The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	On handle decompositions of exotic 4-manifolds
Author(s)	安井，弘一
Citation	大阪大学，2008，博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/49726
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【24】

氏　　　　　名	安　井　弘　一（やす い こう いち）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　２２５６２　号
学位授与年月日	平成 20 年 12 月 18 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学　位　論　文　名	On handle decompositions of exotic 4-manifolds （エキゾチックな４次元多様体のハンドル分解について）
論文審査委員	（主査） 教　授　大鹿　健一 （副査） 教　授　藤木　　明　　准教授　遠藤　久顕　　准教授　大和　健二 准教授　宮地　秀樹

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では４次元多様体の微分構造に関する二つの話題を扱う。

一つ目の話題について。多くの単連結閉４次元閉多様体は１，３ハンドルの現れないハンドル分解を持つことが知られている。そこで次の Kirby の問題 4.18 が自然に考えられる：「全ての単連結閉４次元多様体は１，３ハンドルの現れないハンドル分解を持つか？あるいは１ハンドルのないハンドル分解を持つか？」。この問題は微分構造の分類と密接な関わりがあることが知られている。1986 年に Harer-Kas-Kirby は問題 4.18 の反例の候補として「楕円曲面 $E(1)_{2,3}$ は１，３ハンドル両方とも必要とする」という予想を立てた。また、1991 年に Gompf は「楕円曲面 $E(n)_{p,q}$ (p,q は互いに素な 2 以上の整数) は１または３ハンドルのどちらかが必要」という予想を立てた。

申請者の修士論文 (2005 年度) では、これらの予想の反例の候補となる、$E(1)_{2,3}$ と同相で Seiberg-Witten 不変量が同じだが 1, 3 ハンドルが不要な多様体などを構成した。その構成の概略は以下の通り。まず CP^2 の Kirby 図式をうまく変形し、その後適切にブローアップし、rational blowdown を行う。この構成法から１，３ハンドルは自然に消える。Seiberg-Witten 不変量が同じであることは Fintushel-Stern の公式を用いて示した。

修士論文を公表した後に、Akbulut は申請者の方法と全く異なる方法で $E(1)_{2,3}$ が 1, 3 ハンドルを不要とすることを証明した。申請者は Akbulut に少し遅れたが、修士論文で用いた方法を改良し、さらに Harer-Kas-Kirby, Gompf による $E(n)_p$ の Kirby 図式をうまく変形することで、$E(n)_{p,q}$ ((p,q)=(2,3),(2,5),(3,4),(4,5)) は１ハンドルが不要であることをこの本論文で証明した。なお、Akbulut の方法では原理的に少なくとも n=2 の場合の証明ができない。

二つ目の話題について。こちらは Akbulut との共同研究に基づいている。互いに同相だが微分同相でない二つの単連結４次元閉多様体は、一方から余次元 0 の可縮な部分多様体を除去し貼り直すことで他方が得られることが知られている。そのような可縮な（部分）4 次元多様体は cork と呼ばれていて、その定義から微分構造の分類の研究への貢献が期待される。 これに関して、Akbulut (1991) と Bizaca-Gompf (1997) は $E(n)\#-\overline{CP^2}$ が Mazur 多様体を cork に持つことを証明している。しかし、他の具体例は知られていない。

申請者らは、新しい cork の例を発見し、楕円曲面から様々な手術によって得られる色々な４次元多様体が同一の cork を持つことを証明した。また、rational blowdown と cork との関係などについても結果を得た。さら

に申請者が修士論文で構成した多様体を用いることで、同一の cork により異なる微分構造が得られることも示した。また、plug という新しい対象を導入し、cork に対してと同様の結果を得た。これらの結果は全て、申請者が修士論文で構成した多様体の Kirby 図式を詳しく調査することで得られた。

本論文の第一章では修士論文の結果のうち Harer-Kas-Kirby 予想に関するものを扱った。第二章では Harer-Kas-Kirby 予想の反例などを構成した。第三章では cork に関する研究を行った。

論文審査の結果の要旨

本論文は、４次元多様体のハンドル分解に関する博士論文審査申請者（以下、申請者）の研究をまとめたものであり、２つの研究に大別される。

第１の研究は、楕円曲面のハンドル分解についての Harer-Kas-Kirby 予想に関するものである。任意の単連結な４次元可微分閉多様体が１ハンドルと３ハンドルの現れないハンドル分解を許容するか、という問題は、４次元多様体論における大きな未解決問題である。1986 年、Harer、Kas、Kirby はこの問題に関連して、楕円曲面 $E(1)_{2,3}$ のハンドル分解には１ハンドルと３ハンドルがどちらも必要であろう、という予想を提出した。ここで、$E(n)_{p,q}$ は多重ファイバーをもたない Euler 標数 12n の単連結楕円曲面 E(n) に重複度 p, q $((p, q)=1, p, q>0)$ の対数変換を施した楕円曲面である。2008 年に Akbulut は $E(1)_{2,3}$ の１ハンドルも３ハンドルもないハンドル分解を構成した。これに１ヶ月ほど遅れて申請者は、$E(n)_{p,q}$ $((p, q)=(2,3), (2,5), (3,4), (4,5))$ の１ハンドルのないハンドル分解を構成した。Akbulut と申請者の結果は Harer-Kas-Kirby 予想を否定的に解決するものであるが、後者は無限個の楕円曲面を扱っており、$E(n)_{p,q}$ のハンドル分解には１ハンドルまたは３ハンドルのいずれかが必要であろう、という Gompf の予想(1991 年提出)にも迫るものである。Harer-Kas-Kirby 予想・Gompf 予想が提出されてから約 20 年が経過していることを考えると、申請者の研究によって４次元多様体のハンドル分解についての理解が急激に進んだと言ってよい。

第２の研究は、cork, plug と呼ばれる特殊な４次元多様体に関するものであり、Akbulut（ミシガン州立大学）との共同研究に基づくものである。２つの単連結な４次元可微分閉多様体が互いに同相であって微分同相ではないとき、一方の多様体から可縮な４次元部分多様体を取り除き、対合を用いて貼り戻すことによってもう一方の多様体が得られる。このような性質をもつ可縮な境界つき４次元多様体を cork とよぶが、具体的な cork の例は Mazur 多様体が知られているのみであった。申請者らは、Mazur 多様体を含むような無限個の新しい cork を発見し、それらが４次元閉多様体の中で実際に上述のように振る舞うことを豊富な具体例を用いて示した。また同時に、cork と類似のはたらきをもつ plug という新しい対象を導入し、同様の結果を得た。さらに、楕円曲面から種々の手術によって得られる複数の４次元多様体の中に同一の cork が存在すること、同じ４次元多様体の中に互いに微分同相だがアイソトピックでない２つの cork が存在しうること、有理ブローダウンと cork の関係など、cork や plug に関する様々な性質を発見した。４次元多様体の微分構造は多様で複雑であるが、申請者らの研究は cork や plug といった部分多様体によりそれらを統制しようとする試みであるとも解釈され、今後の発展がますます期待される有望な研究である。

本論文には参考論文として申請者の修士論文の内容の一部が含められている。申請者は修士論文において既に Harer-Kas-Kirby 予想の反例の候補を構成しており、それが上記の第１の研究へと繋がっている。また、修士論文において構成した例を解析する中から、第２の研究が生まれている。

以上のように、申請者の研究は４次元多様体のハンドル分解と微分構造について全く新しい知見を与えるものであり、４次元多様体論の発展に寄与するところ大である。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。