効でないモデルはほとんど存在しない(サドルがないから)しかし2次元以上ではパラメータの変化により図5.6(d)に示す様にかた流出するフローは最初 Q_{-1} へ流入していたものがパラメータ $y=y^*_0$ の値においてサドル点 Q_s に入りさらに Q_1 へ移るといふ状況が起こる。このとき (Q_0 から出るフローがサドル点に入るときには ϵ 近傍から出るフローは Q_1 または Q_{-1} へ収束し跳躍先は一意に定まらない。定理5.1の漸近的等価条件が定理の様な大域的表現を持たないのは以上の理由によるわけである。

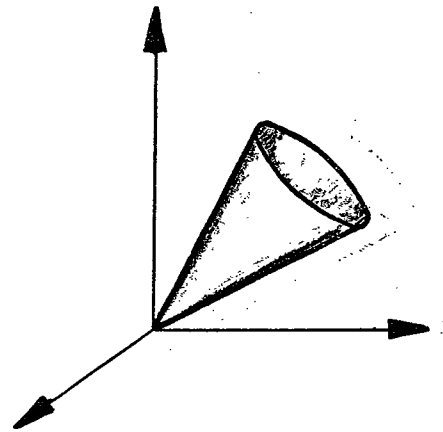


図5.7 n 次元くさび
Fig.5.7-n-dim Cusp

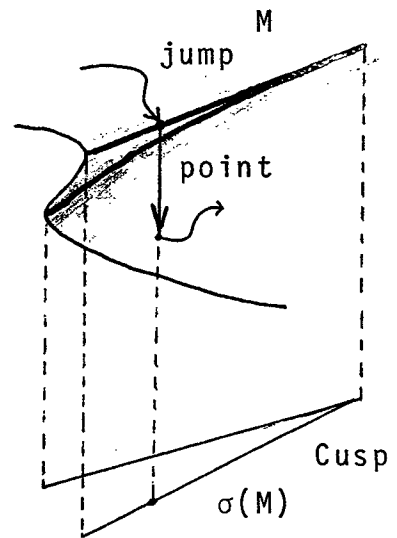


図5.8 証明の図式化
Fig.5.8-Illustration of the Proof

5.5. 正規化に要するリアクタンスの個数の削減

寄生リアクタンスモデルにより回路を数値計算する際には正規化に要する寄生リアクタンスの個数はなるべく少ない方が計算に要する手間を省く上からも望ましい。この節ではなるべく少ない個数の寄生リアクタンスで正規化モデルを作る方法について考察する。

図 5.9 に示す一般的寄生リアクタンスによる正規化モデルを考える。 n ポート抵抗 N_R は相反に限らないものとする。このモデルは微分方程式

$$y=f(x,y) \quad (5.25)$$

$$\dot{x}=g(x,y)$$

で表される。

[定理5.4] 図5.7 に示す回路に於いて寄生リアクタンスの個数は m 個であると仮定すればこのモデルが正規化されているためには

$$\det(\partial g/\partial x) \neq 0$$

でなくてはならない。このとき

(1) 行列 $(\partial g/\partial x)$ の (i_1, \dots, i_ℓ) 行から成る主小行列 A_{i_1, \dots, i_ℓ} は

$$\det A_{i_1, \dots, i_\ell} \neq 0$$

となるものとする。このときは寄生リアクタンスのうち

$$\{j_1, \dots, j_{m-\ell}\} = \{1, 2, \dots, m\} - \{i_1, \dots, i_\ell\}$$

ポートのもののみで正規化することが出来る。

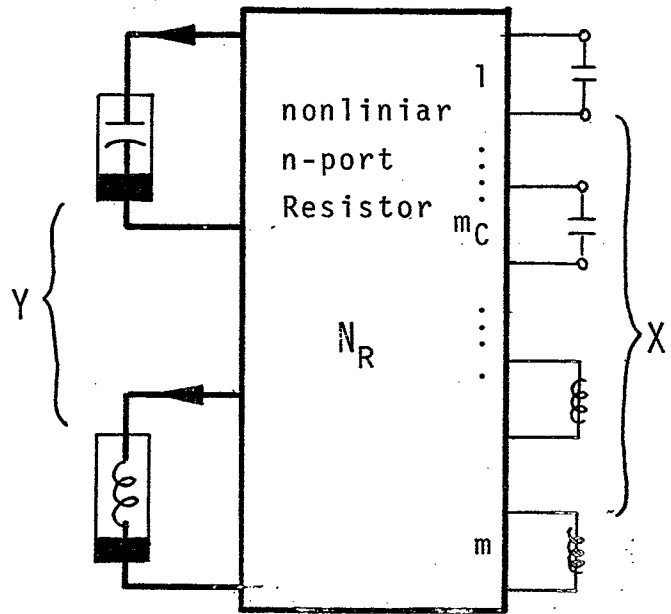


図 5.9 一般的寄生リアクタンスモデル

Fig.5.9-General Model with Parasitic Reactance

(2) 更に $\hat{g} \triangleq (g_{j_1}, \dots, g_{j_{m-l}})'$, $\tilde{g} \triangleq (g_{j_1}, \dots, g_{j_l})'$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{g} = \infty, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{g} = 0$$

ならばこのモデルは大域的表現

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, F(\hat{x}, y), y) \\ \varepsilon \dot{\hat{x}} &= \hat{g}(\hat{x}, F(\hat{x}, y), y) \end{aligned} \quad (5.26)$$

ここで $\tilde{g}(\hat{x}, F(\hat{x}, y), y) = 0$

を持つ。

定理5.4 の証明は陰関数定理および大域陰関数定理により証明できるので省く。

[系5.1] 回路が区分的線形の場合は各区分において行列 A_{i_1, \dots, i_l} の指数 (負の実部を持つ固有値の数) が等しければポート j_1, \dots, j_{m-l} の寄生リアクタンスで正規化できて更にこのモデルは大域的表現 (5.26) を持つ。

[例] 図5.10 (a) に示す回路を考える。区分的線形抵抗 g_1, g_2 の特性はそれぞれ図5.10 (b), (c) で与えられている。この回路は正規形表現を持たず、例えは図に示す4つのポートに寄生キャパシタを考慮することにより正規化することができ、インダクタLを短絡除去したとき図から得られる4ポート特性は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(v_1) \\ g_2(v_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E}{R_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

この区分的線形4ポートのヤコビ行列 J_R はすぐ求まる。 J_R の3次主小行

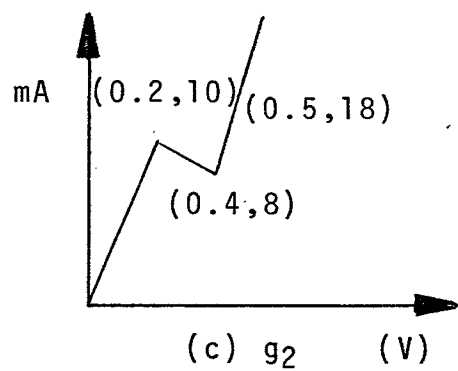
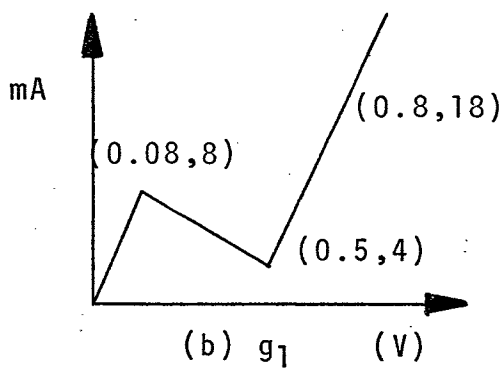
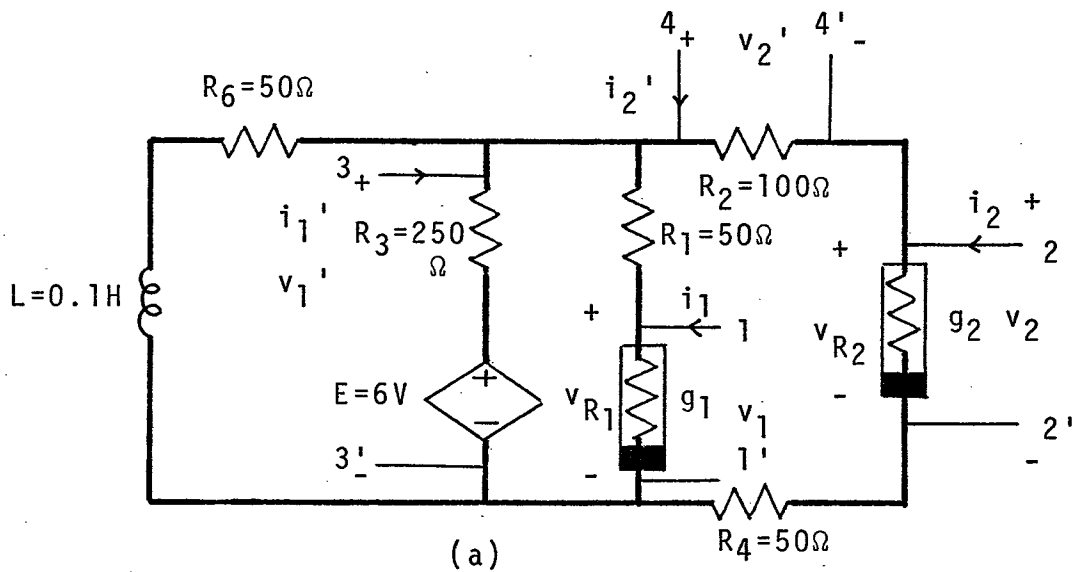


図5.10 回路例
Fig.5.10-Network for Example

列

$$A_{234} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4} + \frac{g_1}{v_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}$$

を考えると $\frac{1}{R_4} + \frac{g_1}{v_1} > 0$ であり、また

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{pmatrix} > 0$$

であるから補題5.1から $A_{234} > 0$ となりこの回路例ではポート(1,1)に寄生キャパシタを考慮するだけで回路は大域的に正規化されることが系5.1から分る。

5.6. 結 言

この章では凡ポート抵抗がハイブリッド表現を持たないとき内部の抵抗に寄生するリアクタンスを考慮してハイブリッド表現を持たせる場合に計算機による数値計算の際起こる問題の回路理論的側面についての検討を行った。5.2.は問題の定式化と基礎的定義および数学的基礎について述べた。5.3.では異なる正規化によりその定性的ふるまいが同じになるための条件についての考察を行った。ここでは正規化に要するリアクタンスの個数が一般の場合は相互抵抗の場合のみについて考察し、1つの十分条件を与えた。さらに1個の寄生リアクタンスのみで正規化できない場合には相反の仮定なしにかなり一般的な条件がChuaとAlexanderにより得られているが、これに対する厳密な証明を与えた。5.4.は寄生リアクタンスを含む回路は正規形表現できても解の一意性が破れる様に見える場合のあることを述べ、その原因と一意性が成立するための十分条件について考察した。5.5.は計算機で計算させる際方程式の次数を正規化に要する寄生リアクタンスの個数を削減することにより減らす方法について述べた。

第 6 章 結 論

本研究では非線形 n ポートの解析・構成の基礎についての研究を行った。まとめはそれぞれの章において行われているがこの章では本研究で行えなかった事および今後の研究についての展望を行う。

第 2 章では代数的非線形 n ポートについて、線形の場合における相反と歪相反 n ポートへの分解の非線形の場合への一般化を中心にして解析と構成の基礎理論を与えた。主な結果として一般的非線形 n ポート抵抗が (線形) 理想変成器と非線形 2 端子抵抗および従属電源から構成できることを示した。2.4.3. においてその一部を考察した「エネルギー的考察」の一般の場合については完全な考察は未完成である。問題として定式化すれば次の様になる。 $z = f(x)$ で与えられる n ポート抵抗の相反 n ポートと歪相反 n ポートへの分解の仕方は一般には ∞ 個存在するが n ポート抵抗が受動の場合、受動相反 n ポートと受動歪相反 n ポートへの分解は可能か？ここで 2 ポートの場合には 2.4.3. に於いて示した様に消散的な歪相反 2 ポートが存在しないことからこの問題は受動相反 2 ポートと不活性 (又は無損失) 2 ポートへの分解の存在へ帰着されること分かる。この問題は基本的であり重要と思われるので今後の研究が期待される。

第 3 章では混成 n ポートのエネルギー的考察と受動混成 n ポートの構成問題について論じた。主な結果として受動混成 n ポートが受動モデルでモデル化できさらにある条件が満たされればこれは回路実現できて、リアクタンス部分 n ポートと抵抗部分 n ポートは受動となることを示した。さらに線形の場合の正実補題の非線形の場合への一般化を行い、構成に関するヒントを与えた。ここで示した構成法が適用されない場合、すなわちエネルギー蓄積関数が回路実現条件を満足しない場合にも回路実現は可能か？可能ならばどの様な素子が必要か？という問題は今後の

課題として残されている。またシステムのクラスを限った場合の構成理論なども検討してみる必要がある。

第4章では第2章および第3章で研究した代数的非線形レポートまたは混成レポートについてこれらをいくつが接続してできる複合レポートについて主として接続により保存される性質について述べた。複合系による定式化は大規模非線形回路網の定式化として有効であると思われるのでこの定式化による今後の研究が期待される。

第5章では寄生リアクタンスによる非線形回路網の正規化モデルについて論じた。得られた結果については結論で示されている通りであるが等価モデルの十分条件については相反な回路網のみについて考察した。さらに一般的な場合については今後の問題である。ここで示した十分条件は定理5.2は別として実用的条件とはいえない。しかし一般的な条件の導出は不可能である様に思われるため今後の問題としてはクラスを限った場合あるいは具体的な回路についての研究となる。また5.4.1の解の一貫性についての考察は寄生パラメータを持つ微分方程式系に特有のものであり興味深い。この方面についてはさらに多くの研究が必要と思われる。

最後に非線形レポート系はまた統一的理論となるには種々の研究が必要であり今後の研究が必要である。

謝

辞

本研究の全過程を通じて、直接理解ある御指導を賜わり、常に励まされ御財言いただいた児玉慎三教授、前田肇助教授に心から感謝します。

大学院博士課程において御指導、御教示を賜わった尾崎弘教授、寺田浩韶教授に対し厚く御礼申し上げます。

親切な御援助をいただいた電気通信大学、雁部穎一教授に心から感謝いたします。

本研究の途上、筆者の所属する研究室の熊谷貞俊助手より昼夜を分たぬ御指導、ならびに御厚情を賜りました本研究を終るにあたり心より感謝します。

筆者の所属している研究室の楠岡英雄助手には種々の面で御協力をいただきました。心から感謝します。

最後に親切な御援助をいただいた電子工学教室の諸氏に御礼申し上げます。

文 献

- (1) A. N. Willson, Jr. "Nonlinear Networks Theory and Analysis" IEEE PRESS (1974)
- (2) L. O. Chua and P. M. Lin "Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits : Algorithms and Computational Techniques." Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall (1975)
- (3) L. O. Chua "Introduction to Nonlinear Network Theory." New York McGraw-Hill 1969
- (4) L. O. Chua and Pen Min Lin "A Theory of Algebraic n-Ports" , IEEE Trans. Circuits Theory, CT-20, 1 (1973)
- (5) Chua L. O. and Y. Lam "Decomposition and Synthesis of Nonlinear n-Ports", IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-21, 1 (1974)
- (6) R. K. Brayton "Nonlinear reciprocal networks" SIAM-AMS Proc., p1 (1971)
- (7) Nickerson, Spencer and Steenrot, "Advanced Calculus" Princeton: Van Nostrand (1959)
- (8) L. O. Chua and Rohrer "On the Dynamic Equations of a Class of a Nonlinear RLC networks", IEEE Trans. Circuits Theory, CT-12, 4 (1965)
- (9) L. O. Chua , "Linear Transformation Converter and its Application to the Synthesis of Nonlinear Networks" IEEE Trans. Circuits Theory., CT-17, 4 (1970)
- (10) T. Stern "Theory of Nonlinear Networks and systems" , Addison Wesley (1965)
- (11) R. Abraham and J. Robbin "Transversal mappings and flows" Benjamin (1967)

- (12) 高橋, 熊谷, 兎玉 "非線形nポートの一般分解定理と構成について", 信学技報 CST 77-71 (1977)
- (13) S. Duinker, "in Recent Developments in Network Theory" p221, Pergamon Press, Oxford and New York(1963)
- (14) Rohrer, "Lumped Network Passivity Criteria" IEEE Trans. Circuit Theory vol. CT-15, No.1,3 (1968)
- (15) Wyatt, Chua "A Theory of Nonenergetic N-Ports" CIRCUIT THEORY AND APPL., vol.5, 181-208 (1977)
- (16) Anderson, Vongpanitlerd, "Network Analysis and Synthesis" PRENTICE-HALL
- (17) Willson Jr. "Nonlinear Networks: Theory and Analysis" IEEE PRESS (1974)
- (18) Wyatt, Chua, Oster "Nonlinear n-Port Decomposition via the Laplace Operator" IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-25,9,(1978)
- (19) Chua, Curtin, "Synthesis of Reciprocal Piecewise linear N-Port Resistors" Inter National Symposium on Circuits and Systems of 1979
- (20) 高橋, 熊谷, 兎玉 "非線形nポートの一般分解定理と構成" 信学論 (A) 61-A ,8, p698 (昭53-8)
- (21) Chua, Lam, "A Theory of Algebraic n-Ports" IEEE, Trans. CT-20,1 (1973)
- (22) Chua, Green, "Graph Theoretic Properties of Dynamic nonlinear Networks" IEEE ,Trans. CAS, vol, CAS-23, No 5 ,5 (1976)
- (23) Bellman, Ed, "Mathematical Optimization Techniques " Berkeley Univ. of California Press p309, (1963)

- (24) Anderson, Moore, "Linear Optimal Control" PRENTICE-HALL (1971)
- (25) Palais, "Natural Operations on Differential Forms" Trans Amer. Math. Soc., vol. 92, p125-141, 7 (1959)
- (26) Chua, Curtin, "Synthesis of Reciprocal Piecewise Linear N-Port Resistors" 1979 ISCAS.
- (27) A.A. Andronov, A.A. Vitt and S.E. Khaikin, "Theory of Oscillations" New York: Adison Wesley, 1966, P 659-670
- (28) L.O. Chua and Alexander, "The Effects of Parasitic Reactances on Nonlinear Networks", IEEE Trans, on Circuit Theory, vol CT-18, Sep. 1971 P520-532
- (29) H. Hoppensteadt, "Stability in Systems with Parameters", J. Math. Anal. Appl., vol 18
- (30) L. S. Pontryagin, "Asymptotic behavior of the solutions of systems of differential equations with a small parameter in the higher derivations", AMS Transl., ser, 2, vol. 18, (1961)
- (31) S. Kumagai, H Takahashi, "On the Modeling of Improper Reciprocal Nonlinear Networks", ISCAS TOKYO JAPAN 1979
- (32) ハラナイ "微分方程式下" 吉岡書店 P347-351 (1974)
- (33) P.J. Moylan, "Implications of Passivity in a class of Nonlinear Systems", IEEE Trans on Automatic Control. vol. AC-19, No. 4, 8, 1974
- (34) L.O. Chua, D.N. Green, "Graph-theoretic properties of dynamic nonlinear networks", IEEE, Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-23, p292-312, May (1976)
- (35) L.O. Chua, D.N. Green, "Qualitative Analysis of the Behavior of Dynamic Nonlinear Networks: Stability of

- Autonomous Networks", IEEE, Trans Circuits and Systems
vol.CAS 23, 11, (1976)
- (36) L. O. Chua, D. N. Green, "A Qualitative Analysis of the
Behavior of Dynamic Nonlinear Networks : Steady-state
Solutions of Non Autonomous Networks", IEEE, Trans on
Circuit and Systems, Sept., (1976)
- (37) 高橋, 熊谷, 兎玉 " 非線形混成nポートの理論 " 信学論 (A)
投稿中
- (38) 熊谷, 高橋, 兎玉 " 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等
価性について " 信学論 (A) 投稿中
- (39) 高橋, 兎玉 " 相反非線形nポート抵抗の構成 " 信学論 (A)
投稿中
- (40) L.O. Chua, Matsumoto, Ichiraku, "Geometric Properties of
Resistive Nonlinear n-Ports: Transversality, Structural
Stability, Reciprocity and Anti-reciprocity" 1979 ISCAS
TOKYO JAPAN
- (41) C. A. Desoer, F.F. Wu, "Trajectories of Nonlinear RLC Net-
works: A Geometric Approach", IEEE, Trans. on Circuits
Theory, vol. CT-19, No. 6, Nov. (1972)
- (42) 松本, " 非線形回路網のいくつかの性質について " 信学論
(A) 75 / 10 vol. 58-A, No. 10
- (43) 小西, " 非線形回路網の寄生リアクタンスによる正規化モデル
の等価性について " 昭和54年度大阪大学工学部電子工特別研究
- (44) 熊谷, 高橋, 兎玉 " 寄生リアクタンスによる正規化モデルの等価
性について " 信学技報 CAS 79-42 (1979)
- (45) 松島, " 多様体入門 " 裳華房 (1965)

- (46) W.V.D. Hodge, "The Theory and Applications of Harmonic Integrals", CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS(1952)
- (47) L.O. Chua, "Stationary Principles and Potential Functions of Nonlinear Networks", J. Franklin Institute vol.296, pp97=114
- (48) 岩波 数学事典
- (49) R.K. Brayton, J.K. Moser "A Theory of Nonlinear Networks I", Quarterly of Applied Mathematics, vol 22 , April (1964)
- (50) 熊谷, "大規模非線形回路網の解の存在について" 信学論 (A) Vol. 59-A No. 11 (1976)
- (51) 池田, "ダイナミカルシステムの構造と安定化に関する研究" 昭和50年4月 大阪大学博士論文
- (52) Peikari, "Fundamentals of Network Analysis and Synthesis" PRENTICE-HALL, ELECTRICAL ENGINEERING SERIES
- (53) Ortega, Rheinbolt, "ITERATIVE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS IN SEVERAL VARIABLES", ACADEMIC PRESS INC. (1972)
- (54) S. J. Oh, T.E. Stern, H.E. Meadows, "ON THE ANALYSIS OF NONLINEAR IRREGULAR NETWORKS", Symposium on Generalized Networks Polytechnic Institute of Brooklin , April (1966)

