Osaka Mathematical Journal
Vol. 3, No. 1, March, 1951

Sur le théorème de Müntz dans la théorie du potentiel

Par Seturo SIMODA

Il nous sembla que J. Schauder autrefois prit le point de départ au théorème de Müntz[1] dans l'établissement de sa théorie des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles du type elliptique[2]. Mais, avec cela, le théorème de Müntz lui-même nous intéresse, spécialement en le traitant avec la forme au nombre fini quelconque de variables indépendantes.

En 1948, nous conçûmes une démonstration de ce théorème, qui diffère de celle de Müntz et va analogiquement au cas de deux variables indépendantes même si le nombre de celles-ci est plus de deux.

1. Préliminaire. Exposition des Notations. — Tout d'abord, promettons que n désigne toujour, désormais, un nombre entier définit et non moindre que deux.

Désignons par minuscules x, ξ, p, q ou majuscule X des points de l'éspace euclidien à n-dimension. En considérant l'éspace à n-dimension comme un espace vectoriel, nous nous servons de toutes notations vectorielles, et désignons par $|x-\xi|$ la distance euclidienne entre deux points x, ξ.

Quant à la dérivation partielle, nous employons les notions suivantes: d'abord $\partial_E u(x)$ annonce la limite

$$\lim_{h\to+0}\frac{u(x+hE)-u(x)}{h}$$

pourvu qu'elle existe, E désignant un vecteur unitaire définit. C'est la dérivée (partielle) dans la direction de E au point x. Ensuite, $\partial_E u(x)$

1) Ch. Müntz: *Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen.* (J. für Math. 139 (1911), pp. 52-79, voir spécialement pp. 55-66, et les remarques à p. 54 et p. 66).

2) J. Schauder: *Ueber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* (Math. Zeitsch. 38 (1934), pp. 257-282). Voir, en outre, pour référence *L'enseignement math.* 35 (1936), pp. 126-139, ≪ Équations du type elliptique, problèmes linéaires≫ par J. Schauder, ce qui est une des conférence (internationals de science math.) faites le 19 juin 1935, à Univ. de Genève.

considérée comme une fonction de x, nous en pouvons souvent définir $\partial_{E'}\partial_E u(x)$ par $\partial_{E'}(\partial_E u(x))$, E' désignant encore un vecteur unitaire définit. Tellement élevé pas à pas, la notation $\partial_{E_1}\partial_{E_2}\dots\partial_{E_m}u(x)$ sera employée pour annoncer la dérivée ou dérivation à l'ordre m.

Le dire que $u(x)\in C^{(m)}(G)$, G étant un domaine, coïncide avec le dire que, quels que soient les m vecteurs unitaires $E_1, E_2, \dots, E_m$, la dérivation $\partial_{E_1}\dots\partial_{E_m}u(x)$ est possible partout dans G et en outre, comme une fonction de x, $\partial_{E_1}\dots\partial_{E_m}u(x)$ est continue dans G.

De plus, nous utilisons subsidiairement la notation $D^m u(x)$ pour désigner ambigument des dérivées quelconques (ou dérivations) du m-ière ordre, quand il n'y a pas à marquer les directions de dérivation.

La solution élémentaire relative à l'équation de Laplace en n variables indépendantes $\Delta u=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)=0$, nous désignons cela par la notation

$$\gamma(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)|x-\xi|^{n-2}} & (\text{si}\quad n\geqq 3)\\[2ex] \log\dfrac{1}{|x-\xi|} & (\text{si}\quad n=2),\end{cases}$$

le second membre, le contenu de cette fonction, n'ayant pas la forme uniforme par rapport à dimension n; cependant les dérivées par rapport à x ou ξ de $\gamma(x,\xi)$ ont les forme uniforme; voici, par exemple, des dérivées par rapport à x

$$\partial_E\gamma(x,\xi)=-\frac{\cos(E,\,x-\xi)}{|x-\xi|^{n-1}}\ {}^{3)}$$

$$\partial_{E_1}\partial_{E_2}\gamma(x,\xi)=\frac{n\cos(E_1,\,x-\xi)\cos(E_2,\,x-\xi)-\cos(E_1,\,E_2)}{|x-\xi|^n}$$

$$\partial_{E_1}\partial_{E_2}\partial_{E_3}\gamma(x,\xi)=-\frac{n(n+2)\cos(E_1,x-\xi)\cos(E_2,x-\xi)\cos(E_3,x-\xi)}{|x-\xi|^{n+1}}$$
$$+\frac{n\,\{\cos(E_1,\,E_2)\cos(E_3,\,x-\xi)+\dots\dots\}}{|x-\xi|^{n+1}}\ {}^{4)}$$

Quant aux dérivées de $\gamma(x,\xi)$, les inégalités

---

3) A, B étant deux vecteurs quelconques $\neq 0$, $\cos(A,B)$ désigne le consinus de l'angle fait par A, B, c'est-à-dire,

$$\cos(A,B)=\frac{\text{le produit intérieur de } A,\,B}{|A|\cdot|B|}$$

4) L'abréviation signifie qu'il n'y a qu'à ajouter deux termes de sorte que la forme soit invariante sous la substitution cyclique de E_1, E_2, E_3.

$$|D\gamma(x,\ \xi)| \leqq \frac{1}{|x-\xi|^{n-1}}$$

$$|D^2\gamma(x,\ \xi)| \leqq \frac{n+1}{|x-\xi|^{n}}$$

$$|D^3\gamma(x,\ \xi)| \leqq \frac{n^2+5n}{|x-\xi|^{n+1}}$$

seront utilisées bien des fois.

La fonction de Green relative à l'équation $\Delta u = 0$ dans la hypersphère K à n-dimension (de rayon $r > 0$ centrée sur le point x_0), qui sera exprimée désormais par $K(x,\ \xi)$ [5], est classique, au moins dans le cas de $n=2$ ou 3. Les plusieurs articles qui concernent $K(x,\ \xi)$ vont tout pareillement même dans le cas de $n>3$. Pour référence, nous allons les esquisser rapidement en nous bornant à la nécessité dans la suite.

$K(x,\ \xi)$, comme on le sait bien, s'écrit comme la somme de deux termes: $K(x,\ \xi) = \gamma(x,\ \xi) + \omega(x,\ \xi)$, où $\omega(x,\ \xi)$ a l'expression

$$(1) \qquad \omega(x,\ \xi) = \begin{cases} -\left(\dfrac{r}{|x-x_0|}\right)^{n-2} \gamma(x^*,\ \xi) & (\text{si} \quad n \geqq 3) \\[2ex] -\log \dfrac{r}{|x-x_0|} - \gamma(x^*,\ \xi) & (\text{si} \quad n=2), \end{cases}$$

l'astérique $*$ signifiant le point conjugué par rapport à la sphère K, c'est-à-dire,

$$x^* - x_0 = \frac{r^2}{|x-x_0|^2}(x-x_0).$$

Parce que $\Delta x_0 \xi^* x \backsim \Delta x_0 x^* \xi$, $\omega(x,\ \xi)$ serait, d'ailleurs, écrit comme ce qui suit:

$$(2) \qquad \omega(x,\ \xi) = \begin{cases} -\left(\dfrac{r}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2} \gamma(x,\ \xi^*) & (\text{si} \quad n \geqq 3) \\[2ex] -\log \dfrac{r}{|\xi-x_0|} - \gamma(x,\ \xi^*) & (\text{si} \quad n=2). \end{cases}$$

(1) est vicieuse pour $x = x_0$ et (2) pour $\xi = x_0$, mais, pour $\xi = x_0$, il vient de (2)

5) Il serait admissible de désigner la fonction de Green attachée au domaine envisagé, par même lettre que celle qui le dénote, sans causer aucune confusion.

$$\omega(x, x_0) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}} & (\text{si } n \geqq 3) \\ -\log \dfrac{1}{r} & (\text{si } n=2) \end{cases}$$

qui est, pour chaque n, une constante par rapport à x. L'expression (2) est convenable à écrire des dérivées par rapport à x de $\omega(x, \xi)$, c'est-à-dire,

$$\partial_E \omega(x, \xi) = -\left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \partial_E \gamma(x, \xi^*), \quad \text{etc.},$$

par suite il subsiste

$$|D\omega(x, \xi)| \leqq \left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x-\xi^*|^{n-1}}$$

$$|D^2\omega(x, \xi)| \leqq \left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{n+1}{|x-\xi^*|^{n}}$$

$$|D^3\omega(x, \xi)| \leqq \left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{n^2+5n}{|x-\xi^*|^{n+1}}$$

en tant que $\xi \neq x_0$. Si $\xi = x_0$, ces dérivées, naturellement, toutes s'annulent.

En général, ξ étant fixé dans $\bar{K}$, $\omega(x, \xi)$ est harmonique en x dans K et, par suite, y dérivable par rapport à x autant de fois qu'on veut; toutes ces dérivées sont continues comme fonction de (x, ξ) dans $K \times \bar{K}$ avec $\omega(x, \xi)$ même, et d'ailleurs elles sont harmoniques en ξ dans K lorsque x est fixé dans K.

Même dans le cas de dimension générale, la fonction

$$U(x) = \int_K K(x, \xi)\, d\xi = \frac{\omega_n}{2n}\left\{r^2 - |x-x_0|^2\right\} \qquad (x \in \bar{K})$$

est bien la solution régulière pour l'équation de Poisson $\Delta U = -\omega_n$ s' annulant sur le contour de K; ω_n désignant la valeur de la surface de sphère unitaire à n-dimension. De plus, on a pour $x \in K$

$$\int_K \gamma(x, \xi)\, d\xi = \frac{\omega_n}{n}\left\{r^n \varphi(r) + \frac{r^2 - |x-x_0|^2}{2}\right\},$$

et donc

$$-\int_K \omega(x, \xi)\, d\xi = \frac{\omega_n r^n \varphi(r)}{n},$$

ce qui est une quantité constante; $\varphi(t)$ désignant telle fonction que $\varphi(|x-\xi|) = \gamma(x, \xi)$. De là, il vient pour $x \in K$

$$\partial_E \int_K K(x, \xi)\, d\xi = \partial_E \int_K \gamma(x, \xi)\, d\xi = -\frac{\omega_n |x-x_0| \cos(E, x-x_0)}{n},$$

et

$$\partial_{E_1}\partial_{E_2}\int_K K(x, \xi)\, d\xi = \partial_{E_1}\partial_{E_2}\int_K \gamma(x, \xi)\, d\xi = -\frac{\omega_n \cos(E_1, E_2)}{n}$$

ce qui est aussi une constante.

2. Le Théorème envisagé. — C'est ce qui suit.

Si $f(\xi)$ est hölderienne dans K relative à l'exposant $\alpha\,(0<\alpha<1)$ [6], la fonction

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_K K(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi \qquad (x \in K)$$

jouit des propriétés suivantes:

(i) $\qquad \|u\| \leq \frac{r^2}{2n} \|f\|$ [7]

(ii) $\qquad \|Du\| \leq 2r \|f\|$

(iii) $\qquad \|D^2u\| \leq \frac{2(n+1)\, r^\alpha}{\alpha} H_\alpha(f) + \frac{\|f\|}{n}$ [8]

(iv) chaque dérivée de second ordre de $u(x)$ est encore hölderienne dans K relative au même exposant α; d'ailleurs, entre les constantes hölderiennes de f et de D^2u, il en subsiste une inégalité

$$H_\alpha(D^2u) \leq M_{(\alpha, n)} H_\alpha(f),$$

où $M_{(\alpha, n)}$ désigne une quantité déterminable ne dépendamment que de α et n; par exemple on peut poser

$$M_{(\alpha, n)} = \frac{2^\alpha+1}{2^\alpha-1}\left\{\frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2+5n)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)2^n\right\}.$$

Le preuve de (i) va tout seul. Aux preuves de (ii), (iii), (iv), serait efficace le lemme suivant.

---

6) Cela annonce que $f(\xi)$ satisfait au condition

$$|f(\xi) - f(\xi')| \leq H|\xi-\xi'|^\alpha, \quad \text{pour tous } \xi, \xi' \in K$$

avec une constante H proprement choisie.

7) Dit en concernant, par exemple, f, $\|f\|$ désigne la borne supérieure de $|f(\xi)|$, ξ parcourant K.

8) $H_\alpha(f)$ désigne la constante hölderienne de $f(\xi)$ relative á l'exposant α.

Lemme : Lorsque $x \in \bar{K}$, $x_0 \neq \xi \in K$ et $\lambda \geqq -2$, il subsiste

$$\left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x-\xi^*|^{n+\lambda}} \leqq \frac{1}{|x-\xi|^{n+\lambda}}.$$

En effet, par la considération géométrique élémentaire sur $\Delta x_0 x \xi$, on a

$$|x-\xi^*| \geqq \frac{|x-\xi| r}{|\xi - x_0|},$$

par suite, étant $n+\lambda \geqq 2+\lambda \geqq 0$, il vient

$$\left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x-\xi^*|^{n+\lambda}} \leqq \left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \left(\frac{|\xi - x_0|}{|x-\xi| r}\right)^{n+\lambda}$$
$$= \left(\frac{|\xi - x_0|}{r}\right)^{\lambda+2} \frac{1}{|x-\xi|^{n+\lambda}} \leqq \frac{1}{|x-\xi|^{n+\lambda}}.$$

Preuve de (ii) : Parce que

$$Du(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_K f(\xi)\, DK(x,\xi)\, d\xi$$
$$= -\frac{1}{\omega_n}\left\{\int_K f(\xi)\, D\gamma(x,\xi)\, d\xi + \int_K f(\xi)\, D\omega(x,\xi)\, d\xi\right\},$$

on a

$$|Du(x)| \leqq \frac{\|f\|}{\omega_n}\left\{\int_K |D\gamma(x,\xi)|\, d\xi + \int_K |D\omega(x,\xi)|\, d\xi\right\}$$
$$\leqq \frac{\|f\|}{\omega_n}\left\{\int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-1}} + \int_K \left(\frac{r}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{d\xi}{|x-\xi^*|^{n-1}}\right\}$$
$$\leqq \frac{2\|f\|}{\omega_n}\int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-1}} \leqq \frac{2\|f\|}{\omega_n}\int_K \frac{d\xi}{|x_0-\xi|^{n-1}} = 2\|f\| r,$$

c. q. f. d.

Ensuite, avant de commencer la preuve de (iii), nous allons nous rappeler que, si $f(\xi)$ est hölderienne dans K, $u(x)$ est là dérivable de deux fois, en donnant

$$\partial_{E_1}\partial_{E_2} u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_K \{f(\xi) - f(x)\}\, \partial_{E_1}\partial_{E_2} K(x,\xi)\, d\xi + \frac{f(x)\cos(E_1, E_2)}{n},$$

qui serait immédiatement obtenu des suivants :

$$\partial_{E_1}\partial_{E_2}\int_K \omega(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi = \int_K f(\xi)\, \partial_{E_1}\partial_{E_2}\,\omega(x,\xi)\, d\xi$$
$$= \int_K \{f(\xi) - f(x)\}\, \partial_{E_1}\partial_{E_2}\,\omega(x,\xi)\, d\xi,$$

$$\partial_{E_1}\partial_{E_2}\int_K \gamma(x,\ \xi)\ f(\xi)\ d\xi$$

$$= \int_K \{f(\xi)-f(x)\}\partial_{E_1}\partial_{E_2}\gamma(x,\ \xi)\ d\xi - \frac{f(x)\ \omega_n \cos(E_1,\ E_2)}{n}.\ ^{9)}$$

Preuve de (iii): De l'expression écrite dessus, il vient tout de suite

$$|D^2u(x)| \leqq \frac{1}{\omega_n}\left\{\int_K |f(\xi)-f(x)|\cdot|D^2\gamma(x,\ \xi(|d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_K |f(\xi)-f(x)|\cdot|D^2\omega(x,\ \xi)|d\xi\right\} + \frac{\|f\|}{n}$$

$$\leqq \frac{(n+1)\ H_\alpha(f)}{\omega_n}\left\{\int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} + \int_K \left(\frac{r}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{|x-\xi|^\alpha}{|x-\xi^*|^n}d\xi\right\} + \frac{\|f\|}{n}$$

$$\leqq \frac{2(n+1)\ H_\alpha(f)}{\omega_n}\int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} + \frac{\|f\|}{n}$$

$$\leqq \frac{2(n+1)\ H_\alpha(f)}{\omega_n}\int_K \frac{d\xi}{|x_0-\xi|^{n-\alpha}} + \frac{\|f\|}{n} = \frac{2(n+1)\ H_\alpha(f)\ r^\alpha}{\alpha} + \frac{\|f\|}{n},$$

c. q. f. d.

3. **Preuve de** (iv). — Nous allons exposer la preuve de (iv), qui est la portion la plus principale du théorème.

E_1, E_2 soient fixés, et désignons brièvement par D^2 la dérivation $\partial_{E_1}\partial_{E_2}$.

1° Employant la formule de D^2u écrite plus haut, pour deux points p, q de K, quels qu'ils soient, on a

$$|D^2u(p)-D^2u(q)| \leqq \frac{1}{\omega_n}\left|\left[\int_K \{f(\xi)-f(x)\}D^2K(x,\xi)\ d\xi\right]_{x=q}^{x=p}\right| + \frac{|f(p)-f(q)|}{n}$$

$$\leqq \frac{1}{\omega_n}\left|\Big[\ \ \Big]_{x=q}^{x=p}\right| + \frac{H_\alpha(f)}{n}|p-q|^\alpha.$$

Donc, après tout, il s'agit d'avoir une évaluation de facon que

$$\left|\Big[\ \ \Big]_{x=q}^{x=p}\right| \leqq \text{aucune constante} \times |p-q|^\alpha.$$

Supposons maintenant $p \neq q$; désignons par X le point milieu de p, q et par K' la sphère de rayon $|p-q|$ centrée sur X.

9) Voir H. Petrini: *Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique.* (J. de Math. (6), 5 (1909), pp. 127-223, spécialement pp. 131-133), où il traita le cas $n=2$. Mais il serait aisément constaté que la formule est encore légitime même dans le cas $n \geqq 3$.

Si $x \in K'$, en partageant le domaine d'intégration en deux, on peut écrire que

$$\int_K \{f(\xi)-f(x)\} D^2K(x, \xi)\, d\xi = \int_{K' \frown K} \{f(\xi)-f(x)\} D^2K(x, \xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_{K-K'} \{f(\xi)-f(p)\} D^2K(x, \xi)\, d\xi + \{f(p)-f(x)\} \int_{K-K'} D^2K(x, \xi)\, d\xi ,$$

donc on a

$$\begin{aligned}
&\left[\int_K \{f(\xi)-f(x)\} D^2K(x, \xi)\, d\xi\right]_{x=q}^{x=p} \\
&= \left[\int_{K\frown K'} \{f(\xi)-f(x)\} D^2\gamma(x, \xi)\, d\xi\right]_{x=q}^{x=p} \\
&\quad + \left[\int_{K\frown K'} \{f(\xi)-f(x)\} D^2\omega(x, \xi)\, d\xi\right]_{x=q}^{x=p} \\
&\quad + \left[\int_{K-K'} \{f(\xi)-f(p)\} D^2\gamma(x, \xi)\, d\xi\right]_{x=q}^{x=p} \\
&\quad + \left[\int_{K-K'} \{f(\xi)-f(p)\} D^2\omega(x, \xi)\, d\xi\right]_{x=q}^{x=p} \\
&\quad + \{f(q)-f(p)\} \int_{K-K'} D^2K(q, \xi)\, d\xi ;
\end{aligned}$$

désignons les quatre termes à la forme $\left[\quad\right]_{x=q}^{x=p}$ dans le second membre précédent par [1], [1'], [2], [2'] l'un après l'autre et le dernier terme par [3].

Or, on a d'abord

$$\left|\int_{K\frown K'} \{f(\xi)-f(x)\} D^2\gamma(x, \xi)\, d\xi\right| \leqq (n+1)\, H_\alpha(f) \int_{K'} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}}$$
$$\leqq (n+1)\, H_\alpha(f) \int_{K'} \frac{d\xi}{|X-\xi|^{n-\alpha}} = \frac{\omega_n (n+1)\, H_\alpha(f)}{\alpha} |p-q|^\alpha ,$$
$$\left|\int_{K\frown K'} \{f(\xi)-f(x)\} D^2\omega(x, \xi)\, d\xi\right|$$
$$\leqq (n+1)\, H_\alpha(f) \int_{K\frown K'} \left(\frac{r}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2} \frac{|x-\xi|^\alpha}{|x-\xi^*|^n}\, d\xi$$
$$\leqq (n+1)\, H_\alpha(f) \int_{K'} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} \leqq \frac{\omega_n (n+1)\, H_\alpha(f)}{\alpha} |p-q|^\alpha ,$$

ce qui donnent

$$\left.\begin{matrix} |[1]| \\ |[1']| \end{matrix}\right\} \leqq \frac{2\omega_n (n+1)\, H_\alpha(f)}{\alpha} |p-q|^\alpha .$$

Ensuite, en désignant par E le vecteur unitaire de $q-p$, on a

$$|[2]| = \left|\int_0^{|p-q|}\partial_E\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}D^2\gamma(p+sE,\,\xi)\,d\xi ds\right|$$

$$\leqq \int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}|f(\xi)-f(p)|\cdot|D^3\gamma(p+sE,\,\xi)|d\xi ds$$

$$\leqq (n^2+5n)\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\frac{|f(\xi)-f(p+sE)|+|f(p+sE)-f(p)|}{|p+sE-\xi|^{n+1}}\,d\xi ds$$

$$\leqq (n^2+5n)\,H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\frac{|p+sE-\xi|^\alpha+s^\alpha}{|p+sE-\xi|^{n+1}}\,d\xi ds$$

$$\leqq \omega_n(n^2+5n).\,H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\int_{\frac{|p-q|}{2}}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho^{2-\alpha}}+\frac{s^\alpha}{\rho^2}\right)d\rho ds$$

$$= \omega_n(n^2+5n)\,H_\alpha(f)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{2}{1+\alpha}\right)|p-q|^\alpha,$$

et de plus

$$|[2']| = \left|\int_0^{|p-q|}\partial_E\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}D^2\omega(p+sE,\,\xi)\,d\xi ds\right|$$

$$\leqq (n^2+5n)\,H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\left(\frac{r}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{|p+sE-\xi|^\alpha+s^\alpha}{|p+sE-\xi^*|^{n+1}}\,d\xi ds$$

$$\leqq (n^2+5n)\,H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\frac{|p+sE-\xi|^\alpha+s^\alpha}{|p+sE-\xi|^{n+1}}\,d\xi ds$$

$$\leqq \omega_n(n^2+5n)\,H_\alpha(f)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{2}{1+\alpha}\right)|p-q|^{\alpha}\,{}^{10)}.$$

2^0 En dernier lieu, comme

$$|[3]| = |f(q)-f(p)|\cdot\left|\int_{K-K'}D^2K(q,\,\xi)\,d\xi\right|$$

$$\leqq H_\alpha(f)|p-q|^\alpha\left|\int_{K-K'}D^2K(q,\,\xi)\,d\xi\right|,$$

il n'y reste qu'à voir si l'on puisse prendre une constante M_1 ne dépendant que de α et n, et en outre telle qu'il subsiste

$$\left|\int_{K-K'}D^2K(q,\,\xi)\,d\xi\right| \leqq M_1.$$

Si $\bar{K}'<K$, cela va tout seul comme ce qui suit. On a d'abord

10) Jusqu'ici nous imitâmes la méthode que M. A. Korn utilisa dans sa travail : *Sur les équations de l'élasticité*. (Ann. de l'École Norm. Sup. (3), 24 (1907), pp. 1-75). Voir spécialement Chap. II á pp. 27-42.

$$\left|\int_{K-K'} D^2K(q,\ \xi)\ d\xi\right| = \left|\int_{K-K'} D^2\gamma(q,\ \xi)\ d\xi + \int_{K-K'} D^2\omega(q,\ \xi)\ d\xi\right|$$

$$= \left|D^2\int_K \gamma(q,\ \xi)\ d\xi - D^2\int_{K'} \gamma(q,\ \xi)\ d\xi + \int_K D^2\omega(q,\ \xi)\ d\xi\right.$$

$$\left. - \int_{K'} D^2\omega(q,\ \xi)\ d\xi\right|$$

$$= \left|-\frac{\omega_n \cos(E_1,\ E_2)}{n} + \frac{\omega_n \cos(E_1,\ E_2)}{n} + 0 - \int_{K'} D^2\omega(q,\ \xi)\ d\xi\right|$$

$$= \left|\int_{K'} D^2\omega(q,\ \xi)\ d\xi\right|$$

et, parce que $D^2\omega(q,\ \xi)$ est harmonique en ξ dans K et que $\bar{K}' < K$, on a

$$\int_{K'} D^2\omega(q,\ \xi)\ d\xi = \frac{\omega_n |p-q|^n}{n} D^2\omega(q,\ X)$$

en vertu de la propreté de moyenne. Donc, si $X \neq x_0$, il en vient

$$\left|\int_{K-K'} D^2K(q,\ \xi)\ d\xi\right| \leqq \frac{\omega_n |p-q|^n}{n} \left(\frac{r}{|X-x_0|}\right)^{n-2} \frac{n+1}{|q-X^*|^n}$$

$$\leqq \left(1+\frac{1}{n}\right) \omega_n \left(\frac{|p-q|}{|q-X|}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right) \omega_n\, 2^n .$$

Ce résultat peut passer même si $X = x_0$, vu que $D^2\omega(q,\ x_0) = 0$.

Des résultats obtenus jusqu'ici, nous avons

$$|D^2u(p) - D^2u(q)| \leqq CH_\alpha(f)|p-q|^\alpha$$

pour le cas $\bar{K}' < K$ ou $p = q$ avec

$$C = \frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2+5n)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha}\right) + \frac{1}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right) 2^n ,$$

et d'ailleurs en est bien assurée la continuité de $D^2u(x)$ dans K.

3^0 Nous allons montrer que même le cas général (c'est-à-dire, celui où il n'est pas nécessairement $\bar{K}' < K$) peut, après tout, ramener au cas précédent moyennant une propriété géométrique de la hypersphère et la continuité de $D^2u(x)$ dans K.

Deux points p, q de K étant arbitrairement donnés, nous choisissons deux suites de points, l'une $\{p^{(m)}\}$ sur le segment px_0 et l'autre $\{q^{(m)}\}$ sur qx_0, telles que

$$p^{(m)} = \text{le point milieu de } p,\ p^{(m-1)}$$
$$q^{(m)} = \text{le point milieu de } q,\ q^{(m-1)}$$
$$\text{pour } m = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} |p-p^{(0)}| \\ |q-q^{(0)}| \\ |p^{(0)}-q^{(0)}| \end{array}\right\} \leqq |p-q| ,$$

et en outre que le résultat de 2^0 soit applicable à $(p^{(0)}, q^{(0)})$. Ce serait réalisé, par exemple, par la manière suivante :

a) Si $|p-x_0|$ et $|q-x_0|$ tous deux sont $\leqq |p-q|$, prenons bien x_0 pour $p^{(0)}$ et pour $q^{(0)}$.

b) Dans l'autre cas, supposons, sans perdre la généralité, que $|p-x_0| \geqq |q-x_0|$. Alors, on en a $|p-x_0| > |p-q|$. Prenons pour p_0 tel point, situé sur $\overline{px_0}$, que sa distance à p soit égale à $|p-q|$, puis prenons pour $q^{(0)}$ tel point, situé sur $\overline{qx_0}$, que la droite $\overline{p^{(0)}q^{(0)}}$ soit parallèle à pq.

Cela posé, $p^{(m)}$, $q^{(m)}$ tendent vers p, q respectivement lorsque m croit, et à tout paire $(p^{(m)}, q^{(m-1)})$ et $(q^{(m)}, q^{(m-1)})$ le résultat de 2^0 est applicable. Donc, moyennant la continuité de $D^2u(x)$, on a

$$\begin{aligned}
|D^2u(p)-D^2u(q)| &= \Big| \sum_{m=1}^{\infty} \left\{D^2u(p^{(m)})-D^2u(p^{(m-1)})\right\} + \\
&\quad + D^2u(p^{(0)})-D^2u(q^{(0)}) - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{D^2u(q^{(m)})-D^2u(q^{(m-1)})\right\} \Big| \\
&\leqq \sum_{m=1}^{\infty} |D^2u(p^{(m)})-D^2u(p^{(m-1)})| + |D^2u(p^{(0)})-D^2u(q^{(0)})| + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} |D^2u(q^{(m)})-D^2u(q^{(m-1)})| \\
&\leqq CH_\alpha(f) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |p^{(m)}-p^{(m-1)}|^\alpha + |p^{(0)}-q^{(0)}|^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} |q^{(m)}-q^{(m-1)}|^\alpha \right\} \\
&\leqq CH_\alpha(f) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{|p-p^{(0)}|}{2^m}\right)^\alpha + |p^{(0)}-q^{(0)}|^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{|q-q^{(0)}|}{2^m}\right)^\alpha \right\} \\
&\leqq CH_\alpha(f) |p-q|^\alpha \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^m \right\} \\
&= \frac{2^\alpha+1}{2^\alpha-1} CH_\alpha(f) |p-q|^\alpha , \qquad \text{c. q. f. d.}
\end{aligned}$$

En terminant ce mémoire, j'ai à reconnaître la bienveillance sincère de Professeur Mitio Nagumo dans me donnant diverses suggestions profitables.

(Reçu le 21 Decembre, 1950)