The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	電磁波及び弾性波の解析における変分法に関する研究
Author(s)	森下, 克己
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/515
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

電磁波及び弾性波の解析における
変分法に関する研究

森　下　克　己

昭和51年12月

内　容　梗　概

本論文は著者が大阪大学大学院工学研究科（通信工学専攻）在学中に行なった電磁波及び弾性波の解析における変分法に関する研究の成果をまとめたもので，全体を5章から構成する．

第1章は序論であって，変分法に関する研究の歴史的背景を述べ，且つ最近マイクロ波回路及び光回路の解析においてその有用性が注目を浴びるようになった経緯とともに，本研究がこの分野において占める地位を明らかにしたものである．

第2章では，電磁界の解析における変分表現式を統一的に導出する方法について述べる．まず，電磁界における最小作用の原理について述べ，その原理からMaxwellの方程式そのものが導出されることを示す．次に，この原理を用いると共振周波数，伝搬定数及びインピーダンスに関する変分表現式も統一的に導出できることを示す．更に，Reactionの概念を用いる方法との関係を明らかにするために，作用量の停留性とReactionの停留性とが一致することを示す．

第3章では，電磁波と弾性波との結合系に関する変分表現式を統一的に導出する方法について述べる．まず，電磁波と弾性波とが共存している系に関する最小作用の原理について述べ，作用量の停留値問題はMaxwellの方程式とNewtonの方程式とを連立させて解く問題と同等であることを示す．次に，この最小作用の原理を用いて圧電性弾性波に対する共振周波数や伝搬定数の変分表現式を導出する．更に，導出された変分表現式はその特別な場合として，電磁波あるいは弾性波がそれぞれ単独に存在する場合の変分表現式を含んでいることを示す．

第4章では，誘電体線路の不連続部に関する新しい解析手法を示し，その手法を用いて誘電体スラブ線路の不連続部の解析を行なう．ここで述べる手法は最小2乗誤差法を用いるものであって，通常の境界条件を適用する方法では求めることがきわめて困難な反射損失と放射損失をいずれも精度よく求めることができる．この手法を具体的に，誘電体スラブ線路の軸ずれの解析に適用し，反射電力，透過電力，放射電力，放射パターンなどを求める．

第5章は結論であって，本研究の成果を総括して述べている．

以上の各章を構成している研究内容は，すべて電子通信学会論文誌，IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques，電子通信学会マイクロ波研究会，電子通信学会全国大会，及び輻射科学研究会等において発表されたものである．

目　　次

第１章　序　　論 …… 1

第２章　電磁界解析における変分表現式の統一的な導出 …… 5

２．１　緒　　言 …… 5

２．２　電磁界に対する最小作用の原理 …… 5

２．３　電磁波の共振周波数に関する変分表現式 …… １０

２．４　電磁波の伝搬定数に関する変分表現式 …… １３

２．５　インピーダンスに関する変分表現式 …… ２０

２．６　異方性媒質を含む共振器におけるReactionと作用量との関係 …… ２２

２．７　結　　言 …… ２４

第３章　圧電性媒質中の弾性波に関する変分表現式の統一的な導出 …… ２５

３．１　緒　　言 …… ２５

３．２　電磁波と弾性波とが共存する系に対する最小作用の原理 …… ２６

３．３　圧電性弾性波の共振周波数に関する変分表現式 …… ２９

３．４　圧電性弾性波の伝搬定数に関する変分表現式 …… ３５

３．５　結　　言 …… ３９

第４章　最小２乗誤差法を用いた誘電体線路の不連続部の解析 …… ４１

４．１　緒　　言 …… ４１

４．２　最小２乗誤差法による不連続部の解析 …… ４２

４．３　誘電体スラブ線路の軸ずれの解析 …… ４５

４．４　結　　言 …… ５５

第５章　結　　論 …… ５７

謝　　辞 …… 59

文　　献 …… 61

付　　録 …… 65

第1章　序　　論

情報量の増大に伴い，マイクロ波通信，ミリ波通信，更には光通信技術の開発が要請されてきた．マイクロ波通信においては，各種の信号処理機能を持つ回路素子の集積化を目ざして，マイクロ波集積回路技術の研究が行なわれており，回路の合成理論に関する研究もなされようとしている．光通信においては，光源の長寿命化，光集積回路の実現，ファイバの最適屈折率分布の決定，ファイバの接続の問題等，未解決の問題も多く残されている．以上述べてきたような諸分野の研究に対して，従来様々な解析が試みられてきたが，とりわけ電子計算機を用いた数値解析手法は，より現実的なモデルを精度よく計算できる手法として注目されており，更に大容量，高速度な計算機に適した，汎用性の高い解析法の開発も進められている．なかでもRayleigh-Ritz法や有限要素法で代表される変分法を用いた解析は，計算機解析に適した有力な解析法である．

変分法の始まりはJakob Bernoulliの等周問題とJohann Bernoulliの最速降下線の問題からであると考えられており，その当時はこういった問題に対して一つ一つ解くより適当な方法がなかった．しかし，後にL. Eulerが一般的な方法を論じ，さらにJ.L.Lagrangeがそれを単純な形に整理し変分法の誕生となった．今日では，計算機の容量の増加と計算時間の短縮に伴って，それに適した形で変分法が使われるようになり，Rayleigh-Ritz法，有限要素法を用いた解析が発達してきた．こういった解析法は，解析すべき構造の変化にもかかわらず，計算手法は同じでよく，きわめて汎用性の高い解析法であり，電磁界問題，圧電性及び磁性媒質中の波の問題，弾性波の問題，構造解析の問題等，種々の分野において幅広く適用されている．

このように，変分法は非常に有力な手法ではあるが，実際の問題に適用しようとする場合には，その解析の基礎となる変分表現式を導出しなければならない．しかしながら，従来解析に用いられている変分表現式は，個々の問題に対して極めて技巧的ないしは試行錯誤的に求めるよりほかに適当な方法がなく，変分法を適用しようとする際の最大の難点となっていた．著者はこの難点を解決するために，変分表現式を統一的に導出できれば，という希望と次のような疑問をいだき本研究を始めた．すなわち，解析に用いられている変分表現式は

種々あるが，それらの式はすべて正しい値において停留値をとるようになっている．こういったことの起る原因は，電磁界，応力あるいはひずみが正しい値をとるときには何らかの量が停留値をとるように自然界は構成されていることによるのではないか，という疑問である．物理学においては，こういった現象を“最小作用の原理”と呼んでおり，この原理を用いて変分表現式を統一的に導出しようと考えたわけである．物理学の法則は一般に微分方程式の形に書かれることが多いが，“ある量（作用量と呼ばれる）を最小（または最大）にするように物理現象が起る”というような最小作用の形式で記述することもできる．本論文では，Maxwellの方程式とNewtonの方程式に対する最小作用の原理を用い，作用量の停留性を共振周波数や伝搬定数及びその他の量の停留性に置き換えることによって，統一的に変分表現式が導出できることを明らかにし，変分表現式を求める困難を取り除いた．

普通変分法においては，微分方程式を解く代わりにその微分方程式に対する変分問題を解くわけであり，その時に用いる試験関数には，ある程度の境界条件を満足するものを使用しなければならない．そのような条件を満足する試験関数を用いると，変分問題と微分方程式を境界条件のもとで解く問題とが同等になる．これまで述べてきた変分表現式の導出もこの範囲に属する．次に，こういった変分法の適用範囲を広げるために，境界条件を解く問題の代わりになるような変分問題を考える．つまり，今まで述べてきた変分法とは逆に，試験関数としては微分方程式を満たしているものを選び，境界条件は満足していなくてもよいものとする．そうして境界条件を満足する解を求めようとする方法である．この変分問題では，境界における正しい値からのずれを2乗誤差で評価し，その誤差が最小になるように界分布を求めている．本論文では述べていないが，境界条件と微分方程式とに対する変分問題を連立させれば，より広範囲な問題がより一般的に解けるのではないかと思われる．

まず，第2章においては，電磁界解析における変分表現式の統一的な導出について述べる．[(1)〜(5)] このような問題は，変分表現式を導出する上で非常に重要であるにもかかわらず，そういった試みは少なく，著者の知るかぎりでは，V.H.RumseyによるReactionの概念[(6)]を用いる方法[(7),(8)]と，L.Cairo及びT.Kahan[(9)]によるTranspose Operator，Transpose Fieldなる概念を

用いる方法とがいままでに報告されているのみである．本章では，電磁界における最小作用の原理について述べ，その原理から電磁界の基本法則であるMaxwell の方程式そのものが導出されることを示す．更に，この原理を用いると共振周波数，伝搬定数及びインピーダンスに関する変分表現式も統一的に導出できることを示す．また，Reactionの概念を用いる方法との関係を示すために，作用量の停留性とReactionの停留性とが一致することを示しており，最小作用の原理を用いる方法がより統一的であることも明らかにされている．以上のように，種々の変分表現式が統一的に導出されているが，最小作用の原理からMaxwell の方程式自体が導出されることから，その他の変分表現式も導出されるのではないかと考えられる．

第3章では，電磁波と弾性波とが結合しているような波に関する変分表現式を統一的に導出する方法について述べる．[10],[11] 電磁波については，第2章ですでに述べたが，第3章では弾性波をも含めてさらに統一的に変分表現式を導出する．変分表現式を統一的に求めようという試みは，電磁波についてはなされているが，弾性波をも含めて種々の変分表現式を統一的に導出しようという試みはなされていない．このような試みは，電磁波，弾性波，及びそれらの結合した波を変分法で解析するうえできわめて重要であり，意義があるものと思われる．ここで取り扱われる波は，電界と弾性波とが結合しているような圧電性媒質中における弾性波（圧電性弾性波）のみである．磁界と弾性波とが結合しているような磁性媒質中における弾性波（磁気弾性波）に関しては述べていないが，圧電性弾性波とまったく同じ手法で導くことができる．このような電磁波と弾性波とが結合した波を用いるとマイクロ波回路の小型化や各種の信号処理機能を持つ回路素子を実現することができる．従って，近年盛んに研究されているマイクロ波集積回路にとって，これらの波を解析することは重要であり，それらの波に対する種々の変分表現式の導出も必要とされている．第3章ではまず最初に，電磁波と弾性波とが共存しているような系に関する最小作用の原理について述べ，作用量の停留値問題と，Maxwell の方程式及びNewton の方程式を連立させて解く問題とが同等であることを示す．次に，この最小作用の原理を用いて圧電性弾性波に対する共振周波数や伝搬定数の変分表現式を導出し，静電近似が適用できる場合にはそれに合った変分表現式をも導いている．

また，導出された変分表現式はその特別な場合として，電磁波に対する変分表現式や純粋の弾性波に対する変分表現式をも含んでいる．

第4章においては，誘電体線路の不連続部の解析に関する手法を示し，その手法を用いて誘電体スラブ線路の軸ずれの解析を行なう．[12],[13] この手法は，導波管のような閉じられた線路の解析においてはすでに適用されているが，[14],[15] 誘電体線路のような開放型線路の解析には，著者の知る限りでは用いられていないようである．また，誘電体線路の不連続部の解析は，現在研究が進められている光通信システムの実現にとって重要であるにもかかわらず，その詳細な理論的研究はあまりなされていない．[16]～[22] 具体的な線路の不連続部の問題は，ファイバ同志の接続に関しては，軸ずれ，折れ曲り，コア径や屈折率の異なるファイバの接続の問題が考えられ，その他ファイバと光集積回路との接続や光集積回路内の線路の接続など解析すべき不連続部の問題は多く存在する．第4章においては，このような不連続部の解析を，通常の境界条件を適用する代わりに，最小2乗誤差法を用いて行なう手法について述べる．この最小2乗誤差法では，普通の変分法におけるEuler の微分方程式にあたるものが境界条件となっており，この手法により変分法の適用範囲が更に広げられる．なお，ここで述べる手法は，不連続部が線路の伝送軸に垂直な平面内にある限り，いかなる線路に対しても線路形状にかかわらず一般的に適用することができる．具体的な例として，誘電体スラブ線路の軸ずれの解析を詳しく行ない，反射電力，透過電力，放射電力，放射パターンなどを求めている．

第2章　電磁界解析における変分表現式の統一的な導出[(1)〜(5)]

2．1　緒　　言

電磁界問題の解析において，変分法を適用する手法は極めて有効なものの一つである．[(31)〜(34)] しかしながら，変分法を適用しようとする場合には，まず適当な変分表現式を導出しなければならない．ところで，従来電磁界の解析に用いられる変分表現式は，個々の問題に対して極めて技巧的ないしは試行錯誤的に求めるよりほかに適当な方法がなく，これが変分法を適用しようとする際の最大の難点となっていた．本章では，この難点を取り除くために，変分表現式を統一的に導出する方法を示すのが目的である．

変分表現式を統一的に求めようとする試みとしては，著者の知るかぎりでは，V.H.Rumseyによる Reactionの概念[(6)]を用いる方法[(7),(8)]と，L.Cairo 及び T.Kahan[(9)]による Transpose Operator，Transpose Field なる概念を用いる方法とがいままでに報告されているのみである．しかし，Reactionの概念を用いるRumseyの方法では，対象とする問題が，3次元の場合と2次元の場合とで，Reactionの定義がそれぞれ異なり，統一性を欠いている（付録Ⅰ）．また，Cairo等の方法は，数学的すぎて物理的に理解しにくいきらいがある（付録Ⅱ）．

本章では，一般的な“最小作用の原理”から出発すると，種々の具体的な変分表現式が統一的に導出できることを示す．また，“最小作用の原理”から電磁界の基本法則であるMaxwell の方程式そのものが導出されることを示すことができる．従って，本章で述べる手法を用いれば，従来主たる対象とされていた伝搬定数，共振周波数やインピーダンス以外の電磁量に対する変分表現式を求める手がかりも得られる可能性があるものと思われる．

2．2　電磁界に対する最小作用の原理

自然現象に関して，エネルギー，時間，またはそのほかの作用量の概念を導入し，物理現象はそれらの値が停留値をとるように起こるものと考えて，物理現象を統一的に説明しようとする考えは古くからある．光の進路に関する

Fermatの原理や静電界におけるThomsonの定理などはその典型である．力学においては，Lagrange関数を系の自由度に等しいだけの一般化座標で記述すると，Lagrange関数の時間積分で与えられる作用量が停留値をとるとき，その系はLagrangeの方程式を満たすようになる．従って，“物体の運動は作用量が停留値をとるような経路をたどる”と述べることができる．これが力学における最小作用の原理である．電磁気学においては，ベクトルポテンシャル及びスカラーポテンシャルが一般化座標に当り，Lagrange関数Lと作用量Jとは次のように表現することができる．[23]

$$J=\int_{t_0}^{t_1} L\ dt \tag{2.1}$$

$$L=\int_V \Big[\frac{1}{2}\{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)-\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\} + \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t)-\rho(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r},t)\Big]dv \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t)&=-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\nabla\phi(\mathbf{r},t)\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

但し，$\mathbf{r}$は位置を示す距離ベクトル，tは時間，$\mathbf{E}$は電界，$\mathbf{H}$は磁界，$\mathbf{D}$は電束密度，$\mathbf{B}$は磁束密度，$\mathbf{J}$は電流密度，ρは電荷密度，$\mathbf{A}$はベクトルポテンシャル，ϕはスカラーポテンシャルを表わす．このとき最小作用の原理は，“系の最初と最後の時刻t_0，t_1において，閉曲面S上及びSによって囲まれる全領域V内で正しい$\mathbf{A}$，ϕが与えられ，且つt_0とt_1の間のすべての時刻においてS上で正しい$\mathbf{A}$，ϕが与えられているとき，作用量Jが停留値をとるように領域V内における$\mathbf{A}$，ϕを決定すると，そのときの$\mathbf{A}$，ϕは領域V内において正しい$\mathbf{A}$，ϕとなる”と書ける．従って，作用量Jが停留値をとるときの$\mathbf{A}$，ϕを求めることによって，正確な電磁界$\mathbf{E}$，$\mathbf{B}$が求まり，電磁界の存在する領域を構成している物質の性質により$\mathbf{D}$，$\mathbf{H}$も定めることができる．

次に電磁界を時間領域から周波数領域へ変換し，周波数領域における最小作用の原理について考察する．時間区間$[t_0,\ t_1]$を$(-\infty,\infty)$に拡張し，Fourier変換を行うと，式(2.1)の時間積分は次式のような周波数積分に置き換えられ

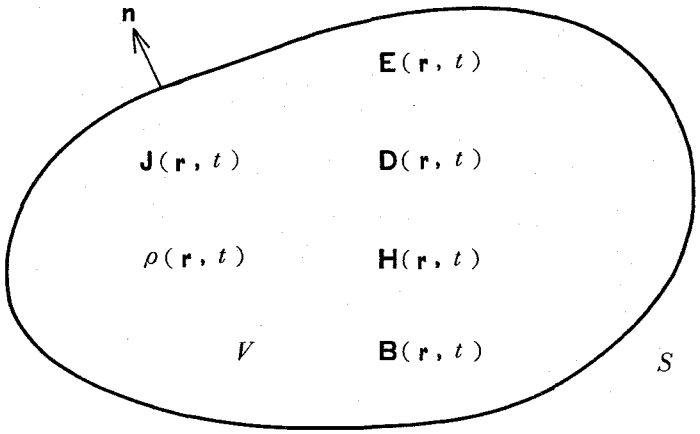


図２．１　電磁界と電荷，電流とが共存する系

る．

$$J=\int_{-\infty}^{\infty} df \int_V \Big[\frac{1}{2}\{ \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)^* - \mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)^* \} + \mathbf{A}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega)^* - \rho(\mathbf{r},\omega)\,\phi(\mathbf{r},\omega)^* \Big] dv \qquad (2.4)$$

但し，$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$，$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)$ などはそれぞれ$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ などをFourier変換したもので，fは周波数，ωは角周波数，＊は複素共役を表わす．ベクトルポテンシャル$\mathbf{A}$及びスカラーポテンシャルϕと電磁界ベクトルとの関係は式(2.3)より次式のようになる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) &= \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) &= -j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega) - \nabla\phi(\mathbf{r},\omega) \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$ と$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)$ 及び$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)$ と$\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)$ との関係は媒質の性質によって決まる．ここでは媒質は静止していて，しかも線形，無損失の場合を取り扱う．しかし，媒質が一般に異方性で，且つ不均質であることは差し支えない．このとき，構成関係式は次のように書くことができる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) &= \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) &= \hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega) \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

但し，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$はそれぞれテンソル誘電率及びテンソル透磁率を表わす．媒質は無損失と仮定しているから，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$はいずれもHermite的である．

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$，$\rho(\mathbf{r},t)$は物理量であるから実関数であり，従って，$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$，$\phi(\mathbf{r},t)$も実関数といえる．このことより，これらの量をFourier変換したものを一般的に$F(\mathbf{r},\omega)$と表わせば

$$F(\mathbf{r},\omega)=F(\mathbf{r},-\omega)^* \tag{2.7}$$

なる関係が成立する．式(2.6)，(2.7)を式(2.4)に代入して変形すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} J=\int_0^\infty df\int_V \Big[&\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)^*\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)-\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)^*\cdot\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)\\ &+\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega)^*\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega)+\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega)^*-\rho(\mathbf{r},\omega)\,\phi(\mathbf{r},\omega)^*\\ &-\rho(\mathbf{r},\omega)^*\phi(\mathbf{r},\omega)\Big]dv \end{aligned} \tag{2.8}$$

次に作用量Jが停留値をとるときに，$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$，$\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)$が満たすべき関係式を示す．まず$J$のスカラーポテンシャル$\phi$に関する第一変分$\delta J_\phi$を計算すると

$$\begin{aligned} \delta J_\phi=&\int_0^\infty df\int_V\Big[\delta\phi^*(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}-\rho)\Big]dv\\ &-\int_0^\infty df\int_{S_d}\Big[\delta\phi^*\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}\Big]\cdot\mathbf{n}\,ds+C.C. \end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．但し，C.C.はこの記号より前にある項の複素共役を示す．S_dは$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$の不連続面を表わし，S_dにおける積分はS_dの両側での面積分を意味する．式(2.9)より，作用量Jが停留値をとるためには，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$が連続な領域において

$$\nabla\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)=\rho(\mathbf{r},\omega) \tag{2.10}$$

が成立し，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$が不連続的に変化する不連続面S_dにおいて

$$\mathbf{n}\cdot\Big\{\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}^+,\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}^+,\omega)-\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}^-,\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}^-,\omega)\Big\}=0 \tag{2.11}$$

が成立しなければならない．但し，$\mathbf{r}^+$，$\mathbf{r}^-$ はそれぞれ不連続面 S_d のすぐ外側とすぐ内側の位置を表わす位置ベクトルである（図２．２参照）．

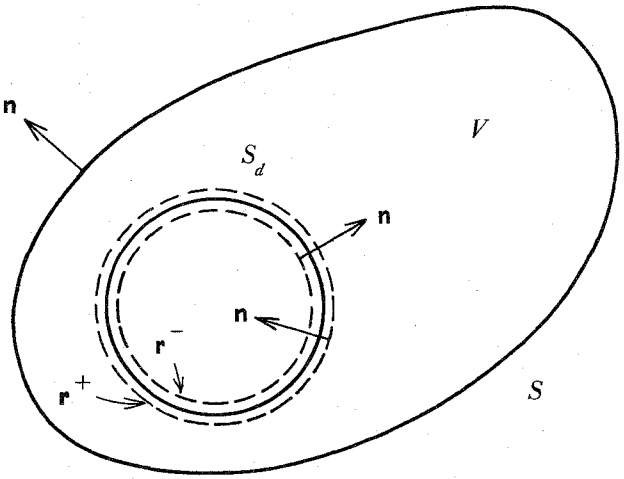


図２．２　積分領域．S_d は $\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ の不連続面

次にベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ に関する第一変分 $\delta J_{\mathbf{A}}$ を計算すると，次式を得る．

$$\delta J_{\mathbf{A}} = \int_0^\infty df \int_V \left[\delta \mathbf{A}^* \cdot \left(j\omega\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} \right) \right] dv$$

$$+ \int_0^\infty df \int_{S_d} \left[\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}^* \right] \cdot \mathbf{n} \, ds + C.C. \qquad (2.12)$$

式（2.12）より，作用量 J が $\mathbf{A}$ に関して停留値をとるためには，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ が連続な領域において

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = j\omega\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) \qquad (2.13)$$

が成立し，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ が不連続的に変化する不連続面 S_d において

$$\mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}^+, \omega) - \mathbf{H}(\mathbf{r}^-, \omega) \right\} = 0 \qquad (2.14)$$

が成立しなければならない．$\mathbf{A}$，ϕ の試験関数を，不連続面 S_d において，

$\mathbf{n}\times\mathbf{A}$, $\mathbf{n}\times\nabla\phi$ 及び ϕ が連続となるように選べば，不連続面 S_d の両側において

$$\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r}^+,\omega)-\mathbf{E}(\mathbf{r}^-,\omega)\right\}=0 \tag{2.15}$$

となる．従って，$\mathbf{n}\times\mathbf{A}$, $\mathbf{n}\times\nabla\phi$ 及び ϕ が S_d の両側において連続であるという条件を満足しながら，作用量 J が停留値をとるように $\mathbf{A}$，ϕ を決定すると，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ の連続な領域では，式(2.5)，(2.10)，(2.13)が成立し，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ は Maxwell の微分方程式を満足することになる．また，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ の不連続部分においては，式(2.14)，(2.15)が成り立ち，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ の接線成分は連続となって，境界条件を満たすことになる．従って，領域 V における $\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ は一意的に決定される．しかしながら，$\mathbf{A}$，ϕ は一意的には決まらず，一意的に決めるためには，$\mathbf{A}$，ϕ にゲージ条件を付加しなければならない．その結果，一般に $\mathbf{A}$ 及び ϕ は互いに独立ではなくなり，ゲージ条件によって関係づけられることになるが，この点については次節で述べることにする．

2．3　電磁波の共振周波数に関する変分表現式

本節では，前節までに得られた結果を用いて，一般に異方性で且つ不均質な媒質からなる共振器に対しても適用可能な，共振周波数に関する変分表現式を導く．

まず，電界のみを用いた変分表現式を導出しよう．完全導体壁で囲まれ，線形で非分散的な無損失，異方性，不均質媒質で構成されている共振器を考える．

前節でも述べたように，$\mathbf{A}$ 及び ϕ を一意的に定めるためにはゲージ条件を付加しなければならない．ここではその条件として，ϕ は次式を満足するものとする．

$$\phi(\mathbf{r},\omega)=0 \tag{2.16}$$

このようにすると，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と電界 $\mathbf{E}$ とは

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)=-j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega) \tag{2.17}$$

なる関係をもつ．

さて，式(2.8)において，V を共振器内の全領域とし，V 内には波源 $\mathbf{J}$，ρ

は存在しないものとして，式（2.17）を使って変数を**A**から**E**へ変換すると，次式が得られる．

$$J=\int_0^{\infty} df \int_V \Big[\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)^* \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$$

$$-\frac{1}{\omega^2}\left\{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)\right\}^* \cdot \hat{\mu}^{-1}(\mathbf{r}) \cdot \left\{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)\right\}\Big] dv \qquad (2.18)$$

共振器内の電界$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$は，共振モードの電界成分の線形結合で表現することができるから，i番目のモードの共振角周波数をω_i，電界分布を$\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$とすると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)=\sum_i \delta(\omega-\omega_i)\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \qquad (2.19)$$

$\delta(x)$：デルタ関数

と書くことができる．上式を式（2.18）に代入して，周波数に関する積分を実行すると

$$J=\sum_i L_i\,\delta(0)$$

但し，

$$L_i=\int_V \Big[\mathbf{E}_i(\mathbf{r})^* \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

$$-\frac{1}{\omega^2}\left\{\nabla\times\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right\}^* \cdot \hat{\mu}^{-1}(\mathbf{r}) \cdot \left\{\nabla\times\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right\}\Big] dv \qquad (2.20)$$

となる．$\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$の振幅は，$t=-\infty$における電磁界分布によって決定される．従って，$t=-\infty$において，i番目のモードしか存在していなかったものとすると，$J=L_i\delta(0)$となり，L_iの停留値問題を考えればよいことになる．ここで，簡単のため，以下添字iを省略すると，一般に共振角周波数ωで共振している場合には

$$L=\int_V \Big[\mathbf{E}(\mathbf{r})^* \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\omega^2}\left\{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})\right\}^* \cdot \hat{\mu}^{-1}(\mathbf{r}) \cdot \left\{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})\right\}\Big] dv \qquad (2.21)$$

が停留値をとるように$\mathbf{E}(\mathbf{r})$を決定すれば，そのときの$\mathbf{E}(\mathbf{r})$が共振器内の正しい電界分布を与え，そのときのωが正しい共振角周波数を与えることになる．正しい$\mathbf{E}$，ωに対しては，$L=0$が成立することから（付録Ⅲ），式（2.21）の停留値問題は

$$\omega^2=\frac{\int_V\left[\left\{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})\right\}^*\cdot\hat{\mu}^{-1}(\mathbf{r})\cdot\left\{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})\right\}\right]dv}{\int_V\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})^*\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\right]dv} \tag{2.22}$$

の停留値問題と同等になる[8]．従って，式（2.22）が結局共振周波数に関する変分表現式となる．この結果はA. D. Berkによって求められている変分表現式[7]と完全に一致している．

上に導いた変分表現式（2.22）は電界のみによって表わされているが，次に電界と磁界の両方を含んだ変分表現式を導出する．式（2.21）を導いたのと同様にして，式（2.8）から次式が得られる．

$$L=\int_V\left[\left\{j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r})\right\}^*\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\cdot\left\{j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r})\right\}\right.$$
$$\left.-\left\{\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\right\}^*\cdot\hat{\mu}^{-1}(\mathbf{r})\cdot\left\{\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\right\}\right]dv \tag{2.23}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r})&=-j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r})\\ \mathbf{H}(\mathbf{r})&=\hat{\mu}^{-1}(\mathbf{r})\cdot\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

更に，恒等式

$$(\nabla\times\mathbf{A})^*\cdot\hat{\mu}^{-1}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=\mathbf{A}^*\cdot\nabla\times\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\nabla\cdot\left\{(\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{A}^*\right\} \tag{2.25}$$

を式（2.23）に代入してGaussの定理を適用し，式（2.24）を用いて変数を$\mathbf{A}$から$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$に変換すると，次式が得られる．

$$L=\int_V\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})^*\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})+\mathbf{H}(\mathbf{r})^*\cdot\hat{\mu}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r})\right.$$
$$\left.-\frac{j}{\omega}\left\{\mathbf{H}(\mathbf{r})^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})-\mathbf{E}(\mathbf{r})^*\cdot\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})\right\}\right]dv$$
$$-\frac{j}{\omega}\int_{S+S_d}\left[\mathbf{H}(\mathbf{r})\times\mathbf{E}(\mathbf{r})^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds \tag{2.26}$$

但し，S は共振器を構成している完全導体の表面を示し，S_d は $\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ の不連続面を表わす．この L の停留値問題は，式（2.22）を導いた場合と同様に，次のような ω に関する停留値問題と同等である．

$$\omega = \frac{j\int_V \left[\mathbf{H}(\mathbf{r})^* \cdot \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})^* \cdot \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})\right] dv + j\int_{S+S_d} \left[\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})^*\right] \cdot \mathbf{n}\, ds}{\int_V \left[\mathbf{E}(\mathbf{r})^* \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}(\mathbf{r})^* \cdot \hat{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})\right] dv} \qquad (2.27)$$

従って，式（2.27）は角周波数 ω に関する変分表現式となっている．この式の $\mathbf{E}$ に対する試験関数の条件は，

(i) S 上において，$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{E}=0$ が成立すること

(ii) S_d において，$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{E}$ が連続であること

である．しかし，$\mathbf{H}$ の試験関数に対しては，そのような条件は付加されない．

表 1　対称変換

$\mathbf{E}\to\mathbf{H}$	$\hat{\varepsilon}\to\hat{\mu}$
$\mathbf{H}\to-\mathbf{E}$	$\hat{\mu}\to\hat{\varepsilon}$

Maxwell の方程式の対称性から，表 1 のような変換を式（2.27）に施しても，やはり共振周波数に関する変分表現式が得られ，その結果は A.D. Berk によって求められている変分表現式[7]と完全に一致する．但し，その場合には，試験関数に対する条件は $\mathbf{H}$ にのみ課せられることになる．その条件は $\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ の不連続面 S_d において，$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{H}$ が連続となることである．

2．4　電磁波の伝搬定数に関する変分表現式

本節では，電磁波の伝搬定数に関する変分表現式を導く．線路は伝送方向に一様で，且つ無損失であるものとする．しかし，線路を構成している媒質は必ずしも均質である必要はなく，また，異方性であってもよい．但し，媒質はすべて線形で且つ非分散的であるものとする．

まず，電界と磁界とによって表わされた変分表現式を導出しよう．そのために，式（2.26）の体積積分を伝送方向（z 軸方向）に直角な横断面 S（xy－平面）上の面積分と，z 軸方向の積分とに分けて考え，z 軸に関して Fourier

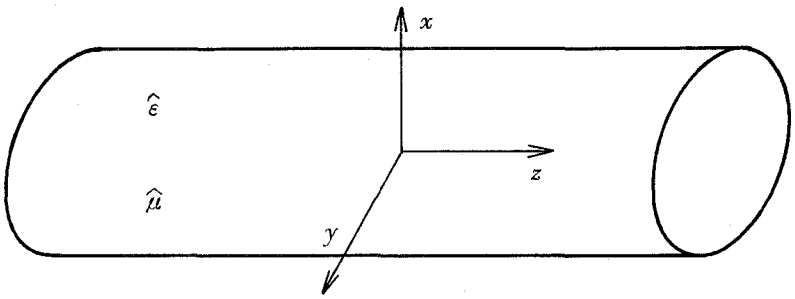


図２．３　不均質，異方性媒質からなる伝送線路

変換を行って，z 軸方向の積分を伝搬定数に関する積分に変換すると，次式が求まる．

$$
\begin{aligned}
L = \frac{1}{2\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta \Big[\int_S \big[\{ & \omega \mathbf{E}(x,y,\beta)^* \cdot \hat{\varepsilon}(x,y) \cdot \mathbf{E}(x,y,\beta) \\
& + \omega \mathbf{H}(x,y,\beta)^* \cdot \hat{\mu}(x,y) \cdot \mathbf{H}(x,y,\beta) - j\mathbf{H}(x,y,\beta)^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}(x,y,\beta) \\
& + j\mathbf{E}(x,y,\beta)^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{H}(x,y,\beta)\} + \beta\{\mathbf{H}(x,y,\beta)^* \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}(x,y,\beta) \\
& - \mathbf{E}(x,y,\beta)^* \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}(x,y,\beta)\} \big] ds \\
& - j\int_{C+C_d} \big[\mathbf{H}(x,y,\beta) \times \mathbf{E}(x,y,\beta)^* \big] \cdot \mathbf{n}\, dl \Big]
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

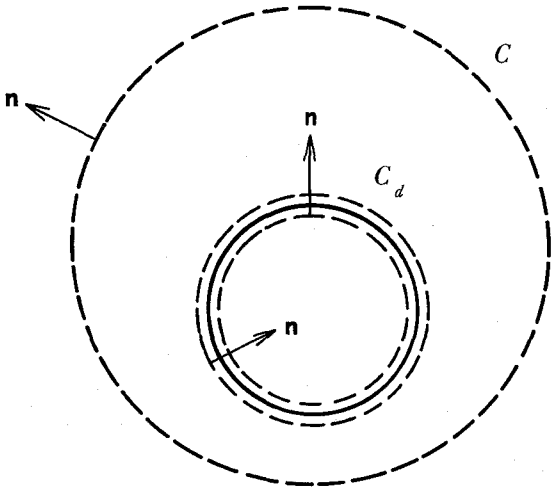


図２．４　積分路

但し，Cは開放形線路のような場合には，伝送線路から無限に離れ，しかも伝送線路を囲む曲線を表わし，導波管のような場合には壁面を表わす．C_d は横断面における$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$の不連続部である（図２．４参照）．$\mathbf{E}(x,y,\beta)$，$\mathbf{H}(x,y,\beta)$はそれぞれ$\mathbf{E}(\mathbf{r})$，$\mathbf{H}(\mathbf{r})$をz軸に関してFourier 変換したものであり，$\nabla_t = \mathbf{i}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \dfrac{\partial}{\partial y}$である．

z方向に伝搬する電磁界は，伝搬モードの電磁界の線形結合で表現することができるから，i番目の伝搬モードの伝搬定数をβ_iとすれば

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,\beta) &= \sum_i \delta(\beta+\beta_i)\mathbf{E}_i(x,y)\\ \mathbf{H}(x,y,\beta) &= \sum_i \delta(\beta+\beta_i)\mathbf{H}_i(x,y)\end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

と書ける．但し，$\mathbf{E}_i(x,y)$，$\mathbf{H}_i(x,y)$はi番目のモードの電磁界分布を示す．式（2.29）を式（2.28）に代入し，βに関する積分を実行すると次のようになる．

$$L = \frac{1}{2\pi}\sum_i M_i \frac{\delta(0)}{\omega}$$

但し

$$\begin{aligned}M_i = \int_S \Big[\big\{ &\omega \mathbf{E}_i(x,y)^* \cdot \hat{\varepsilon}(x,y)\cdot \mathbf{E}_i(x,y) + \omega \mathbf{H}_i(x,y)^* \cdot \hat{\mu}(x,y)\cdot \mathbf{H}_i(x,y)\\ &- j\mathbf{H}_i(x,y)^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}_i(x,y) + j\mathbf{E}_i(x,y)^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{H}_i(x,y)\big\}\\ &- \beta_i\big\{\mathbf{H}_i(x,y)^* \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_i(x,y) - \mathbf{E}_i(x,y)^* \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_i(x,y)\big\}\Big] ds\\ &- j\int_{C+C_d} \big[\mathbf{H}_i(x,y)\times \mathbf{E}_i(x,y)^*\big]\cdot \mathbf{n}\, dl \qquad (2.30)\end{aligned}$$

$\mathbf{E}_i$，$\mathbf{H}_i$の振幅は，$t=-\infty$における電磁界分布によって決定され，$t=-\infty$においてi番目のモードのみが伝送されていた場合には，Lの停留性はM_iの停留性と一致する．従って，Lの代わりM_iについての停留値問題を論じることにし，簡単のために添字iを省略すると，一般に伝搬モードの電磁界は，Mが停留値をとるときに正しい値となり，そのときのβが伝搬モードの伝搬定数となる．Mの停留値問題は，正しい$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$，βに対して$M=0$となることから（付録Ⅲ），

次のようなβに関する停留値問題と同等になる．

$$\int_S \Big[\omega \mathbf{E}(x,y)^* \cdot \hat{\varepsilon}(x,y) \cdot \mathbf{E}(x,y) + \omega \mathbf{H}(x,y)^* \cdot \hat{\mu}(x,y) \cdot \mathbf{H}(x,y)$$
$$- j\mathbf{H}(x,y)^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}(x,y) + j\mathbf{E}(x,y)^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{H}(x,y)\Big] ds$$

$$\beta = \frac{-j\int_{C+C_d} \big[\mathbf{H}(x,y) \times \mathbf{E}(x,y)^*\big] \cdot \mathbf{n}\, dl}{\int_S \big[\mathbf{H}(x,y)^* \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}(x,y) - \mathbf{E}(x,y)^* \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}(x,y)\big] ds} \qquad (2.31)$$

従って，結局式（2.31）が伝搬定数に対する変分表現式となる．この式の試験関数に対する条件は

(i)　Cにおいて，$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{E} = 0$が成立すること

(ii)　C_dにおいては，$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{E}$が連続であること

である．しかし，$\mathbf{H}$の試験関数に対してはそのような条件は課せられない．

式（2.31）は，A.D.Berkによって求められている伝搬定数に関する変分表現式[7]と線積分の項だけ異なっている．しかし，線積分の項は，試験関数に課せられる条件を変化させる項であり，式（2.31）において，表1の変換を施すと，A.D.Berkが求めた変分表現式と完全に一致する[+]．但し，その場合には試験関数に対する条件は，$\mathbf{H}$にのみ課せられることになる．その条件は

(i)　Cにおいて$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H} = 0$が成立すること

(ii)　C_dにおいては$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H}$が連続となること

である．

以上の議論では，媒質定数$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$は単にHermite 的であるということだけを仮定していたが，$\hat{\varepsilon}$及び$\hat{\mu}$が次のような形をもつときには，電界の横断面成分$\mathbf{e}_t$，または磁界の横断面成分$\mathbf{h}_t$のみで変分表現式を表わすことができる．

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy}^* & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{xy}^* & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

+　A.D.Berkの論文[7]の式(14)における分子最終項の線積分の符号は誤りである．

但し，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$はx，yだけの関数で，z軸方向に関しては一様である．式（2.21）において，Vでの体積積分を横断面S上での積分とz軸に関する積分とに分離して計算すると

$$L=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\int_{S}\Big[\mathbf{E}(x,y,\beta)^{*}\cdot\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{E}(x,y,\beta)$$

$$-\frac{1}{\omega^{2}}\left\{\nabla\times\mathbf{E}(x,y,\beta)^{*}\cdot\hat{\mu}^{-1}(x,y)\cdot\nabla\times\mathbf{E}(x,y,\beta)\right\}\Big]ds \qquad (2.33)$$

となる．一方，電界$\mathbf{E}(x,y,\beta)$を横断面成分$\mathbf{e}_t(x,y,\beta)$とz軸方向の成分$\mathbf{i}_z e_z(x,y,\beta)$とに分けると，Gaussの法則より

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}(x,y,\beta)=\mathbf{e}_t(x,y,\beta)+\mathbf{i}_z e_z(x,y,\beta)\\&e_z(x,y,\beta)=-\frac{\mathbf{i}_z\cdot\hat{\varepsilon}^{-1}(x,y)\cdot\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta)}{j\beta}\end{aligned}\right\} \qquad (2.34)$$

と表わせる．また，$\mathbf{e}_t$が正しい界であれば，Maxwellの方程式より導出される次の微分方程式を満足する．

$$-\mathbf{i}_z\times\left\{-\beta^{2}\mathbf{e}_t(x,y,\beta)+\nabla_t\,\mathbf{i}_z\cdot\left(\hat{\varepsilon}^{-1}(x,y)\cdot\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta)\right)\right\}$$

$$=\omega^{2}\hat{\mu}(x,y)\cdot\left\{\mathbf{i}_z\times\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta)\right\}$$

$$-\hat{\mu}(x,y)\cdot\left\{\mathbf{i}_z\times\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1}(x,y)\cdot\nabla_t\times\mathbf{e}_t(x,y,\beta)\right\} \qquad (2.35)$$

式（2.34），（2.35）を式（2.33）に代入して整理すると，次のようになる．

$$L=\frac{1}{2\pi\omega^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\int_{S}\Big[\Big\{\omega^{2}\mathbf{e}_t(x,y,\beta)^{*}\cdot\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta)$$

$$-(\nabla_t\times\mathbf{e}_t(x,y,\beta)^{*})\cdot\hat{\mu}^{-1}(x,y)\cdot(\nabla_t\times\mathbf{e}_t(x,y,\beta))\Big\}$$

$$-\frac{1}{\beta^{2}}\Big[\Big\{\mathbf{i}_z\times(\omega^{2}\hat{\varepsilon}(x,y)^{*}\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta)^{*}-\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1}(x,y)^{*}\cdot\nabla_t\times\mathbf{e}_t(x,y,\beta)^{*})\Big\}$$

$$\cdot\hat{\mu}(x,y)\cdot\Big\{\mathbf{i}_z\times(\omega^{2}\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta)-\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1}(x,y)\cdot\nabla_t\times\mathbf{e}_t(x,y,\beta))\Big\}$$

$$-\omega^{2}(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}(x,y)^{*}\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta)^{*})\cdot\hat{\varepsilon}^{-1}(x,y)\cdot(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{e}_t(x,y,\beta))\Big]\Big]ds$$

$$(2.36)$$

これより，式（2.31）を導いたのと同様の方法で，伝搬定数に関する変分表現式を求めると，

$$\int_S \Big[\{ \mathbf{i}_z \times (\omega^2 \hat{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{e}_t^* - \nabla_t \times \hat{\mu}^{-1*} \cdot \nabla_t \times \mathbf{e}_t^*) \} \cdot \hat{\mu} \cdot \{ \mathbf{i}_z \times (\omega^2 \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t - \nabla_t \times \hat{\mu}^{-1} \cdot \nabla_t \times \mathbf{e}_t) \}$$

$$\beta^2 = - \frac{-\omega^2 (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{e}_t^*) \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t) \Big] ds}{\int_S \Big[(\nabla_t \times \mathbf{e}_t^*) \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) - \omega^2 \mathbf{e}_t^* \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t \Big] ds} \qquad (2.37)$$

が得られる．但し，$\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t(x, y)$，$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(x, y)$，$\hat{\mu} = \hat{\mu}(x, y)$ である．上式は電界の横断面成分 $\mathbf{e}_t$ のみによって表わされた伝搬定数に関する変分表現式である．特に，媒質が等方性の場合には，式（2.37）は黒川によって求められている伝搬定数に関する変分表現式[24]において，壁面損失がない場合と完全に一致する．

次に式（2.37）における電界の横断面成分 $\mathbf{e}_t$ の試験関数に対する条件を求める．そのために，式（2.37）の第一変分を計算すると

$$\begin{aligned}
&\delta \beta^2 \int_S \Big[(\nabla_t \times \mathbf{e}_t^*) \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}_t) - \omega^2 \mathbf{e}_t^* \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t \Big] ds \\
&= - \int_S \Big[\{ \mathbf{i}_z \times (\nabla_t \times \hat{\mu}^{-1*} \cdot \nabla_t \times \delta \mathbf{e}_t^* - \omega^2 \hat{\varepsilon}^* \cdot \delta \mathbf{e}_t^*) \} \\
&\quad \cdot \{ \mathbf{i}_z \times (\beta^2 \mathbf{e}_t - \nabla_t \mathbf{i}_z \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t)) \\
&\qquad - \hat{\mu} \cdot (\mathbf{i}_z \times (\omega^2 \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t - \nabla_t \times \hat{\mu}^{-1} \cdot \nabla_t \times \mathbf{e}_t)) \} \Big] ds \\
&- \beta^2 \int_{C+C_d} \Big[\mathbf{e}_t \times \hat{\mu}^{-1*} \cdot (\nabla_t \times \delta \mathbf{e}_t^*) \Big] \cdot \mathbf{n} \, dl \\
&- \int_{C+C_d} \Big[(\nabla_t \times \hat{\mu}^{-1*} \cdot \nabla_t \times \delta \mathbf{e}_t^* - \omega^2 \hat{\varepsilon}^* \cdot \delta \mathbf{e}_t^*) \cdot \{ \mathbf{i}_z \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t) \} \Big] \cdot \mathbf{n} \, dl \\
&+ C.C. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

となる．但し，C は式（2.28）の場合と同じ曲線を意味する．C_d はいまの場合は $\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ 及びその1階微分の不連続部を表わす．式（2.38）において，$\mathbf{e}_t$ は式（2.35）を満たし，C_d の両側において，$\mathbf{n} \times \mathbf{e}_t$，$\mathbf{i}_z \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_t)$

は連続である．従って，試験関数の条件としては，

(i) Cにおいて，$\mathbf{n}\times\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla_t\times\delta\mathbf{e}_t=0$，$\mathbf{n}\cdot(\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla_t\times\delta\mathbf{e}_t-\omega^2\hat{\varepsilon}\cdot\delta\mathbf{e}_t)=0$ が成立すること

(ii) C_d の両側において，$\mathbf{n}\times\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla_t\times\delta\mathbf{e}_t$，$\mathbf{n}\cdot(\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla_t\times\delta\mathbf{e}_t-\omega^2\hat{\varepsilon}\cdot\delta\mathbf{e}_t)$ が連続であること

である．式（2.37）に，更に線積分の項を付加すると，試験関数に対する条件を変化させることができる．すなわち，$\mathbf{e}_t\times\hat{\mu}^{-1*}\cdot(\nabla_t\times\delta\mathbf{e}_t^*)\cdot\mathbf{n}$，$(\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1*}\cdot\nabla_t\times\delta\mathbf{e}_t^*-\omega^2\hat{\varepsilon}^*\cdot\delta\mathbf{e}_t^*)\{\mathbf{i}_z\cdot\hat{\varepsilon}^{-1}\cdot(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{e}_t)\}\cdot\mathbf{n}$ の項を打ち消すために，式（2.37）の分母分子に線積分の項を付加すると次のようになる．

$$\beta^2=-\frac{\begin{aligned}&\int_S\Big[\{\mathbf{i}_z\times(\omega^2\hat{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{e}_t^*-\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1*}\cdot\nabla_t\times\mathbf{e}_t^*)\}\\&\quad\cdot\hat{\mu}\cdot\{\mathbf{i}_z\times(\omega^2\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{e}_t-\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla_t\times\mathbf{e}_t)\}\\&\quad-\omega^2(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{e}_t^*)\cdot\hat{\varepsilon}^{-1}\cdot(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{e}_t)\Big]ds\\&-\int_{C+C_d}\Big[(\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1*}\cdot\nabla_t\times\mathbf{e}_t^*-\omega^2\hat{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{e}_t^*)\{\mathbf{i}_z\cdot\hat{\varepsilon}^{-1}\cdot(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{e}_t)\}\\&\quad+(\nabla_t\times\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla_t\times\mathbf{e}_t-\omega^2\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{e}_t)\{\mathbf{i}_z\cdot\hat{\varepsilon}^{-1*}\cdot(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{e}_t^*)\}\Big]\cdot\mathbf{n}\,dl\end{aligned}}{\begin{aligned}&\int_S\Big[(\nabla_t\times\mathbf{e}_t^*)\cdot\hat{\mu}^{-1}\cdot(\nabla_t\times\mathbf{e}_t)-\omega^2\mathbf{e}_t^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{e}_t\Big]ds\\&-\int_{C+C_d}\Big[\mathbf{e}_t\times\hat{\mu}^{-1*}\cdot(\nabla_t\times\mathbf{e}_t^*)+\mathbf{e}_t^*\times\hat{\mu}^{-1}\cdot(\nabla_t\times\mathbf{e}_t)\Big]\cdot\mathbf{n}\,dl\end{aligned}}\qquad(2.39)$$

式（2.39）において，β^2の第一変分を計算し，試験関数に課せられる条件を考察すると，次のようになる．

(i) Cにおいて，$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{e}_t=0$，$\mathbf{i}_z\cdot\hat{\varepsilon}^{-1}\cdot(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\delta\mathbf{e}_t)=0$ が成立すること

(ii) C_d の両側において，$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{e}_t$，$\mathbf{i}_z\cdot\hat{\varepsilon}^{-1}\cdot(\mathbf{i}_z\nabla_t\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\delta\mathbf{e}_t)$ が連続であること

従って，$\hat{\varepsilon}$が1階微分まで連続であれば，たとえ$\hat{\mu}$が不連続であっても，試験関数としては2階微分まで連続な関数を選択すればよいことになる．

磁界の横断面成分 $\mathbf{h}_t(x,y)$ のみで表わされた変分表現式は，Maxwellの方程式の数学的な対称性から，直ちに求めることができる．すなわち，式（2.39）において，表1のような変換を行うと，$\mathbf{h}_t$ のみによる次のような変分表

現式が得られる．

$$\beta^2 = -\frac{\begin{aligned}&\int_S \Big[\{ \mathbf{i}_z \times (\omega^2 \hat{\mu}^* \cdot \mathbf{h}_t^* - \nabla_t \times \hat{\varepsilon}^{-1*} \cdot \nabla_t \times \mathbf{h}_t^*) \} \\ &\quad \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \{ \mathbf{i}_z \times (\omega^2 \hat{\mu} \cdot \mathbf{h}_t - \nabla_t \times \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot \nabla_t \times \mathbf{h}_t) \} \\ &\quad - \omega^2 (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu}^* \cdot \mathbf{h}_t^*) \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{h}_t) \Big] ds \\ &- \int_{C+C_d} \Big[(\nabla_t \times \hat{\varepsilon}^{-1*} \cdot \nabla_t \times \mathbf{h}_t^* - \omega^2 \hat{\mu}^* \cdot \mathbf{h}_t^*) \{ \mathbf{i}_z \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{h}_t) \} \\ &+ (\nabla_t \times \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot \nabla_t \times \mathbf{h}_t - \omega^2 \hat{\mu} \cdot \mathbf{h}_t) \{ \mathbf{i}_z \cdot \hat{\mu}^{-1*} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu}^* \cdot \mathbf{h}_t^*) \} \Big] \cdot \mathbf{n}\, dl \end{aligned}}{\begin{aligned}&\int_S \Big[(\nabla_t \times \mathbf{h}_t^*) \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{h}_t) - \omega^2 \mathbf{h}_t^* \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{h}_t \Big] ds \\ &- \int_{C+C_d} \Big[\mathbf{h}_t \times \hat{\varepsilon}^{-1*} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{h}_t^*) + \mathbf{h}_t^* \times \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{h}_t) \Big] \cdot \mathbf{n}\, dl \end{aligned}} \qquad (2.40)$$

式（2.40）において，β^2の第一変分$\delta\beta^2$を計算し，$\mathbf{h}_t$の試験関数に課せられる条件を求めてみると，条件は

(i)　Cにおいて，$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{h}_t = 0$，$\mathbf{i}_z \cdot \hat{\mu}^{-1} (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu} \cdot \delta \mathbf{h}_t) = 0$が成立すること

(ii)　C_dの両側において，$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{h}_t$，$\mathbf{i}_z \cdot \hat{\mu}^{-1} (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu} \cdot \delta \mathbf{h}_t)$が連続となること

であることが分かる．従って，式（2.40）では，$\hat{\mu}$が1階微分まで連続であれば，たとえ$\hat{\varepsilon}$が不連続であっても試験関数としては，2階微分まで連続なものを選択すればよいことになる．また，式（2.40）において，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$が等方性である場合には，松原，熊谷によって求められている変分表現式[25]と一致する．

2．5　インピーダンスに関する変分表現式

図2．5のような，無損失，線形，非分散的な媒質で構成されているn開口回路のインピーダンス行列に対する変分表現式を最小作用の原理から導くことにする．図2．5において，S_i（$i=1, 2, \cdots, n$）は各開口の開口面であり，立体回路の不連続面からは十分に離れており，高次モードはすべて遮断域にあって，開口面における高次モードはすべて無視できるものとする．開口i（またはj）に単位電流を流し，他の開口はすべて開放した場合の立体回路内の電磁界を$\mathbf{E}_i$，$\mathbf{H}_i$（または$\mathbf{E}_j$，$\mathbf{H}_j$）とすると，開口i及びjにそれぞれ単位電

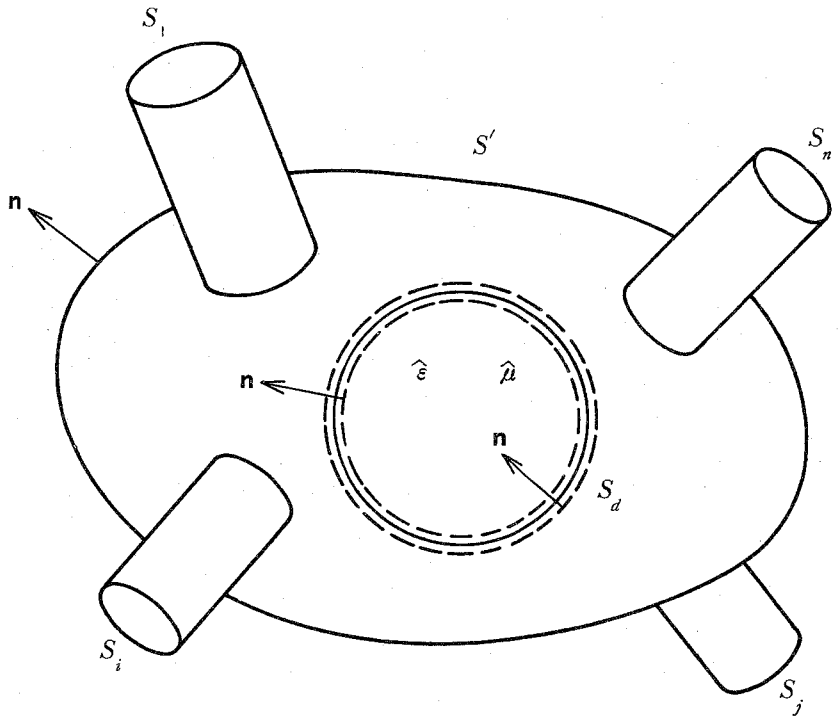


図２．５　n 開口回路

流を流した時の電磁界は，系の線形性から

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_j \ , \quad \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_j \tag{2.41}$$

と表わせる．式（２．８）において，V は n 開口回路内の体積を表わすものとし，角周波数成分は ω だけであるとすると，

$$J = \delta(0) \int_V \left[\mathbf{E}(\mathbf{r})^* \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}(\mathbf{r})^* \cdot \hat{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right] dv$$

$$= -\frac{\delta(0)}{j\omega} \sum_{i,j} Z_{ij} \tag{2.42}$$

となる．但し，$\delta(x)$ はデルタ関数，Z_{ij} はインピーダンンス行列の要素で次式のように表わせる．

$$Z_{ij} = j\omega \int_V \left[\mathbf{H}_i^* \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{H}_j - \mathbf{E}_i^* \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_j \right] dv \tag{2.43}$$

式（２．８）における独立変数は**A**とϕであるが，独立変数を**A**，ϕから磁界**H**に変換すると，式（2.43）は

$$Z_{ij} = j\omega \int_V \left[\mathbf{H}_i^* \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{H}_j - \frac{1}{\omega^2} (\nabla \times \mathbf{H}_i^*) \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_j) \right] dv \tag{2.44}$$

となる．式（2.44）の第一変分δZ_{ij}を計算すると，次式のようになる．

$$\delta Z_{ij} = \int_V \left[\delta \mathbf{H}_i^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_j + j\omega \hat{\mu} \cdot \mathbf{H}_j) + \delta \mathbf{H}_j \cdot (-\nabla \times \mathbf{E}_i^* + j\omega \hat{\mu}^* \cdot \mathbf{H}_i^*) \right] dv$$
$$+ \int_{S'+S_d+S_r} \left[\delta \mathbf{H}_i^* \times \mathbf{E}_j - \delta \mathbf{H}_j \times \mathbf{E}_i^* \right] \cdot \mathbf{n}\, ds \tag{2.45}$$

但し，S'はn開口回路の壁面，S_dは媒質の不連続面，S_rは開口面を表わす．これより，式（2.44）はインピーダンスに関する変分表現式であることがわかる．変分表現式（2.44）に対する試験関数の条件は，

(i) 開口面S_rにおいて$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H} = 0$となること

(ii) 媒質の不連続面S_dの両側において$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H}$が連続となること

である．

２．６　異方性媒質を含む共振器におけるReactionと作用量との関係

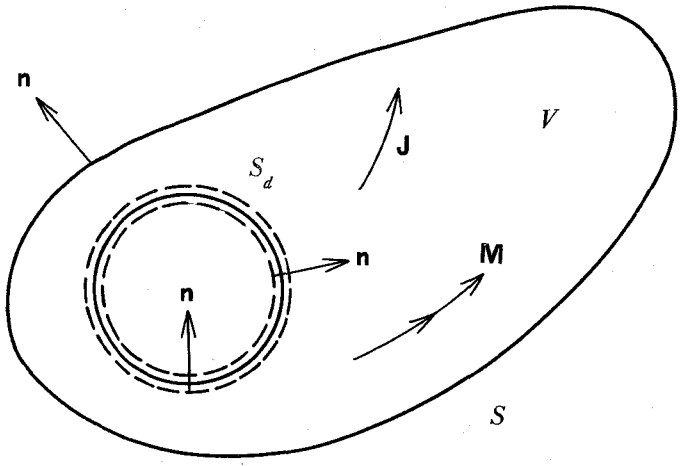


図２．６　積分領域と試験電磁流．Sは完全導体壁面，S_dは$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$の不連続面

図２．６のように完全導体で囲まれた，無損失で且つ非分散性の不均質，異方性媒質からなる共振器におけるReaction[26]と作用量との関係を調べる．２．２節で述べたように，ゲージ条件を付加しなければ，ベクトルポテンシャル$\mathbf{A}$とスカラーポテンシャルϕは一意的には決まらない．ここでは，ϕに$\phi=0$という条件を付加すると，$\mathbf{A}$と電界$\mathbf{E}$とは$\mathbf{E}=-j\omega\mathbf{A}$という関係になる．この関係を用いて式（２．８）を整理し，更にMaxwellの方程式より得られる

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mu}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)&=\{-\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)-\mathbf{M}(\mathbf{r},\omega)\}/j\omega\\ \hat{\varepsilon}(\mathbf{r})^{*}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)^{*}&=\{-\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)^{*}+\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega)^{*}\}/j\omega\end{aligned}\right\}\qquad(2.46)$$

なる関係を用いて変形すると，次式が求まる．但し，$\mathbf{M}$は磁流を表わす．

$$J=\int_0^{\infty}df\int_V\left[\frac{1}{j\omega}(\mathbf{E}^{*}\cdot\mathbf{J}+\mathbf{H}^{*}\cdot\mathbf{M})\right]dv$$
$$+\int_0^{\infty}df\int_{S+S_d}\left[\frac{1}{j\omega}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*})\right]\cdot\mathbf{n}\,ds\qquad(2.47)$$

ここで，試験関数$\mathbf{E}$が共振器の導体壁面S上で正しい値を有し，媒質の不連続面S_d上では，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$の接線成分が連続であり，角周波数成分としてωのみしかもたない場合を考えると，式(2.47)は次式のようになる．

$$J=\frac{\delta(0)}{j\omega}\int_V\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)^{*}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega)+\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)^{*}\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r},\omega)\right]dv\qquad(2.48)$$

一方，小西[26]により求められているように，この場合のReactionは

$$\int_V\left[\mathbf{E}^{*}\cdot\mathbf{J}+\mathbf{H}^{*}\cdot\mathbf{M}\right]dv\qquad(2.49)$$

と表わされ，これは真の値を中心として停留値をとる．このReactionと式(2.48)で与えられる作用量Jとは係数の違いがあるだけである．従って，作用量Jの停留性とReactionの停留性とは一致することがわかる．

以上のことから，作用量Jには，全領域Vにおける電磁界に関する情報が含まれており，Reactionを求めるには，Maxwellの方程式を用いて作用量における体積積分を電磁流の存在する領域のみにおける積分に縮小すればよいこ

とがわかる．これに対して，Reactionを用いる方法では，電磁流の存在しない領域における情報を得るためには，Maxwellの方程式を用いて，式(2.48)の積分領域を拡張しなければならない．

2.7 結　　言

本章では，最小作用の原理から出発して，電磁波に関する共振周波数や伝搬定数及びインピーダンスに関する種々の変分表現式を，統一的に且つ比較的簡単に導出し得ることを示した．また，このような手法によってReactionも同様に導き得ることを，不均質，異方性媒質を含む共振器の場合を例にとって示した．Reactionの停留性と作用量の停留性とが一致することを明らかにし，Reactionを用いて変分表現式を求める方法[(7),(8)]との関係を示した．更に，作用量Jの停留値問題を直接解くことによって，Maxwellの方程式を用いて境界値問題を解くのと同じ結果が得られることを示した．本章では，損失のある場合は取り扱っていないが，それは今後の課題として残されている．

第3章　圧電性媒質中の弾性波に関する変分表現式の統一的な導出[10],[11]

3.1　緒　　言

近年，電磁波と弾性波との結合系を用いて，マイクロ波回路の小型化や各種の信号処理機能をもつ回路素子を実現しようとする研究が行なわれている．しかしながら，電磁波と弾性波とが結合しているような系に関する問題を理論的に解析するためには，Maxwell の方程式と Newton の方程式とを連立させて解かなければならないので，その取り扱いは一般に簡単ではない．従って，適当な近似解法を適用することが必要となるが，中でも変分法は非常に有効な手法の一つであると思われる．

変分法を実際に適用する場合に，最も困難な問題は適当な変分表現式を導出することである．前章では，最小作用の原理によって電磁界に関する種々の変分表現式を統一的に導出する方法を示したが，本章ではこれを拡張して，電磁波だけでなく弾性波をも包含するような作用量を考え，電磁波と弾性波とが共存するような系に対しても適用できる種々の変分表現式を最小作用の原理から統一的に導出し得ることを示す．

本章では，論旨を明確にするために，電界と弾性波とが結合しているような圧電性媒質中における弾性波（圧電性弾性波）を考え，最小作用の原理に従って共振周波数及び伝搬定数に関する変分表現式を導く．しかし，ここで述べる方法を用いることによって，磁界と弾性波とが結合しているような磁性媒質中における弾性波（磁気弾性波）に対する変分表現式も同様に導くことができる．また，ここで求めた変分表現式は，圧電性のない媒質中における純粋の電磁波または純粋の弾性波に関する変分表現式をその特別の場合として含んでいる．更に，本章で示すとおり，作用量の停留値問題を直接解くことによって Maxwell の方程式と Newton の方程式とを連立させて解いたのと同じ結果が得られるので，ここで述べる手法を用いると，共振周波数や伝搬定数に関する変分表現式に限らず，インピーダンスや散乱問題等に関する種々の変分表現式も同様に得られるものと考えられる．

3．2　電磁波と弾性波とが共存する系に対する最小作用の原理

電磁波と弾性波とが共存する系全体に対する作用量 J は，つぎの3つの部分より成り立っているものと考えてよい.[27]

$$J = J_f + J_{fm} + J_m \tag{3.1}$$

ここで J_f 及び J_m はそれぞれ電磁波及び弾性波に関する項であり，J_{fm} は電磁波と弾性波との相互作用に関する項である．電磁波に関する作用量 J_f は，2章で示したように線形媒質においては

$$J_f = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \Big[\frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \cdot \hat{\mu}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \} + \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r},t) - \rho(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r},t) \Big] dv \tag{3.2}$$

但し，

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{r},t) \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

と書くことができる．一方，弾性波に関する作用量 J_m は，次式のように置くことができる．

$$J_m = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \Big[\frac{1}{2} m(\mathbf{r}) \Big\{ \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \Big\}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{S}(\mathbf{r},t) : \mathbf{c}(\mathbf{r},t) : \mathbf{S}(\mathbf{r},t) + \mathbf{F}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r},t) \Big] dv \tag{3.4}$$

但し，

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r},t) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r},t))^t \} \equiv \nabla_s \mathbf{u}(\mathbf{r},t) \tag{3.5}$$

である．ここで，m は質量密度，$\mathbf{u}$ は平衡状態からの変位，$\mathbf{S}$ はひずみ（2階テンソル），$\mathbf{T}$ は応力（2階テンソル），$\mathbf{F}$ は力密度，$\mathbf{c}$ は弾性定数（4階テンソル），t は転置を表わす．本章では圧電性媒質中における電界と弾性波との相互作用のみを扱うので，相互作用を表わす項 J_{fm} はつぎのように書くことができる．

$$J_{fm}=\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \Big[\frac{1}{2}\{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{r},t):\mathbf{S}(\mathbf{r},t) + \mathbf{S}(\mathbf{r},t):\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\}\Big] dv \tag{3.6}$$

但し，$\mathbf{e}$ 及び $\underline{\mathbf{e}}$ はそれぞれひずみと電束密度及び電界と応力との相互作用を表わす係数で，いずれも3階のテンソルである．以上の結果，式（3.1）をまとめて次のように書くことができる．

$$J=\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \Big[\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})+\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}-\rho\phi+\frac{1}{2}m\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\Big)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{T}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\Big] dv \tag{3.7}$$

但し

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t)&=\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{e}(\mathbf{r},t):\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\\ \mathbf{T}(\mathbf{r},t)&=-\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{c}(\mathbf{r},t):\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=\hat{\mu}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

である．上式は圧電性媒質に関する構成関係式とみなすことができる．さらに静電近似

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\nabla\phi(\mathbf{r},t) \tag{3.9}$$

が適用でき，且つ電磁的及び弾性的な波源が存在しない場合（$\mathbf{J}=0$，$\rho=0$，$\mathbf{F}=0$）には，式（3.7）は

$$J=\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \Big[\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\frac{1}{2}m\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\Big)^2-\frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{T}\Big] dv \tag{3.10}$$

となり，B.A.Auld の与えた式[28]と一致する．

次に周波数領域では，式（3.3）及び式（3.8）はそれぞれ次式のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)&=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega)\\ \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)&=-j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega)-\nabla\phi(\mathbf{r},\omega)\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)&=\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)+\mathbf{e}(\mathbf{r},\omega):\mathbf{S}(\mathbf{r},\omega)\\ \mathbf{T}(\mathbf{r},\omega)&=-\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)+\mathbf{c}(\mathbf{r},\omega):\mathbf{S}(\mathbf{r},\omega)\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)&=\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)\end{aligned}\right\}\qquad(3.12)$$

但し，ωは角周波数，$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$，$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)$などはそれぞれ$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$などをFourier変換したものを表わす．ここで，媒質は無損失で，且つ永久電気分極及び永久磁気分極をもたないものとすると，媒質定数の成分は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}&=\varepsilon_{ji}^{*}\quad,\qquad \mu_{ij}=\mu_{ji}^{*}\\ e_{ijk}&=\underline{e}_{jki}^{*}\quad,\qquad C_{ijkl}=C_{klij}^{*}\end{aligned}\qquad(3.13)$$

とおくことができ，応力テンソル$\mathbf{T}$は対称となる．永久分極が存在する場合には，$\mathbf{T}$は対称とはならないが，実際に取り扱う圧電性媒質では，$\mathbf{T}$の非対称成分は通常小さいので，そのような場合には$\mathbf{T}$は対称であるとしても事実上問題はない．[29] 式（3.7）において時間区間〔t_0, t_1〕を（$-\infty,\infty$）に拡張し，時間領域に関してFourier変換を行ない，式（3.12），（3.13）を考慮すると，式（3.7）の時間積分は周波数積分に置き換えることができ，次式のような周波数領域における作用量の表現式が得られる．

$$\begin{aligned}J=\int_0^{\infty}df\int_V\big[&\mathbf{E}^{*}\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{H}^{*}\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}^{*}+\mathbf{A}^{*}\cdot\mathbf{J}-\rho\phi^{*}-\rho^{*}\phi\\ &+\mathbf{S}^{*}:\underline{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{S}:\underline{\mathbf{e}}^{*}\cdot\mathbf{E}^{*}+m\omega^{2}\mathbf{u}^{*}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{S}^{*}:\mathbf{c}:\mathbf{S}\\ &+\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}^{*}+\mathbf{F}^{*}\cdot\mathbf{u}\big]dv\end{aligned}\qquad(3.14)$$

但し，fは周波数を表わす．

次に，作用量Jが停留値をとるときに満たすべき関係式を求める．作用量Jのスカラーポテンシャルϕ，ベクトルポテンシャル$\mathbf{A}$，変位$\mathbf{u}$に関する第一変分δJ_{ϕ}，$\delta J_{\mathbf{A}}$，$\delta J_{\mathbf{u}}$をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}\delta J_{\phi}=&\int_0^{\infty}df\int_V\big[\delta\phi^{*}(\nabla\cdot\mathbf{D}-\rho)\big]dv\\ &-\int_0^{\infty}df\int_{S+S_d}\big[\delta\phi^{*}\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\big]ds+C.C.\end{aligned}\qquad(3.15)$$

$$\delta J_{\mathbf{A}}=\int_0^\infty df\int_V\left[\delta\mathbf{A}^*\cdot(j\omega\mathbf{D}+\mathbf{J}-\nabla\times\mathbf{H})\right]dv$$

$$+\int_0^\infty df\int_{S+S_d}\left[\mathbf{H}\times\delta\mathbf{A}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds+C.C. \qquad (3.16)$$

$$\delta J_{\mathbf{u}}=\int_0^\infty df\int_V\left[\delta\mathbf{u}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T}+m\omega^2\mathbf{u}+\mathbf{F})\right]dv$$

$$-\int_0^\infty df\int_{S+S_d}\left[\mathbf{T}\cdot\delta\mathbf{u}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds+C.C. \qquad (3.17)$$

が求まる．但し，S は領域 V を囲む閉曲面を表わし，S_d は媒質の不連続面を表わす．面 S_d に関する積分は S_d の両側における面積分を意味する．これより，作用量 J が $\mathbf{A}$，ϕ，$\mathbf{u}$ に関して停留値をとるためには，媒質が連続な領域において

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \qquad (3.18)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=j\omega\mathbf{D}+\mathbf{J} \qquad (3.19)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=-m\omega^2\mathbf{u}-\mathbf{F} \qquad (3.20)$$

が成立しなければならないという結果が得られる．また式（3.11）より

$$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mathbf{B} \qquad (3.21)$$

が成立することから，Maxwell の方程式と Newton の方程式とが満足されることになる．従って，面 S 及び S_d 上で境界条件を満足するような試験関数を選んで J の停留値問題を解くと，正しい $\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ 及び $\mathbf{u}$ が決定されることになる．但し，$\mathbf{A}$ および ϕ はゲージ条件を付加しなければ，一意的には決定されない．

3．3　圧電性弾性波の共振周波数に関する変分表現式

本節では，前節で述べた作用量 J の停留値問題を用いて，圧電性弾性波の共振周波数に対する変分表現式を導く．共振器を構成している圧電性媒質は，線形で非分散的な無損失媒質であるとする．但し，必ずしも等方，均質である必要はない．

図３．１に示すように，共振器内部の領域V内には，電磁的ならびに弾性的な波源$\mathbf{J}$，ρ，$\mathbf{F}$は存在しないものと仮定すると，式（3.14）は次式のようになる．

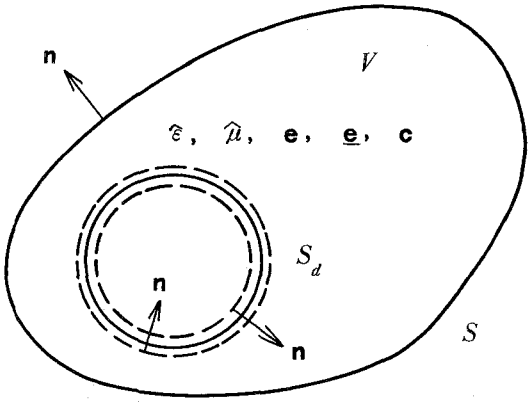


図３．１　共振器

$$J=\int_0^\infty df\int_V\Big[\mathbf{E}^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{H}^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{S}^*:\underline{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{S}:\underline{\mathbf{e}}^*\cdot\mathbf{E}^*$$
$$+m\omega^2\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}-\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}\Big]dv \qquad (3.22)$$

ここで，変数$\mathbf{A}$，ϕを$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$に，同じく$\mathbf{u}$を$\mathbf{v}$，$\mathbf{S}$に，それぞれ次式を用いて変換する．

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=-j\omega\mathbf{A}-\nabla\phi\\ \mathbf{H}&=\hat{\mu}^{-1}\cdot\nabla\times\mathbf{A}\\ \mathbf{v}&=j\omega\mathbf{u}\\ \mathbf{S}&=\nabla_s\mathbf{u}\end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

但し，$\mathbf{v}$は粒子の速度を表わす．更に，恒等式

$$\nabla_s\mathbf{v}^*:\mathbf{T}=\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}^*)-\mathbf{v}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T}) \qquad (3.24)$$

ならびにGaussの定理を適用すると，式（3.22）は

$$J=\int_0^\infty df\int_V\Big[\mathbf{E}^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}+m\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{v}+\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}$$
$$-\frac{j}{\omega}\left\{\mathbf{H}^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}^*\cdot\nabla\times\mathbf{H}-\mathbf{v}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})-\nabla_s\mathbf{v}:\mathbf{T}^*\right\}\Big]dv$$
$$-\int_0^\infty df\int_{S+S_d}\Big[\frac{j}{\omega}\left\{\mathbf{H}\times\mathbf{E}^*+\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}^*\right\}\Big]\cdot\mathbf{n}\,ds \qquad (3.25)$$

となる．

一方，共振器内の界分布は，一般に共振モードの界分布の線形結合で表わすことができるから，たとえば

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)=\sum_i \delta(\omega-\omega_i)\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \tag{3.26}$$

と書くことができる．但し，$\delta(\omega-\omega_i)$ はデルタ関数である．他の界成分についても式(3.26)と同様に書き表わすことができるから，これらの式を式(3.25)に代入して，周波数に関する積分を行なうと

$$J=\sum_i L_i\,\delta(0) \tag{3.27}$$

但し，

$$\begin{aligned}L_i=\int_V\Big[&\mathbf{E}_i^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}_i+\mathbf{H}_i^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}_i+m\mathbf{v}_i^*\cdot\mathbf{v}_i+\mathbf{S}_i^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}_i\\&-\frac{j}{\omega_i}\left\{\mathbf{H}_i^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}_i-\mathbf{E}_i^*\cdot\nabla\times\mathbf{H}_i-\mathbf{v}_i^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T}_i)-\nabla_s\mathbf{v}_i:\mathbf{T}_i^*\right\}\Big]dv\\&-\frac{j}{\omega_i}\int_{S+S_d}\left[\mathbf{H}_i\times\mathbf{E}_i^*+\mathbf{T}_i\cdot\mathbf{v}_i^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds\end{aligned} \tag{3.28}$$

が得られる．各モード成分は，$t=-\infty$ における界分布によって決定される．いま，$t=-\infty$ において i 番目のモードしか存在しないものとすると，$J=L_i\delta(0)$ となって，J の停留性は L_i の停留性と一致することになる．すなわち，簡単のために添字 i を省略すると，作用量 J の停留値問題は

$$\begin{aligned}L=\int_V\Big[&\mathbf{E}^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}+m\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{v}+\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}\\&-\frac{j}{\omega}\left\{\mathbf{H}^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}^*\cdot\nabla\times\mathbf{H}-\mathbf{v}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})-\nabla_s\mathbf{v}:\mathbf{T}^*\right\}\Big]dv\\&-\frac{j}{\omega}\int_{S+S_d}\left[\mathbf{H}\times\mathbf{E}^*+\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds\end{aligned} \tag{3.29}$$

の停留値問題に帰着することになる．従って，一般に共振角周波数 ω で共振し

ている場合には，Lが停留値をとるように，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{S}$を定めればよいことになる．さらに，正しい$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{S}$に対しては，付録Ⅲに示すように$J=0$となることから，$L=0$となり，従って式（3.29）に示すLの停留値問題はつぎのような角周波数ωに関する停留値問題と同等になる．

$$\omega=\frac{j\int_V\left[\mathbf{H}^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}^*\cdot\nabla\times\mathbf{H}-\mathbf{v}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})-\nabla_s\mathbf{v}:\mathbf{T}^*\right]dv+j\int_{S+S_d}\left[\mathbf{H}\times\mathbf{E}^*+\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds}{\int_V\left[\mathbf{E}^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}+m\,\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{v}+\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}\right]dv} \tag{3.30}$$

但し，変数$\mathbf{E}(\mathbf{r})$，$\mathbf{H}(\mathbf{r})$，$\mathbf{v}(\mathbf{r})$，$\mathbf{S}(\mathbf{r})$はいずれも位置のみの関数で，$\mathbf{T}$は

$$\mathbf{T}(\mathbf{r})=-\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})+\mathbf{c}(\mathbf{r}):\mathbf{S}(\mathbf{r}) \tag{3.31}$$

なる$\mathbf{E}$，$\mathbf{S}$の従属変数である．このようにして結局，圧電性弾性波の共振周波数に関する変分表現式が式（3.30）のように求まる．式（3.30）の第一変分を計算し，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{S}$に対する試験関数に課せられる条件を求めると，次のようになる．

(i) S上で$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{E}=0$（$S$が完全磁壁の場合には不要）及び$\delta\mathbf{v}=0$（$S$が弾性的に自由な境界の場合には不要）となること

(ii) S_dにおいて$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{E}$及び$\delta\mathbf{v}$が連続となること

試験関数に対する条件を変えるために，変分表現式（3.30）の停留性に影響を与えることなく分子の面積分の項を書き変えて

$$\omega=\frac{j\int_V\left[\mathbf{H}^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}^*\cdot\nabla\times\mathbf{H}-\mathbf{v}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})-\nabla_s\mathbf{v}:\mathbf{T}^*\right]dv-j\int_{S+S_d}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*-\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds}{\int_V\left[\mathbf{E}^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}+m\,\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{v}+\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}\right]dv} \tag{3.32}$$

なる表現に改め，この式の試験関数に対する条件を求めると，次のようになる．

(i) S上で$\mathbf{n}\times\delta\mathbf{H}=0$（$S$が完全導体壁の場合には不要）及び$\delta\mathbf{v}=0$（$S$が

弾性的に自由な境界の場合には不要）となること

(ii) S_d において $\mathbf{n}\times\delta\mathbf{H}$ 及び $\delta\mathbf{v}$ が連続となること

式（3.32）において，弾性的な量に関する面積分の項は式（3.30）の場合と比べて変っていない．その理由は，実際に通常の弾性媒質を用いる場合には S が弾性的に自由な境界となっていることが多く，そのような場合には $\mathbf{v}$ に対する試験関数には条件は課せられないからである．式（3.32）において，特に $\mathbf{E}=\mathbf{H}=0$ とおくと

$$\omega=\frac{-j\int_V\left[\mathbf{v}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})+\nabla_s\mathbf{v}:\mathbf{T}^*\right]dv+j\int_{S+S_d}\left[\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds}{\int_V\left[m\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{v}+\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}\right]dv} \tag{3.33}$$

となる．但し，$\mathbf{T}(\mathbf{r})=\mathbf{c}(\mathbf{r}):\mathbf{S}(\mathbf{r})$ である．これは圧電性のない媒質中における純粋の弾性波の共振周波数に関する変分表現式である．また，式（3.32）において，特に $\mathbf{v}=\mathbf{S}=\mathbf{T}=0$ とすると

$$\omega=j\,\frac{\int_V\left[\mathbf{H}^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}^*\cdot\nabla\times\mathbf{H}\right]dv-\int_{S+S_d}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds}{\int_V\left[\mathbf{E}^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}\right]dv} \tag{3.34}$$

となる．この式は，圧電性のない媒質中における純粋の電磁波の共振周波数に関する変分表現式を与えるものであって，Berk の求めた変分表現式[7] と一致している．

更に特別な場合として，弾性波と結合する電界が静電的な場合には，式（3.32）において $\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ をそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r})&=-\nabla\phi(\mathbf{r})\\ \mathbf{H}(\mathbf{r})&=0\end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

とおき，変数を $\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{S}$ から ϕ，$\mathbf{v}$，$\mathbf{S}$ に変換して，次式のような共振角周波数 ω に関する変分表現式が得られる．

$$\omega=\frac{-j\int_V\left[\mathbf{v}^*\cdot(\nabla\cdot\mathbf{T})+\nabla_s\mathbf{v}:\mathbf{T}^*\right]dv+j\int_{S+S_d}\left[\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}^*\right]\cdot\mathbf{n}\,ds}{\int_V\left[\nabla\phi^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\nabla\phi+m\,\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{v}+\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}\right]dv} \tag{3.36}$$

但し，$\mathbf{T}$は

$$\mathbf{T}(\mathbf{r})=\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{r})\cdot\nabla\phi(\mathbf{r})+\mathbf{c}(\mathbf{r}):\mathbf{S}(\mathbf{r}) \tag{3.37}$$

なるϕ，$\mathbf{S}$の従属変数である．式（3.36）の第一変分を計算し，ϕ，$\mathbf{v}$，$\mathbf{S}$に対する試験関数に課せられる条件を求めると，次のようになる．

(i) S上で$\delta\phi=0$及び$\delta\mathbf{v}=0$（Sが弾性的に自由な境界の場合には不要）となること

(ii) S_dにおいて$\delta\phi$及び$\delta\mathbf{v}$が連続となること

式（3.36）は，作用量Jから近似を使わずに導出された変分表現式（3.32）に静電近似を用いて得られたものであるが，次に作用量J自体に静電近似を行ない，その近似的な作用量から変分表現式を導出してみよう．式（3.22）に静電近似（3.35）を代入すると

$$J=\int_0^\infty df\int_V\left[\nabla\phi^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\nabla\phi-\mathbf{S}^*:\underline{\mathbf{e}}\cdot\nabla\phi-\mathbf{S}:\underline{\mathbf{e}}^*\cdot\nabla\phi^*+m\omega^2\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}-\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}\right]dv \tag{3.38}$$

となる．これより，式（3.30）を導いたのと同様の方法によって，次のような変分表現式が得られる．

$$\omega^2=\frac{\int_V\left[\mathbf{S}^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}+\mathbf{S}^*:\underline{\mathbf{e}}\cdot\nabla\phi+\mathbf{S}:\underline{\mathbf{e}}^*\cdot\nabla\phi^*-\nabla\phi^*\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\nabla\phi\right]dv}{\int_V\left[m\,\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}\right]dv} \tag{3.39}$$

式（3.39）において，変数はϕ，$\mathbf{u}$であり，$\mathbf{S}$は$\mathbf{S}(\mathbf{r})=\nabla_s\mathbf{u}(\mathbf{r})$なる従属変数である．式（3.39）の第一変分を計算し，ϕ，$\mathbf{u}$に対する試験関数に課せられる条件を求めると，次のようになる．

(i) S上で$\delta\phi=0$及び$\delta\mathbf{u}=0$（Sが弾性的に自由な境界の場合には不要）となること

(ii) S_dにおいて$\delta\phi$及び$\delta\mathbf{u}$が連続となること

3．4　圧電性弾性波の伝搬定数に関する変分表現式

本節では，図3．2に示すように伝送方向（z方向）に一様な線路における圧電性弾性波の伝搬定数に対する変分表現式を求める．伝送線路を構成している圧電性媒質は，前節の場合と同様線形，無損失，非分散的ではあるが，必ずしも均質である必要はなく，また一般に異方性であってもよい．

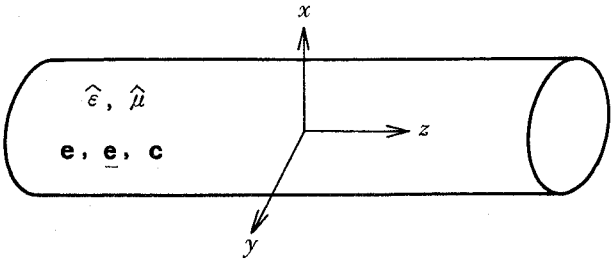


図3．2　圧電性媒質よりなる伝送線路

式（3.29）の体積積分をz軸に垂直な横断面S（xy面）上の面積分とz軸に関する積分とに分け，z軸に関してFourier変換を行なうと，z軸方向の積分は伝搬定数に関する積分に変換できて，次式が求まる．

$$
\begin{aligned}
L=\frac{1}{2\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\Big[\int_S\big[&\omega\mathbf{E}(x,y,\beta)^*\cdot\hat{\varepsilon}(x,y)\cdot\mathbf{E}(x,y,\beta)\\
&+\omega\mathbf{H}(x,y,\beta)^*\cdot\hat{\mu}(x,y)\cdot\mathbf{H}(x,y,\beta)\\
&+\omega m(x,y)\mathbf{v}(x,y,\beta)^*\cdot\mathbf{v}(x,y,\beta)\\
&+\omega\mathbf{S}(x,y,\beta)^*:\mathbf{c}(x,y):\mathbf{S}(x,y,\beta)\\
&-j\{\mathbf{H}(x,y,\beta)^*\cdot\nabla_t\times\mathbf{E}(x,y,\beta)-\mathbf{E}(x,y,\beta)^*\cdot\nabla_t\times\mathbf{H}(x,y,\beta)\\
&\quad-\mathbf{v}(x,y,\beta)^*\cdot\nabla_t\cdot\mathbf{T}(x,y,\beta)-\nabla_{ts}\mathbf{v}(x,y,\beta):\mathbf{T}(x,y,\beta)^*\}\\
&+\beta\mathbf{i}_z\cdot\{\mathbf{E}(x,y,\beta)\times\mathbf{H}(x,y,\beta)^*-\mathbf{H}(x,y,\beta)\times\mathbf{E}(x,y,\beta)^*\\
&\quad-\mathbf{T}(x,y,\beta)\cdot\mathbf{v}(x,y,\beta)^*-\mathbf{T}(x,y,\beta)^*\cdot\mathbf{v}(x,y,\beta)\}\big]ds\\
&-j\int_{C+C_d}[\mathbf{H}(x,y,\beta)\times\mathbf{E}(x,y,\beta)^*+\mathbf{T}(x,y,\beta)\cdot\mathbf{v}(x,y,\beta)^*]\cdot\mathbf{n}\,dl\Big]
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

但し，上式の線積分の積分路Cは，開放型線路の場合には，伝送路から無限に離れた伝送線路を囲む横断面S上の曲線を表わし，導波管のような閉じた線路の場合には横断面S上の壁面を表わす．C_dは同じく横断面S上における媒質の不連続線を表わす．単位法線ベクトル$\mathbf{n}$の方向は図２．４に示すとおりである．$\mathbf{E}(x,y,\beta)$，$\mathbf{H}(x,y,\beta)$などは$\mathbf{E}(\mathbf{r})$，$\mathbf{H}(\mathbf{r})$などをz軸に関してFourier変換したものである．また∇_t，∇_{ts}はそれぞれ∇，∇_sにおいて，$\partial/\partial z=0$とおいたものである．

さて，z方向に伝搬している波の界分布は，伝搬モードの界分布の線形結合で表わすことができるから，たとえば

$$\mathbf{E}(x,y,\beta)=\sum_i \delta(\beta+\beta_i)\,\mathbf{E}_i(x,y) \tag{3.41}$$

と書くことができる．但し，$\delta(\beta+\beta_i)$はデルタ関数である．他の界成分についても式(3.41)と同様に書き表わすことができるから，これらの式を式(3.40)に代入し，βに関する積分を実行すると

$$L=\frac{1}{2\pi}\sum_i M_i\,\frac{\delta(0)}{\omega} \tag{3.42}$$

但し，

$$\begin{aligned}M_i=\int_S\Big[&\omega\mathbf{E}_i^*\cdot\hat{\epsilon}\cdot\mathbf{E}_i+\omega\mathbf{H}_i^*\cdot\hat{\mu}\cdot\mathbf{H}_i+\omega m\,\mathbf{v}_i^*\cdot\mathbf{v}_i+\omega\mathbf{S}_i^*:\mathbf{c}:\mathbf{S}_i\\&-j(\mathbf{H}_i^*\cdot\nabla_t\times\mathbf{E}_i-\mathbf{E}_i^*\cdot\nabla_t\times\mathbf{H}_i-\mathbf{v}_i^*\cdot\nabla_t\cdot\mathbf{T}_i-\nabla_{ts}\mathbf{v}_i:\mathbf{T}_i^*)\\&-\beta_i\,\mathbf{i}_z\cdot(\mathbf{E}_i\times\mathbf{H}_i^*-\mathbf{H}_i\times\mathbf{E}_i^*-\mathbf{T}_i\cdot\mathbf{v}_i^*-\mathbf{T}_i^*\cdot\mathbf{v}_i)\Big]\,ds\\&-j\int_{C+C_d}\Big[\mathbf{H}_i\times\mathbf{E}_i^*+\mathbf{T}_i\cdot\mathbf{v}_i^*\Big]\cdot\mathbf{n}\,dl\end{aligned} \tag{3.43}$$

が得られる．但し，界成分ならびに媒質はすべてx及びyのみの関数である．ここで，z方向に伝搬している波はi番目のモードだけであるとすると，$L=M_i\delta(0)/2\pi\omega$となって，$L$の停留性は$M_i$の停留性と一致することになる．更に，付録Ⅲで示すように，正しい界に対しては$J=0$となることから，$L=0$，従って$M_i=0$となり，次のような伝搬定数βに関する変分表現式が得られる．但し，添字iは簡単のために省略する．

$$\beta = \frac{\begin{array}{l}\int_S \Big[\omega \mathbf{E}^* \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \omega \mathbf{H}^* \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{H} + \omega_m \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + \omega \mathbf{S}^* : \mathbf{c} : \mathbf{S} \\ \quad - j\,(\mathbf{H}^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{E} - \mathbf{E}^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{H} - \mathbf{v}^* \cdot \nabla_t \cdot \mathbf{T} - \nabla_{ts} \mathbf{v} : \mathbf{T}^*)\Big] ds \\ \quad - j \int_{C+C_d} \big[\mathbf{H} \times \mathbf{E}^* + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^*\big] \cdot \mathbf{n}\, dl\end{array}}{\int_S \big[\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* - \mathbf{H} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^* - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{v})\big] ds} \tag{3.44}$$

式（3.44）において変数$\mathbf{E}(x, y)$，$\mathbf{H}(x, y)$，$\mathbf{v}(x, y)$，$\mathbf{S}(x, y)$ はいずれも横断面S（xy面）上の位置のみの関数で，$\mathbf{T}(x, y)$ は

$$\mathbf{T} = -\underline{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{c} : \mathbf{S} \tag{3.45}$$

なる$\mathbf{E}$，$\mathbf{S}$の従属変数である．式（3.44）の第一変分を計算し，$\mathbf{E}$，$\mathbf{v}$に対する試験関数に課せられる条件を求めると，次のようになる．

(i) C上で$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{E} = 0$（$C$が完全磁壁の場合には不要）及び$\delta \mathbf{v} = 0$（$C$が弾性的に自由な境界の場合には不要）となること

(ii) C_dにおいて$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{E}$及び$\delta \mathbf{v}$が連続となること

試験関数に対する条件を変えるために，変分表現式（3.44）の停留性に影響を与えることなく分子の線積分の項を次のように書き変える．

$$\beta = \frac{\begin{array}{l}\int_S \Big[\omega \mathbf{E}^* \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \omega \mathbf{H}^* \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{H} + \omega_m \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + \omega \mathbf{S}^* : \mathbf{c} : \mathbf{S} \\ \quad - j\,(\mathbf{H}^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{E} - \mathbf{E}^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{H} - \mathbf{v}^* \cdot \nabla_t \cdot \mathbf{T} - \nabla_{ts} \mathbf{v} : \mathbf{T}^*)\Big] ds \\ \quad + j \int_{C+C_d} \big[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^*\big] \cdot \mathbf{n}\, dl\end{array}}{\int_S \big[\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* - \mathbf{H} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^* - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{v})\big] ds} \tag{3.46}$$

この式は牧本，佐藤によって求められている変分表現式[30]と一致し，圧電性のない媒質中における純粋な電磁波に対してはBerkによって求められている変分表現式[7]に一致する．式（3.46）の第一変分を計算し，同様にして試験関数に課せられる条件を求めると，次のようになる．

(i) C上で$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H} = 0$（$C$が完全導体の場合には不要）及び$\delta \mathbf{v} = 0$（$C$が弾性的に自由な境界の場合には不要）となること

(ii) C_dにおいて$\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H}$及び$\delta \mathbf{v}$が連続となること

特別な場合として，弾性波と結合する電界が静電的な場合には，式（3.29）において，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$をそれぞれ式（3.35）のようにおき，体積積分をz軸に関する積分と横断面S（xy面）上の面積分とに分けて考え，さらに変数を$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$，$\mathbf{S}$，$\mathbf{v}$から$\mathbf{E}$，ϕ，$\mathbf{S}$，$\mathbf{u}$に変換して

$$L=\int_{-\infty}^{\infty}dz\Big[\int_S\big[-\nabla\phi^*\cdot\mathbf{D}+\mathbf{S}:\mathbf{T}^*-\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*-\nabla\phi\cdot\mathbf{D}^*+\mathbf{u}^*\cdot\nabla\cdot\mathbf{T}$$
$$-\nabla_s\mathbf{u}:\mathbf{T}^*\big]\,ds-\int_{C+C_d}\big[\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}^*\big]\cdot\mathbf{n}\,dl\Big] \qquad (3.47)$$

が求まる．但し，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}&=\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{e}:\mathbf{S}\\ \mathbf{T}&=-\underline{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{c}:\mathbf{S}\end{aligned}\right\} \qquad (3.48)$$

である．ここで，z軸に関してFourier変換を行ない，式（3.42），（3.43）を求めたのと同様にして次式が得られる．

$$L=\frac{1}{2\pi}\sum_i M_i\,\delta(0) \qquad (3.49)$$

但し，

$$M_i=\int_S\big[-\nabla_t\phi_i^*\cdot\mathbf{D}_i+\mathbf{S}_i:\mathbf{T}_i^*-\mathbf{E}_i\cdot\mathbf{D}_i^*-\nabla_t\phi_i\cdot\mathbf{D}_i^*+\mathbf{u}_i^*\cdot\nabla_t\cdot\mathbf{T}_i$$
$$-\nabla_{ts}\mathbf{u}_i:\mathbf{T}_i^*+m\omega^2\mathbf{u}_i^*\cdot\mathbf{u}_i-j\beta_i\,\mathbf{i}_z\cdot(\mathbf{T}_i\cdot\mathbf{u}_i^*-\mathbf{T}_i^*\cdot\mathbf{u}_i$$
$$+\phi_i^*\mathbf{D}_i-\phi_i\mathbf{D}_i^*)\big]\,ds$$
$$-\int_{C+C_d}\big[\mathbf{T}_i\cdot\mathbf{u}_i^*\big]\cdot\mathbf{n}\,dl \qquad (3.50)$$

上式において，係数及び界成分はすべて横断面S（xy面）上の位置のみの関数である．ここで，i番目のモードしか伝搬していない場合を考えると，$L=M_i\,\delta(0)/2\pi$となって，Lの停留性はM_iの停留性と一致することになる．簡単のために添字iを省略すると，正しい界に対しては，付録Ⅲに示すように$J=0$となることから，$L=0$，したがって$M=0$となり，次のような伝搬定数βに関する変分表現式が得られる．

$$\int_S \left[\mathbf{u}^* \cdot \nabla_t \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^* : \nabla_{ts} \mathbf{u} + m\omega^2 \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} : \mathbf{T}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right.$$

$$\left. - \nabla_t \phi \cdot \mathbf{D}^* - \nabla_t \phi^* \cdot \mathbf{D} \right] ds$$

$$\beta = \frac{-\int_{C+C_d} \left[\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^* \right] \cdot \mathbf{n} \, dl}{j \int_S \left[\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^* - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u} + \phi^* \mathbf{D} - \phi \mathbf{D}^*) \right] ds} \tag{3.51}$$

この変分表現式は，牧本，佐藤によって求められている変分表現式[30]と一致する．但し，変数は$\mathbf{E}$，ϕ，$\mathbf{S}$，$\mathbf{u}$で，$\mathbf{D}$及び$\mathbf{T}$はそれぞれ式（3.48）で与えられるような$\mathbf{E}$，$\mathbf{S}$の従属変数である．式（3.51）の第一変分を計算し，試験関数に課せられる条件を求めると，次のようになる．

(i) C上で$\delta \mathbf{u} = 0$（Cが弾性的に自由な境界の場合には不要）及び$\delta \phi = 0$となること

(ii) C_dにおいて$\delta \mathbf{u}$及び$\delta \phi$が連続となること

3．5 結　　言

本章では，圧電性媒質中に電磁波と弾性波とが共存するような系に対して適用可能な作用量を考え，この作用量を用いて，最小作用の原理に従い，圧電性弾性波の共振周波数ならびに伝搬定数に関する変分表現式を統一的に導出した．ここで求めた変分表現式は圧電性のない媒質中における純粋の電磁波または純粋の弾性波に関する変分表現式をその特別の場合として含んでいる．本章では，論旨を明確にするために，電界と弾性波とが結合しているような圧電性媒質中における圧電性弾性波に対する変分表現式について論じたが，磁界と応力との相互作用を表わす項を作用量にとり入れることによって，磁界と弾性波とが結合しているような磁性媒質中における磁気弾性波に対する変分表現式も同様に導くことができる．また，作用量の停留値問題を解くことによって，Maxwellの方程式とNewtonの方程式とを連立させて解いたのと同等の結果が得られることから，本章で示した手法を用いて，共振周波数や伝搬定数に関する変分表現式に限らず，インピーダンスや散乱問題等に関する種々の変分表現式も同様に求められるものと考えられる．

第4章　最小2乗誤差法を用いた誘電体線路の不連続部の解析[12],[13]

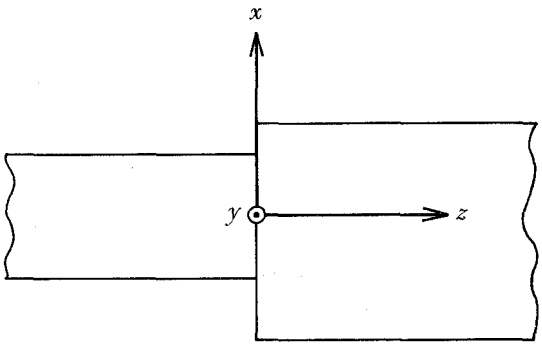
4.1 緒　　言

光通信システム実現のため種々の研究が進められているが，伝送線路に関しては，光ファイバの低損失化が進展した現在，線路の広帯域化とともに線路の接続に関する研究も重要な問題として，関心が持たれている．しかしながら，現在までのところ接続方法の実験的研究[35],[36]に比べると，接続部に関する理論解析[16]～[22]の報告は比較的少ない．また，報告されている内容も，反射波及び反射放射波を省略したもの，あるいはこれらを考慮しても不連続が小さい場合にしか適用できないものがほとんどである．

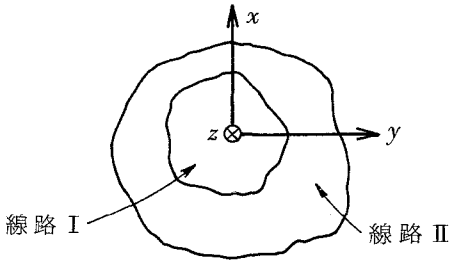
本章では，通常の境界条件を適用する代わりに最小2乗誤差法を用いて，不連続部の反射，透過及び放射電力等を解析する手法について述べる．普通変分法においては，微分方程式を解く代わりにその微分方程式に対する変分問題を解くわけであり，その時に用いる試験関数には，ある程度の境界条件を満足するものを使用しなければならない．そのような条件を満足する試験関数を用いると，変分問題と微分方程式を境界条件のもとで解く問題とが同等になる．これまで述べてきた変分表現式の導出もこの範囲に属するものと考えられる．本章で用いる最小2乗誤差法は，今まで述べてきた変分法とは逆に，試験関数としては微分方程式を満たしているものを選び，境界条件は満足していなくてもよいものとする．そうして，境界条件を満足する解を求めようとする方法である．具体例として，この方法を誘電体スラブ線路の軸ずれの解析に適用した場合を示す．本章で述べる手法を用いる方法は，導波管のような閉じられた線路の解析に適用された例はあるが，[14],[15]誘電体線路のような開放型線路の解析に用いられた例は，著者の知る限りでは見あたらないようである．この手法を用いると，透過波，反射波はもちろんのこと反射放射波及び透過放射波も求めることができる．また，線路の形状ならびに不連続の大小にかかわらず適用できる利点があるものと思われる．

4．2　最小2乗誤差法による不連続部の解析

図4．1に示すような2つの開放型導波系の接続部に線路Ⅰから線路Ⅱの方向に入射波が入射すると，不連続部において反射，透過及び放射の現象が起こる．ここで不連続面S（$z=0$）における各導波モードの電磁界の接線成分を$\mathbf{e}_i$，$\mathbf{h}_i$，放射モードの電磁界の接線成分を$\mathbf{e}(\rho)$，$\mathbf{h}(\rho)$と表わす．但し，ρは線路の外部における放射モードの横方向の伝搬定数（x，y方向を表わす）である．不連続面における線路Ⅰの全電磁界の接線成分を$\mathbf{E}^{\mathrm{I}}$，$\mathbf{H}^{\mathrm{I}}$，線路Ⅱのそれを$\mathbf{E}^{\mathrm{II}}$，$\mathbf{H}^{\mathrm{II}}$とすると，それぞれの電磁界は線路の固有モードで次のように展開することができる．



(a)　線路の接続



(b)　不連続面S（$z=0$）平面における横断面

図4．1　線路の不連続部

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{e}_{in} + \sum_{i=1}^{M} R_i \mathbf{e}_i^{\mathrm{I}} + \int R(\rho)\mathbf{e}^{\mathrm{I}}(\rho)\,d\rho \\
\mathbf{H}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{h}_{in} - \sum_{i=1}^{M} R_i \mathbf{h}_i^{\mathrm{I}} - \int R(\rho)\mathbf{h}^{\mathrm{I}}(\rho)\,d\rho \\
\mathbf{E}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i \mathbf{e}_i^{\mathrm{II}} + \int T(\rho)\mathbf{e}^{\mathrm{II}}(\rho)\,d\rho \\
\mathbf{H}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i \mathbf{h}_i^{\mathrm{II}} + \int T(\rho)\mathbf{h}^{\mathrm{II}}(\rho)\,d\rho
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4.1)
$$

但し，R_i 及び T_i は各導波モードの反射係数及び透過係数で，$R(\rho)$及び$T(\rho)$は放射モードの反射係数及び透過係数である．また，M，Nはそれぞれ線路Ⅰ，Ⅱの導波モードの数を表わす．次に，式（4.1）の積分を離散的な和に直すために，$R(\rho)$，$T(\rho)$ を適当な関数系 $\{f_i(\rho)\}$ で展開する．

$$\left.\begin{aligned} R(\rho) &= \sum r_i\, f_i(\rho) \\ T(\rho) &= \sum t_i\, f_i(\rho) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

上式を式（4.1）に代入すると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{e}_{in} + \sum_{i=1}^{M} R_i\, \mathbf{e}_i^{\mathrm{I}} + \sum r_i\, \mathbf{E}_i^{\mathrm{I}} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{h}_{in} - \sum_{i=1}^{M} R_i\, \mathbf{h}_i^{\mathrm{I}} - \sum r_i\, \mathbf{H}_i^{\mathrm{I}} \\ \mathbf{E}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i\, \mathbf{e}_i^{\mathrm{II}} + \sum t_i\, \mathbf{E}_i^{\mathrm{II}} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i\, \mathbf{h}_i^{\mathrm{II}} + \sum t_i\, \mathbf{H}_i^{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

但し，

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_i^{\mathrm{I,II}} &= \int f_i(\rho)\, \mathbf{e}^{\mathrm{I,II}}(\rho)\, d\rho \\ \mathbf{H}_i^{\mathrm{I,II}} &= \int f_i(\rho)\, \mathbf{h}^{\mathrm{I,II}}(\rho)\, d\rho \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

である．

本解析では，不連続面 S（$z=0$）における電磁界の接線成分の差を誤差と考え，その誤差を評価する量

$$F = \frac{\int_S \left[|\mathbf{E}^{\mathrm{I}} - \mathbf{E}^{\mathrm{II}}|^2 + Z_0^2 |\mathbf{H}^{\mathrm{I}} - \mathbf{H}^{\mathrm{II}}|^2 \right] ds}{\int_S \left[|\mathbf{e}_{in}|^2 + Z_0^2 |\mathbf{h}_{in}|^2 \right] ds} \qquad (4.5)$$

を定義する．但し，Z_0は真空中の固有インピーダンス，Sは不連続面（$z=0$）を表わす．さて，$\mathbf{E}^{\mathrm{I,II}}$, $\mathbf{H}^{\mathrm{I,II}}$ は真の電磁界$\mathbf{E}_0^{\mathrm{I,II}}$, $\mathbf{H}_0^{\mathrm{I,II}}$ と誤差の電磁界 $\delta\mathbf{E}^{\mathrm{I,II}}$,

$\delta \mathbf{H}^{\mathrm{I,II}}$ とによって次のように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathrm{I,II}} &= \mathbf{E}_0^{\mathrm{I,II}} + \delta \mathbf{E}^{\mathrm{I,II}} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{I,II}} &= \mathbf{H}_0^{\mathrm{I,II}} + \delta \mathbf{H}^{\mathrm{I,II}} \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

式（4.6）を式（4.5）に代入し，誤差の評価量 F の第一変分 δF を計算すると，

$$\begin{aligned} &\delta F \int_S \left\{ |\mathbf{e}_{in}|^2 + Z_0^2 |\mathbf{h}_{in}|^2 \right\} ds \\ &= \int_S \Big[\delta \mathbf{E}^{\mathrm{I}*}_{\cdot} (\mathbf{E}_0^{\mathrm{I}} - \mathbf{E}_0^{\mathrm{II}}) - \delta \mathbf{E}^{\mathrm{II}*}_{\cdot} (\mathbf{E}_0^{\mathrm{I}} - \mathbf{E}_0^{\mathrm{II}}) \\ &\quad + Z_0^2 \left\{ \delta \mathbf{H}^{\mathrm{I}*}_{\cdot} (\mathbf{H}_0^{\mathrm{I}} - \mathbf{H}_0^{\mathrm{II}}) - \delta \mathbf{H}^{\mathrm{II}*}_{\cdot} (\mathbf{H}_0^{\mathrm{I}} - \mathbf{H}_0^{\mathrm{II}}) \right\} \Big] ds + C.C. \end{aligned} \tag{4.7}$$

が得られる．但し，＊は複素共役を表わし，*C.C.* はこの記号より前にある項の複素共役を表わす．正しい電磁界に対しては不連続面上で，

$$\mathbf{E}_0^{\mathrm{I}} = \mathbf{E}_0^{\mathrm{II}}, \quad \mathbf{H}_0^{\mathrm{I}} = \mathbf{H}_0^{\mathrm{II}} \tag{4.8}$$

であるから式（4.7）より

$$\delta F = 0 \tag{4.9}$$

となることがわかる．従って，境界条件を合わせる代わりに，式（4.5)で定義した誤差評価量 F に関する停留値問題を解いても同じ結果が得られる．本解析では，式（4.5）の F が停留値をとるように，反射係数及び透過係数を定め，不連続部における全電磁界の分布を求めている．なお，この方法によって求められた電磁界分布は2乗誤差が最小になるという意味において最も良い近似を与えるものとなっている．

式（4.5）の F が停留値をとる条件は，R_i，T_i，r_i 及び t_i を一般に X_i で表わすと，次式で与えられる．

$$\frac{\partial F}{\partial X_i^*} = 0 \tag{4.10}$$

式（4.10）より，R_i，T_i，r_i 及び t_i を未知数とする複素連立一次方程式が

得られ，これを解くことによって未知数が求まり，電磁界を決定することができる．

4．3　誘電体スラブ線路の軸ずれの解析

本節では，前節で述べた最小2乗誤差法による不連続部の解析法を図4．2に示すような2つの誘電体スラブ線路の接続部における軸ずれの問題に適用する．誘電体スラブ線路はいずれも屈折率がn，厚さが$2d$で，y方向には一様であるとする．入射波として，TEモードを考え，簡単のため誘電体スラブ線路には基本モードしか伝搬しないものと仮定すると，導波モードの電界は，次式のようになる．

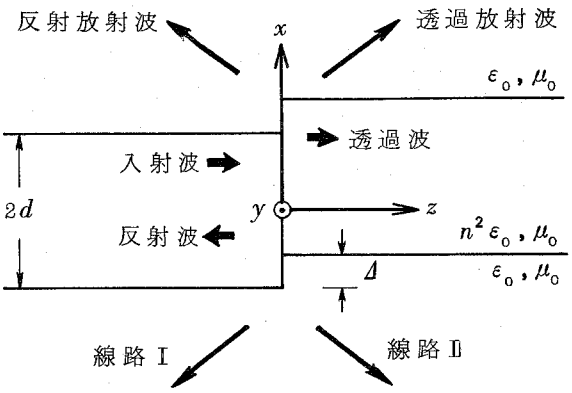


図4．2　誘電体スラブ線路の軸ずれ

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{i}_y A \cos \kappa x & |x| \leqq d \\ &= \mathbf{i}_y A \cos \kappa d \, e^{-\gamma(|x|-d)} & |x| > d \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

また，放射TEモードは，放射TE偶モードと，放射TE奇モードとに分けて考えることができる．式(4.12)に放射TE偶モードの電界を，また式(4.13)に放射TE奇モードの電界を示す．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}(\rho) &= \mathbf{i}_y C_e \cos \sigma x & |x| \leqq d \\ &= \mathbf{i}_y (D_e e^{-i\rho|x|} + F_e e^{i\rho|x|}) & |x| > d \end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathbf{e}(\rho) &= \mathbf{i}_y C_0 \sin \sigma x & |x| \leqq d \\
&= \mathbf{i}_y \frac{x}{|x|}(D_0 e^{-i\rho|x|} + F_0 e^{i\rho|x|}) & |x| > d
\end{aligned}\right\} \qquad (4.13)
$$

式（4.11）～（4.13）において，κ，γ はそれぞれ導波モードの線路内部及び線路外部における x 方向の伝搬定数であり，σ，ρ はそれぞれ放射モードのそれらを表わす．A は κ，γ 等の関数で，C_e，C_0，D_e，D_0，F_e 及び F_0 は σ，ρ 等の関数である．これらについての詳細は文献（37）を参照されたい．導波モード及び放射モードの直交関係は，それぞれ次式で与えられる．

$$
\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{e}\times\mathbf{h}^*\right]\cdot\mathbf{i}_z\, dx = 1 \qquad (4.14)
$$

$$
\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{e}(\rho)\times\mathbf{h}^*(\rho')\right]\cdot\mathbf{i}_z\, dx = \frac{\beta^*}{|\beta|}\,\delta(\rho-\rho') \qquad (4.15)
$$

但し，δ はデルタ関数，β は z 方向の伝搬定数である．

次に，式（4.2）に示した放射波の反射係数及び透過係数 $R(\rho)$，$T(\rho)$ の展開について述べる．実際に放射される放射モードは，その x 方向の伝搬定数 ρ が入射波の x 方向の伝搬定数に近いものが大部分で，ρ の大きなものはそれに比べて比較的少ないものと考えられる．そこで，$R(\rho)$ 及び $T(\rho)$ を展開する関数 $f_i(\rho)$ として，ρ が大きくなると指数関数的に減少するような，いわゆる Gauss-Laguerre 関数を用いることにする．以下にこの関数の低次の数項とその直交関係式とを参考までに示しておく．

$$
\left.\begin{aligned}
f_0(\rho) &= \sqrt{\xi d}\ \exp\left(-\frac{\xi\rho d}{2}\right) \\
f_1(\rho) &= \sqrt{\xi d}\ \left\{1-(\xi\rho d)\right\}\exp\left(-\frac{\xi\rho d}{2}\right) \\
f_2(\rho) &= \sqrt{\xi d}\ \left\{1-2(\xi\rho d)+\frac{(\xi\rho d)^2}{2}\right\}\exp\left(-\frac{\xi\rho d}{2}\right) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (4.16)
$$

但し，ξ は広がりを表わすパラメータである．

$$\int_0^\infty f_i(\rho) f_j(\rho)\, d\rho = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{4.17}$$

式（4.11）～（4.17）等を前節の式（4.5）に代入し，式（4.10）を適用して解析を行なうと以下に示すような結果が得られる．但し，以下に示す数値計算結果は，Gauss-Laguerre 関数を９項とった場合で，広がりを示すパラメータ ξ は軸ずれが１００％のところでの電力和が最も１に近くなるように決定した．

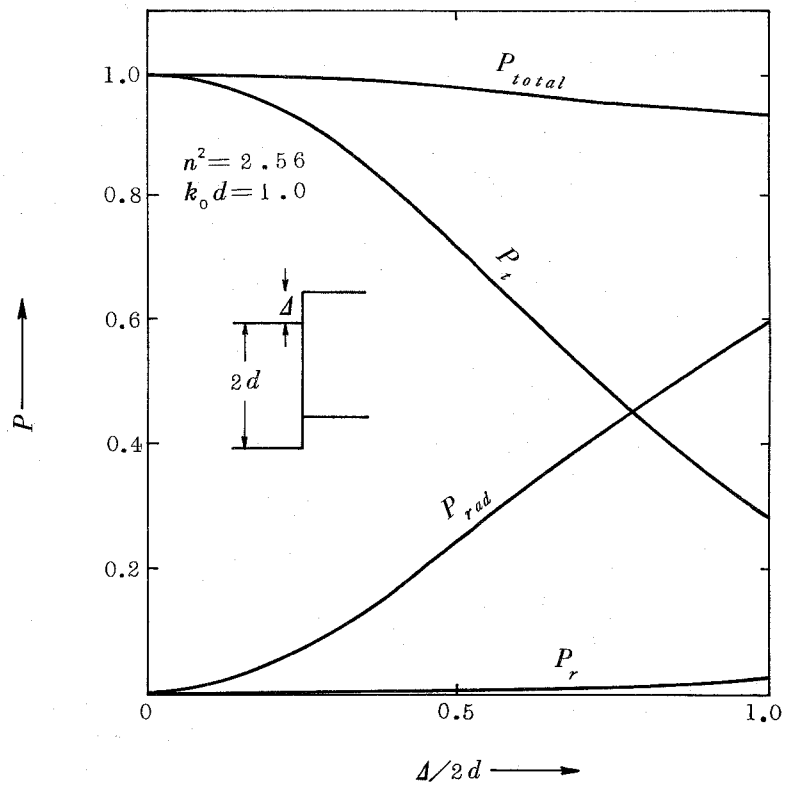


図４．３　反射電力 P_r，透過電力 P_t，放射電力 P_{rad} 及び電力和 P_{total}（$k_0 d = 1.0$）

図４．３に，規格化周波数 $k_0 d = 1.0$ とした場合の，入射電力で規格化した反射電力 P_r，透過電力 P_t，放射電力 P_{rad} 及び電力和 P_{total} を示す．ここで電力

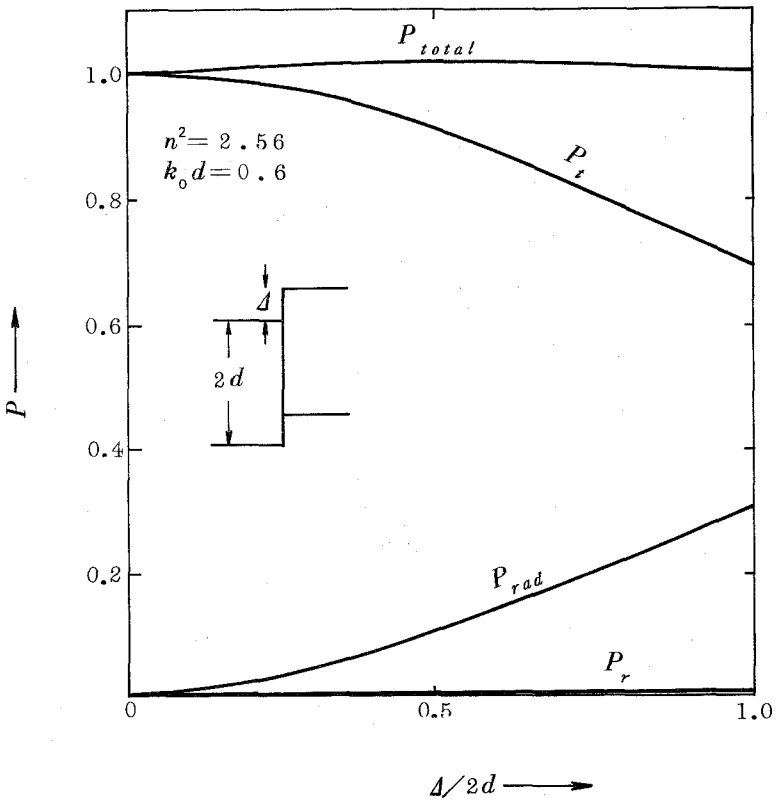


図 4．4　反射電力 P_r，透過電力 P_t，放射電力 P_{rad}
及び電力和 P_{total}（$k_0 d = 0.6$）

和とは，反射電力，透過電力及び放射電力の和で数値計算結果の正確さの目安になる量の1つである．軸ずれが大きくなるにしたがって，電力和が1からずれていくが，このずれは主としてGauss-Laguerre 関数を9項までで切ったために生じた放射電力の誤差によるものと考えられる．また，軸ずれにおける反射は極めて少なく，透過されない電力はほとんどが放射電力となることがわかる．図4．4に同じく $k_0 d = 0.6$ の場合を示す．$k_0 d = 1.0$ の場合と比較すると，ほぼ放射電力が減少しているぶんだけ透過電力は増加し，電力和も1に近づいているのがわかる．この軸ずれに対する透過電力の増加原因は，$k_0 d$ が遮断周波数に近づくにつれて，電磁界分布が線路外部に広がり，線路Ⅰと線路Ⅱの基本モードの間の差が減少してくることによるものである．

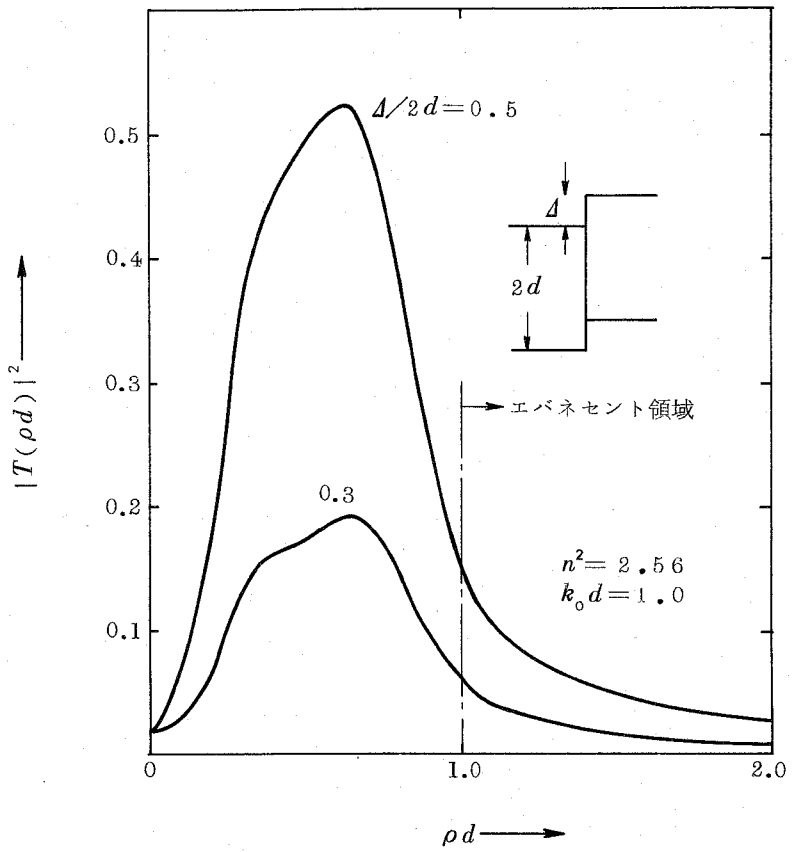


図 4．5　透過放射電力のスペクトル分布（$k_0 d = 1.0$）

図 4．5 及び図 4．6 に $k_0 d = 1.0$ の場合の透過放射電力及び反射放射電力の電力スペクトル分布を示す．図 4．6 に示す反射放射電力の入射電力に対する割合は，軸ずれが $\Delta / 2d = 0.5$ のときで 2.0 %，$\Delta / 2d = 0.3$ のときで 1.1 %である．図 4．7 及び図 4．8 に $k_0 d = 0.6$ の場合の同様の図を示す．この場合の反射放射電力の入射電力に対する割合は，$\Delta / 2d = 0.5$ のときで 2.3 %，$\Delta / 2d = 0.3$ のときで 1.1 %である．また，図 4．5 ～図 4．8 に示した放射電力のスペクトル分布から，軸ずれによって発生する波はその大部分が放射損失に寄与する放射モードであって，いわゆるエバネセントな放射モード[37]は，それに比べて十分少ないことがわかる．

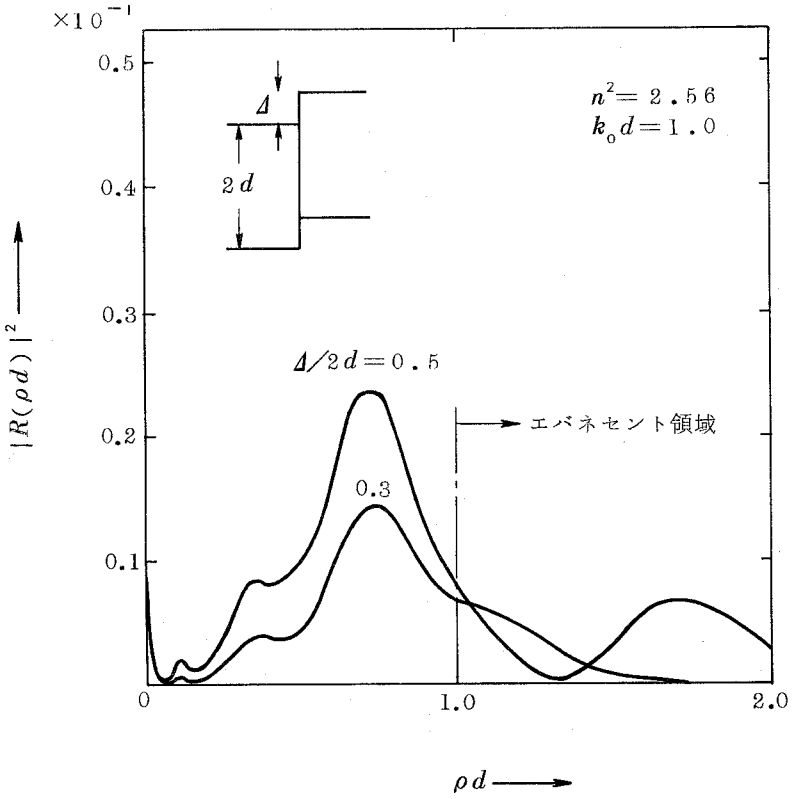


図４．６　反射放射電力のスペクトル分布

（ $k_0 d = 1.0$ ）

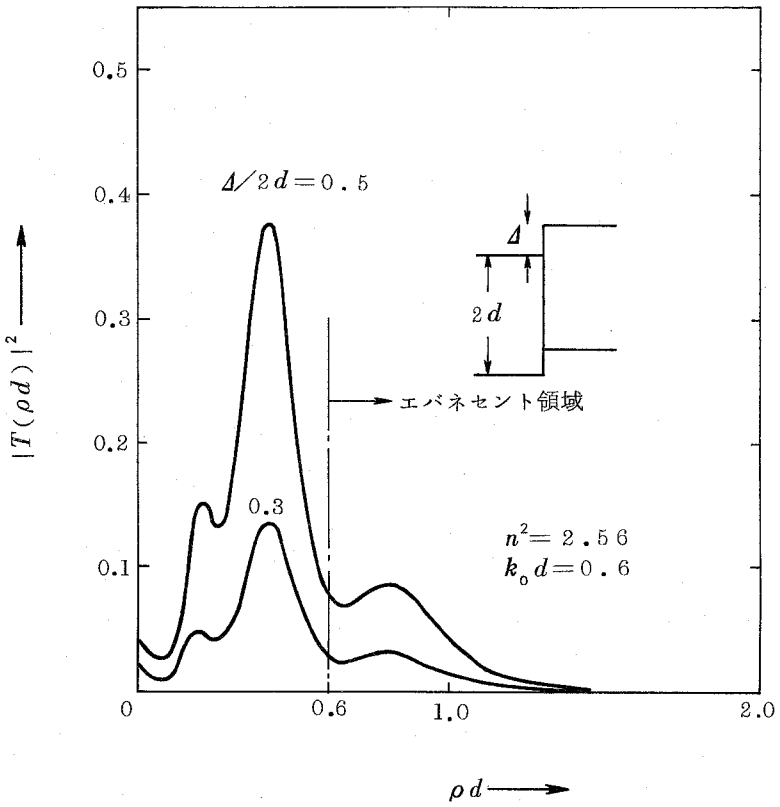


図４．７　透過放射電力のスペクトル分布

（$k_0 d = 0.6$）

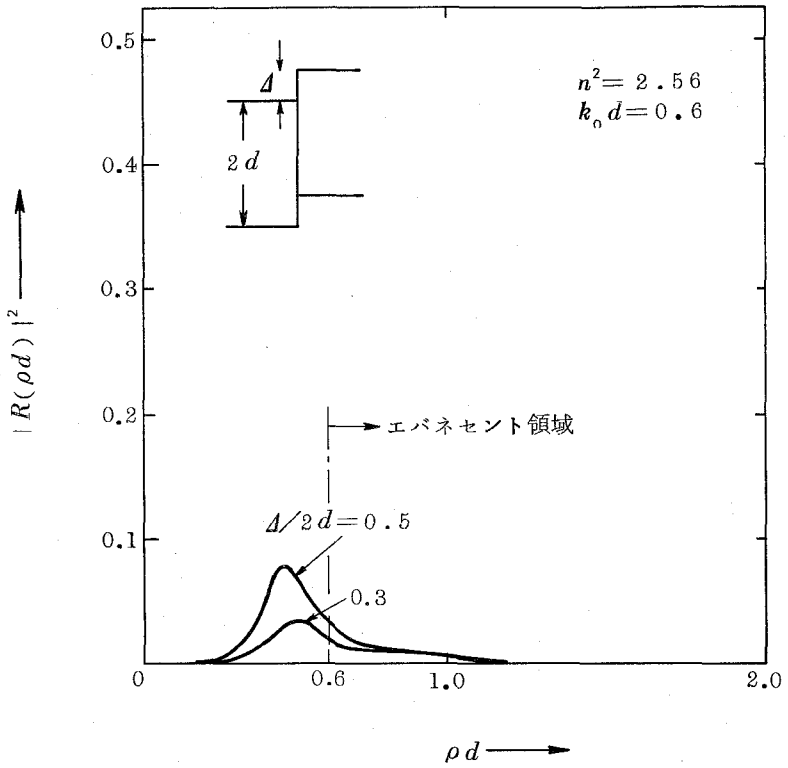


図４．８　反射放射電力のスペクトル分布

（$k_0 d = 0.6$）

図４．９及び図４．１０に，図４．５及び図４．７の透過放射電力の電力スペクトル分布をもとに，鞍部点法を用いて算出した放射パターンを示す．但し，波の進行方向が図４．９及び図４．１０の$\theta = 0°$に対応している．また，両図とも軸ずれ$\Delta/2d = 0.9$の場合の放射電界の最大値で規格化してある．図４．９及び図４．１０において，軸ずれが大きくなるにしたがって，図４．２の軸ずれにおける前方下側（$\theta < 0°$）への放射が，前方上側（$\theta > 0°$）への放射に比べ増加していくのがわかる．図４．９と図４．１０を比較すると，$k_0 d = 0.6$の場合の方が，$k_0 d = 1.0$の場合に比べて放射パターンが乱れ，且つ放射パターンが若干広がっていることがわかる．

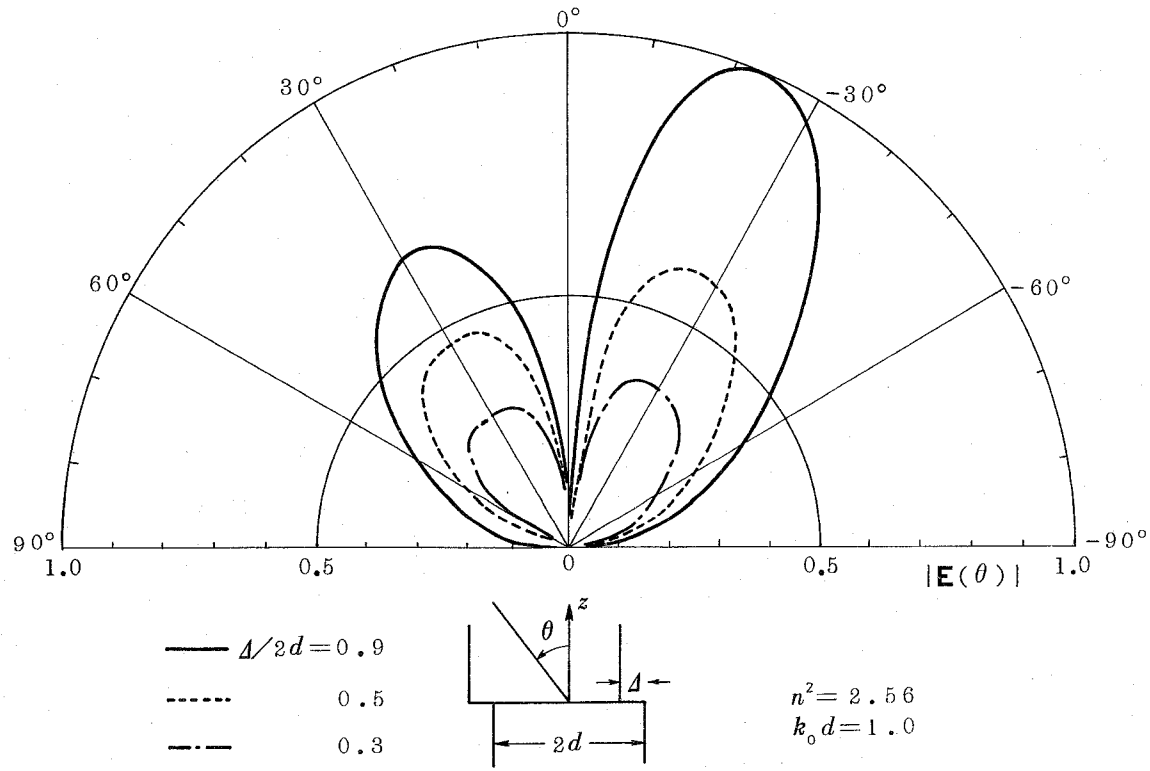


図４．９　放射電界分布（$k_0 d = 1.0$）

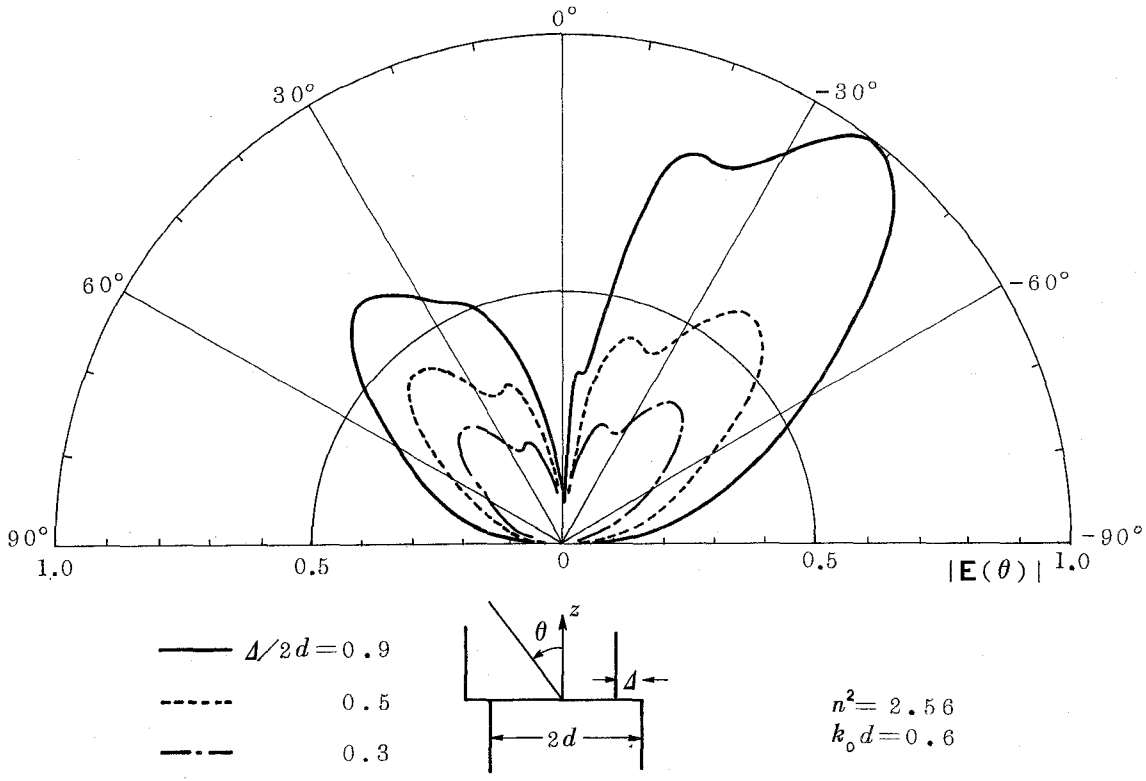


図４．１０　放射電界分布（ $k_0 d = 0.6$ ）

4．4　結　　言

最小2乗誤差法を用いる誘電体線路の不連続部の解析法について述べ，この手法を適用して誘電体スラブ線路の軸ずれの解析を行なった．その結果，透過係数はもちろんのこと，従来省略されていた反射波や反射放射波の各電力をも求めることができた．また，放射波に関してはその電力スペクトル分布と放射パターンを求め，線路の軸ずれによる放射電力とその放射方向を明らかにした．更に，最小2乗誤差法と今まで通常用いられていた変分法との関係についても明らかにし，変分法の適用範囲を境界条件を解く問題にまで拡張した．今後の課題としては，本方法を多モード線路や屈折率分布が一様でない線路の不連続部，光源と線路との接続部，線路と受光器との接続部等の解析に応用することを考えている．

第5章　結　　論

本章では，本研究の成果を総括して述べる．著者は，本論文において変分法を用いるうえで重要な問題となっている変分表現式の導出を最小作用の原理を用いることによって統一的に行ない，変分表現式を見つける困難を取り除いた．更に，変分法の適用範囲を境界条件を解く問題にまで広げた．

第2章では，電磁界における最小作用の原理について述べ，その原理を用いると電磁界の基本法則であるMaxwell の方程式そのものが導出できることを示した．更に，この原理を用いて共振周波数，伝搬定数及びインピーダンスに対する変分表現式を統一的に導出した．また，Reactionの概念を用いて変分表現式を導出する方法との関係を明らかにするために，作用量の停留性とReactionの停留性とが一致することを示した．

第3章では，電磁波と弾性波とが共存しているような系における最小作用の原理について述べ，その原理を用いて解く方法とMaxwellの方程式及びNewtonの方程式を連立させて解く方法とが同等であることを示した．次に，この最小作用の原理を用いて圧電性弾性波に対する共振周波数や伝搬定数に対する変分表現式を導出し，それらの変分表現式は，特別な場合として電磁波に対する変分表現式や純粋の弾性波に対する変分表現式をも含んでいることを示した．

第4章においては，最小2乗誤差法の考えを用いて変分法の適用範囲を境界条件を解く問題にまで広げ，その考えを用いて誘電体線路の不連続部に関する解析手法を示し，その手法を用いて誘電体スラブ線路の軸ずれの解析を行なった．その解析においては，軸ずれ量による反射電力，透過電力，放射電力，放射パターンの変化等を求めた．

以上，本研究によって得られた成果が，今後の電磁界理論および通信工学の発展に多少なりとも寄与することができるならば，著者の最も幸いとするところである．

謝　　辞

本研究を行なうに際し，終始御懇切な御指導，御激励を戴いた大阪大学工学部熊谷信昭教授，ならびに種々有益な御教示，御助言を戴いた大阪大学工学部板倉清保教授に衷心より感謝の意を表わす．

大阪大学大学院在学中には，通信工学一般に関して御指導，御教示を戴いた大阪大学工学部青柳健次名誉教授，笠原芳郎名誉教授，滑川敏彦教授，手塚慶一教授，中西義郎教授，児玉慎三教授に深謝する．

本研究遂行にあたって，種々有益な御討論，御助言を戴いた大阪大学工学部松原正則助教授，倉薗貞夫助教授，堤誠講師，森田長吉助手，桜井照男技官，近畿大学理工学部助手山口孜博士に深謝する．

また，本研究に関して御協力戴いた大阪大学大学院稲垣晴一氏に感謝するとともに，有益な御助言を戴いた大阪大学工学部助手塩沢俊之博士に感謝する．

さらに，日頃御討論戴いた大阪大学大学院大高真人氏（現在，福井大学）をはじめとする熊谷研究室の諸兄に厚く御礼を申し上げる．

文　　献

(1) 森下克己，熊谷信昭："電磁界解析における変分表現式の統一的な導出について"，信学論(B)，**J59-B**，3，p. 165 (昭51-03).

(2) K. Morishita and N. Kumagai："Unified Approach to the Derivation of Variational Expression for Electromagnetic Fields"，IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques，to be published in the January 1977 issue.

(3) 森下克己，熊谷信昭："電磁界の解析における変分表現式の導出について"，昭49信学全大，742.

(4) 森下克己，熊谷信昭："電磁界の解析における変分表現式の導出について"，信学会マイクロ波研資，**MW74**-96 (昭49-12).

(5) 森下克己，熊谷信昭："インピーダンスに関する変分表現式の導出について"，昭51信学総全大，484.

(6) V.H. Rumsey："Reaction concept in electromagnetic theory"，Phys. Rev.，**94**，6，p. 1483 (June1954).

(7) A.D. Berk："Variational principles for electromagnetic resonators and waveguides"，IRE Trans.，**AP-4**，2，p. 104 (April 1956).

(8) R.F. Harrington："Time-harmonic electromagnetic fields"，p. 340，McGraw-Hill，New York (1961).

(9) L. Cairo and T. Kahan："Variational techniques in electromagnetism"，Gordon and Breach，New York (1965).

(10) 森下克己，熊谷信昭："圧電性媒質中の弾性波に関する変分表現式の統一的な導出について"，信学技報，**76**，57，MW76-22 (昭51-06).

(11) 森下克己，熊谷信昭："圧電性媒質中の弾性波に関する変分表現式の統一的な導出について"，信学論(B)(技術談話室)，採録決定.

(12) 森下克己，稲垣晴一，熊谷信昭："誘電体スラブ線路の接続部における軸ずれの解析"，昭51信学会光・電波全大，333.

(13) 森下克己，稲垣晴一，熊谷信昭："最小2乗誤差法を用いた誘電体線路

の不連続部の解析”，輻射科学研資（昭51-12）.

(14) J. Brian Davies：“A least-squares boundary residual method for the numerical solution of scattering problems”, IEEE Trans., **MTT-21**, 2, p. 99 (Feb. 1973).

(15) H. Oraizi and J. Perini：“A numerical method for the solution of the junction of cylindrical waveguides”, IEEE Trans., **MTT-21**, 10, p. 640 (Oct. 1973).

(16) 安浦亀之助，富田正治：“Rayleighの仮説による光導波路の解析”，信学技報，**76**, 77, MW76-39（昭51-07）.

(17) B. Rulf：“Discontinuity radiation in surface waveguides”, J. Opt. Soc. Amer., **65**, 11, p. 1248 (Nov. 1975).

(18) S. F. Mahmoud and J. C. Beal：“Scattering of surface waves at a dielectric discontinuity on a planar waveguide”, IEEE Trans., **MTT-23**, 2, p. 193 (Feb. 1975).

(19) D. Marcuse：“Radiation losses of tapered dielectric slab waveguides”, Bell Syst. Tech. J., **49**, 2, p. 273 (Feb. 1970).

(20) G. H. Brooke and M. M. Z. Kharadly：“Step discontinuities on dielectric waveguides”, Electron. Lett., **12**, 18, p. 473 (Sep. 1976).

(21) D. Gloge：“Offset and tilt loss in optical fiber splices”, Bell Syst. Tech. J., **55**, 7, p. 905 (Sep. 1976).

(22) C. M. Miller：“Transmission vs transverse offset for parabolic-profile fiber splice with unequal core diameters”, Bell Syst. Tech. J., **55**, 7, p. 917 (Sep. 1976).

(23) 例えば，砂川重信：“理論電磁気学”，p. 349，紀伊国屋書店（1965）.

(24) K. Kurokawa：“Electromagnetic wave in waveguides with wall impedance”, IRE Trans., **MTT-10**, 9, p. 314 (Sep. 1962).

(25) M. Matsuhara and N. Kumagai : "Theory of coupled open transmission line and its applications", IEEE Trans., **MTT-22**, 4, p. 378 (Apr. 1974).

(26) 小西良弘："VHF, UHF帯フェライト回路素子の特性とその設計に必要な近似計算法"，NHK技術研究，**19**, 4, p. 46 (昭42).

(27) ランダウ，リフシッツ："場の古典論"，東京図書，p. 79 (1972).

(28) B. A. Auld : "Acoustic fields and waves in solids", vol. II, John Wiley & Sons Inc., p. 350 (1973).

(29) ibid., vol. I, p. 47.

(30) 牧本利夫，佐藤真一："圧電性弾性波の伝搬定数の変分表現式"，信学論 (B), **54-B**, 7, p. 442 (昭46-07).

(31) 大越孝敬，三好旦六："平面回路"，オーム社，7章 (1975).

(32) M. Ohtaka, M. Matsuhara and N. Kumagai : "Analysis of the guided modes in slab-coupled waveguides using a variational method", IEEE J. Quantum Electron., **QE-12**, 7, p. 378 (July 1976).

(33) K. Okamoto and T. Okoshi : "Analysis of wave propagation in optical fibers having core with α-power refractive-index distribution and uniform cladding", IEEE Trans., **MTT-24**, 7, p. 416 (July 1976).

(34) 小西良弘："電磁波回路"，オーム社 (1976).

(35) D. L. Bisbee : "Measurements of loss due to offsets and end separations of optical fibers", Bell Syst. Tech. J., **50**, 10, p. 3159 (Dec. 1971).

(36) 関沢義："光ファイバ通信小特集／6. 光回路素子"，信学誌，**59**, 7, p. 728 (昭51-07).

(37) D. Marcuse : "Light transmission optics", Van Nostrand Reinhold, New York (1972).

付　　録

Ⅰ. Reactionの概念を用いる方法について

Reactionの概念を用いるRumseyの方法，文献(6)では，3次元の場合のReactionは

$$<a,\ b> = \int_V \left[\mathbf{E}(b)\cdot d\,\mathbf{J}(a) - \mathbf{H}(b)\cdot d\,\mathbf{K}(a) \right] \qquad (A.1)$$

と定義され，伝搬モードを取り扱うような，2次元の場合のReactionは，これとは全く別個に

$$<a,\ b> = \int_S \left[\mathbf{J}(a,x,y)\cdot\hat{\sigma}\cdot\mathbf{E}(b,x,y) + \mathbf{K}(a,x,y)\cdot\hat{\sigma}\cdot\mathbf{H}(b,x,y) \right] dxdy \qquad (A.2)$$

但し，

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と定義されており，それらの間の関係などは示されておらず，従って基本となるReactionの定義そのものに統一性が欠けている。

Ⅱ. Cairo及びKahanの方法について

Cairo及びKahanの方法，文献(9)では，個々の問題に対して，まず

$$Lf = \lambda Mf, \quad L, M：演算子 \qquad (A.3)$$

なる形の式を導き，次にL, Mに対するTranspose Operator L^T, M^T, fに対するTranspose Field ϕ

$$L^T\phi = \lambda M^T\phi \qquad (A.4)$$

を導入すると，λに対する変分表現式が

$$[\lambda]=\frac{\int \phi' L f' dv}{\int \phi' M f' dv} \tag{A.5}$$

で与えられることを述べている．しかしながら，問題を式（A．3）の形に書き表わすためには，個々の具体的な場合についてそれぞれかなりの工夫や技巧を要する．

Ⅲ．作用量 $J=0$ の証明

波源 $\mathbf{J}$，ρ，$\mathbf{F}$ が存在しないとすると，作用量を表わす式（3.14）は

$$J=\int_0^\infty df \int_V \Big[\frac{1}{2}(\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{D}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}^*)+\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*-\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{B})$$

$$+\frac{1}{2}(m\omega^2\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}-\mathbf{S}:\mathbf{T}^*)+\frac{1}{2}(m\omega^2\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}-\mathbf{S}^*:\mathbf{T})\Big]dv \tag{A.6}$$

となる．一方，正しい界はMaxwellの方程式とNewton の方程式とを満足しなければならないから，正しい界に対しては

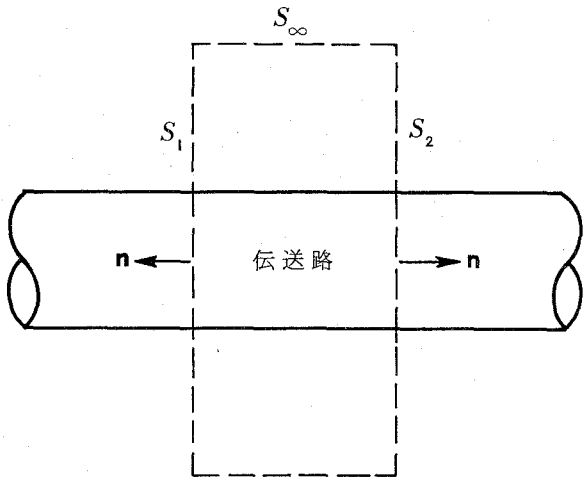
$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)&=j\omega(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*-\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{B})\\ \nabla\cdot(-\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{T})&=-j\omega(m\omega^2\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{u}-\mathbf{S}^*:\mathbf{T})\end{aligned} \tag{A.7}$$

なる関係が成り立っている．式（A．7）とその複素共役を式（A．6）に代入し，Gaussの定理を適用する

$$J=\int_0^\infty df \int_{S+S_d}\Big[\frac{1}{2j\omega}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*-\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}^*+\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{T})\Big]\cdot\mathbf{n}\,ds \tag{A.8}$$

となる．不連続面 S_d の両側では，$\mathbf{n}\times\mathbf{E}$，$\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ および $\mathbf{v}$ は連続であるから，上式において S_d に関する面積分は零となる．さらに共振器では，S 上で $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$ または $\mathbf{n}\times\mathbf{H}=0$，$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}=0$ または $\mathbf{v}=0$ が成立するから，結局正しい界に対しては $J=0$ となる．また，伝送線路においては，図A．1に示すように，$S=S_1+S_2+S_\infty$ とすると，伝送モードに対しては S_∞ の積分項は零となり，S_1，S_2 に関する面積分はそれぞれの面において $\mathbf{n}$ が逆方向になることか

ら打ち消し合って零となる．したがって結局，伝送線路の場合においても，正しい界に対しては $J=0$ となる．



図A．1　積分領域

S_∞ は，伝送路を囲む半径が無限大の円筒面，S_1，S_2 は伝送路に垂直な横断面．