



Title	上界法による不均質材料の塑性強度と変形挙動に関する研究
Author(s)	大村, 勝
Citation	大阪大学, 1990, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/520">https://hdl.handle.net/11094/520</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

上界法による不均質材料の  
塑性強度と変形挙動に関する  
基礎的研究

大 村 勝

上界法による不均質材料の  
塑性強度と変形挙動に関する  
基礎的研究

1989年11月

大村 勝

# 目 次

第 1 章 緒 論 .....	5
参考文献 (第 1 章) .....	10
第 2 章 軸対称変形下における楕円体空孔を 有する多孔質材料の強度解析 .....	13
2.1 緒 言 .....	13
2.2 記号の定義 .....	14
2.3 解析モデル .....	14
2.4 動的可容速度場 .....	19
2.4.1 回転対称ユニットセル .....	19
2.4.2 各領域における動的可容速度場 .....	20
2.5 変形エネルギー消散率の計算 .....	38
2.6 降伏強度の計算 .....	39
2.7 結 言 .....	40
参考文献 (第 2 章) .....	41
第 3 章 等方性多孔質材料の三次元変形下における強度解析	
3.1 緒 言 .....	43
3.2 モデルの設定 .....	43
3.3 変形 of 速度場 .....	46
3.3.1 ユニットセルの z 方向への変形 .....	47
3.3.2 ユニットセルの三次元変形 .....	50
3.4 ひずみ速度 .....	53
3.5 変形エネルギー消散率 .....	55
3.6 等方性多孔質体の降伏条件 .....	57
3.7 実験結果と計算結果の考察 .....	59
3.8 多孔質材料の降伏条件との比較 .....	63
3.9 結 言 .....	64

参考文献 (第3章)	64
第4章 異方性多孔質材料の降伏条件式	65
4.1 緒言	65
4.2 解析手法	65
4.3 解析結果と考察	65
4.4 結言	71
参考文献 (第4章)	71
第5章 複合材料の強度解析	73
5.1 緒言	73
5.2 解析	73
5.2.1 第二相領域における変形速度場 と内部変形エネルギー消散率	76
5.2.2 母材材料と第二相材料との境界面における せん断変形エネルギー消散率	77
5.3 降伏強度の計算	78
5.4 解析結果と考察	80
5.5 結言	82
参考文献 (第5章)	82
第6章 第二相粒子を含む焼結銅の変形と強度特性	83
6.1 緒言	83
6.2 実験	83
6.3 重量分率、相対密度の定義	88
6.4 実験結果と考察	88
6.4.1 第二相がステンレス線の場合	88
6.4.2 第二相がタングステンカーバイト粒の場合	99

6.5 結 言 .....	99
参考文献 (第6章) .....	100
第7章 積層金属板の引張変形特性 .....	101
7.1 結 言 .....	101
7.2 モデル解析 .....	102
7.3 実験方法 .....	108
7.3.1 試験片材料と接着条件 .....	108
7.3.2 試験片形状 .....	109
7.3.3 実験条件 .....	109
7.3.4 せん断接着力の測定 .....	109
7.4 実験結果と考察 .....	110
7.4.1 異方性の援軸をそろえて 貼り合わせた場合の結果 .....	110
7.4.2 異方性の主軸をずらして 貼り合わせた場合の結果 .....	113
7.4.3 積層板の応力-ひずみ関係 .....	116
7.5 結 言 .....	118
参考文献 (第7章) .....	118
第8章 積層金属板の $r$ 値と限界絞り比 .....	119
8.1 結 言 .....	119
8.2 実験条件 .....	119
8.3 解析方法と解析結果と実験結果の一例 .....	121
8.3.1 任意の方向に貼り合わせた 場合の $r$ 値の変化 .....	121
8.3.2 合わせ板を構成する板材の 板厚比による $r$ 値の変化 .....	124

8.3.3	任意の方向に貼り合わせた 合わせ板の引張強度の変化	125
8.3.4	合わせ板における $r$ 値の変化	125
8.4	深絞り実験結果と考察	128
8.4.1	合わせ板にすることによる耳の防止	128
8.4.2	$\bar{r}$ 値と限界絞り比との関係	131
8.4.3	板境界面のすべりによる限界絞り比の低下	133
8.4.4	重ね板、合わせ板のエリクセン値	135
8.4.5	合わせ板の $n$ 値に対する限界絞り比の変化	137
8.4.6	合わせ板の $\bar{r}$ 値に対する限界絞り比の変化	139
8.5	結 言	140
	参考文献 (第8章)	141
第9章	総 括	143
	謝 辞	146

## 第 1 章 緒 論

弾性力学や塑性力学に基礎をおく金属材料の強度や加工力に関するこれまでの評価法は、多くの場合材料は均質等方であり、しかも変形の前後で体積変化を示さないなどの仮定が導入されている。構造用炭素鋼をはじめとする各種合金材料は、巨視的に見れば一様な材料であっても微視的に見れば多結晶構造を持ち、本質的には結晶境界、種々の不純物や介在物などを含む不均質材料と見なすべきである<sup>(1)</sup>。さらに焼結金属の場合には不均質さが一層顕著である。しかしながら、これら不均質材料の挙動を、その微視的構造を厳密に考慮して理論的に評価することは、大変な努力を必要とする。

ところで、近年各種部材の使用環境の多様化・過酷化にともない、単一金属材料では使用に耐えられない部分に対して複合材料への転換が進み、必然的にその材料開発が活発化してきた。また、たとえばプラスチック、ガラス、セラミックス、ゴムなど、金属材料以外の工業用材料の使用量が増加している。そしてこれら金属材料以外の材料と金属との複合化による材料の高機能化が重要な工学的問題として注目されている。これらの複合化した材料は、従来の金属材料とは異なり巨視的に見ても強い異方性を持ち、さらに不均質であって一様な材料と考えることはできない。こうした不均質・異方性材料に対してその強度を評価し、設計基準を確立するための強度解析法を確立することは、工学上からも工業的必要性からも急務であるといえよう<sup>(2)</sup>。

微視的あるいは巨視的不均質材料の力学特性を調べた研究は、少なからず行なわれている。それについて以下に述べる。

複合材料の弾性係数、弾塑性、弾性異方性、強度に関する基礎的、理論的研究としては、硬質層と軟質層を含む複合材料の弾性異方性を評価するために、方位依存性を考慮してテンソル解析した報告<sup>(3)~(5)</sup>、母材材料



と第二相材料それぞれの挙動に注目して、不均質材料の弾性係数を計算した研究<sup>(6)</sup>などの報告がある。工業用として広く用いられている複合材料<sup>(7)</sup>のうち、金属系複合材料とりわけアルミ合金を母材とした繊維強化型、および粒子分散型複合材料については、その変形挙動<sup>(8)</sup>や機械的性質<sup>(9)</sup>、<sup>(10)</sup>、<sup>(11)</sup>に関する研究報告がなされている。金属とセラミックスの複合材料に対しては、アルミニウム母材中にボロン繊維を複合化した材料の弾塑性解析<sup>(12)</sup>を行なったものや、それらの強度特性<sup>(13)</sup>などについての報告がある。さらに積層あるいは繊維強化構造をもつ複合材料の接触問題<sup>(14)</sup>それらの非弾性解析および構成式<sup>(15)</sup>なども報告されている。しかしながらいずれも加工力の評価は行なわれていない。

焼結材料に関する東郷らの研究<sup>(16)</sup>、<sup>(17)</sup>は、二相焼結材料の弾塑性解析を行なったこと、WC-Co系超硬合金の微視的応力ひずみを理論的・実験的に評価したという点で注目すべきものである。粒子分散型複合材料に関しては、周期的に分布する空孔をもつ弾性体の有効弾性定数を求めたもの<sup>(18)</sup>、空孔あるいは空孔の部分に硬質の介在物が入った材料の応力関数による解析<sup>(19)</sup>、周期的に空孔が分散する場合の高次混合モデルによる解析<sup>(20)</sup>などもあるが、解析対象物体は弾性体に限られている。したがって加工力の評価にまで至っていない。多田<sup>(21)</sup>は純アルミニウムとアルミ合金(2024)の粉末を母材材料とし、添加粉末として電解銅粉・化学用純鉄粉を用いた金属系複合材料の力学的挙動と生産加工に関して報告したが、解析は軸対称変形に関してのみ行なっている。

延性材料や母材料中に空孔を有する多孔質材料の力学的解析ならびに破壊についても多くの報告がある。P. F. Thomason<sup>(22)</sup>による立方体空孔の内部くびれによる延性破壊の研究、F. A. McClintock<sup>(23)</sup>の、円柱状空孔の成長による延性破壊に関する研究などが代表的なものである。さらにA. Needleman<sup>(24)</sup>は、均質等方弾塑性体内の空孔の成長を単軸、平面ひずみ条件において解析し、外力の増加と共に空孔の寸法と形状が変化する状態を明

らかにし、空孔まわりの塑性域の進展についても明らかにした。またA. L. Gurson<sup>(25)</sup>は、多孔質延性材料に対する流れ則と降伏基準を、均質等方のMisesの降伏条件にしたがう剛完全塑性材料中に、円柱状あるいは球状の空孔が介在する解析モデルを考え、上界法により評価している。この結果を用いて、空孔の生成と成長による延性破壊の連続体理論的検討も試みられている。しかしながらこれらの解析は、いずれの場合も均質等方材料中に立方状、円柱状あるいは球状の空孔が存在する場合のみである。しかも、工業的に最も重要で、理論的応用範囲のひろい任意のアスペクト比を持つ楕円体空孔の場合については解析されていないし、加工力の推定は全く行なわれていない。

以上概観したように、複合材料や多孔質材料に対してその微視的構造を考慮することによって塑性強度や加工力の評価を行なった研究は、多くなくまだ十分とはいえない。そこで、本論文では、多孔質材料や複合材料などを不均質材料と考え、材料の強度基準と加工力の評価を目的とした近似解析を行なう。また工業的に広く利用されている積層板は第二相材料が無限に扁平になった場合であるとして、その強度と変形挙動についても考察する。ただし、これまでの塑性力学で扱われている多くの方法とは異なり、巨視的不均質材料とみなすことによつて多孔質材料と複合材料をモデル化し、その塑性強度さらには加工力を求めるため上界法による解析を行ない、解析結果に対し実験検証を加える。さらに加えて、粒子強化型、短繊維強化型、もしくは積層型の複合材料について、多孔質材料に対するものと同じ可容変形速度場を用いて変形抵抗の解析を行なう。その結果、硬質層を含む複合材料も多孔質材料（焼結材料、セラミックスあるいはHIP、CIP処理された材料などがこれに含まれる）も解析の基礎式は同じとなり、これら不均質材料の塑性強度と加工力の解析を統一的に考察できることを示す。

本論文において用いる上界法は、変形抵抗に対して正解ではなく正解よ

りも大きな解を与える。したがって材料の使用に当たっては危険側に、加工に当たっては安全側の解を与えることになる。得られた結果を実験結果と比較すると、上界法による解析にもかかわらず、かなりよい一致が認められる。したがって本解析による強度および加工力の推定値は実際の工学的応用に際して有用な評価基準になるように考えられる。また本論文で提案した解析法は、従来の研究において扱えなかった以下の利点をもっていることを示す。

- (1) 複合材料・多孔質材料、いずれの場合も同じ可容変形速度場を使って統一的に解析できる。
- (2) 複合材料・多孔質材料どちらに対しても、上界法を用いて同じ変形の速度場により変形強度が推定でき、またその結果を用いて加工力の推定が可能である。
- (3) 第二相の空孔や介在物のアスペクト比を任意に変化させることにより、それぞれ異方性多孔質材料あるいは異方性複合材料としての解析が可能である。

本論文は9章から構成されており、第2章以下の概要は次のとおりである。第2章においては、回転楕円体形状の空孔をもつ多孔質材料に対して、上界法を用いて行なった三次元軸対称応力状態の強度解析の結果を示す。ここでは楕円体空孔の長軸と短軸の比、すなわちアスペクト比によって異方性が変わると考えて解析を行なった。本章における上界法による解析結果を、以下第3章～第5章で各種の問題に応用する。

第3章においては、第2章と同じ可容変形速度場を用いて、球形の空孔を有する多孔質材料の強度解析結果を示す。単軸引張、等二軸引張、等三軸引張、単軸圧縮、等二軸圧縮、等三軸圧縮およびせん断変形に対する解析結果を示し、多孔質体の降伏曲面を求める。

第4章においては、第2章の強度解析結果を用いて多孔質体の降伏曲面

を与え、いままでに提案されている多孔質材料の降伏条件との比較検討を行う。空孔が球状および回転楕円体状の多孔質体の降伏曲面に関する解析結果を示し、異方性多孔質材料の降伏について考察する。

第5章においては、母材より硬い粒子が分散して含まれている複合材料の場合について、第2章の強度解析における空孔を硬質の第二相におきかえて解析する。

第6章においては、第5章までの強度解析の実験例として電解銅粉末中に金属線あるいはタングステンカーバイト粒をいれて焼結した複合材料の単軸引張実験を行った結果について述べる。また、実在する複合材料の場合との比較をも行う。

第7章においては、積層板の引張変形特性を求めるために異方性の影響を考慮に入れて上界法による強度解析を行う。解析結果を実験的に検討するため、有機接着材で接着した積層板を用いた実験を試みる。

第8章においては、第7章の強度解析結果を実際の深絞り加工に適用し、 $r$  値が耳高さに及ぼす影響などについて評価を行う。 $r$  値の大きな主軸の方向に、 $r$  値の小さい主軸の方向を重ねて積層した積層板の場合、変形が相互に拘束し合う結果耳の発生が抑制され、耳高さが減少することを明らかにする。また、接着効果を評価するために、有機接着剤を用いずに単に重ねた場合や、板界面に潤滑を施した場合についても実験を行ない、接着しない場合は限界絞り比が低いことを示す。

第9章は、本論文の総括である。

## 参 考 文 献

- (1) 大南編, マイクロメカニク入門 (1980) オーム社.
- (2) Kelly, A. 村上訳, 複合材料 (1971) 丸善.
- (3) Christensen, R. M. and Lo, K. H., J. Mech. Phys. Solids., 27 (1979) 315.
- (4) Christensen, R. M. and Waals, F. M., J. Compos. Mater., 6 (1972) 518.
- (5) Hashin, Z. and Rosen, B. W., Trans. ASME, Series E 31 (1964), 223.
- (6) Hashin, Z., Trans. ASME, Series E 29 (1962) 143.
- (7) Chawla, K. K., Composite Materials, (1987) Springer-Verlag.
- (8) 柳沢・矢野, 日本金属学会会報, 26 (1987) 862.
- (9) 砥綿・生野・山田, 日本金属学会誌, 51 (1987) 243.
- (10) Than, T. L., 逢坂・合瀬・森田, 日本金属学会誌, 51 (1987) 864.
- (11) Tsangarakis, N., Andrews, B. O. and Cavallaro, C., J. Compos. Mater., 21 (1987) 481.
- (12) Rizzi, A. R., Dole, J. F. and Sun, C. T., J. Compos. Mater., 21 (1987) 734.
- (13) Ochiai, S. and Osamura, K., Metall. Trans. A, 18A (1987) 673.
- (14) King, R. B. and O'sullivan, T. C., Int. J. Solids Struct., 23 (1987) 581.
- (15) Hamamoto, A. and Hyer, M. W., Int. J. Solids Struct., 23 (1987) 919.
- (16) 東郷・田川・大塚, 日本機械学会論文集(A), 53 (1987) 1870.
- (17) 東郷・田川・大塚, 日本機械学会論文集(A), 53 (1987) 1969.
- (18) Nemat-Nasser, S. and Taya, M., Quaterly of Applied Math. 39 (1981) 43.

- (19) Chen, H. S. and Acrivos, A., Int. J. Solids Struct., 14  
(1977) 331.
- (20) Toledano, A. and Murakami, H., Int. J. Solids Struct.,  
23 (1987) 989.
- (21) 多田, 学位論文, 大阪大学 (1988)
- (22) Thomason, P. F., J. Inst. Metals., 96 (1968) 360.
- (23) McClintock, F. A., Trans. ASME., Series E. 35 (1968) 363.
- (24) Needleman, A., Trans. ASME., Series E. 39 (1972) 964.
- (25) Gurson, A. L., Trans. ASME., Series H. 99 (1977) 1.

## 第2章 軸対称変形下における 楕円体空孔を有する 多孔質材料の強度解析

### 2.1 緒言

焼結金属材料の塑性加工は、素材を所定の形状にするとともに、その材料を高密度化し、強度を高めるための方法として最近広く用いられるようになった。このため焼結金属材料の加工力や、加工された製品の強度を推定するための解析が必要となってきた。いままでの塑性力学は、材料を非圧縮性と仮定しているため、これら圧縮性の焼結金属素材の解析には適用できない。

粉末を焼結して作られた多孔質材料(以下、単に多孔質材料という)は、以下のような特性をもつ。

- (1) 塑性変形すれば体積は変化する。例えば、静水圧力のみ負荷によって、一般の金属材料は体積変化をしないが、多孔質材料は空孔の縮小・拡大によって体積変化をすることができる。
- (2) 強度は、空孔の体積率にも依存する。

以上の因子を考慮して、多孔質材料の塑性変形に関する塑性力学がいくつか提案されている<sup>(1)~(8)</sup>。

大矢根ら<sup>(4)</sup>は、母材材料をvon Misesの降伏条件とLevy Misesの応力-ひずみ関係にしたがうと仮定して、多孔質材料の応力-ひずみ関係と降伏条件を導いた。さらに、多孔質材料に対する上界法とすべり線場理論を提案した<sup>(5)</sup>。

また多田<sup>(9)</sup>は、多孔質材料や複合材料のいずれにも適用できる速度場を用いた上界法によって、軟質母材中に硬質の第二相材料を含む複合材料の強度を求めたが、軸対称変形下の引張・圧縮のみである。

本章において、これらに各軸方向の応力をベクトルの的に重ね合わせることによって、三次元軸対称応力状態における解析を行ない、多軸応力下の降伏条件まで検討する。またさらに、空孔の形状が回転楕円体と仮定して、そのアスペクト比によって多孔質材料の異方性が変わること示し、異方性多孔質材料の降伏条件を明らかにする。

多孔質材料の空孔が、最初は球形であっても、塑性変形後には球形ではなく、楕円体となるので、本章においては、楕円体多孔質材料についての降伏条件を明らかにする。したがって、母材中に楕円体の空孔が長軸の方向をそろえて、一様に分散しているような異方性多孔質材料を考える。なお、変形前において球形であった空孔が、変形後楕円体になる場合の計算も可能である。本章においては軸対称変形のみに限って解析を行なった。

## 2. 2 記号の定義

本章を含め、以下第5章までは、表2.1, 2.2に示す記号を共通的なものとして定義する。これ以外の記号は、その度に説明して用いる。

## 2. 3 解析モデル

図2.1(a)に示すように、形状が一定の回転楕円体空孔が、その対称軸を一定方向にそろえて分布している多孔質材料を考える。この材料の降伏強度を解析するに当たり、図2.1(b)に示すようなユニットセルを用いる。ユニットセルは多孔質体と同じ母材からできた回転対称の楕円体であり、これと相似形の空孔を中心にもつ。またユニットセル中のこれら二つの回転楕円体は図2.1(a)の多孔質体の空孔とも相似形であるとする。そして、ユニットセルおよび多孔質体は同じ空孔体積率をもつものとする。

ユニットセルの降伏応力は、母材材料の強さおよび空孔の形状と体積率のみによって決まるものとする。したがって、図2.1(c)に示すように、相似形のユニットセルを対称軸を平行にして隙間なく詰め、完全に接合して



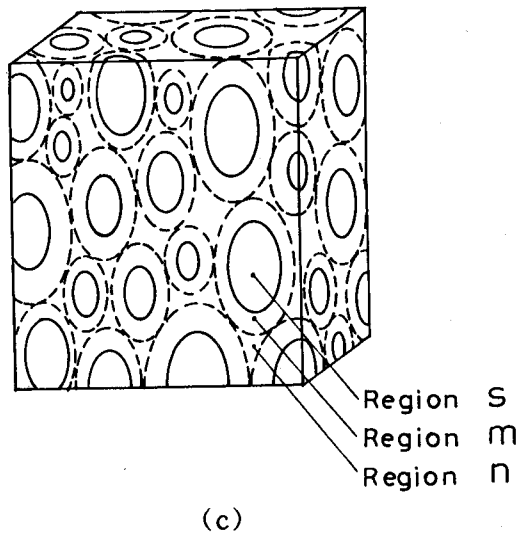
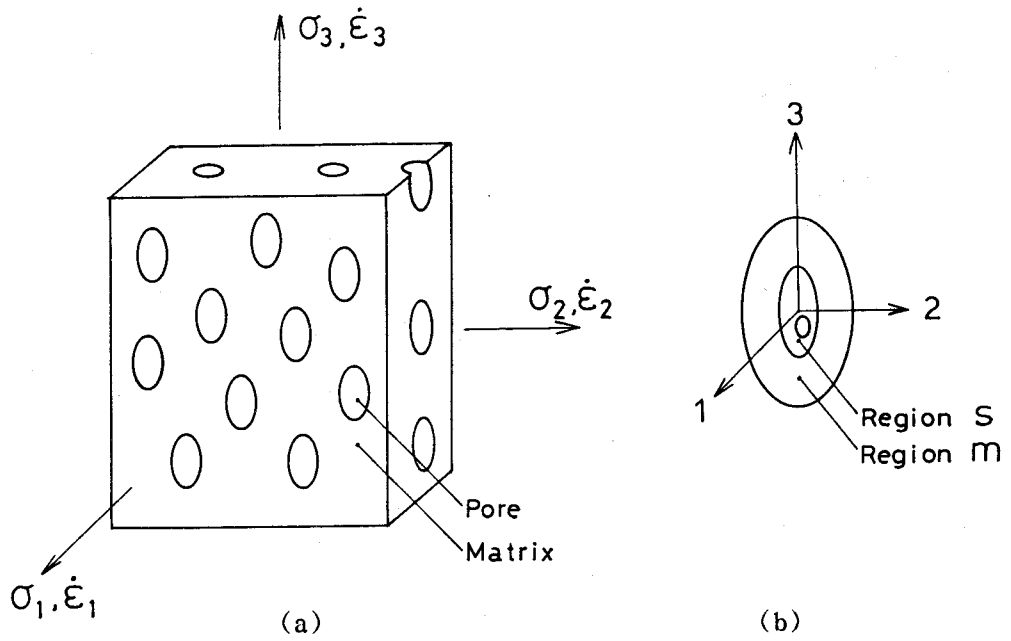


図 2.1 異方性多孔質材料の説明図

表 2. 1 使用する記号と定義

記号	説明
$x, y, z$	直交座標
$r, \theta, \psi$	球座標
1, 2, 3	主応力方向
領域 $s, m, n$	$s$ : 第二相, $m$ : 母材, $n$ : ユニットセル間の薄相
$r_{ms}$	第二相の半径
$r_{mn}$	ユニットセルの半径
$a_{ms}$	第二相の半径 (1, 2 方向)
$c_{ms}$	第二相の半径 (3 方向)
$a_{mn}$	ユニットセルの半径 (1, 2 方向)
$c_{mn}$	ユニットセルの半径 (3 方向)
$S_{ms}$	第二相と母材の境界における表面またはその表面積
$S_{mn}$	ユニットセルの表面またはその表面積
$V$	ユニットセルの体積 : $V_s + V_m$
$V_s$	第二相の体積 : $(4\pi/3)r_{ms}^3$
$V_m$	母材の体積 : $(4\pi/3)(r_{mn}^3 - r_{ms}^3)$
$V_f$	第二相の体積率 $V_f = V_s / (V_m + V_s) = (r_{ms} / r_{mn})^3$
$\lambda$	アスペクト比
$\lambda_s$	第二相材料のアスペクト比 $c_{ms} / a_{ms}$
$\lambda_m$	ユニットセルのアスペクト比 $c_{mn} / a_{mn}$
$\sigma_{sY}$	第二相の降伏強度
$\sigma_{mY}$	母材の降伏強度
$\sigma_{cY}$	複合材料の降伏強度
$\sigma_{pY}$	多孔質材料の降伏強度
$\sigma_H$	応力の静水圧成分、平均応力
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$x, y, z$ 方向の主応力 (ユニットセルに作用する応力)
$\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$	$x, y, z$ 方向の主ひずみ速度 (ユニットセルのひずみ速度)

表2. 2 使用する記号と定義

記号	説明
$\dot{\epsilon}_{s1}, \dot{\epsilon}_{s2}, \dot{\epsilon}_{s3}$	第二相内の主ひずみ速度
$\dot{\epsilon}_{mx}, \dot{\epsilon}_{my}, \dot{\epsilon}_{mz}$	母材領域内のひずみ速度
$\dot{\gamma}_{mxy}, \dot{\gamma}_{myz}, \dot{\gamma}_{mzx}$	母材領域内のひずみ速度
$\dot{\epsilon}_{mr}, \dot{\epsilon}_{m\theta}, \dot{\epsilon}_{m\varphi}$	球座標におけるひずみ速度成分 (母材領域内)
$\dot{\gamma}_{mr\theta}, \dot{\gamma}_{m\theta\varphi}, \dot{\gamma}_{m\varphi r}$	球座標におけるひずみ速度成分 (母材領域内)
$\dot{\epsilon}_{sr}, \dot{\epsilon}_{s\theta}, \dot{\epsilon}_{s\varphi}$	球座標におけるひずみ速度成分 (第二相領域内)
$\dot{\gamma}_{sr\theta}, \dot{\gamma}_{s\theta\varphi}, \dot{\gamma}_{s\varphi r}$	球座標におけるひずみ速度成分 (第二相領域内)
$u_{mx}, u_{my}, u_{mz}$	母材領域内における直交座標の速度成分
$u_{sx}, u_{sy}, u_{sz}$	第二相領域内における直交座標の速度成分
$u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}$	ユニット間の薄相における速度成分
$u_{mr}, u_{m\theta}, u_{m\varphi}$	母材領域内における球座標の速度成分
$u_{sr}, u_{s\theta}, u_{s\varphi}$	第二相領域内における球座標の速度成分
$u_{nr}, u_{n\theta}, u_{n\varphi}$	ユニット間の薄相における球座標の速度成分
$ \Delta u_{ms} $	表面 $S_{ms}$ における相対すべり速度の絶対値
$ \Delta u_{mn} $	表面 $S_{mn}$ における相対すべり速度の絶対値
[l], [m], [n]	方向余弦
$\dot{E}$	多孔質材料・複合材料の変形エネルギー消散率 (単位体積当りのエネルギー消散率)
$\dot{E}_s$	第二相の内部変形エネルギー消散率
$\dot{E}_m$	母材の内部変形エネルギー消散率
$\dot{E}_{ms}$	表面 $S_{ms}$ に沿うせん断変形エネルギー消散率
$\dot{E}_{mn}$	表面 $S_{mn}$ に沿うせん断変形エネルギー消散率
$\dot{E}_{total}$	全変形エネルギー消散率
$\alpha$	表面 $S_{ms}$ ならびに表面 $S_{mn}$ の法線と半径線のなす角
$\beta$	接線と x 軸とのなす角 (図3.10参照)
$\dot{\epsilon}_{eqm}, \dot{\epsilon}_{eqs}$	母材と第二相の相当ひずみ速度
B	接着強度のパラメータ $0 \leq B \leq 1$
P, Q	関数
R, S	相対強度 $\sigma_{sv} / \sigma_{mv}$ , 第二相と母材の降伏強度比

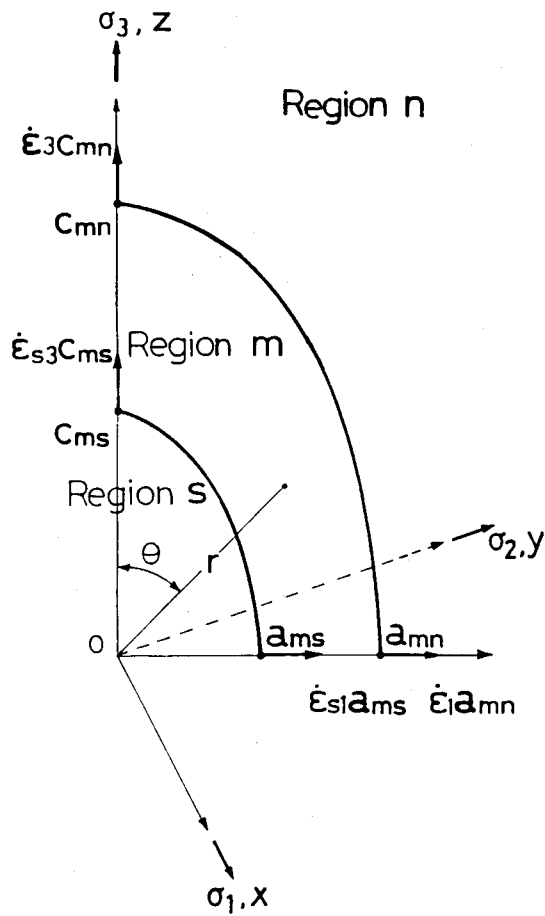


図 2.2 ユニットセルの1/4断面

作った多孔質体の降伏応力は、詰め込まれたユニットセルの大きさに関係なくなる。図2.1において、 $s$ は空孔領域、 $m$ は母材領域、 $n$ はユニットセル間の領域とする。多くのユニットが密に充填されているものと考えるので、この領域 $n$ の厚さは無視できる位に小さい。

また、多孔質体の強さは詰め込まれるユニットセルの寸法に無関係であり、図2.1(a)と(c)に示すような両多孔質体は同一の降伏応力をもつことになるので、図2.1(b)に示すようなユニットセルを用いて、図2.1(c)の多孔質体の降伏応力を求めることにより、これを図2.1(a)の多孔質体の降伏応力であるとすることができる。

母材材料そのものは、均質等方材料とし、von Misesの降伏基準にしたがい、非圧縮性剛完全塑性材料であると仮定する。

## 2. 4 動的可容速度場

### 2. 4. 1 回転対称ユニットセル

図2.2に示すように直交デカルト座標 $x, y, z$ 軸をとり、回転楕円体ユニットセルの回転軸を $z$ 軸とし、これに直角に $x, y$ 方向をとる。ユニットセルの $z$ 方向半径を $c_{mn}$ とし、 $z=0$ の円形断面の半径を $a_{mn}$ とする。また空孔の $z$ 方向半径を $c_{ms}$ 、 $z=0$ の円形断面の半径を $a_{ms}$ とする。図中 $r$ は半径である。図2.2および2.3に示すように、巨視的主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は、ユニットセルおよび多孔質体の $x, y, z$ 軸方向に作用しているものとし、以下において軸対称応力の場合を考え、 $\sigma_1 = \sigma_2$ とおく。ユニットセルおよび多孔質体の主ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ も、応力と同様、軸対称ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2$ とおく。一方、ユニットセルの空孔の $x, y, z$ 軸方向ひずみ速度を $\dot{\epsilon}_{s1}, \dot{\epsilon}_{s2}, \dot{\epsilon}_{s3}$ とする。

$\dot{\epsilon}_3 c_{mn}$ と $\dot{\epsilon}_{s3} c_{ms}$ は、それぞれユニットセルおよび空孔の $z$ 方向の速度となる。また、 $\dot{\epsilon}_1 a_{mn}$ と $\dot{\epsilon}_{s1} a_{ms}$ は、それぞれユニットセルおよび空孔の横方向速度となる。

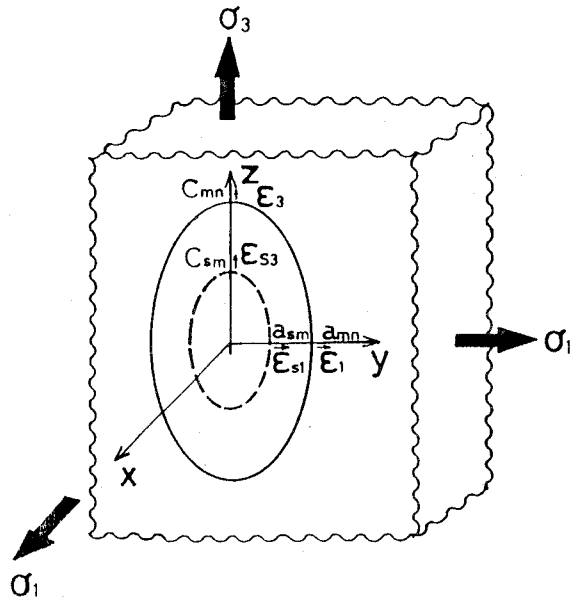


図 2.3 ユニットセルの座標軸と主応力軸

## 2. 4. 2 各領域における動的可容速度場

### (1) 薄相 n における動的可容速度場

ユニットセル間の領域 n では、一様変形の世界場であると考えて、

$$\left. \begin{aligned}
 u_{nx} &= \dot{\epsilon}_1 x \\
 u_{ny} &= \dot{\epsilon}_2 y \\
 u_{nz} &= \dot{\epsilon}_3 z
 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

とする。ただし  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ ,  $\dot{\epsilon}_3$  は巨視的ひずみ速度である。

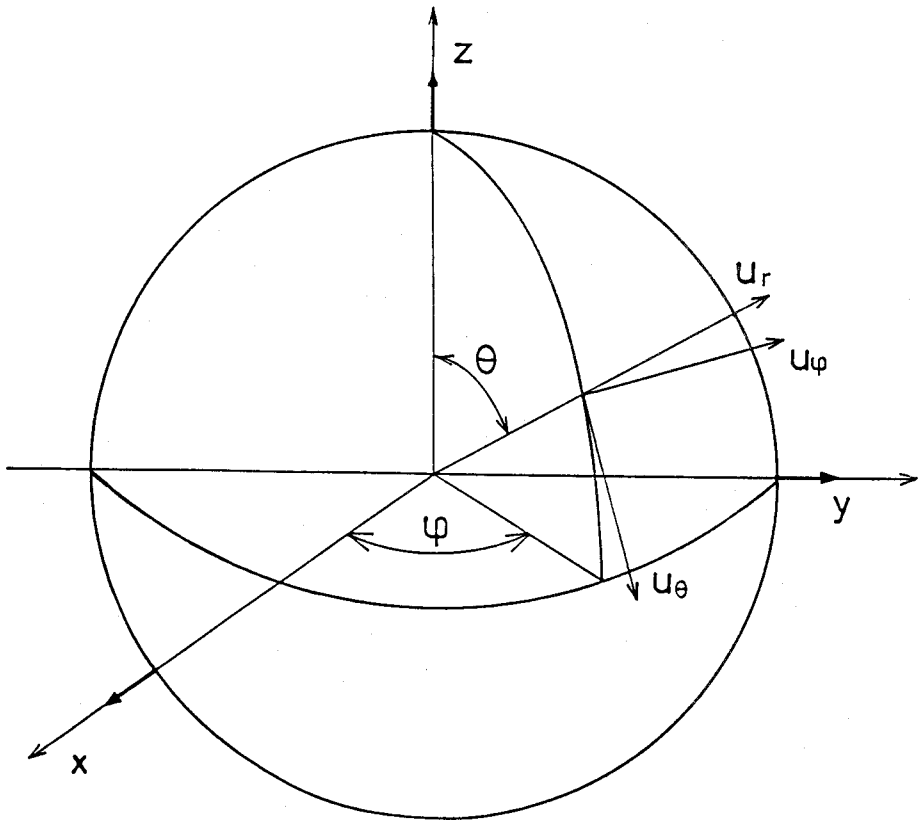


図 2. 4 球座標系

図 2. 4 に示す球座標系を参照して、 $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_\phi$  方向の方向余弦  $[l]$ ,  $[m]$ ,  $[n]$  を次のように表すことができる。

$$\begin{array}{ll}
 \text{u}_r \text{の方向} & \text{u}_\psi \text{の方向} \\
 [\ell_{nr}] = \sin \theta \cos \psi & [\ell_{n\psi}] = -\sin \psi \\
 [m_{nr}] = \sin \theta \sin \psi & [m_{n\psi}] = \cos \psi \\
 [n_{nr}] = \cos \theta & [n_{n\psi}] = 0 \\
 \\ 
 \text{u}_\theta \text{の方向} & \\
 [\ell_{n\theta}] = \cos \theta \cos \psi & \\
 [m_{n\theta}] = \cos \theta \sin \psi & \\
 [n_{n\theta}] = -\sin \theta & 
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{u}_r \text{の方向} \\ \text{u}_\theta \text{の方向} \end{array}} \right\} (2.2)$$

また、直交座標と球座標との間には、

$$\begin{array}{l}
 x = r \sin \theta \cos \psi \\
 y = r \sin \theta \sin \psi \\
 z = r \cos \theta
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}} \right\} (2.3)$$

の関係がある。また、

$$\begin{array}{l}
 u_{nr} = u_{nx} \ell_{nr} + u_{ny} m_{nr} + u_{nz} n_{nr} \\
 u_{n\theta} = u_{nx} \ell_{n\theta} + u_{ny} m_{n\theta} + u_{nz} n_{n\theta} \\
 u_{n\psi} = u_{nx} \ell_{n\psi} + u_{ny} m_{n\psi} + u_{nz} n_{n\psi}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_{nr} \\ u_{n\theta} \\ u_{n\psi} \end{array}} \right\} (2.4)$$

式(2.4)に式(2.1)を代入して

$$\begin{array}{l}
 u_{nr} = \dot{e}_1 x \ell_{nr} + \dot{e}_2 y m_{nr} + \dot{e}_3 z n_{nr} \\
 u_{n\theta} = \dot{e}_1 x \ell_{n\theta} + \dot{e}_2 y m_{n\theta} + \dot{e}_3 z n_{n\theta} \\
 u_{n\psi} = \dot{e}_1 x \ell_{n\psi} + \dot{e}_2 y m_{n\psi} + \dot{e}_3 z n_{n\psi}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_{nr} \\ u_{n\theta} \\ u_{n\psi} \end{array}} \right\} (2.5)$$



式(2.5)に式(2.2), 式(2.3)を代入して、かつ軸対称変形であるから  $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_1$  とすると、薄相における変形速度場は、

$$\begin{aligned}
 u_{nr} &= \dot{\epsilon}_1 r \sin^2 \theta \cos^2 \psi \\
 &\quad + \dot{\epsilon}_1 r \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \dot{\epsilon}_3 r \cos^2 \theta \\
 &= (\dot{\epsilon}_1 \sin^2 \theta + \dot{\epsilon}_3 \cos^2 \theta) r \\
 u_{n\theta} &= \dot{\epsilon}_1 r \sin \theta \cos^2 \psi \cos \theta \\
 &\quad + \dot{\epsilon}_1 r \sin \theta \sin^2 \psi \cos \theta \\
 &\quad - \dot{\epsilon}_3 r \cos \theta \sin \theta \\
 &= (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) r \sin \theta \cos \theta \\
 u_{n\psi} &= \dot{\epsilon}_1 r \sin \theta \cos \psi (-\sin \psi) \\
 &\quad + \dot{\epsilon}_1 r \sin \theta \sin \psi \cos \psi = 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。

(2) 領域mにおける動的可容速度場

(i) 軸対称応力の場合の動的可容速度場

ユニットセルの領域mの変形速度場を計算するにあたり、図2.5に示すように、楕円の半径PQ上にあるすべての点は、変形後も同一の半径P'Q'上へ移るものと仮定する。このような場は、動的に可容な速度場である。

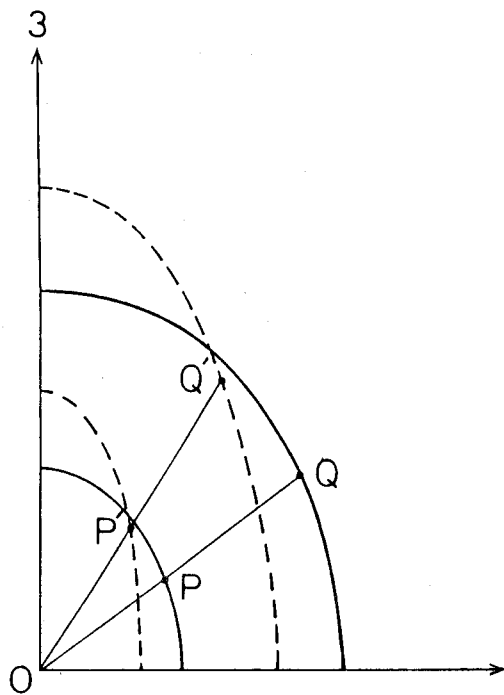


図 2. 5 ユニットセルと空孔の変形前 P Q (実線) から  
変形後の P' Q' (破線) への移動

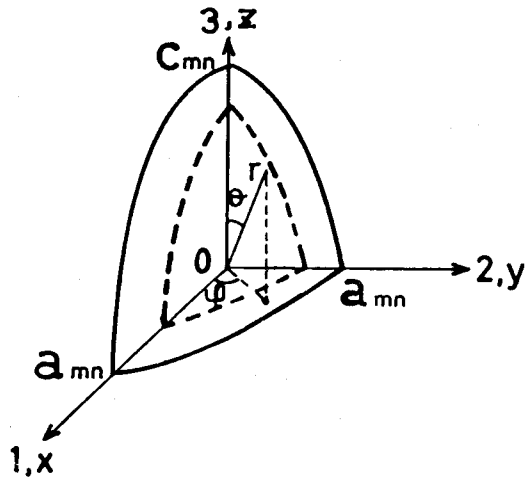


図 2. 6 ユニットセルの1/8と座標

ユニットセルの1/8楕円体を図2.6に示す。この場合の楕円体の面は、

$$\left(\frac{x}{a_{mn}}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_{mn}}\right)^2 + \left(\frac{z}{c_{mn}}\right)^2 = 1 \quad (2.7)$$

で示される。

図2.7に示す点  $P(x, y, z)$  における半径  $r_a$  は幾何学的関係より、

$$r_a^2 = x^2 + y^2$$

となる。

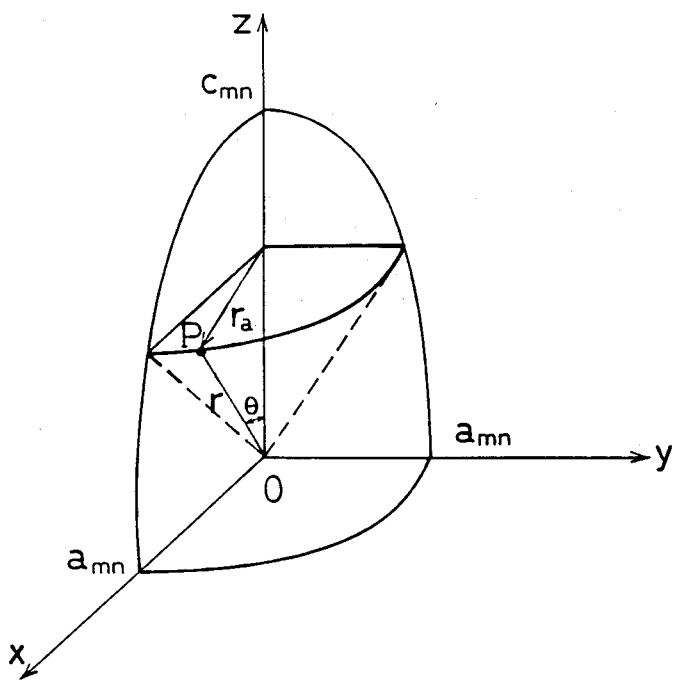


図2.7 ユニットセルの1/8と  $r_a$

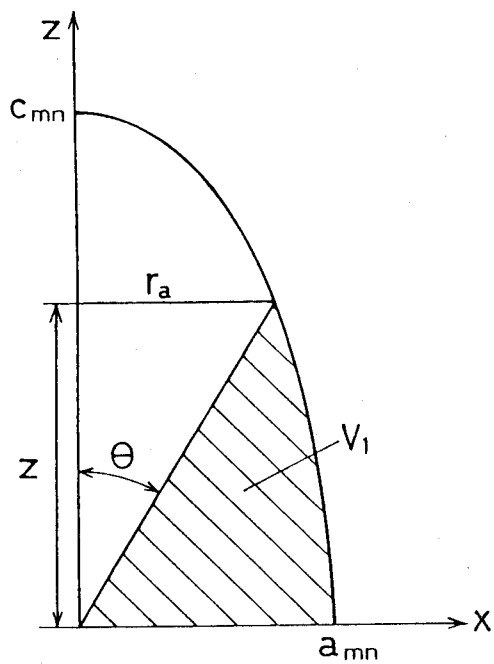


図2.8 体積  $V_1$

また、式(2.7)を書き換えて

$$r_a = (x^2 + y^2)^{1/2} = \left[ 1 - \left( \frac{z}{c_{mn}} \right)^2 \right]^{1/2} a_{mn} \quad (2.8)$$

となる。

図2.8において斜線部分の回転体積  $V_1$  は、

$$V_1 = \frac{1}{4} \left\{ \int_0^z \pi r_a^2 dz - \frac{1}{3} \pi r_a^2 z \right\}$$

$r_a$  を式(2.8)により  $z$  で表わして、積分すると

$$V_1 = \frac{\pi a_{mn}^2}{6} z \quad (2.9)$$

となる。図2.8の幾何学的関係より  $r_a$  は

$$r_a = z \tan \theta \quad (2.10)$$

となる。また、式(2.8)に(2.10)の関係を代入して、 $z$  について整理すれば、

$$z = \frac{c_{mn}}{\left[ 1 + \left( \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.11)$$

となる。

体積  $V_1$  は、式(2.11)を式(2.9)の  $z$  に代入して

$$V_1 = \frac{\pi}{6} \left[ \frac{a_{mn}^2 c_{mn}}{\left[ 1 + \left( \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \right] \quad (2.12)$$

となる。式(2.12)から図2.9に示されるハッチング部分の回転体積  $V_2$ は、

$$V_2 = \frac{\pi}{6} \left[ \frac{a_{mn}^2 c_{mn}}{\left[1 + \left(\frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan \theta\right)^2\right]^{1/2}} - \frac{a_{ms}^2 c_{ms}}{\left[1 + \left(\frac{c_{ms}}{a_{ms}} \tan \theta\right)^2\right]^{1/2}} \right] \quad (2.13)$$

となる。ユニットセルの微小変形前後で、式(2.13)の体積  $V_2$ は一定であるから、 $\Delta V_2 = 0$ となる。したがって式(2.13)を微分すれば、

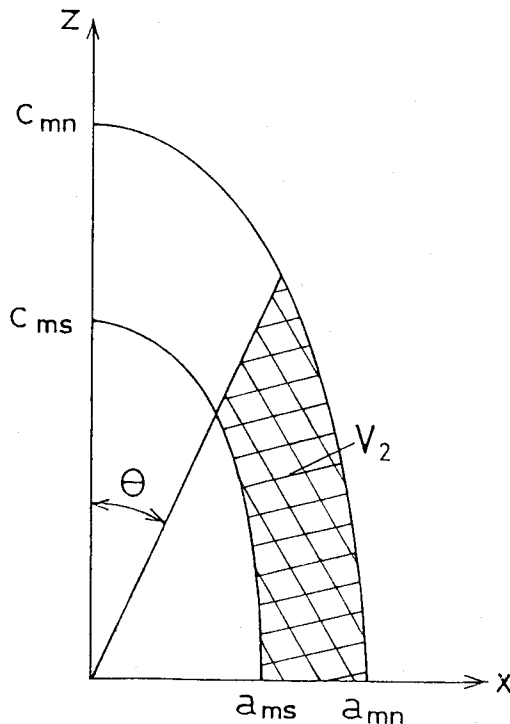


図2.9 楕円体空孔体積を除いた体積  $V_2$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{a_{mn}^2 c_{mn} \left[ \frac{2 d a_{mn}}{a_{mn}} + \frac{d c_{mn}}{c_{mn}} \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan \theta \right)^2 \right]^{1/2}} - \frac{a_{mn}^2 c_{mn} \left( \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan \theta \right)^2 \right]^{3/2}} \right. \\
& \times \left[ \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \frac{d c_{mn}}{c_{mn}} \tan \theta - \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \frac{d a_{mn}}{a_{mn}} \tan \theta + \frac{c_{mn}}{a_{mn}} \frac{d \theta}{\cos^2 \theta} \right] \\
& - \left[ \frac{a_{ms}^2 c_{ms} \left[ \frac{2 d a_{ms}}{a_{ms}} + \frac{d c_{ms}}{c_{ms}} \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{c_{ms}}{a_{ms}} \tan \theta \right)^2 \right]^{1/2}} - \frac{a_{ms}^2 c_{ms} \left( \frac{c_{ms}}{a_{ms}} \tan \theta \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{c_{ms}}{a_{ms}} \tan \theta \right)^2 \right]^{3/2}} \right. \\
& \times \left. \left[ \frac{c_{ms}}{a_{ms}} \frac{d c_{ms}}{c_{ms}} \tan \theta - \frac{c_{ms}}{a_{ms}} \frac{d a_{ms}}{a_{ms}} \tan \theta + \frac{c_{ms}}{a_{ms}} \frac{d \theta}{\cos^2 \theta} \right] \right] = 0 \quad (2.14)
\end{aligned}$$

ひずみ速度については

$$\frac{d a_{mn}}{a_{mn} d t} = \dot{\epsilon}_1$$

$$\frac{d c_{mn}}{c_{mn} d t} = \dot{\epsilon}_3$$

となる。

また、 $\frac{d \theta}{d t} = \dot{\theta}$ 、ユニットセルと空孔は変形前において相似

であるからアスペクト比 $\lambda$ は、 $c_{mn}/a_{mn} = c_{ms}/a_{ms} = \lambda$

これらを式(2.14)に代入すると

$$\left[ \frac{2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{[1 + (\lambda \tan \theta)^2]^{1/2}} - \frac{\lambda^2 \tan^2 \theta \left[ (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1) + \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta \cos \theta} \right]}{[1 + (\lambda \tan \theta)^2]^{3/2}} \right] - \frac{a_{ms}^2 c_{ms}}{a_{mn}^2 c_{mn}} \left[ \frac{2\dot{\epsilon}_{s1} + \dot{\epsilon}_{s3}}{[1 + (\lambda \tan \theta)^2]^{1/2}} - \frac{\lambda^2 \tan^2 \theta \left[ (\dot{\epsilon}_{s3} - \dot{\epsilon}_{s1}) + \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta \cos \theta} \right]}{[1 + (\lambda \tan \theta)^2]^{3/2}} \right] = 0 \quad (2.15)$$

となる。

一方、ユニットセル全体の母材材料の体積は一定であるから、

$$a_{mn}^2 c_{mn} (2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3) - a_{ms}^2 c_{ms} (2\dot{\epsilon}_{s1} + \dot{\epsilon}_{s3}) = 0$$

となる。そして、 $\frac{a_{ms}^2 c_{ms}}{a_{mn}^2 c_{mn}} = V_f$  を上式に代入すると、

$$2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 = V_f (2\dot{\epsilon}_{s1} + \dot{\epsilon}_{s3}) \quad (2.16)$$

となる。

また、式(2.16)の関係を式(2.15)に代入して

$$\begin{aligned} & - \left[ (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1) - V_f (\dot{\epsilon}_{s3} - \dot{\epsilon}_{s1}) \right] \frac{(\lambda \tan \theta)^2}{[1 + (\lambda \tan \theta)^2]^{3/2}} \\ & - \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta \cos \theta} (1 - V_f) \frac{(\lambda \tan \theta)^2}{[1 + (\lambda \tan \theta)^2]^{3/2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。式(2.17)を $\dot{\theta}$ で整理すると、



$$\dot{\theta} = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - V_f} [(\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1) - V_f(\dot{\epsilon}_{s3} - \dot{\epsilon}_{s1})]$$

結局、円周方向の変形速度  $u_{m\theta}$  は、上式を用いて

$$u_{m\theta} = r \dot{\theta} = -\frac{r \sin \theta \cos \theta}{1 - V_f} [(\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1) - V_f(\dot{\epsilon}_{s3} - \dot{\epsilon}_{s1})] \quad (2.18)$$

となる。

また、 $\psi$  方向の速度  $u_{m\psi}$  は、軸対称変形であるから、

$$u_{m\psi} = 0 \quad (2.19)$$

となる。

次に、半径方向の変形速度  $u_{mr}$  を以下のようにして導く。まず体積一定の条件を球座標で示せば、

$$\dot{\epsilon}_{mr} + \dot{\epsilon}_{m\theta} + \dot{\epsilon}_{m\psi} = 0$$

となる。半径方向のひずみ速度、円周方向のひずみ速度、 $\psi$  方向のひずみ速度は、それぞれ

$$\dot{\epsilon}_{mr} = \frac{\partial u_{mr}}{\partial r}$$

$$\dot{\epsilon}_{m\theta} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u_{m\theta}}{\partial \theta} + u_{mr} \right]$$

$$\dot{\epsilon}_{m\psi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial u_{m\psi}}{\partial \psi} + u_{mr} \sin \theta + u_{m\theta} \cos \theta \right]$$

であるから、これらを上の体積一定の条件式に代入して

$$\frac{\partial u_{mr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{m\theta}}{\partial \theta} + u_{mr} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial u_{m\psi}}{\partial \psi} + u_{mr} \sin \theta + u_{m\theta} \cos \theta \right] = 0 \quad (2.20)$$

となる。式(2.19)より  $\partial u_{m\psi} / \partial \psi = 0$  であるから、上式を整理すると、

$$\frac{\partial u_{mr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{m\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{u_{mr}}{r} + \frac{u_{m\theta} \cos \theta}{r \sin \theta} = 0 \quad (2.21)$$

となる。また、式(2.21)に式(2.18)を代入して、整理すると

$$\frac{\partial u_{mr}}{\partial r} + 2 \frac{u_{mr}}{r} - \frac{2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{(1 - V_f)} [(\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1) - V_f (\dot{\epsilon}_{s3} - \dot{\epsilon}_{s1})] = 0$$

上式に  $r^2$  をかけて積分すると、半径方向の変形速度  $u_{mr}$  は

$$u_{mr} = \frac{r}{3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{(1 - V_f)} [(\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1) - V_f (\dot{\epsilon}_{s3} - \dot{\epsilon}_{s1})] + F(\theta) \quad (2.22)$$

となる。ここに積分定数  $F(\theta)$  は、 $\theta$  のみの関数である。

## (ii) 積分定数 $F(\theta)$ の決定

積分定数  $F(\theta)$  は、境界  $m n$  上で分離したり重なりを生じないという境界条件によって以下のように決める。

式(2.16)を用いて式(2.22)と式(2.18)の $\dot{\epsilon}_{s1}$ を消去すると、

$$\begin{aligned}
 u_{mr} &= \frac{r}{3} \frac{3\cos^2\theta - 1}{(1 - V_f)} \times \frac{3}{2} (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) + \frac{F(\theta)}{r^2} \\
 &= \frac{r}{2} \frac{3\cos^2\theta - 1}{(1 - V_f)} (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) + \frac{F(\theta)}{r^2} \\
 u_{m\theta} &= -\frac{3r \sin\theta \cos\theta}{2(1 - V_f)} (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3})
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

ここで、 $F(\theta)$ を求める前に必要とされる関係式を求めて置く。

図2.10のmn境界面上では、式(2.10)(2.11)より、

$$\begin{aligned}
 r_a &= \{x^2 + y^2\}^{1/2} = z \tan\theta = \frac{c_{mn} \tan\theta}{\left[1 + \left(\frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan\theta\right)^2\right]^{1/2}} \\
 r_{mn} &= \{x^2 + y^2 + z^2\}^{1/2} = \frac{\{c_{mn}^2 \tan^2\theta + c_{mn}^2\}^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{c_{mn}}{a_{mn}} \tan\theta\right)^2\right]^{1/2}} \\
 &= \frac{c_{mn}}{(\cos^2\theta + \lambda^2 \sin^2\theta)^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

図2.10において楕円の点Dへの接線の傾き $\beta$ は次のようになる。

$$\tan\beta = \frac{-\Delta z}{\Delta r_a} \tag{2.24}'$$

式(2.8)より

$$\frac{-\Delta z}{\Delta r_a} = \left(\frac{c_{mn}}{a_{mn}}\right)^2 \frac{r_a}{z} \tag{2.24}''$$



となる。また、

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta}$$

である。

ここで、 $\tan \alpha = T$  とおき、上式に式(2.24)'''を代入すると

$$\begin{aligned} T = \tan \alpha &= \frac{\tan \theta - \tan \theta \cdot \lambda^2}{1 + \tan \theta (\tan \theta \cdot \lambda^2)} \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \lambda^2)}{\cos^2 \theta + \lambda^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。

境界 $m n$ 上では、法線方向への流れの連続性より分離したり重なりを生じない。図2.10を参照して、点 $D$ 上の速度 $u_r, u_\theta$ の法線方向速度成分を求めると、 $u_r \cos \alpha, u_\theta \sin \alpha$ であるから、材料の法線方向の速度は、 $u_r \cos \alpha - u_\theta \sin \alpha$ となる。領域 $m$ と領域 $n$ の材料速度が連続である条件は、上式の $u_r, u_\theta$ に添字 $m, n$ を付して、

$$u_{m r} \cos \alpha - u_{m \theta} \sin \alpha = u_{n r} \cos \alpha - u_{n \theta} \sin \alpha \quad (2.26)$$

となる。書き換えれば、

$$u_{m r} - u_{n r} = (u_{m \theta} - u_{n \theta}) \tan \alpha \quad (2.26)'$$

となる。

式(2.6)、(2.23)中の $r$ を $r = r_{mn}$ と書き換えて、これを式(2.26)'に代入すれば、 $F(\theta)$ は次のように決定できる。

$$\begin{aligned}
F(\theta) = & \frac{r_{mn}^3}{2(1-V_f)} \left[ (1-3\cos^2\theta)(\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) \right. \\
& + 2(1-V_f) \times (\dot{\epsilon}_1 \sin^2\theta + \dot{\epsilon}_3 \cos^2\theta) - T \sin\theta \cos\theta \\
& \left. \times \{3(\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) + 2(1-V_f)(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)\} \right] \quad (2.27)
\end{aligned}$$

(iii) 領域mでの変形とひずみ速度

領域mにおける動的可容速度場は式(2.23)に式(2.27)の $F(\theta)$ を代入して、次のようになる。

$$\begin{aligned}
u_{mr} = & \frac{r}{2} \frac{3\cos^2\theta - 1}{(1-V_f)} (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) \\
& + \frac{1}{2(1-V_f)} \frac{r_{mn}^3}{r^2} P
\end{aligned}$$

$$u_{m\theta} = - \frac{3r \sin\theta \cos\theta}{2(1-V_f)} (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3})$$

$$u_{m\phi} = 0$$

ここで、

$$P = (1-3\cos^2\theta)(\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) + 2(1-V_f)$$

$$(\dot{\epsilon}_1 \sin^2\theta + \dot{\epsilon}_3 \cos^2\theta) - T \sin\theta \cos\theta$$

$$\times 3 \{ (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) + 2(1-V_f)(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) \}$$

$$T = \tan\alpha = (1 - \lambda^2) \sin\theta \cos\theta (\cos^2\theta + \lambda^2 \sin^2\theta)^{-1}$$

$$r_{mn} = \frac{c_{mn}}{(\cos^2\theta + \lambda^2 \sin^2\theta)^{1/2}}$$

である。

(2.28)

各ひずみ速度成分は、次の式(2.29)に式(2.28)を代入することにより求められる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{mr} &= \frac{\partial u_{mr}}{\partial r}, & \dot{\epsilon}_{m\theta} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u_{m\theta}}{\partial \theta} + u_{mr} \right] \\
 \dot{\epsilon}_{m\psi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial u_{m\psi}}{\partial \psi} + u_{mr} \sin \theta + u_{m\theta} \cos \theta \right] \\
 \dot{\gamma}_{mr\theta} &= \frac{\partial u_{m\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{mr}}{\partial \theta} - u_{m\theta} \right) \\
 \dot{\gamma}_{m\theta\psi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial u_{m\theta}}{\partial \psi} + \frac{\partial u_{m\psi}}{\partial \theta} \sin \theta - u_{m\psi} \cos \theta \right) \\
 \dot{\gamma}_{m\psi r} &= \frac{\partial u_{m\psi}}{\partial r} - \frac{u_{m\psi}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{mr}}{\partial \psi}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{mr} &= \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2(1 - V_f)} (\dot{\epsilon}_{\Sigma} - V_f \dot{\epsilon}_{\Sigma\Sigma}) - \frac{1}{(1 - V_f)} \left[ \frac{r_{mn}}{r} \right]^{\Sigma} P \\
 \dot{\epsilon}_{m\theta} &= \frac{-3 \cos^2 \theta + 2}{2(1 - V_f)} (\dot{\epsilon}_{\Sigma} - V_f \dot{\epsilon}_{\Sigma\Sigma}) + \frac{1}{2(1 - V_f)} \left[ \frac{r_{mn}}{r} \right]^{\Sigma} P \\
 \dot{\epsilon}_{m\psi} &= \frac{-(\dot{\epsilon}_{\Sigma} - V_f \dot{\epsilon}_{\Sigma\Sigma})}{2(1 - V_f)} + \frac{1}{2(1 - V_f)} \left[ \frac{r_{mn}}{r} \right]^{\Sigma} P \\
 \dot{\gamma}_{mr\theta} &= - \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{1 - V_f} (\dot{\epsilon}_{\Sigma} - V_f \dot{\epsilon}_{\Sigma\Sigma}) \\
 &\quad + \frac{1}{2(1 - V_f)} \left[ \frac{r_{mn}}{r} \right]^{\Sigma} Q \\
 \dot{\gamma}_{m\theta\psi} &= \dot{\gamma}_{m\psi r} = 0
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

ここでQは

$$Q = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 2\{\sin \theta \cos \theta - T(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - T^2 \sin \theta \times \cos \theta\} \times \{3(\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3}) + 2(1 - V_f)(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)\} \quad (2.31)$$

である。相当ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{eqm}$  は、次式に式(2.30)を代入して計算できる。

$$\dot{\epsilon}_{eqm} = \left[ \frac{2}{9} \{(\dot{\epsilon}_{mr} - \dot{\epsilon}_{m\theta})^2 + (\dot{\epsilon}_{m\theta} - \dot{\epsilon}_{m\phi})^2 + (\dot{\epsilon}_{m\phi} - \dot{\epsilon}_{mr})^2\} + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{mr\theta}^2 \right]^{1/2} \quad (2.32)$$

## 2. 5 変形エネルギー消散率の計算

母材材料の内部変形エネルギーは、領域m内で消費されるエネルギー消散率であり、式(2.32)の相当ひずみ速度を用いて

$$\dot{E}_m = \int_{V_m} \sigma_{mY} \dot{\epsilon}_{eqm} dV_m \quad (2.33)$$

と表わされる

領域mとnの境界において生じる相対すべり速度  $|\Delta u_{mn}|$  は

$$|\Delta u_{mn}| = |(u_{mr} - u_{nr}) \sin \alpha + (u_{m\theta} - u_{n\theta}) \cos \alpha| \quad (2.34)$$

である。この境界におけるせん断変形エネルギー消散率は

$$\dot{E}_{mn} = 8 \int_{S_{mn}} \frac{\sigma_{mY}}{\sqrt{3}} |\Delta u_{mn}| dS_{mn} \quad (2.35)$$

となる。そして、



$$d S_{mn} = \frac{\pi}{2} r_{mn}^2 \sin \theta \cdot d \theta / \cos \alpha$$

であるから、これと式(2.34)を式(2.35)に代入して、

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mn} = 8 \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma_{m\gamma}}{\sqrt{3}} | (u_{mr} - u_{nr}) \tan \alpha + (u_{m\theta} - u_{n\theta}) | \\ \times \frac{\pi}{2} r_{mn}^2 \sin \theta d \theta \end{aligned} \quad (2.35)'$$

となる。

全体のエネルギー消散率は、

$$\dot{E}_{total} = \dot{E}_m + \dot{E}_{mn}$$

である。また、相当ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{eqm}$  は式(2.32)で与えられ、式(2.35)中の速度は式(2.6), (2.28)を用いて計算できる。

## 2. 6 降伏応力の計算

ユニットセルに作用する応力は  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (この場合は  $\sigma_1 = \sigma_2$ ) であり、ユニットセルのひずみ速度は  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$  (この場合も  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2$ ) であるので、ユニットセルに加えられるエネルギー消散率は、ユニットセルの体積を  $V$  とすると

$$(2 \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) \times V$$

である。

一方、ユニットセル内で消費されるエネルギーの消散率は、 $\dot{E}_{total} = \dot{E}_m + \dot{E}_{mn}$  であり、上界定理により

$$(2 \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) V \leq \dot{E}_{total}$$

である。

$\dot{E} = \dot{E}_{\text{total}}/V$ とおきかえると

$$\sigma_3 \leq (\dot{E} - 2\sigma_1 \dot{\epsilon}_1) / \dot{\epsilon}_3 \quad (2.36)$$

とし、式(2.36)の右辺に含まれる $\dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3$ 、 $\dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_3$ 、 $\dot{\epsilon}_{s1}$ 、 $\dot{\epsilon}_{s2}$ 、 $\dot{\epsilon}_{s3}$ を変化させて、右辺が最小になるような5つのひずみ速度を求める。その時の $\sigma_3$ をつぎの式から求める。

$$\sigma_3 = \left| (\dot{E} - 2\sigma_1 \dot{\epsilon}_1) / \dot{\epsilon}_3 \right|_{\min} \quad (2.36)'$$

本解析より得られる結果については、第4章において述べる。

## 2.7 結 言

母材中に回転対称楕円体の空孔が、その対称軸の方向をそろえてランダムに分散しているような異方性多孔質材料の降伏条件を求めるための三次元解析を行なった。軸対称変形の場合に限ったが、今までに解析的に求められなかった降伏強度の評価値を求めることができる。楕円のアスペクト比 $\lambda$ によって異方性が変わる。

具体的な計算は、第4章において行なう。

## 参 考 文 献

- (1) Chu, T. Y. and Hashin, Z., *Int. J. Engng. Sci.*, 9 (1971) 971.
- (2) Kuhn, H. A. and Downey, C. L., *Int. J. Powder Metallurgy*, 7 (1971) 15
- (3) Green, R. J., *Int. J. Mech. Sci.*, 14 (1972) 215.
- (4) 大矢根・島・鴻野, 日本機械学会論文集(第1部), 39 (1973) 86.
- (5) 大矢根・田端, 塑性と加工, 15 (1974) 43.
- (6) 田端・真崎・阿部, 塑性と加工, 18 (1977) 373.
- (7) Oyane, M., Shima, S. and Tabata, T., *J. Mech. Working Technol.*, 1 (1978) 325.
- (8) Doraivelu, S. M., Gegel, H. L., Gunasekera, J. S., Malas, J. C. and Morgan, J. T., *Int. J. Mech. Sci.*, 26 (1984) 527.
- (9) 多田, 学位論文, 大阪大学 (1988)

## 第3章 等方性多孔質材料の 三次元変形下における 強度解析

### 3.1 緒言

第2章においては、母材中に楕円体の空孔が長軸の方向をそろえて、一様に分散しているような異方性多孔質材料を考え、上界法による解析を行った。第2章において取扱った空孔形状は回転楕円体であったが、本章においては、これを球におきかえて解析する。空孔形状が球の場合が最も簡単な例である。第2章の解析は軸対称応力に限っているが、本章においては空孔を有する一般の三次元強度（せん断をも含む）を取扱う。これより多孔質材料の降伏条件を求める。

### 3.2 モデルの設定

本章においては、解析を簡単にするために次の仮定を設ける。

- (1) 母材材料は、von Misesの降伏条件にしたがう剛完全塑性であるとする。
- (2) 図3.1(a)に示すように、球形の空孔間の寸法が、ランダムに分布している多孔質材料を考える。この材料の降伏強度を解析するに当たり、図3.1(b)に示すようなユニットセルを用いる。ユニットセルは多孔質体と同じ母材材料からできた球形であり、その中心に球形の空孔をもつ。ユニットセルおよび多孔質体は同じ空孔体積率をもつものとする。
- (3) ユニットセルの降伏応力は、母材材料と空孔体積率のみによって決まるものとする。したがって、図3.1(c)に示すように、相似形のユ

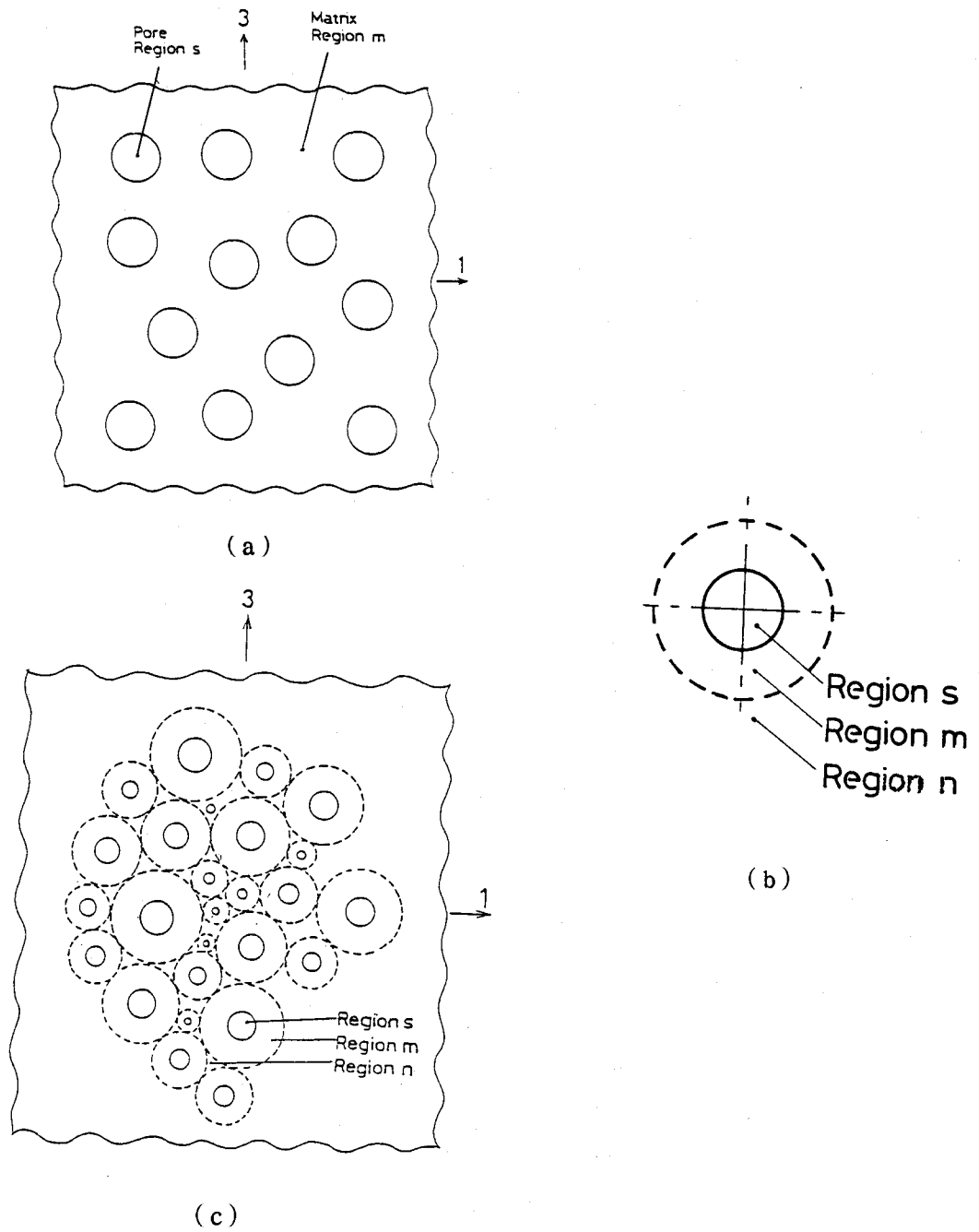


図 3.1 空孔を含む材料のモデル

ニットセルを隙間なく詰め、完全に接合して作った多孔質体は、詰め込まれたユニットセルの大きさに関係なく、一定の降伏応力をもつことになる。

また、多孔質体の強さは詰め込まれるユニットセルの寸法に無関係であると仮定すれば図3.1(a)と(c)に示すような両多孔質体が同一の降伏応力をもつことになるので、図3.1(b)に示すようなユニットセルを用いて、図3.1(c)の多孔質体の降伏応力を求めることにより、これを図3.1(a)の多孔質体の降伏応力であるとする事ができる。図3.1において、sは空孔領域、mは母材領域、nはユニットセル間の領域とする。他の多くのユニットセルが密に充填されているものと考えるので、この領域nの厚さは無視できる位に小さい。

- (4) 領域mと領域nの境界面で、分離したり重なりは起こらないものとするが、境界面にそってすべりは許容されるものとする。すなわち、半径方向の母材材料の変位速度  $u_r$  は境界面m nで連続であるが、円周方向の変位速度  $u_\theta$  は不連続であってもよい。

解析では、簡単のために、主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 、主ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$  の方向にデカルト座標軸  $x, y, z$  をとる。

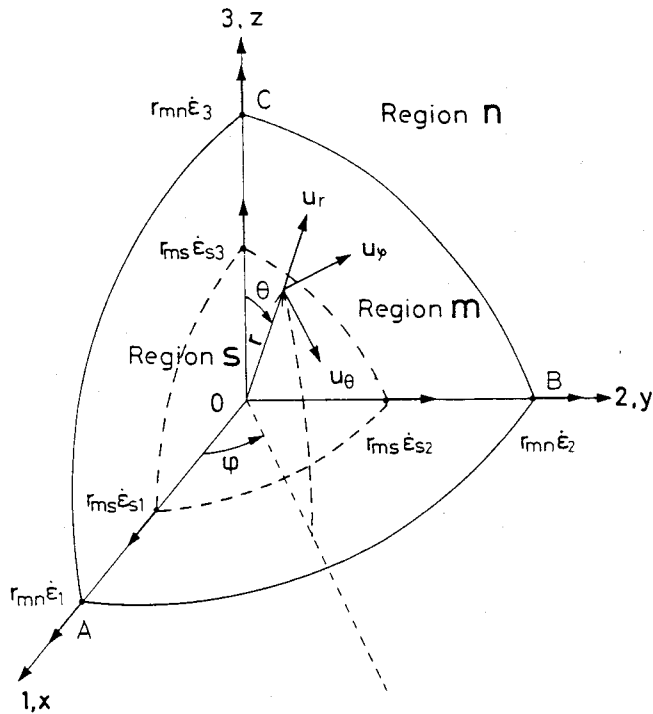


図 3. 2 ユニットセルの1/8

### 3. 3 変形速度場

図3.2のユニットセル（第1象限のみを示す）において座標原点0を球の中心にとる。球座標系では $r, \theta, \psi$ 、直交座標系では $x, y, z$ をとる。座標 $r, \theta, \psi$ における半径方向変形速度を $u_r$ 、円周方向変形速度を $u_\theta$ とし、 $\psi$ 方向の変形速度を $u_\psi$ とする。 $r_{mn}, r_{ms}$ はそれぞれユニットセルと空孔の半径を示し、 $\dot{\epsilon}_3$ は隣ユニットセルの $z$ 方向(軸3)のひずみ速度、 $\dot{\epsilon}_{s3}$ は空孔の $z$ 方向(軸3)のひずみ速度とする。(注)

(注) 空孔のひずみ：母材材料中の空孔表面上のひずみを空孔ひずみと呼ぶことにする。

### 3. 3. 1 ユニットセルのz方向への変形

ユニットセルは、一般にx, y, zの3方向に伸縮するが、領域mにおける変形速度を求めるに先立って、第一段階として、x, y両方向への伸縮はなく、z方向へのみ伸縮する場合について速度を求めてみる。

以下の仮定のもとで変形するものとする。

- (1) 図3.3において、実線で示すユニットセルは、変形後に破線で示す中空楕円体に軸対称変形するものとする。すなわち、ユニットセルの外形も空孔も楕円体となり、外形に関して、x方向、y方向には伸びず、z方向にのみ伸縮する。
- (2) 変形前に半径PQ上にあったすべての点は微小変形後も共通の半径P'Q'上へ移動するものとする。
- (3) 変形前後で母材の体積は変化しないものとする。
- (4) ユニットセル外の薄相nの領域では、一様変形するものとする。

ユニットセルと空孔が球形であるから、前章で用いた各記号は次の値をとる。

$$\alpha = 0, \quad c_{mn} = a_{mn} = r_{mn}, \quad \lambda = 1$$

となり、またx, y方向にユニットセルは伸縮しないから

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$$

である。この関係を式(2.28)に代入すれば、式(2.28)中のPは、

$$P = (1 - 3 \cos^2 \theta)(\epsilon_3 - V_f \epsilon_{s3-z}) + 2(1 - V_f) \epsilon_3 \cos^2 \theta$$

となり、結局、変形の手速度  $u_{mr-z}$ ,  $u_{m\theta-z}$ ,  $u_{m\phi-z}$  は



$$\left. \begin{aligned}
 u_{mr-z} &= (r/2) [1 - (r_{mn}/r)^3] \{ (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3-z}) / (1 - V_f) \} \\
 &\quad \times (3 \cos^2 \theta - 1) + r (r_{mn}/r)^3 \dot{\epsilon}_3 \cos^2 \theta \\
 u_{m\theta-z} &= \{ -3r/2 (1 - V_f) \} (\dot{\epsilon}_3 - V_f \dot{\epsilon}_{s3-z}) \sin \theta \cos \theta \\
 u_{m\phi-z} &= 0
 \end{aligned} \right\} (3.1)$$

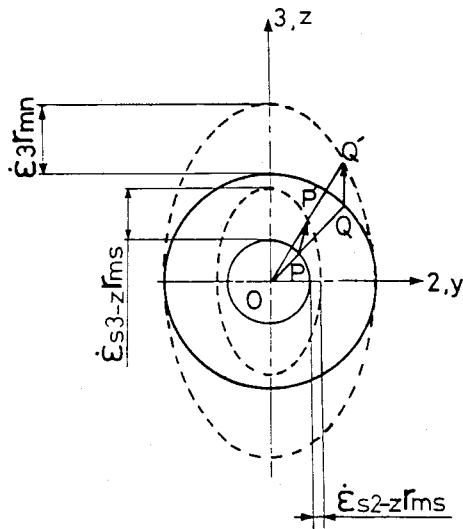


図 3. 3 ユニットと空孔の変形前の形状 (実線)  
 と単位時間経過後の形状 (破線)

ここで添字-zは、ユニットセルがz方向にのみ伸縮した場合を指す。また、 $V_f$ は、空孔がユニット中に占める体積率であり

$$V_f = \frac{4}{3} \pi (r_{ms})^3 / \frac{4}{3} \pi (r_{mn})^3 = (r_{ms}/r_{mn})^3$$

である。

図3.2を参照して、球座標を直角座標に変換する。 $r, \theta, \psi$  方向の速度  $u_{mr-z}, u_{m\theta-z}, u_{m\psi-z}$  を  $x, y, z$  方向の  $u_{mx-z}, u_{my-z}, u_{mz-z}$  に変換すると

$$\begin{aligned} u_{mx-z} &= (u_{mr-z} \sin \theta + u_{m\theta-z} \cos \theta) \cos \psi \\ u_{my-z} &= (u_{mr-z} \sin \theta + u_{m\theta-z} \cos \theta) \sin \psi \\ u_{mz-z} &= u_{mr-z} \cos \theta - u_{m\theta-z} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$x = r \sin \theta \cos \psi$$

$$y = r \sin \theta \sin \psi \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$z = r \cos \theta \quad (3.3)$$

$$\sin \theta = (x^2 + y^2)^{1/2} / r \quad \cos \theta = z / r$$

$$\sin \psi = y / (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \cos \psi = x / (x^2 + y^2)^{1/2}$$

となる。式(3.2)に式(3.1)、式(3.3)を代入すると、

$$\begin{aligned}
u_{mx-z} &= \{x/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_3\{(r_{mn}/r)^3-1 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(z/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s3-z}\{(r_{mn}/r)^3-1-3(r_{mn}/r)^3(z/r)^2\}] \\
u_{my-z} &= \{y/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_3\{(r_{mn}/r)^3-1 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(z/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s3-z}\{(r_{mn}/r)^3-1-3(r_{mn}/r)^3(z/r)^2\}] \\
u_{mz-z} &= \{z/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_3\{(r_{mn}/r)^3+2 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(z/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s3-z}\{(r_{mn}/r)^3+2-3(r_{mn}/r)^3(z/r)^2\}]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3. 3. 2 ユニットセルの3次元変形

式(3.4)は、図3.2に示すx, y軸上の点A, Bを固定して、z軸上の点Cに $\dot{\epsilon}_3 r_{mn}$ の速度を与えた場合の変形速度場である。次に、y, z軸上の点B, Cを固定して、x軸上の点Aに $\dot{\epsilon}_1 r_{mn}$ の速度を与えた場合と、z, x軸上のC, Aを固定して、y軸上の点Bに $\dot{\epsilon}_2 r_{mn}$ の変位を与えた場合のそれぞれの変形速度場を求めると、式(3.4)'になる。

$$\begin{aligned}
u_{mx-x} &= \{x/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_1\{(r_{mn}/r)^3+2 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(x/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s1-x}\{(r_{mn}/r)^3+2-3(r_{mn}/r)^3(x/r)^2\}] \\
u_{my-x} &= \{y/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_1\{(r_{mn}/r)^3-1 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(x/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s1-x}\{(r_{mn}/r)^3-1-3(r_{mn}/r)^3(x/r)^2\}]
\end{aligned} \tag{3.4}'$$

$$\begin{aligned}
u_{mz-x} &= \{z/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_1\{(r_{mn}/r)^3-1 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(x/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s1-x}\{(r_{mn}/r)^3-1-3(r_{mn}/r)^3(x/r)^2\}] \\
u_{mx-y} &= \{x/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_2\{(r_{mn}/r)^3-1 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(y/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s2-y}\{(r_{mn}/r)^3-1-3(r_{mn}/r)^3(y/r)^2\}] \\
u_{my-y} &= \{y/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_2\{(r_{mn}/r)^3+2 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(y/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s2-y}\{(r_{mn}/r)^3+2-3(r_{mn}/r)^3(y/r)^2\}] \\
u_{mz-y} &= \{z/2(1-V_f)\}[\dot{\epsilon}_2\{(r_{mn}/r)^3-1 \\
&\quad -(1+2V_f)(r_{mn}/r)^3(y/r)^2\} \\
&\quad -V_f\dot{\epsilon}_{s3-y}\{(r_{mn}/r)^3-1-3(r_{mn}/r)^3(y/r)^2\}]
\end{aligned}
\tag{3.4}'$$

これらの3つの変形速度場を次のように重ね合わせることにより、一般の三次元変形速度場が得られる。

$$\begin{aligned}
u_{mx} &= u_{mx-x} + u_{mx-y} + u_{mx-z} \\
u_{my} &= u_{my-x} + u_{my-y} + u_{my-z} \\
u_{mz} &= u_{mz-x} + u_{mz-y} + u_{mz-z}
\end{aligned}
\tag{3.4}''$$

式(3.4)''に式(3.4), (3.4)'を代入すると

$$\begin{aligned}
u_{mx} = & \frac{x}{2(1 - V_f)} \{ [2 \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \\
& - V_f(2 \xi_{s1} - \xi_{s2} - \xi_{s3})] \\
& + (r_{mn}/r)^3 \{ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - V_f(\xi_{s1} + \xi_{s2} + \xi_{s3}) \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (x/r)^2 \{ \xi_1(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s1} \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (y/r)^2 \{ \xi_2(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s2} \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (z/r)^2 \{ \xi_3(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s3} \} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{my} = & \frac{y}{2(1 - V_f)} \{ [-\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 \\
& - V_f(-\xi_{s1} + 2\xi_{s2} - \xi_{s3})] \\
& + (r_{mn}/r)^3 \{ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - V_f(\xi_{s1} + \xi_{s2} + \xi_{s3}) \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (x/r)^2 \{ \xi_1(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s1} \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (y/r)^2 \{ \xi_2(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s2} \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (z/r)^2 \{ \xi_3(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s3} \} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{mz} = & \frac{z}{2(1 - V_f)} \{ [-\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 \\
& - V_f(-\xi_{s1} - \xi_{s2} + 2\xi_{s3})] \\
& + (r_{mn}/r)^3 \{ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - V_f(\xi_{s1} + \xi_{s2} + \xi_{s3}) \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (x/r)^2 \{ \xi_1(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s1} \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (y/r)^2 \{ \xi_2(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s2} \} \\
& - (r_{mn}/r)^3 (z/r)^2 \{ \xi_3(1 + 2V_f) - 3V_f \xi_{s3} \} ]
\end{aligned}$$

(3.4)'''

となる。

### 3. 4 ひずみ速度

式(3.4)'''で表わされる変形速度場を、座標で偏微分することによりひずみ速度が求められる。すなわち

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{mx} &= \frac{\partial u_{mx}}{\partial x} = \{1/2(1-V_f)\}[\{2\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3 \\
 &\quad - V_f(2\dot{\epsilon}_{s1} - \dot{\epsilon}_{s2} - \dot{\epsilon}_{s3})\} + \dot{D}\{1-3(x/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(x/r)^2 \dot{D}_{mx}\{3-5(x/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(y/r)^2 \dot{D}_{my}\{1-5(x/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(z/r)^2 \dot{D}_{mz}\{1-5(x/r)^2\} \\
 \dot{\epsilon}_{my} &= \frac{\partial u_{my}}{\partial y} = \{1/2(1-V_f)\}[\{-\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3 \\
 &\quad - V_f(-\dot{\epsilon}_{s1} + 2\dot{\epsilon}_{s2} - \dot{\epsilon}_{s3})\} + \dot{D}\{1-3(y/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(x/r)^2 \dot{D}_{mx}\{1-5(y/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(y/r)^2 \dot{D}_{my}\{3-5(y/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(z/r)^2 \dot{D}_{mz}\{1-5(y/r)^2\} \\
 \dot{\epsilon}_{mz} &= \frac{\partial u_{mz}}{\partial z} = \{1/2(1-V_f)\}[\{-\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 + 2\dot{\epsilon}_3 \\
 &\quad - V_f(-\dot{\epsilon}_{s1} - \dot{\epsilon}_{s2} + 2\dot{\epsilon}_{s3})\} + \dot{D}\{1-3(z/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(x/r)^2 \dot{D}_{mx}\{1-5(z/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(y/r)^2 \dot{D}_{my}\{1-5(z/r)^2\} \\
 &\quad - (r_{mn}/r)^3(z/r)^2 \dot{D}_{mz}\{3-5(z/r)^2\}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{mxy} &= \frac{\partial u_{mx}}{\partial y} + \frac{\partial u_{my}}{\partial x} \\
&= \{-1/2(1 - V_f)\} (r_{mn}/r)^3 (x/r)(y/r) [6 \dot{D}_s - \{10(x/r)^2 \\
&\quad - 2\} \dot{D}_{mx} - \{10(y/r)^2 - 2\} \dot{D}_{my} - 10(z/r)^2 \dot{D}_{mz}] \\
\dot{\gamma}_{myz} &= \frac{\partial u_{my}}{\partial z} + \frac{\partial u_{mz}}{\partial y} \\
&= \{-1/2(1 - V_f)\} (r_{mn}/r)^3 (y/r)(z/r) [6 \dot{D}_s - \{10(x/r)^2 \\
&\quad \dot{D}_{mx} - \{10(y/r)^2 - 2\} \dot{D}_{my} - \{10(z/r)^2 - 2\} \dot{D}_{mz}] \\
\dot{\gamma}_{mzx} &= \frac{\partial u_{mz}}{\partial x} + \frac{\partial u_{mx}}{\partial z} \\
&= \{-1/2(1 - V_f)\} (r_{mn}/r)^3 (z/r)(x/r) [6 \dot{D}_s - \{10(x/r)^2 \\
&\quad - 2\} \dot{D}_{mx} - \{10(y/r)^2 \dot{D}_{my}\} - \{10(z/r)^2 - 2\} \dot{D}_{mz}]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる。ここで、

$$\dot{D} = (r_{mn}/r)^3 \{(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3) - V_f (\dot{\epsilon}_{s1} + \dot{\epsilon}_{s2} + \dot{\epsilon}_{s3})\}$$

$$\dot{D}_{mx} = \{\dot{\epsilon}_1(1 + 2V_f) - 3V_f \dot{\epsilon}_{s1}\}$$

$$\dot{D}_{my} = \{\dot{\epsilon}_2(1 + 2V_f) - 3V_f \dot{\epsilon}_{s2}\}$$

$$\dot{D}_{mz} = \{\dot{\epsilon}_3(1 + 2V_f) - 3V_f \dot{\epsilon}_{s3}\}$$

$$\dot{D}_s = \{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 - V_f(\dot{\epsilon}_{s1} + \dot{\epsilon}_{s2} + \dot{\epsilon}_{s3})\}$$

とする。

薄相  $n$  における変形は一様であると仮定してあるので、動的可容速度場は、 $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ ,  $\dot{\epsilon}_3$  を巨視的ひずみ速度として、

$$\left. \begin{aligned} u_{nx} &= \dot{\epsilon}_1 X \\ u_{ny} &= \dot{\epsilon}_2 Y \\ u_{nz} &= \dot{\epsilon}_3 Z \end{aligned} \right\} (3.7)$$

となる。

### 3. 5 変形エネルギー消散率

図3.2に示されるユニットセルの1/8を8倍した全体のユニットセルの母材領域  $m$  の内部変形エネルギー消散率は、

$$\dot{E}_m = \int_{V_m} \sigma_{mY} \dot{\epsilon}_{eqm} dV_m \quad (3.8)$$

で示される。ここで  $\sigma_{mY}$  は母材の降伏応力(一定値)、 $\dot{\epsilon}_{eqm}$  は母材の相当ひずみ速度であり、これは

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{eqm} &= [(2/9)\{(\dot{\epsilon}_{mx} - \dot{\epsilon}_{my})^2 + (\dot{\epsilon}_{my} - \dot{\epsilon}_{mz})^2 + (\dot{\epsilon}_{mz} - \dot{\epsilon}_{mx})^2\} \\ &\quad + (3/2)(\dot{\gamma}_{mxy}^2 + \dot{\gamma}_{myz}^2 + \dot{\gamma}_{mzx}^2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

で示され、式(3.8)に式(3.5), (3.6), (3.9)を代入すれば、変形エネルギー消散率  $\dot{E}_m$  が計算される。

母材領域  $m$  と薄相  $n$  の境界面  $mn$  のせん断変形エネルギー消散率  $\dot{E}_{mn}$  は、

$$\dot{E}_{mn} = \int_{S_{mn}} \{ \sigma_{mY} / \sqrt{3} \} |\Delta u_{mn}| dS_{mn} \quad (3.10)$$

$|\Delta u_{mn}|$  は、図3.4に示すように領域  $m$  と  $n$  の境界  $mn$  上における変位速度の差の絶対値であって



$$|\Delta u_{mn}| = [|\Delta u_{mnx}|^2 + |\Delta u_{mny}|^2 + |\Delta u_{mnz}|^2]^{1/2}$$

で求められる。x, y, z 方向の変位速度の差の絶対値  $|\Delta u_{mnx}|$ ,  $|\Delta u_{mny}|$ ,  $|\Delta u_{mnz}|$  は、次式で示される。

$$|\Delta u_{mnx}| = |u_{mx} - u_{nx}|$$

$$|\Delta u_{mny}| = |u_{my} - u_{ny}|$$

$$|\Delta u_{mnz}| = |u_{mz} - u_{nz}|$$

実際の場合  $u_m$ ,  $u_n$  は三次元の変位速度場であるが、表示を容易にするために図3.4は、二次元表示の模式図とした。

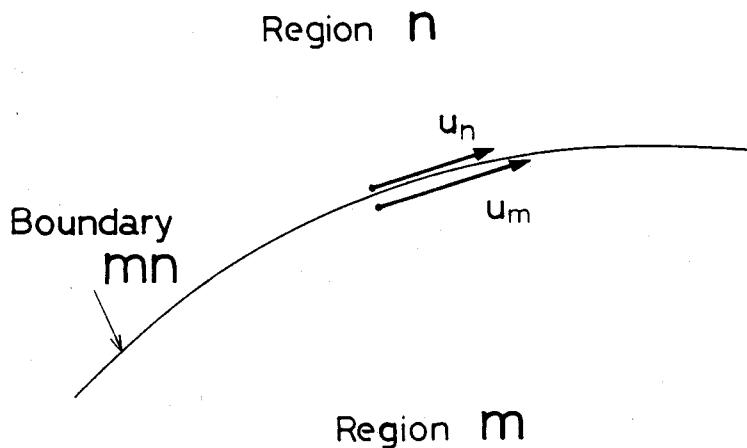


図 3.4 領域mと領域nの境界mn上における変形速度場  
(x, y 平面上での模式図)

式(3.4)'''と式(3.7)における  $x, y, z, r$  を、境界面  $mn$  上において  $x_{mn}, y_{mn}, z_{mn}, r_{mn}$  とすると、境界面  $mn$  上の母材材料の速度差は

$$\left. \begin{aligned}
 |\Delta u_{mnx}| &= | \{ x_{mn} / 2 r_{mn} (1 - V_f) \} [ \{ 1 - (x_{mn} / r_{mn})^2 \} \dot{D}_{mx} \\
 &\quad - (y_{mn} / r_{mn})^2 \dot{D}_{my} - (z_{mn} / r_{mn})^2 \dot{D}_{mz} ] | \\
 |\Delta u_{mny}| &= | \{ y_{mn} / 2 r_{mn} (1 - V_f) \} [ - (x_{mn} / r_{mn})^2 \dot{D}_{mx} \\
 &\quad + \{ 1 - (y_{mn} / r_{mn})^2 \} \dot{D}_{my} - (z_{mn} / r_{mn})^2 \dot{D}_{mz} ] | \\
 |\Delta u_{mnz}| &= | \{ z_{mn} / 2 r_{mn} (1 - V_f) \} [ - (x_{mn} / r_{mn})^2 \dot{D}_{mx} \\
 &\quad - (y_{mn} / r_{mn})^2 \dot{D}_{my} + \{ 1 - (z_{mn} / r_{mn})^2 \} \dot{D}_{mz} ] |
 \end{aligned} \right\} (3.11)$$

となる。式(3.11)を式(3.10)に代入すれば、せん断変形エネルギー消散率  $\dot{E}_{mn}$  が求められる。

全体のエネルギー消散率  $\dot{E}_{total}$  は、

$$\dot{E}_{total} = \dot{E}_m + \dot{E}_{mn} \quad (3.12)$$

で求められる。

### 3. 6 等方多孔質体の降伏条件

ユニットセルに外部から与えられたエネルギーは  $(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$  であり、上界法により次のようになる。

$$(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) V \leq \dot{E}_{total} \quad (3.13)$$

ここで  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  はユニットセルに負荷される応力であり、多孔質に負荷される応力でもある。式(3.13)の右辺は、可容速度により計算されたユニットセル内のエネルギー消散率である。

$\dot{E}_{total}/V = \dot{E}$ とすると式(3.13)は

$$(\sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) \leq \dot{E} \quad (3.14)$$

式(3.14)を次のように変形し、 $\sigma_3$ の近似値を求めることにする。

$$\sigma_3 = \left[ \frac{\dot{E} / \dot{\epsilon}_3}{\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_3} + 1} \right]_{\min} \quad (3.15)$$

ただし、 $[\ ]_{\min}$ は、カッコ内の最小値を意味するものとする。種々の三元応力下での降伏条件を求めるには $(\sigma_1/\sigma_3)$ 、 $(\sigma_2/\sigma_3)$ および $V_f$ を与えて $\sigma_3$ を式(3.15)により計算する。

この式の右辺カッコ内は $(\dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3)$ 、 $(\dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_3)$ 、 $(\dot{\epsilon}_{s1}/\dot{\epsilon}_3)$ 、 $(\dot{\epsilon}_{s2}/\dot{\epsilon}_3)$ 、 $(\dot{\epsilon}_{s3}/\dot{\epsilon}_3)$ のみの関数となり、一般にはこれら5つのひずみ速度比を変化させて右辺カッコ内の最小値を求めなければならない。しかしながら変数が5つもあるので計算が複雑になる。そこで応力としての対称性の高い表3.1の4つの応力状態についてのみ計算を行なった。この場合にはひずみ比の対称性が高いので、独立に変化するひずみ速度の数も少なくなる。

表3.1 計算される時の各応力状態

NO	応力状態	$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$
1	単軸引張	0 : 0 : 1
2	等二軸引張	1 : 1 : 0
3	等三軸引張	1 : 1 : 1
4	せん断	1 : 0 : -1

そのうえユニットセルと空孔の形状がほぼ相似形に変形する場合に右辺が最小となることが、計算途中で判ったので、完全な相似変形についてまず計算し、ついでこの相似変形から少し偏れたひずみ速度比の場合につき計算し、右辺の最小値を探すことにした。

### 3. 7 実験結果と計算結果の考察

実験において用いた試験片材料は、電解銅粉末(CE56)で表3.2に示すような性質と粒度分布をもつものである。

両押し方式により圧粉し、900°C、2時間の真空焼結を行った。粉末同志を十分に焼結させるとともに空孔を球状化してその形状をそろえるために上記の圧粉、焼結を3回繰返した。

圧縮試験片は直径を一定にしておいて、高さを数種類に変化させ、数種類の相対密度のものを作成した。

引張試験片は幅20mm、長さ100mm、厚さ4.6mmの板状試験片に両押し方式により圧粉し、上記の焼結条件で焼結した。

相対密度 $\rho$ は、圧粉する粉末の重量を変えることによって変化させた。なお、潤滑はダイス壁面にステアリン酸亜鉛をアセトンで溶かしたものを用了。

圧縮実験においてはバルジ変形を防止するために、試験片と工具との間にPTFEシートと白色ワセリンを併用して工具端面と試験片との摩擦を可能な限り少なくした。また、圧縮におけるひずみと降状応力を求めるために、ラムの移動量と圧縮荷重を同時に記録した。

引張実験には、オートグラフ(最大容量5ton)を用い、引張変形中の伸びと荷重から降状応力-ひずみ線図を求めた。

図3.5は、単軸引張または圧縮の場合の計算結果と実験結果を示したものである<sup>(1)</sup>。なお、横軸には空孔の体積率 $V_f$ と相対密度 $\rho$ をとり、縦軸

には相対強度  $\sigma_3 / \sigma_{mY}$  をとつてある。また、相対密度  $\rho$  は  $(1 - V_f)$  に等しい。

図中の直線は計算結果である。電解銅焼結体の空孔は球形に相当するが、その引張強度または圧縮強度いずれも、計算結果のまわりに分布しており、空孔の体積率が  $V_f \leq 0.2$  の範囲内ではほぼ計算結果に一致していることがわかる。

表3.2 電解銅粉(CE-56)の性質と粒度分布

見掛密度	(g/cm <sup>3</sup> )	1.95 ~ 2.15
流動度	(s/50g)	43
純度	(%)	最小 99.6
還元減量	(%)	最大 0.2

粒 度 分 布							
メッシュ	80	100	145	200	250	350	
%	最大 1	10	22~33	26~40	8~20	2~12	10~22

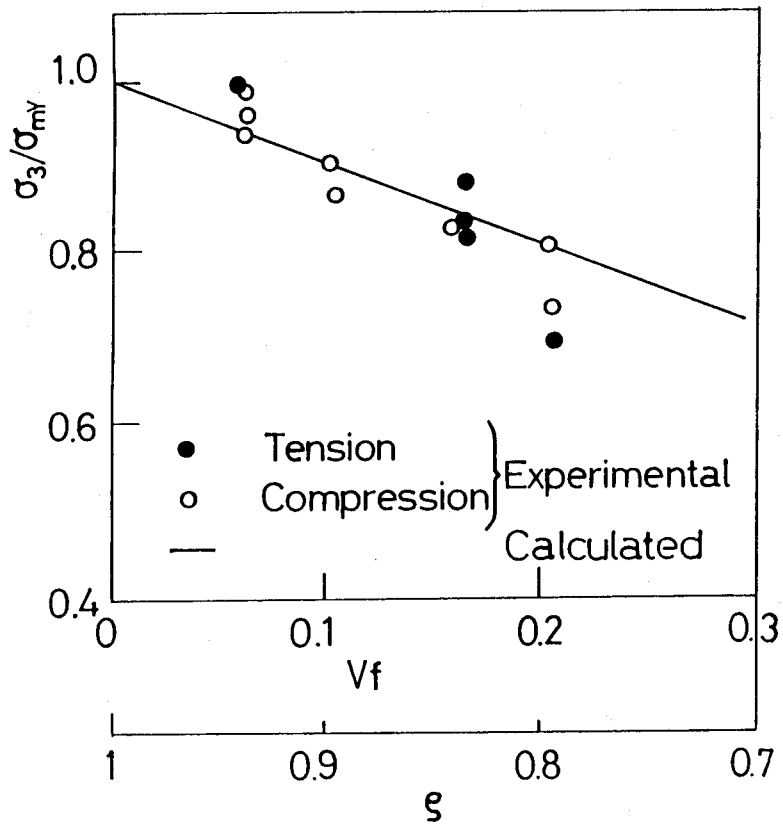


図3.5 空孔の体積率に対する強度の変化  
(計算結果と実験結果)

次に、空孔体積率  $V_f$  をパラメータに、表3.1に示す特定の応力状態における降伏値を式(3.14)と式(3.15)を用いて計算した結果について述べる。単軸引張(圧縮)、等二軸引張(圧縮)、等三軸引張(圧縮)の応力状態は図3.6に示すRendulic面上にある。図3.7はRendulic面であつて、図中の白丸点は計算結果である。表3.1のNo.4のせん断応力は、Rendulic面上にないが、その降伏値の座標を静水圧軸  $\sigma_H/\sigma_{mY}$  の周りに回転して、Rendulic面上に投影し、これを黒丸点で示した。そして、これらRendulic面上の点(圧縮の場合も含めて)を曲線で結ぶと、楕円形状になった。図3.7より降伏楕円は静水圧軸  $\sigma_H/\sigma_{mY}$  を長軸にとる楕円形となり、空孔体積率  $V_f$  の増加とともに降伏楕円は小さくなる。空孔体積率  $V_f=0$  の時は、従来の von Mises の降伏条件にしたがい、降伏楕円は円筒になることがわかる。

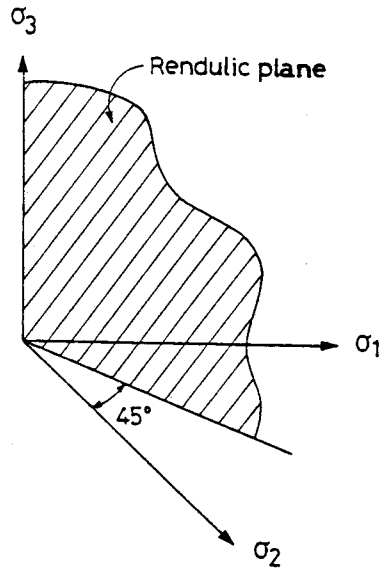


図3.6 Rendulic 応力面の表示 (模式図)

### 3. 8 多孔質材料の降伏条件との比較

大矢根ら<sup>(2)</sup>によって今までに提案されている多孔質材料の降伏条件式は、

$$\frac{1}{2} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} + \left(\frac{\sigma_H}{f}\right)^2 = \rho^{2n} \sigma_{pY}^2 \quad (3.18)$$

で示されている。なおここで、 相対密度 :  $\rho = 1 - V_f$

静水圧応力 :  $\sigma_H$

関数 :  $f = \{a(1 - \rho)^m\}^{-1}$

材料定数 :  $a, m, n$

式(3.18)は、von Misesの降伏条件に静水圧応力成分を加えたものであり、空孔がほぼ球形で等方性の多孔質材料の実験によって求められたものである。式(3.18)において  $a=1.2$ ,  $m=0.32$ ,  $n=1$  とすれば、本解析結果としての図3.7の降伏曲線群と一致する。

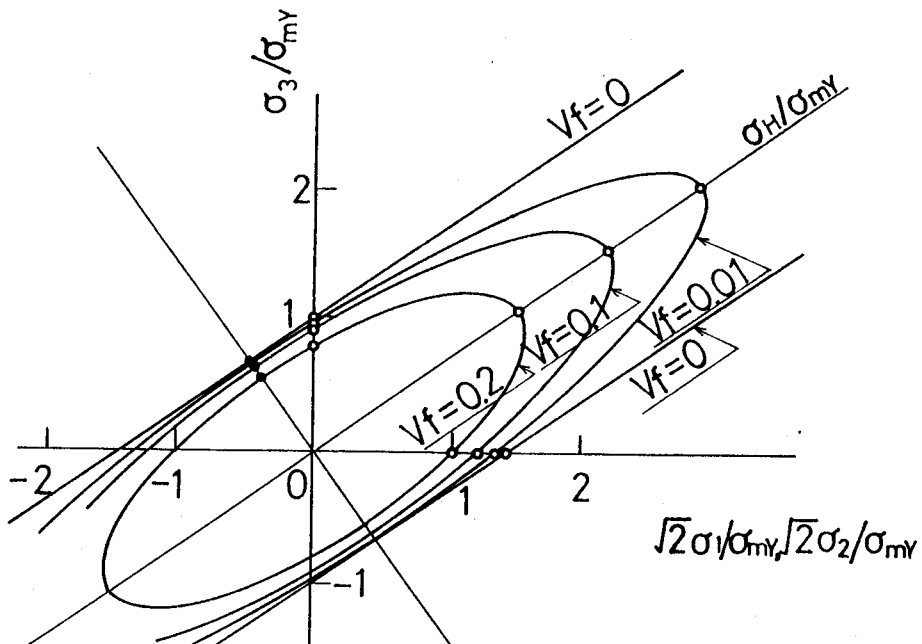


図3.7 多孔質体の降伏曲線



### 3. 9 結 言

球形の空孔をもつ等方多孔質体の三次元強度を求めた。、可容変形の速度場を用いて、上界法によって単軸引張・単軸圧縮・等二軸引張(圧縮)・等三軸引張(圧縮)・せん断の各応力状態の時の降伏条件を求めた。このようにして計算される降伏曲面は、いままでに実験により求められた多孔質体の降伏曲面に一致している<sup>(2)</sup>。したがって、計算のみによって求めた本解析結果が有効であることがわかった。

また単軸引張・圧縮の降伏応力は、体積率  $V_f = 0.2$  までの範囲において、実験結果に一致した。

### 参 考 文 献

- (1) 多田, 修士論文, 京都大学 (1980).
- (2) 大矢根・島・鴻野, 日本機械学会論文集 (第1部), 39 (1973) 86.

## 第4章 異方性多孔質材料の降伏条件式

### 4.1 緒言

第3章では、球形の空孔を含む等方性多孔質材料の降伏条件を求めた。本章では回転楕円体の空孔を有する多孔質材料の降伏条件を求める。回転楕円体のアスペクト比によって異方性の程度が異なる。本章では、第2章において行なった解析を数値計算した結果について述べるとともに、今までに報告されている結果と、比較検討を行なう。

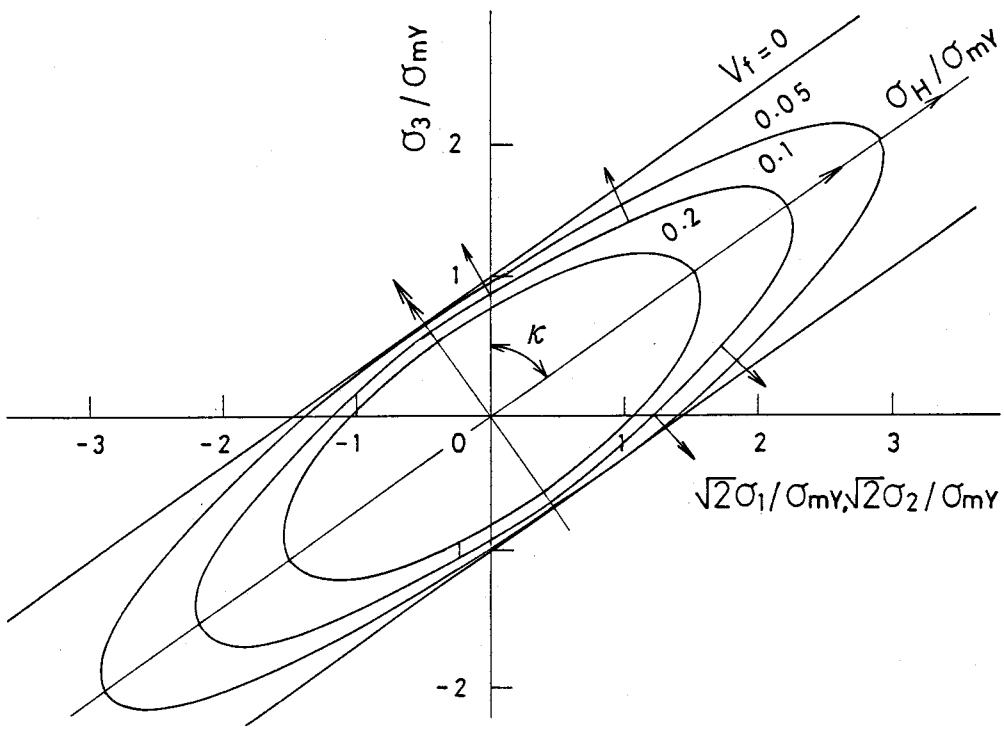
なお、第3章で取扱った球形空孔は非常に簡単な場合であり、一般の多孔質材料は変形前は球形であっても、変形後は楕円体となる。

### 4.2 解析手法

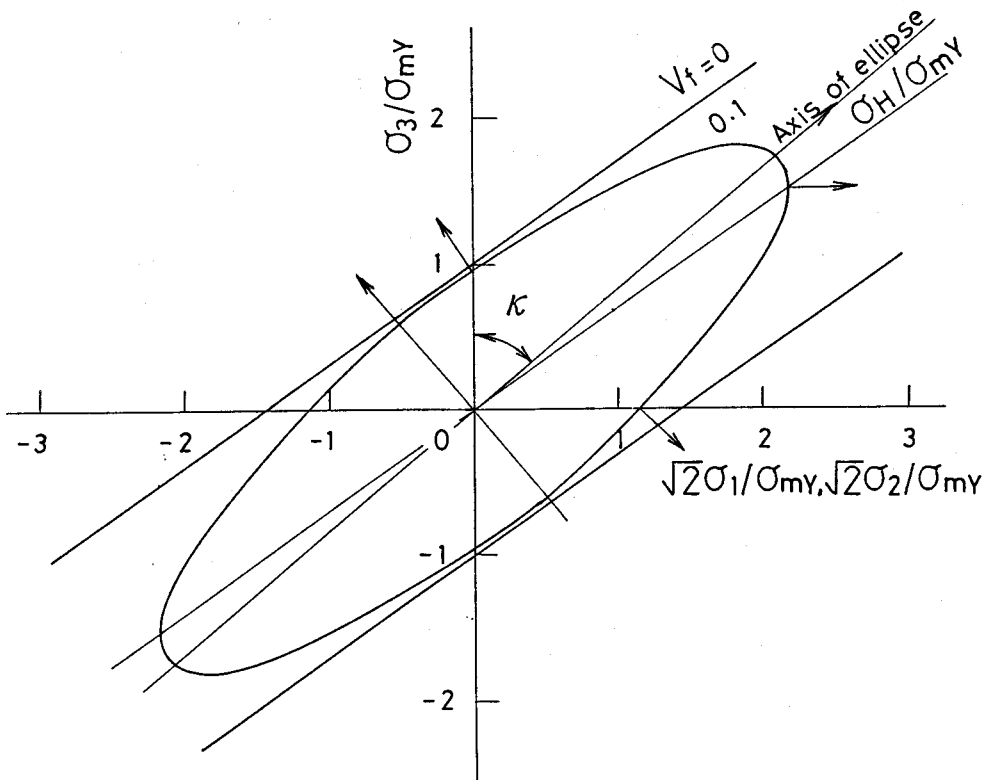
式(2.36)'を用いて、最小エネルギー消散率を与える可容ひずみ速度場を求めることにより、多孔質体の降伏強度 $\sigma_3$ の近似値を計算する。なお、体積積分計算を行なうに当たっては、円周方向 $\theta$ は $5^\circ$ おきに18分割し、半径方向 $r$ は20分割して計算を行ない、その結果、楕円体の1/8を360分割することになる。

### 4.3 解析結果と考察

計算を簡単にするために、単軸引張、等二軸引張、等三軸引張およびそれらの圧縮など特定の応力状態のほかに応力比 $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$ が0.5:0.5:1および0.88:0.88:1, 1.5:1.5:1, 2.5:2.5:1についても計算した。これらの計算結果をRendulic面上にプロットし、これらを結ぶと図4.1の降伏楕円形がえられた。

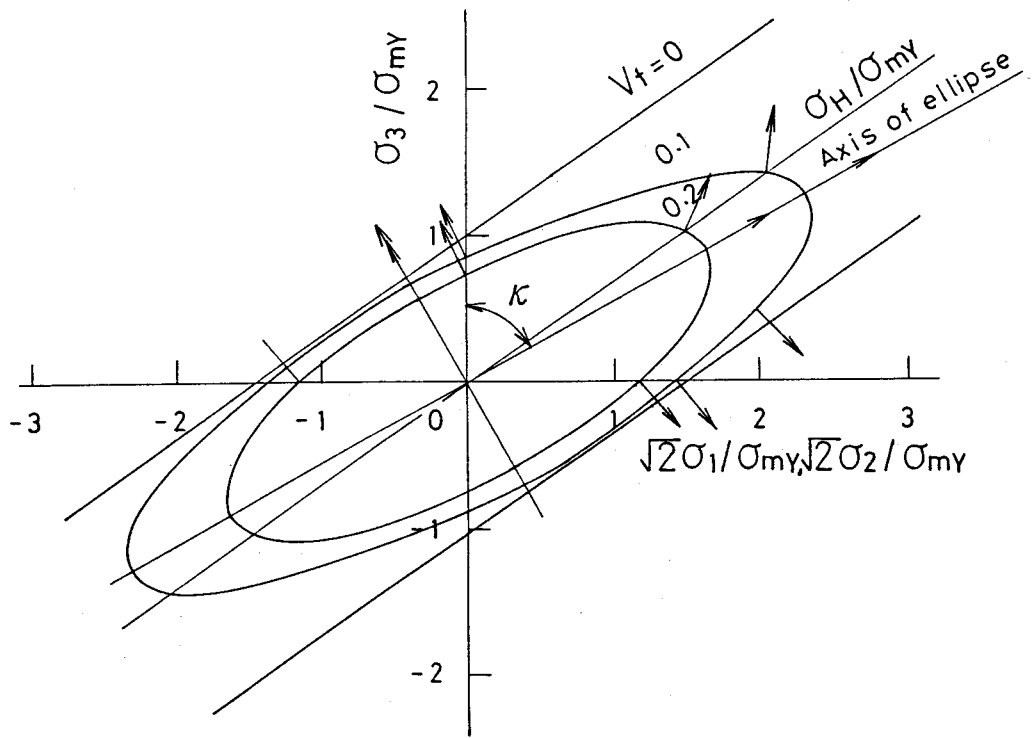


(a)  $\lambda = 1$  の場合

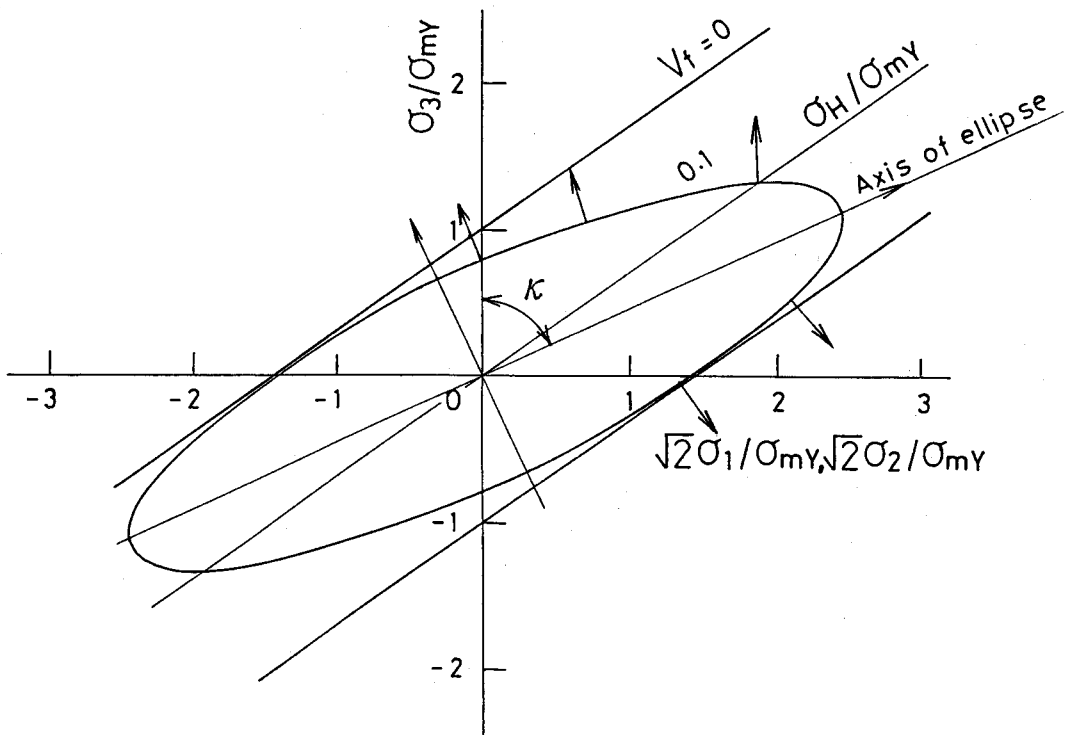


(b)  $\lambda = 0.5$  の場合

図 4.1 解析結果



(c)  $\lambda = 2$  の場合



(d)  $\lambda = 4$  の場合

図 4.1 解析結果

図4.1(a)は、 $\lambda = 1$ の時、すなわち第3章に述べた空孔が球形の場合の結果である。矢印は、それぞれの応力状態におけるひずみ速度( $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ )のベクトル方向を示す。このひずみ速度は、エネルギー消散率 $\dot{W}$ の最小値を求める時に、求まったものである。 $V_f = 0$ の時は中実材料であり、その降伏面は、von Misesの降伏条件と同様に、静水圧軸を中心軸とする円筒であることが示されている。

また、 $\lambda = 0.5$ の場合は扁平な円板形の空孔をもつ多孔質材料であり、 $\lambda = 2$ の場合は細長いラグビーボール形の空孔をもつ材料であり、 $\lambda = 4$ の場合はさらに細長い空孔をもつ材料である。これらについて、図4.1(b), (c), (d)にそれぞれ示す。

図より明らかなように、降伏曲線はほぼ楕円形であり、空孔体積率( $V_f = 0.1 \sim 0.2$ )が増すほど楕円形は小さくなる。

$\lambda = 0.5, 1, 2, 4$ と増加するにしたがい、降伏楕円形の大きさを変えずに $\sigma_z / \sigma_{mY}$ 軸から楕円の長軸を時計方向に回転することによって表わすことができる。アスペクト比が変化しても空孔体積率 $V_f$ が同一であれば楕円の長軸や単軸の長さは変化しない。 $\sigma_z / \sigma_{mY}$ 軸から楕円の長軸までの角度 $\kappa$ とアスペクト比 $\lambda$ との間の関係は、 $\lambda = 0.5 \sim 4$ の範囲で、図4.2に示されるような関係になっている。

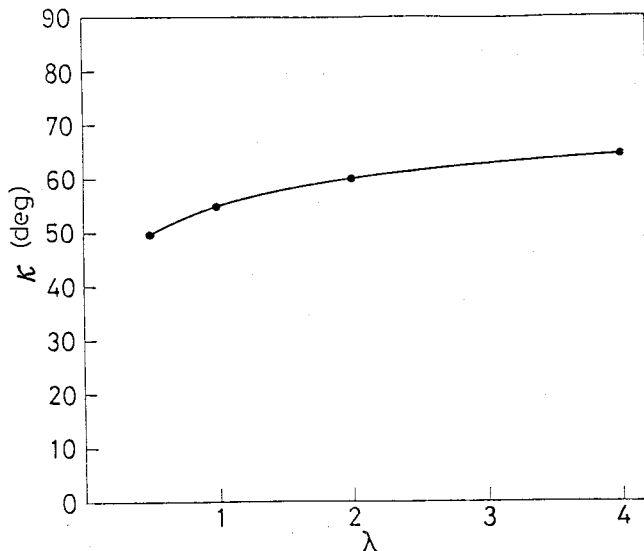


図4.2 アスペクト比 $\lambda$ と $\kappa$ の関係

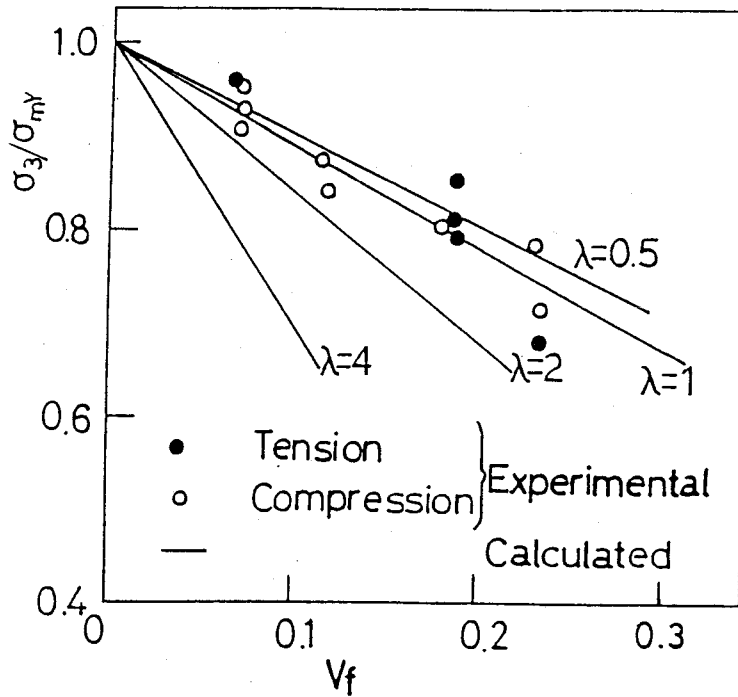


図 4.3 アスペクト比と強度の関係

図4.2より  $\kappa$  と  $\lambda$  を数式で表示すると

$$\kappa = 55 + 16.6 \log \lambda \quad (\text{度}) \quad (4.1)$$

で近似できる。 $\lambda = 1$  の場合は等方性であり、そのときは  $\kappa = 55^\circ$  となる。

図4.1より明らかなようにひずみ速度のベクトルは、降伏曲面に垂直方向になっているから、降伏曲線は塑性ポテンシャルといえる<sup>(1)</sup>。

図4.3に、電解銅粉末焼結体の空孔体積率 $V_f$ を変化させた時の引張強度または圧縮強度の実験値<sup>(2)</sup>を示す。図中の直線は、空孔体積率 $V_f$ を変えて計算した結果をアスペクト比 $\lambda$ をパラメータに示したものである。電解銅粉末焼結体の空孔は複雑な形状をしているが、空間的に見れば等方的と考えられるので、一つの近似として球形とでき $\lambda=1$ に相当する。その引張強度または圧縮強度はいずれも、 $\lambda=1$ の計算結果のまわりに分布しており、空孔体積率 $V_f=0.2$ までほぼ一致している。また、一定の空孔体積率 $V_f$ に対してアスペクト比 $\lambda$ が、小さいほどすなわち空孔が扁平であるほど、強度が大である。

本計算結果から、アスペクト比 $\lambda$ が変化しても、楕円の長・短軸の長さは変化しないから、 $\lambda=1$ の場合の降伏曲線を $\kappa^\circ$ だけ時計方向へ回転させることによって、 $\lambda \neq 1$ の場合の降伏曲線を求めることができる。このようにして求めた軸対称応力状態( $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_3$ )の異方性多孔質体降伏条件は、

$$\frac{3}{2} (\sqrt{2} \sigma_1 \cos \kappa - \sigma_3 \sin \kappa)^2 + \frac{1}{3 f^2} (\sqrt{2} \sigma_1 \sin \kappa + \sigma_3 \cos \kappa)^2 = \rho^{2n} \sigma_{PY}^2 \quad (4.2)$$

となる。上式において、 $\rho (=1-V_f)$ は相対密度、 $f (= \{a(1-\rho)^m\}^{-1})$ は関数であり、 $f$ 中の $a, m, n$ は材料定数である。

等方性の場合 $\lambda=1$ とすれば $\kappa=55^\circ$ となり、その降伏条件式は、式(4.2)において、 $a=1.20, m=0.32, n=1.00$ とすれば、図4.1(a) $\lambda=1$ の降伏曲線と一致する。

#### 4. 4 結 言

異方性多孔質材料の降伏条件を求めるため、上界法によるモデル解析を行った。得られた結果は以下のようにまとめられる。

- (1) 異方性多孔質材料の降伏曲面が、モデル解析によって求められた。
- (2) 上記の計算結果は、いままでに報告されている空孔が球形の場合の等方性多孔質材料の降伏条件の定数や係数を変えると一致することがわかった。
- (3) 降伏面に対してひずみ速度のベクトルは垂直に交わり、いわゆる垂直則を満足することがわかった。

#### 参 考 文 献

- (1) Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity (1950) 50, Clarendon Press.
- (2) 多田, 修士論文, 京都大学 (1980).



## 第5章 複合材料の強度解析

### 5.1 緒言

前章までは、母材中に空孔を有する多孔質材料について解析を行なった。本章においては、第2章のモデルの空孔部分に代わって楕円体形の硬質第二相を含有する複合材料についてその強さと降伏条件を求めるために、モデル解析を行なった。

軟質母材中に硬質層が分散する場合のモデル解析は Avitzur, B<sup>(1)</sup> によって行なわれている。しかしながら、そこでは、母材材料と第二相材がどちらも円柱形であり、第二相材料が硬質材料であることを前提としており、きわめて特殊な場合と言える。

最も簡便な強度計算にはよく知られた複合則があるが、実在する複合材料の強度とは一致しない。例えば、友田<sup>(2)</sup>によれば、延性二相材料の体積率の小さな領域で複合則によって推定された材料の強度は、実際の強度よりも大きい。

### 5.2 解析

第2章の図2.1においては領域  $s$  が空孔であったが、本章においては空孔部分を第二相に置き換えることによって複合材料のモデルを考える。図5.1に複合材料のモデルを示す。図5.1(a)に示すように、回転対称形の楕円体の第二相材が、対称軸を一定方向にそろえてランダムに分布している複合材料を考える。この材料の降伏強度を解析するに当たり、図5.1(b)に示すようなユニットセルを用いる。ユニットセルは、複合材料と同じ母材材料からできた回転対称の楕円体であり、その中心にこれと相似形の第二相材料をもっている。ユニットセルおよび複合材料は同じ第二相体積率

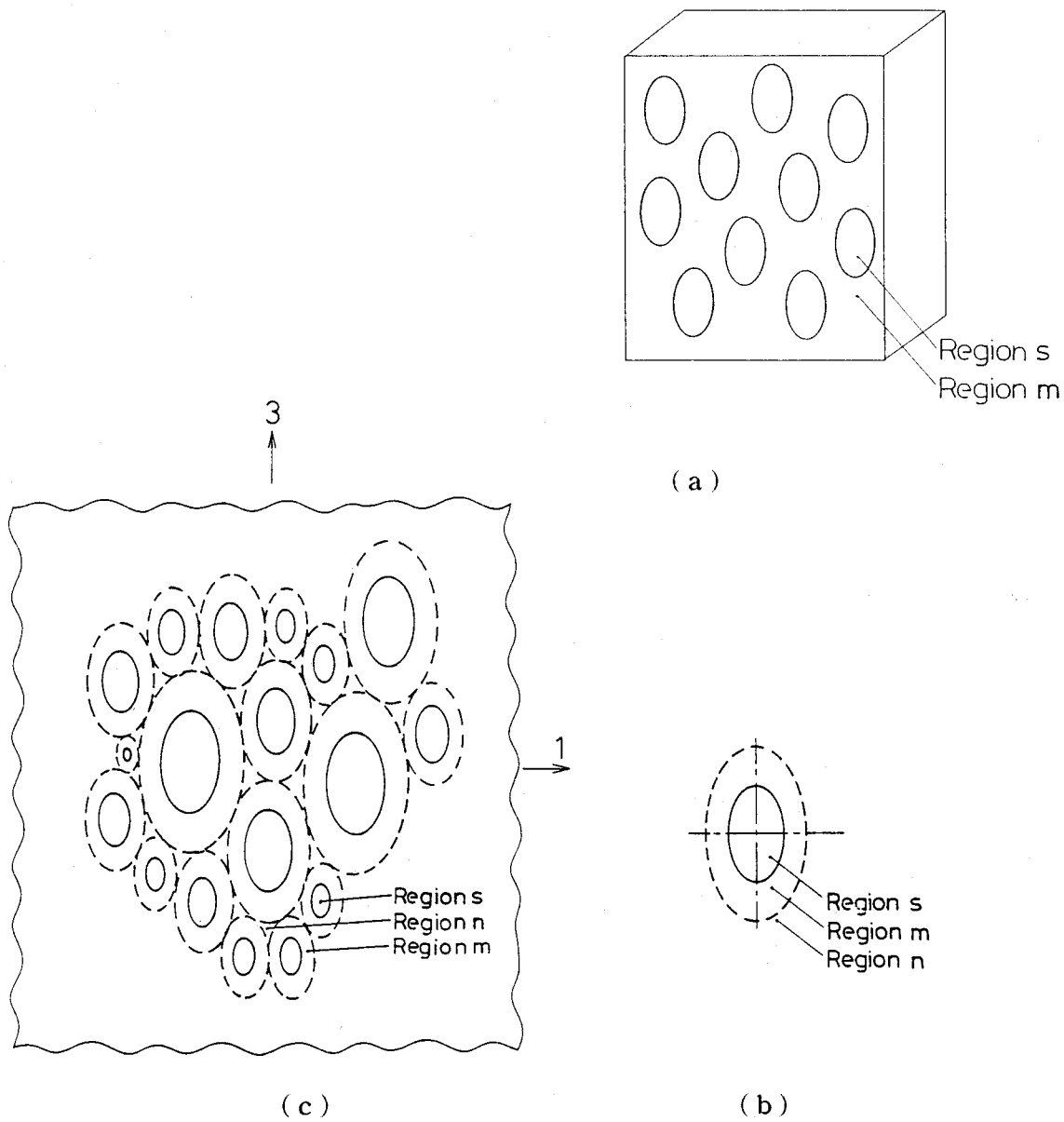


図 5. 1 異方性複合材料のモデル

$V_f$ をもつものとする。ユニットセルの降伏応力は、母材材料および第二相材料の降伏応力、第二相材料の形状と体積率  $V_f$ 、相間の接着力のみによって決まるものとする。したがって、図5.1(c)に示すように、相似形のユニットセルを対称軸を平行にして隙間なく詰めて作った複合材料は、詰め込まれたユニットセルの大きさに関係なく、一定の降伏応力をもつことになる。降伏応力はユニットセルの大きさに無関係であると仮定すれば、図5.1(a)と(c)に示すような両複合材料は同一の降伏応力をもつことになるので図5.1(b)に示すようなユニットセルを用い、図5.1(c)の複合材料の降伏応力を求めることにより、これを図5.1(a)の複合材料の降伏応力であることができる。図5.1において、 $s$ は第二相領域、 $m$ は母材領域、 $n$ はユニット間の領域とする。他の多くのユニットセルが、密に充填されているものと考えるので、この領域  $n$ の厚さは無視できるほど小さい。母材材料と第二相材料は均質等方材料とし、Von Misesの降伏条件にしたがい、非圧縮性剛完全塑性材料であると仮定する。

解析は、応力、ひずみが軸対称であり、第二相は回転楕円体であり、この楕円体の回転対称軸と応力の主軸とが一致するときだけを取扱う。第二相と母材領域境界面の間に分離したり重なりは生じないが、界面に沿うすべりは生じうるとする。そして領域  $s$ と領域  $n$ の材料は一様変形するものとする。

ユニットセルの全変形エネルギー消散率  $\dot{E}_{total}$ を計算するには、第2章において述べた母材の内部変形エネルギー消散率  $\dot{E}_m$ とせん断変形エネルギー消散率  $\dot{E}_{mn}$ のほかに、本章における第二相材料の内部変形エネルギー消散率  $\dot{E}_s$ と、母材材料・第二相材界面のすべりによるせん断変形エネルギー消散率  $\dot{E}_{sm}$ を追加して総和をとればよい。

### 5. 2. 1 第二相領域における変形速度場と内部変形エネルギー消散率

領域  $s$  における第二相材料は、体積変化のない、von Misesの降伏条件にしたがう剛完全塑性材料とし、そのひずみ速度分布は一様であると仮定する。

式(2.6)において示した領域  $n$  の軸対称変形の変形速度場と同様にして、領域  $s$  において半径方向速度  $u_{sr}$ 、円周方向速度  $u_{s\theta}$ 、 $z$  軸回りの変形速度  $u_{s\psi}$  は、式(5.1)で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_{sr} &= (\dot{\epsilon}_{s1} \sin^2 \theta + \dot{\epsilon}_{s3} \cos^2 \theta) r \\ u_{s\theta} &= (\dot{\epsilon}_{s1} - \dot{\epsilon}_{s3}) r \sin \theta \cos \theta \\ u_{s\psi} &= 0 \end{aligned} \right\} (5.1)$$

また、式(5.1)の速度を第2章において行なったのと同様に、 $r, \theta, \psi$  で偏微分することによってひずみ速度を計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{sr} &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \dot{\epsilon}_{s3} \\ \dot{\epsilon}_{s\theta} &= \frac{1}{2} (3 \sin^2 \theta - 1) \dot{\epsilon}_{s3} \\ \dot{\epsilon}_{s\psi} &= -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{s3} \\ \dot{\gamma}_{sr\theta} &= -3 \sin \theta \cos \theta \dot{\epsilon}_{s3} \\ \dot{\gamma}_{s\theta\psi} &= \dot{\gamma}_{s\psi r} = 0 \end{aligned} \right\} (5.2)$$

となる。なお上式において体積一定条件  $2 \dot{\epsilon}_{s1} + \dot{\epsilon}_{s3} = 0$  を用いて、 $\dot{\epsilon}_{s1}$  を  $\dot{\epsilon}_{s3}$  に書換えている。

領域  $s$  における相当ひずみ速度は、式(2.32)と同様、

$$\dot{\epsilon}_{eqs} = \left[ \frac{2}{9} \{ (\dot{\epsilon}_{sr} - \dot{\epsilon}_{s\theta})^2 + (\dot{\epsilon}_{s\theta} - \dot{\epsilon}_{s\psi})^2 + (\dot{\epsilon}_{s\psi} - \dot{\epsilon}_{sr})^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{sr\theta}^2 \} \right]^{1/2} \quad (5.3)$$

内部変形エネルギー消散率  $\dot{E}_s$  は、

$$\dot{E}_s = \int_{V_s} \sigma_{sY} \dot{\epsilon}_{eqs} dV_s = \int_{V_s} R.S. \sigma_{mY} \dot{\epsilon}_{eqs} dV_s \quad (5.4)$$

となる。

なお、ここで  $R.S.$  は、第二相領域  $s$  と母材領域  $m$  との降伏強度比であり、 $R.S. = \sigma_{sY} / \sigma_{mY}$  である。

### 5. 2. 2 母材材料と第二相材料との境界面におけるせん断変形エネルギー消散率

母材材料  $m$  と第二相材料  $s$  との境界面  $ms$  において、分離したり重なりを生じないがすべりは生じる。境界面  $ms$  において母材せん断降伏強度を  $\sigma_{mY} / \sqrt{3}$  とする。母材と第二相材料の境界面は完全に接着していないこともあるので、接着の程度を示すパラメータ  $B$  を導入する。すなわち、境界面でのせん断応力を  $B \sigma_{mY} / \sqrt{3}$  とする。 $B$  は 0 と 1 の間の値を取り、 $B = 0$  の時は接着せず、 $B = 1$  の時は完全に接着していることを示す。なお、母材材料  $m$  と第二相材料  $s$  との境界面  $ms$  では  $r = r_{ms}$  として、式(2.35)と同様に、

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ms} &= 8 \int_{S_{ms}} \frac{B \sigma_{mY}}{\sqrt{3}} |\Delta u_{ms}| dS \\ &= 8 \frac{B \sigma_{mY}}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/2} |(u_{mr} - u_{sr}) \tan \alpha + (u_{m\theta} - u_{s\theta})| \\ &\quad \times \frac{\pi}{2} r_{ms}^2 \sin \theta d\theta \quad (5.5) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha$ は境界 $ms$ の法線と半径とのなす角とする(図2.10参照)。第2章の式(2.24), (2.25)において、 $r_{mn}, \tan \alpha$ を計算した時と同様にして $r_{ms}$ および $\tan \alpha$ を計算すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \lambda^2)}{\cos^2 \theta + \lambda^2 \sin^2 \theta} \\ r_{ms} &= \frac{c_{ms}}{(\cos^2 \theta + \lambda^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \end{aligned} \right\} (5.6)$$

### 5.3 降伏強度の計算

複合材料の降伏条件を求めるために、一般三次元主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ が作用する場合の計算をする。

ユニットセルに加えられるエネルギー消散率は、軸対称応力であるから

$$(2\sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) \times V$$

ユニットセルの体積は一定であるから

$$\dot{\epsilon}_1 = - \frac{\dot{\epsilon}_3}{2}$$

これを上式に代入すると

$$(-\sigma_1 \dot{\epsilon}_3 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) \times V$$

となる。

ユニットセル内および境界面で消費されるエネルギー消散率は、

$$\dot{E}_m + \dot{E}_{mn} + \dot{E}_s + \dot{E}_{ms} \text{ であり、}$$

上界法により

$$(-\sigma_1 \dot{\epsilon}_3 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) \times V \leq \dot{E}_m + \dot{E}_{mn} + \dot{E}_s + \dot{E}_{ms}$$

となる。したがって、

$$\sigma_3 \leq \left\{ \frac{1}{V} (\dot{E}_m + \dot{E}_{mn} + \dot{E}_s + \dot{E}_{ms}) + \sigma_1 \dot{\epsilon}_3 \right\} / \dot{\epsilon}_3 \quad (5.7)$$

となる。

上式より

$$\sigma_3 = \left| \frac{1}{V} \left[ \{ (\dot{E}_m + \dot{E}_{mn} + \dot{E}_s + \dot{E}_{ms}) / \dot{\epsilon}_3 \} + \sigma_1 \right] \right|_{\min} \quad (5.8)$$

として降伏応力  $\sigma_3$  を計算する。

式(5.8)の右辺に含まれる  $\sigma_1, V_f, R, S, \lambda$  に所定の値を代入すると、右辺は  $\dot{\epsilon}_{s3} / \dot{\epsilon}_3$  のみの関数となる。 $\dot{\epsilon}_{s3} / \dot{\epsilon}_3$  の値を変化させて右辺の括弧内の最小値を求め、これを  $\sigma_3$  の近似値とする。

右辺の  $\dot{E}_m$  の積分に当っては、分割数をいくらにするのが最適かを検討した。分割数を半径方向  $r$  に20、円周方向  $\theta$  に  $5^\circ$  ごとに18分割した結果、全部で360分割になった。なお、このほかにも、900, 1800分割も行なつて

みたが、360分割でも精度が十分であり、また、解の収束性もよいことから、計算はすべてこの360分割で行なった。

#### 5. 4 解析結果と考察

計算結果を図5.2(a),(b)のRendulic面に示す。図中Bは5.2.2で述べた接着強度のパラメータであり、R. S. は相対強度であり、

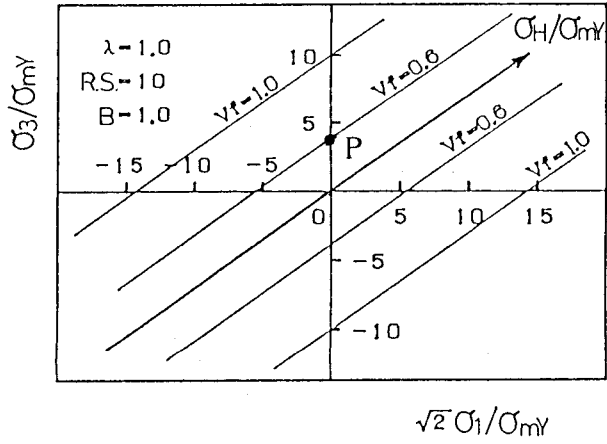
$$\text{相対強度} = \frac{\text{第二相材の降伏応力}}{\text{母材の降伏応力}} = \sigma_{sY} / \sigma_{mY}$$

である。

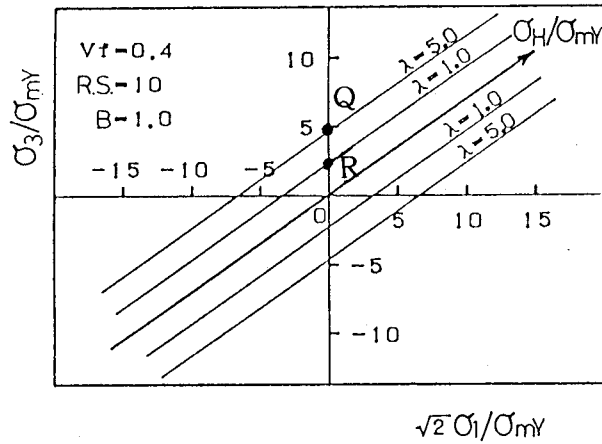
計算結果は、図上の点座標( $\sigma_1, \sigma_3$ )として求められるが、これらの点を結んだ線として示してある。図中の一对の直線は降伏曲面とRendulic面との交線であって、従来のvon Misesの降伏条件と同様に2本の平行線となっている。図5.2(a)は、第二相が球状( $\lambda=1.0$ )、強度比(R. S.)が10、完全接着( $B=1$ ) $V_f$ が0.6と1.0(すべて第二相という特別な例であるが)の場合の複合材料の降伏条件を示す。なお $V_f=0.6$ の場合には計算の結果、 $\epsilon_{s1}, \epsilon_{s2}$ は0となり、非常に硬い第二相(R. S.=10)は全く変形せず、母材のみが変形したことになる。したがって非常に硬い第二相の体積率 $V_f$ が0.6にも達しているのに、この複合材料の引張強度 $\sigma_3/\sigma_{mY}$ は4程度である(図(a)の点P)。また第二相が変形しないときには、第二相の相対強度R. S. が10であっても、8であっても複合材料の強度は同じであり、結局第二相の強度は無関係である。

図5.2(b)では、第二相の体積率 $V_f$ が0.4、完全接着( $B=1$ )、相対強度比R. S. が10、アスペクト比 $\lambda=1.0$ と5.0の場合の降伏曲面を示す。 $\lambda=1$ は球形、 $\lambda=5$ は長い第二相であるが、第二相体積率が同じであっても第二相が長い方が強度が大きくなっている。この傾向は第6章の図6.5において





(a) 第二相材料の体積率  $V_f$  の影響



(b) 第二相材料のアスペクト比  $\lambda$  の影響

図 5. 2 複合材料の降伏条件

示されるようにアスペクト比の増加と共に変形応力が増加していることと対応する。また計算の結果 $\lambda=5$ の場合は、どの応力座標の場合も $\epsilon_1=\epsilon_{s1}$ 、 $\epsilon_3=\epsilon_{s3}$ となり、母材と第二相材とが同じひずみで変形していることになるが、 $\lambda=1.0$ の場合には、 $\epsilon_{s1}=0$ 、 $\epsilon_{s2}=0$ となり、第二相は変形せず、母材のみが変形していることがわかった。

以上 図5. 2(a), (b)では、 $V_f, R. S., \lambda$ を変えて少数の計算結果のみを示したが、他の計算結果もあわせて次の結論を導くことができた。

## 5. 5 結 言

- (1) アスペクト比 $\lambda$ が1に近く、相対強度 $R. S.$ が大きく、体積率 $V_f$ が小さいときには、第二相は変形せず、複合強度は複合則による予測値より低い。これに反して、アスペクト比 $\lambda$ が1よりずっと大きいか小さく(長い、扁平か)、第二相材料の相対強度 $R. S.$ が1に近く、体積率 $V_f$ が大きいときにおいて、第二相材料と母材材料は同じひずみをうける。この場合の複合強度 $\sigma_{cy}$ は、複合則によって求められる値となる。
- (2) 軸対称変形する場合の複合材料の降伏曲面はvon Misesの降伏条件にしたがうことが明らかになった。したがって単軸応力状態のみで、降伏応力に及ぼす影響を表わすことができる。

## 参 考 文 献

- (1) Avitzur, B., Trans. ASME., Series B. 95 (1973) 827. 835.
- (2) 友田, 学位論文, 京都大学 (1979).

## 第6章 第二相粒子を含む焼結銅 の変形と強度特性

### 6.1 緒言

複合材料は、非常に優れた機械的特性をもつ機能性材料として広く用いられるようになってきた。複合材料の応力-ひずみ関係と延性については第二相粒子の体積率に依存するばかりでなく、第二相粒子の幾何学的形状に依存する。これらの関係については、実験的にも<sup>(1)~(3)</sup>解析的にも<sup>(4)~(7)</sup>研究されてきているが、いまだに、解析結果と実験結果との対応関係について充分明らかではない。本章においては、タングステンカーバイト粒あるいはステンレス線を含む焼結銅の変形応力について実験研究を行なった結果について述べる。第5章までのモデル解析と本章の実験において、第二相粒子の形状に差異があるが、一般的な傾向の比較・検討を行なった。

### 6.2 実験

第二相材料としてステンレス線、炭素鋼のねじを用い、母材材料として表6.1に示す電解銅粉末を用いた。電解銅粉末中に板厚方向に一層、あるいは二層、四層に、種々の長さや直径のステンレス線を並べて試験片として成形し、焼結して用いた。またタングステンカーバイト粒(粒子径 0.75~0.80  $\mu\text{m}$ )と電解銅粉の混合焼結体についても実験を行なった。

図6.1に、線の分布と配列を示す。試験片Sは、試験片の板厚方向に四層の線(図のように配置したものを板厚方向に4層重ねた)を分布させたものであり、試験片MとNは一層であり、その他の試験片AからPまではすべて二層である。これらの線、ねじ、粒を含んだ銅粉末は、金型中で約

表6.1 電解銅粉(CE-56)の性質と粒度分布

見掛密度	(g/cm <sup>3</sup> )	1.9 ~ 2.3
流動度	(s/50g)	最大 45
純度	(%)	最小 99.7
還元減量	(%)	最大 0.2

粒 度 分 布							
メッシュ	80	100	145	200	250	350	
%	最大 3	最大 12	20~45	20~40	5~20	最大 15	最大 20

70ton(約 300MPa)の圧粉荷重を加えた後、900°C、2時間の真空焼結を行なった。その後約100ton(約 500MPa)の荷重で再圧粉し、さらに、900°C、2.5時間の二次焼却を行ない、図6. 2(a)に示す形状と寸法の引張試験片に仕上げ加工を行なった。

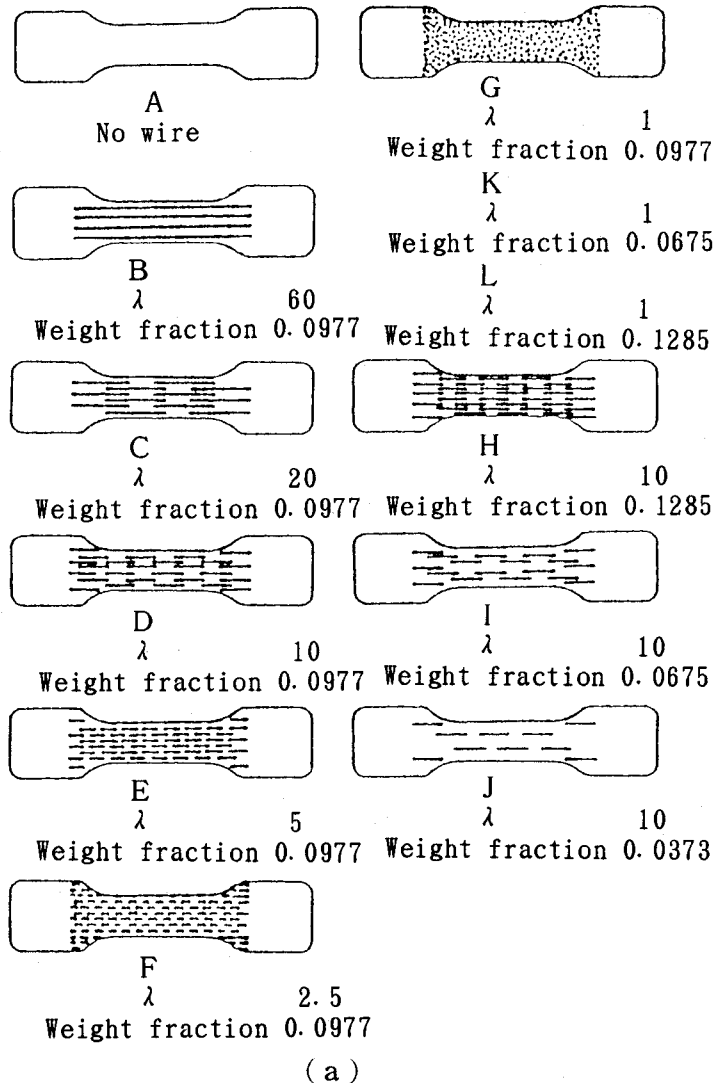
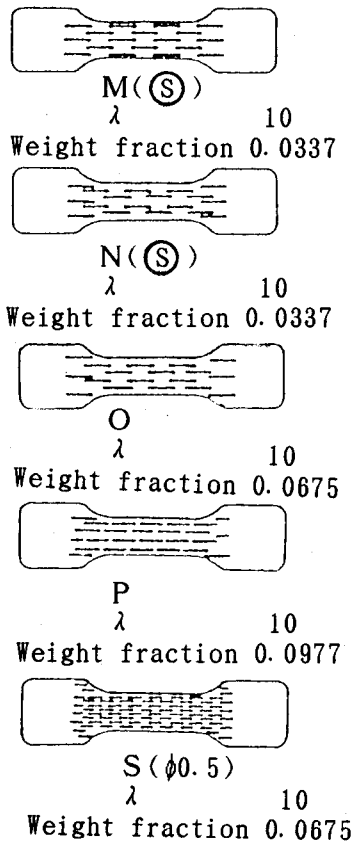


図 6. 1 第二相の分布と配列



(b)

図 6.1 第二相の分布と配列

用いたステンレス線は直径が0.5mmと1mm、長さが2.5~60mmである。これらのステンレス線のアスペクト比 $\lambda$ (=長さ $l$ /直径 $d$ )は2.5~60である。また、タングステンカーバイト粒の場合、粒子はほぼ球形(平均直径60 $\mu$ m)であるので、そのアスペクト比 $\lambda$ は1とした。図6.2(a)に示す形状の試験片を用いて引張試験を行ない応力-ひずみ関係を求めると共に破壊ひずみについて計測した。また、図6.2(b)に示す試験片によって、母材と第二相の境界面における接着せん断強度を求めるための引抜実験を行った。この引抜試験片は、同図(a)の引張試験片の繊維がはいつている部分をあらかじめ予測しておき長手方向半分より上では母材部分を切削によって除去し、繊維のみとしたものである。この時繊維を切断しないように注意した。図6.2(b)のダンベル部と、繊維のみを引張試験機のチャックに保持し、引張荷重を加えた。引張荷重が母材と繊維界面の接着力を越えた時には繊維が引き抜かれ、その時の荷重から接着強度を求めた。

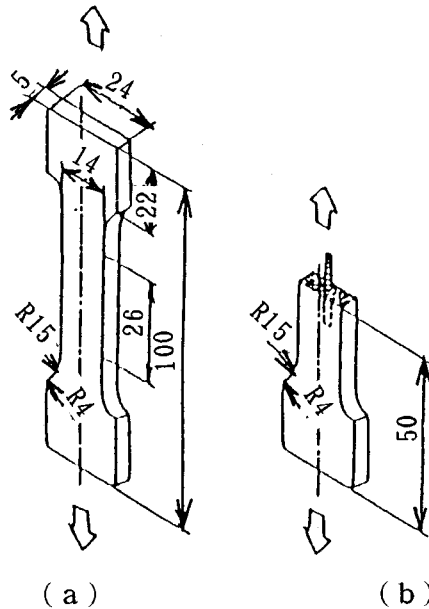


図 6. 2 引張試験片(a)と引抜試験片(b)に対する試験片の形状と寸法

### 6. 3 重量分率、相対密度の定義

重量分率は、複合材料全体に対する第二相材（線あるいは粒子）の重量比として定義する。試験片作成時においては、チャック間の複合材料全体に対する第二相材の重量を計測した。第5章までに述べた体積率と比較するには、重量分率を体積率に換算しなければならないが、母材材料中に空孔を含んだ焼結銅の比重を求めることができないため、第二相材の含有率を重量分率でもって定義した。相対密度  $\rho$  は、空孔を含む複合材料の見掛密度と、空孔のない中実複合材料の密度の比として定義している。

### 6. 4 実験結果と考察

#### 6. 4. 1 第二相がステンレス線の場合

##### (1) ステンレス線の分布の影響

図6.3(a)と(b)にステンレス線を含む焼結銅の応力-ひずみ曲線を示す。(a)と(b)それぞれにおいて、アスペクト比と重量分率がほぼ同じであり、第二相材としての線の分布状態のみが異なる場合を示す。実験を行なった範囲において、分布の違いは変形応力にあまり影響しないことがわかる。

##### (2) アスペクト比の影響

(i) 図6.4は、重量分率を一定にしておいて、異なったアスペクト比、異なった分布における応力-ひずみを示す。変形応力はアスペクト比の増加にしたがって増加し、これは第5章における解析結果(図5.2)と同じ傾向である。第二相材料の形状は、本実験の場合円柱であり、第5章の解析においては球形であるから、変形応力について定量的な比較はできない。



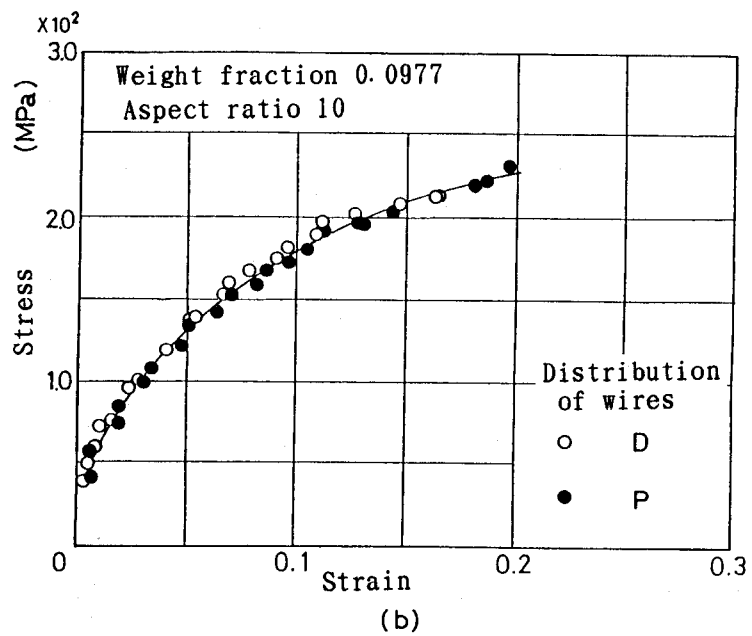
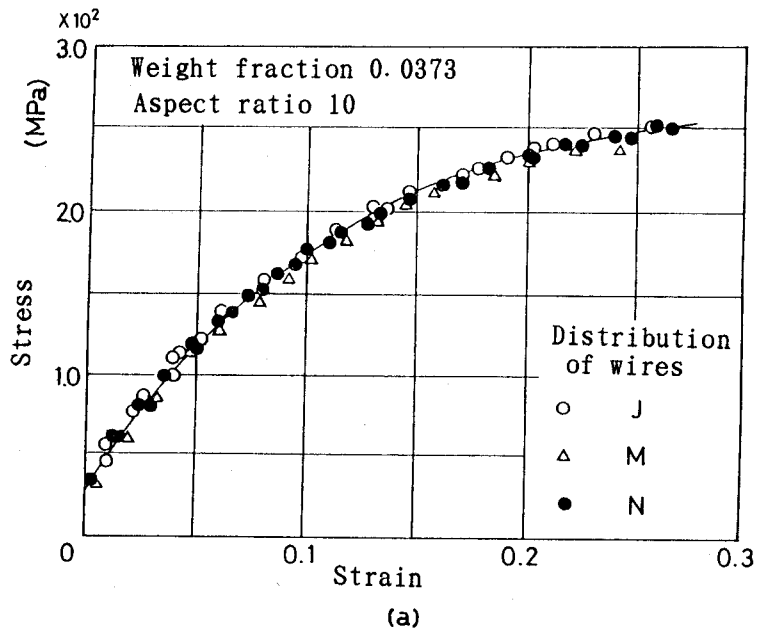


図 6.3 変形応力に対する第二相材の分布の影響

図6.5に図6.4を再整理して、特定のひずみ0.05, 0.10, 0.15におけるアスペクト比と変形応力との関係を示した。アスペクト比が大になるにしたがって変形応力も増加する。

第5章においては、母材と第二相界面の接着が完全接着( $B=1$ )として、アスペクト比 $\lambda=0.2$ から10までの計算した結果について述べた。図6.5においてはアスペクト比 $\lambda=1$ から20までの実験結果であるが、アスペクト比10までにおいて、第5章の結果と同じである。

- (ii) 図6.6(a)に密度とひずみの関係を示す。ここでは、図が見にくくなるので、実験点は省略してこれらを結んだ曲線で示してある。同一の空孔率の圧粉体がえられないために、図中のひずみ0のところすなわち、変形前であっても相対密度は同じではない。図中点線で示す母材金属だけの場合でも空孔はひずみの増加と共に成長し、したがって、密度は減少する。これに比べて複合材では、アスペクト比 $\lambda=1$ から20までは、ひずみの比較的初期の段階で密度減少が現れており、母材金属だけの場合よりも密度減少が変形の早い段階に現れていることがわかる。最大のアスペクト比 $\lambda=60$ の場合には接着がよく、密度低下が少ない。
- (iii) 図6.6(b)において、アスペクト比1の場合の密度-ひずみ関係におよぼす重量分率の影響について示す。重量分率の大きなところ、ひずみの増加と共に、密度の急激な低下がみられる。母材金属のみの場合では、密度の低下の原因は空孔の成長のみであるが、第二相を入れた複合材料の場合は、第二相と母材材料との境界面における剥離の発生が加わり、母材材料のみの場合より大きな密度低下をもたらしたものと考えられる。
- (iv) アスペクト比と破壊ひずみとの関係を図6.7に示す。実験点のバラツキも多くアスペクト比と破壊ひずみとの関係を考察しにく

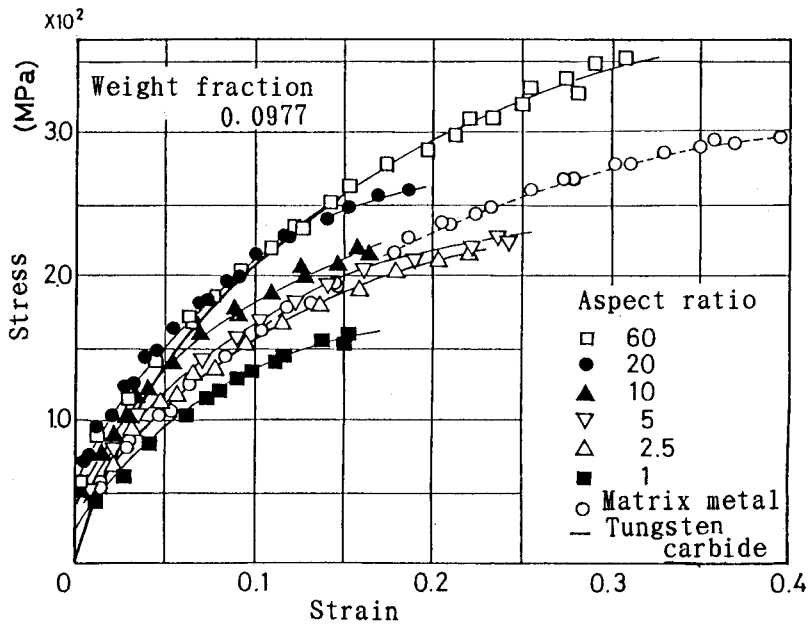


図 6.4 変形応力に及ぼすアスペクト比の影響

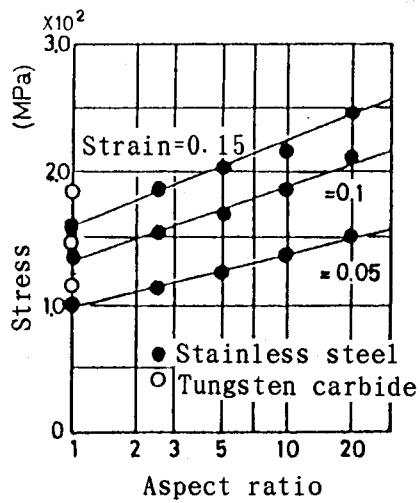
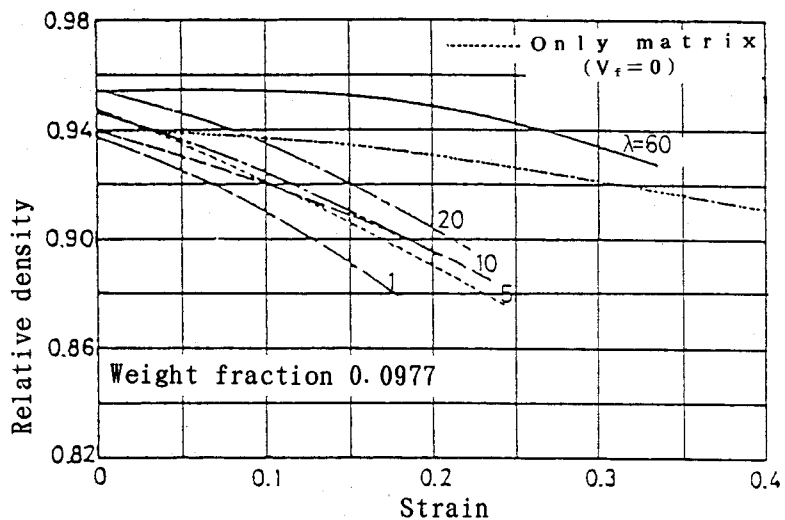
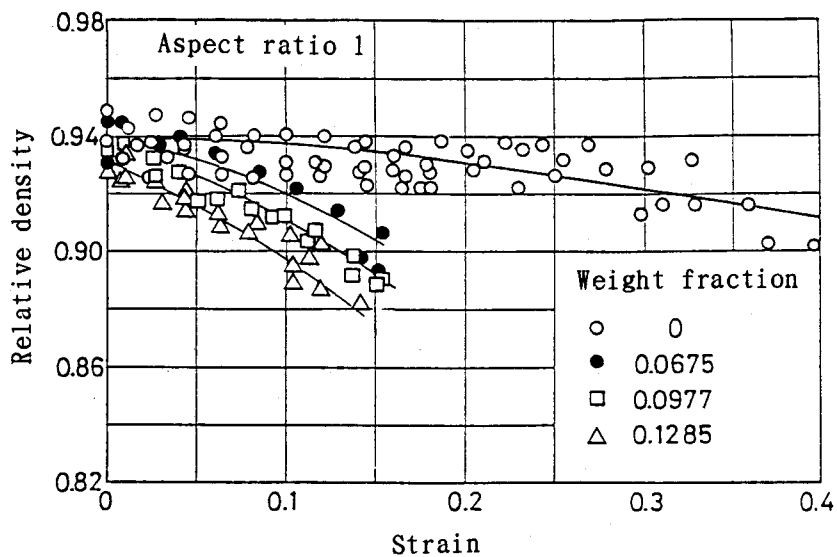


図 6.5 変形応力とアスペクト比の関係



(a)



(b)

図 6. 6 ひずみの増加にともなう密度の低下(a)と密度におよぼす重量分率の影響(b)

いが、一定のバラツキがあってもアスペクト比20までは、破壊ひずみに対してあまり影響が認められないが、アスペクト比60では、他のアスペクト比の場合の約1.5~2倍位の破壊ひずみがあり、おそらくこれは、図6.6において示されるように密度の低下がアスペクト比1から20までと比較して少ないことから、接着が完全に近く母材との剥離が少なかったためと推測される。

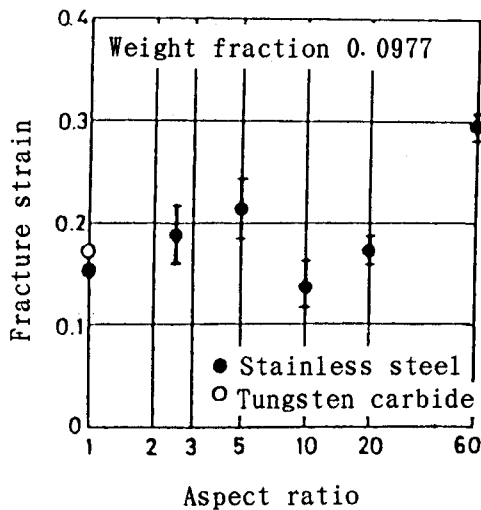


図6.7 破壊ひずみに及ぼすアスペクト比の影響

### (3) 重量分率の影響

- (i) 図6.8と図6.9に、アスペクト比10と1の場合の、重量分率と変形応力との関係を示す。図6.8と図6.9の破線は、母材と第二相の変形応力と重量分率の関係を複合則によって計算した結果である。図6.8を詳細にみると、小さなひずみ範囲0.05と0.10においては、変

形応力の計算値と実験値はほぼ一致し、第5章で示したように体積率とともに変形応力が増加するが、0.15のひずみになると計算値の方が大きくなり、実験結果と合わなくなる。おそらく剥離によって変形応力が減少するためと考えられる。

図6.9において変形応力は、重量分率の増加と共に減少する。これらは図6.8の場合とは反対であり、図6.6において、アスペクト比 $\lambda = 1$ の場合の密度低下が大きいことに対応していると思われる。

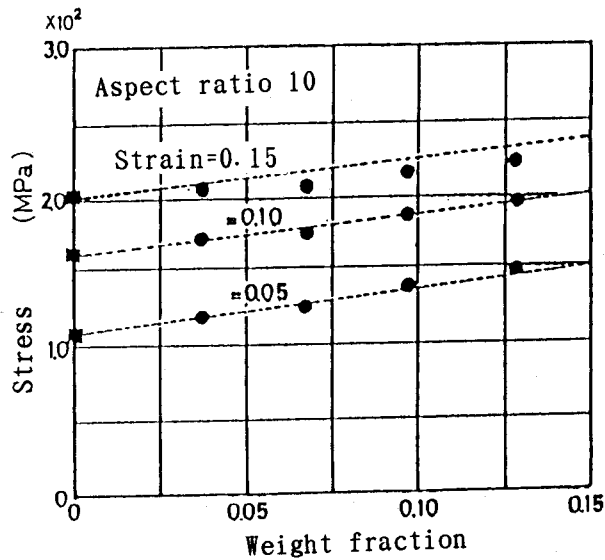


図6.8 変形応力に及ぼす重量分率の影響  
(アスペクト比10)

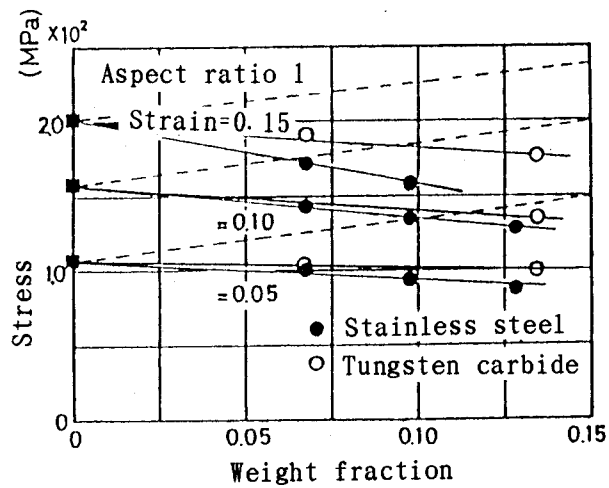


図 6. 9 変形応力に及ぼす重量分率  
の影響 (アスペクト比 1)

- (ii) 図 6. 10(a)と(b)に示すように、ステンレス線の直径が1.0mmと0.5mmの間で、変形応力-ひずみ関係、密度とひずみ関係にあまり差はなく、実験の範囲において線直径は変形応力、密度変化に影響しないことがわかる。

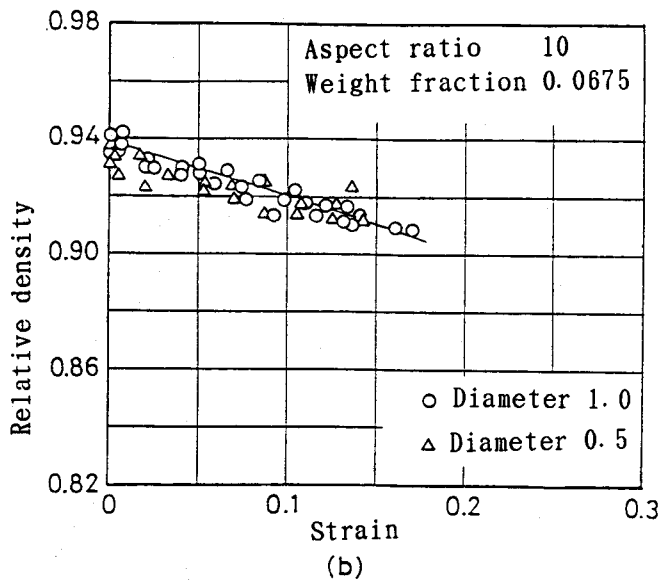
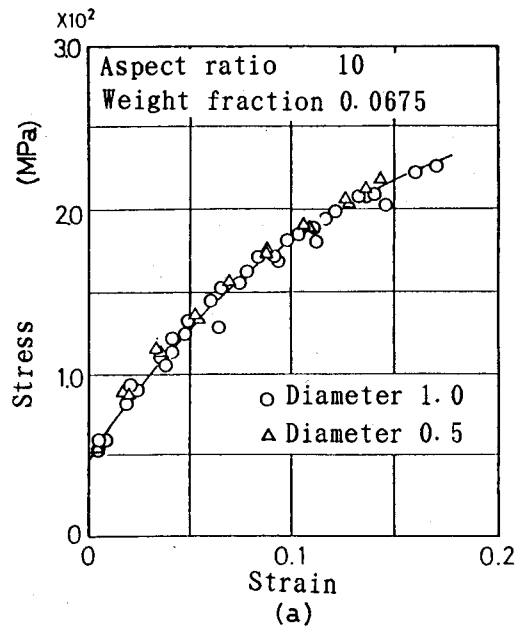


図 6.10 変形応力(a)と密度(b)に及ぼす線直径の影響



#### (4) 線の表面性状の影響

線の表面性状によって、接着せん断強度がどのように変化するかを検討するために、炭素鋼のM2ねじ線と平滑線を含む引抜試験片(図6.2(b))を用いた。

引抜力をFとして接着せん断強度kは

$$k = F / \pi d L \quad (6.1)$$

と定義する。dは線直径、あるいはねじの有効径であり、Lは埋め込み長さである。表6.2に複合条件と引抜実験結果を示す。表6.2に示されるdを用い、Lを種々に変化させて実験を行ない、母材材料から平滑線あるいはねじ線が引き抜ける場合と平滑線あるいはねじ線が破断する場合の限界のLを求め引き抜けた時の力Fを測定して、式(6.1)により計算して接着せん断強度を算出した。

また、表6.3に複合材料を構成する単一材料の引張強度も示しておく。表6.2より、ねじ線と平滑線の接着せん断強度を比較すると、接着せん断強度が、ねじ線の方が平滑線よりも約8倍大きいことがわかる。ねじの谷の間に母材材料が入ることによってより強い接着が得られたものと考えられる。平滑線は、接着が十分でないこともわかる。

表 6. 2 複合材料の複合条件と接着せん断強度

第二相材	線の直径 (mm)	アスペク ト比 $\lambda$	重量分率	接着せん断強度 (MPa)
平滑線	1. 0	2 2	0. 0 2 0	1 2. 7
ねじ線	1. 6	1 1	0. 0 0 9	9 7. 0

表 6. 3 引張強度 (単一材)

構成材料		引張強度 (MPa)
母材	(銅)	1 4 7. 0
第二相材	平滑線 (ステンレス)	7 5 4. 6
	ねじ線 (炭素鋼)	4 1 1. 6

#### 6. 4. 2 第二相がタングステンカーバイト粒の場合

第二相にタングステンカーバイト粒を含む焼結銅の場合は、図6. 4, 6. 5, 6. 7, 6. 9, において示されるように、アスペクト比1のステンレス線よりわずかに大きな変形応力と大きな破壊ひずみを示す。

これは、おそらく、タングステンカーバイト粒は、高い接着せん断強度と、また、高い変形応力をもっているためと考えられる。

#### 6. 5 結 言

ステンレス線あるいは、タングステンカーバイト粒を含む焼結銅の複合材料の引張試験を行なった結果、実験を行なった範囲において次のようにまとめられる。

- (1) 複合材料の変形応力に対して、第二相材の分布の影響はあまりなく、複合材料の変形応力は、図6. 5に示されるようにアスペクト比の増加とともに増加し、図5. 4の計算結果とも対応している。またアスペクト比10の場合、図6. 8に示されるように、変形応力は重量分率の増加と共に増加し、第5章のモデル解析結果と一致した。複合則は、小さなひずみ範囲でかつ大きなアスペクト比の場合においてのみ用いることができる。
- (2) 平滑ステンレス線よりもねじ線の方が接着がよく、また平滑ステンレス線よりもタングステンカーバイト粒の方が接着状態が良い。周知のごとく、第二相境界面における接着状態は、強度増加に対して支配的であるから、タングステンカーバイト粒を含む複合材料の方が変形応力が大である。
- (3) 複合材料の破壊ひずみは、アスペクト比が60の場合においてのみ増加する。(図6. 7)

## 参 考 文 献

- (1) McDanel, D. L., Jech, R. W and Weeton, J. W., NASA TN, D-1881, Oct. (1963).
- (2) Kelly, A. and Davies, G. J., Metallurgical Review, 10 (1965) 1.
- (3) Crachley, D., Powder Metallurgy, 11 (1963) 59.
- (4) Dow, N. F. and Tis, G. E., R63SD61 (1963).
- (5) Rosen, B. W., Fiber Composite Materials (1965) 72, ASM.
- (6) Kelly, A. and Tyson, W. R., Zackay, V. F ed, High strength Materials (1965) 578.
- (7) Kelly, A. and Tyson, W. R., J. Mech. Phys. Solids, 14 (1966) 177.

## 第7章 積層金属板の引張変形特性

### 7.1 緒言

機能設計の視点より、最近、積層材料が工業的に使用されるようになってきている。とくに有機接着剤で接着された制振鋼板などは、防振防音の観点より実用化されている。しかしながら、これら材料の塑性加工性の評価の手法は、十分確立されているとは思われない。

積層構造をもつ板材の深絞りについては、銅と軟鋼のクラッド材ならびに有機接着剤による積層板の場合についてHawkin-Wright<sup>(1)</sup>の報告がある。平岩・近藤<sup>(2)</sup>、<sup>(3)</sup>は積層板の深絞りならびに、積層板の変形中の構成板の相互作用の検討を行ない、限界絞り比が、必ずしも複合則にしたがわないことを指摘している。そして、限界絞り比の小さい材料と大きい材料との積層板では、限界絞り比の小さい材料も、大きい材料に助けられて限界絞り比が向上することなどを示している。これらの結果は、 $n$  値の差が大きい部材を積層した場合、顕著であることも示している。

ステンレス鋼とアルミニウムのクラッド材料についての単軸引張りについては、Semiatin-Piehler<sup>(4)</sup>の報告がある。Semiatin-Piehler はクラッド板の応力ひずみ関係は、複合則にしたがうことを示し、不安定変形開始や局部収縮についても、検討を行っている。

大沢・西村<sup>(5)</sup>は、3層に積層した積層板の単軸引張り変形について、各板の応力状態を計算より求め、実験と比較している。大沢・西村の理論では、非線形6元連立方程式を解かなければならないため、かなり複雑な計算が必要と思われる。

本研究では、比較的簡単な方法で積層金属板の単軸引張挙動を予測することを目的として、Hillの異方性塑性理論<sup>(6)</sup>を用い、上界法によるモデル解析を行なった。すなわち、積層板を構成する単一板の加工硬化係数

K値、加工硬化指数n値、 $r_0$ 値、 $r_{45}$ 値、 $r_{90}$ 値が既知ならば、これらの板を異方性の主軸に対して任意の方向に貼り合わせた積層板の単軸引張変形におけるr値ならびに応力-ひずみ線図を推定できることを示した。そして、硬質アルミニウム、軟質アルミニウム、6-4黄銅、冷間圧延鋼板を有機接着剤で相互に貼り合わせた積層板について、単軸引張試験を行い、実験結果と解析結果とを比較した。

## 7. 2 モデル解析

物体内部に速度不連続を含む場合の上界定理は、すでによく使われている。積層板の場合には、界面が速度不連続面になり、かつその両側において材料の強度が異なる。両板の材料の強度、接着面の強度、界面の幾何学的な形状が既知であれば、上界法を用いることが可能である。ここでは、単純化するために両材料間境界でのすべりが無い場合、すなわち、界面において速度不連続面がない場合について解析を行う。解析を行うにあたり以下の仮定をおく。

- (1) 計算の対象にする板材料には板面内で直交異方性が存在し、Hillによる異方性材料の降伏条件に従うものとする。
- (2) 積層構造材の構成成分は、各々一様変形するものと仮定し、板面内の接着は完全接着であり、剥離は起こらないものとする。

いま板面内に $x, y$ 軸をとり、板の圧延方向に $x$ 軸をとる。すなわち、 $x, y$ 方向を異方性の主軸と一致させて、板厚方向に $z$ 軸をとる。板厚は小さい場合を考え、板厚方向の応力を無視して平面応力問題として考える。Hillによれば相当応力 $\sigma_{eq}$ は、

$$\sigma_{eq} = \left[ \frac{3}{2} \frac{F \sigma_y^2 + G \sigma_x^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2N \tau_{xy}^2}{(F + G + H)} \right]^{1/2} \quad (7.1)$$

となり、相当ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{eq}$  は、

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \left[ \frac{2(F + G + H)}{3} \right]^{1/2} \left[ F \left( \frac{G \dot{\epsilon}_y - H \dot{\epsilon}_z}{F G + G H + H F} \right)^2 + G \left( \frac{H \dot{\epsilon}_z - F \dot{\epsilon}_x}{F G + G H + H F} \right)^2 + H \left( \frac{F \dot{\epsilon}_x - G \dot{\epsilon}_y}{F G + G H + H F} \right)^2 + 2 \frac{(\dot{\epsilon}_{xy})^2}{N} \right]^{1/2} \quad (7.2)$$

となる。ここで、 $F, G, H, N$  は異方性のパラメータである。(6)

さらに、一般の場合として、図7.1に示すように圧延方向  $X$  に対して角  $\alpha$  だけ傾いた方向から試験片を採取して引張変形させるものとする。

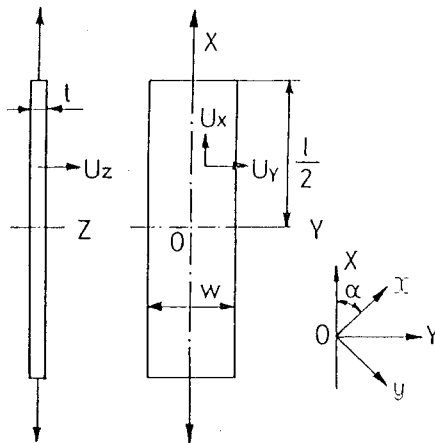


図7.1 試験片形状と可容速度

試験片の引張軸方向を  $X$ 、それと直角方向に  $Y$  軸をとる。 $X, Y$  方向のひずみ増分  $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y$  を用いて、 $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\epsilon}_{xy}$  は、次のように示される。

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} + \frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2} \cos 2\alpha \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} - \frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2} \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (7.3)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{-(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)}{2} \sin 2\alpha$$

$$\dot{\epsilon}_z = -(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y)$$

$\alpha$  方向に引っ張った場合の  $r$  値 (=  $\dot{\epsilon}_y / \dot{\epsilon}_z$ ) を  $r_\alpha$  とすれば、

$$r_\alpha = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha} \quad (7.4)$$

と表わされるから<sup>(6)</sup> 圧延方向に引っ張ったとき ( $\alpha = 0^\circ$ ) の  $r$  値すなわち  $r_0$  は、

$$r_0 = \frac{H}{G}, \text{ 書き直して } G = \frac{H}{r_0} \quad (7.5)$$

となる。同様に引っ張方向が圧延方向に対して直角のとき ( $\alpha = 90^\circ$ )、

$$r_{90} = \frac{H}{F}, \text{ 書き直して } F = \frac{H}{r_{90}} \quad (7.6)$$

となる。 $\alpha = 45^\circ$ 、すなわち引っ張方向が圧延方向に対して  $45^\circ$  のとき

$$r_{45} = \frac{H + (2N - F - G - 4H) / 4}{\frac{1}{2}(F + G)}$$



$$= \frac{2N - F - G}{2(F + G)} = \frac{N}{(F + G)} - \frac{1}{2}$$

したがって

$$N = (F + G) \left( r_{45} + \frac{1}{2} \right) \quad (7.7)$$

となる。式 (7.5)~(7.7) より

$$N = \left( \frac{H}{r_0} + \frac{H}{r_{90}} \right) \left( r_{45} + \frac{1}{2} \right) \quad (7.8)$$

式(7.2)に式(7.5)~(7.8)の関係を代入すると、相当ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{eq}$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{eq} = & \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{1}{r_{90}} + \frac{1}{r_0} + 1 \right) \right]^{1/2} \\ & \times \left[ \frac{1}{r_{90}} \left( \frac{[\dot{\epsilon}_y/r_0] - \dot{\epsilon}_z}{\frac{1}{r_{90}} \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_{90}}} \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{r_0} \left( \frac{\dot{\epsilon}_z - [\dot{\epsilon}_x/r_{90}]}{\frac{1}{r_{90}} \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_{90}}} \right)^2 \\ & + \left( \frac{[\dot{\epsilon}_x/r_{90}] - [\dot{\epsilon}_y/r_0]}{\frac{1}{r_{90}} \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_{90}}} \right)^2 \\ & \left. + \frac{2(\dot{\epsilon}_{xy})^2}{\left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_{90}} \right) \left( r_{45} + \frac{1}{2} \right)} \right]^{1/2} \quad (7.9) \end{aligned}$$

次に積層板を引張った場合の  $r$  値および応力ひずみ関係について上界法を用いて解析する。

単一板の変形エネルギー消散率を  $\dot{E}$  とすると、

$$\dot{E} = \sigma_{\theta\theta} \cdot \dot{\epsilon}_{\theta\theta} \cdot V = \sigma_{\theta\theta} \cdot \dot{\epsilon}_{\theta\theta} \cdot (l w t) \quad (7.10)$$

と表される。ただし、 $V$  は板の体積であり、 $l, w, t$  は、板の長さ、幅、厚さである。

いま、板が均一に変形しているとし、可容速度を次のように仮定する。

$$U_x = a X, \quad U_y = b Y, \quad U_z = c Z \quad (7.11)$$

図 7.1 を参照して試験片端面  $X = l/2$  において  $X$  方向の速度は  $U = a l/2$  として与えられる。また、このときのひずみ速度は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= a & \dot{\epsilon}_y &= b \\ \dot{\epsilon}_z &= c = -(a + b) \end{aligned} \right\} (7.12)$$

で表される。したがって、式(7.3)は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\alpha \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cos 2\alpha \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= -\frac{a-b}{2} \sin 2\alpha \\ \dot{\epsilon}_z &= -(a+b) \end{aligned} \right\} (7.13)$$

となる。式(7.13)を式(7.9)に代入すると、相当ひずみ速度は、 $a, b$ の関数として表される。

単一板の相当応力と相当ひずみの関係が、 $n$ 乗硬化則に、したがうとすると

$$\sigma_{e_q} = K \cdot \dot{\epsilon}_{e_q}^n \quad (7.14)$$

で表される。<sup>(6)</sup>ゆえに  $r$  値がひずみに対して変化しないとして式(7.9)より求まる  $\dot{\epsilon}_{e_q}$  を積分して上式に代入し、 $K$  と  $n$  が既知ならば、相当応力  $\sigma_{e_q}$  も計算できる。

式(7.14)における  $K$  および  $n$  は、次のようにして求めることが出来る。単一板を圧延方向に引張った場合の応力  $\sigma_0$  と引張ひずみ  $\epsilon_0$  との関係は、<sup>(7)</sup>

$$\dot{\epsilon}_{e_q} = \left[ \frac{2}{3} \frac{r_0 + r_{90} + r_0 r_{90}}{r_{90} + r_0 r_{90}} \right]^{1/2} \dot{\epsilon}_0$$

であるから

$$\sigma_0 = K \left[ \frac{2}{3} \frac{r_0 + r_{90} + r_0 r_{90}}{r_{90} + r_0 r_{90}} \right]^{(n+1)/2} \epsilon_0^n \quad (7.15)$$

と表される。<sup>(7)</sup>引張実験から応力-ひずみ線図を求め、これを式(7.15)と比較することによって、実験的に  $K$  と  $n$  を決定することができる。なお、ここで  $r_0, r_{90}$  の値について、単軸引張のひずみ  $0.085, 0.010$  で測定したが、その結果は表7.1に示されるようにあまり変わらないので、 $0.010$  における  $r$  値を用いることにした。

式(7.10)に示される変形エネルギー消散率  $\dot{E}$  は、相当ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{e_q}$  で表される。式(7.10)に式(7.9)を代入し、式(7.9)の  $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\epsilon}_{xy}$  を式(7.13)で与えると、 $\dot{E}$  は、 $a, b$  の関数としてあらわされる。積層板の変形エネルギー消散率  $\dot{E}_L$  は、各構成材料の和であるから

$$\dot{E}_L = \dot{E}_I + \dot{E}_{II} = \sigma_{eqI} \dot{\epsilon}_{eqI} V_I + \sigma_{eqII} \dot{\epsilon}_{eqII} V_{II} \quad (7.16)$$

となる。ただし、添字の I, II は積層板を構成する各板に対する値である。X 方向ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_x = a = 2U/\lambda$  は与えられるから、式(7.16)の  $\dot{E}_L$  は  $b (= \dot{\epsilon}_y)$  の関数として表される。したがって、 $\dot{E}_L$  を最小とする  $b$  を求めることができる。このときの  $b$  を  $b_c$ 、積層板の  $r$  値を  $r_L$  とすると式(7.12)から

$$r_L = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\dot{\epsilon}_z} = \frac{b_c}{-(a + b_c)}$$

となる。

積層板の X 方向の変形応力  $\sigma_{xL}$  は、次のように求められる。 $\sigma_{xL}$  によってなされる外部仕事と変形エネルギー消散率  $\dot{E}_L$  が等しいとおくことによつて

$$2\sigma_{xL}(t_I + t_{II})wU = \sigma_{xL}(V_I + V_{II})a = \dot{E}_L \quad (7.17)$$

となる。ここで  $t_I, t_{II}$  は各構成材料の板厚であり、 $w$  は板幅である。ゆえに、式(7.17)より  $\sigma_{xL}$  が得られる。積層板の変形と共に、順次  $\sigma_{xL}$  を計算すると、応力ひずみ ( $\sigma_{xL} - \epsilon_x$ ) 線図が求められる。

### 7. 3 実験方法

#### 7. 3. 1 試験片材料と接着条件

実験に用いた材料は、冷間圧延鋼板 (SPCC)、6-4黄銅 1/2 硬質板 [C2801P-H/2] (6-4Brass)、工業用アルミニウム軟質板 [A1050P0] (A1(0))、硬質 [A1050PH24] (A1(1/2H)) の 4 種類である。なお以後材料表示は ( ) 内の略記で示す。圧延方向に対して種々の方向に試験片を採取した。

積層にするために、速硬化型エポキシ系接着剤を用いた。接着剤を塗った後、常温で約1.96MPaで加圧し、約15min間加圧保持した。その後加圧力を除去して、常温で硬化時間は24~30hで硬化させた後試験片を得た。

### 7. 3. 2 試験片形状

試験片の形状は、JIS Z2201 6号試験片にほぼ近いダンベル形状で、平行部の長さ52mm、標点間距離40mm、幅15mm、肩半径12.5mm、全長90mm、つかみ部の幅30mm、板厚0.5mmである。この形状に単一板をブランキングダイスで打抜き、その後、接着材で接着して、板厚1.0mmの積層板とした。

### 7. 3. 3 実験条件

実験はインストロン形万能試験機で行い、引張速度は、 $Al(1/2H)$ を成分材料とする積層板については1mm/min、その他の場合は2mm/minとした。r値は、ひずみ1%または8.5%のところで標点間距離および板幅を、拡大投影機または遊動顕微鏡によって測定し求めた。変形後の板幅は、標点間の3箇所まで測定し、代数平均値を採用した。

### 7. 3. 4 せん断接着力の測定

図7.2に示されるように一枚の試験片の下部両面に接着剤を塗布し、上部二枚の試験片と接着し、上側チャックにスペーサをはさんでつかみ、下側チャックで試験片の一端をつかみ引張荷重を加えた。接着せん断強度 $k$ は、接着部がはがれた時の荷重 $F$ を測定して次式によって求めた。

$$k = \frac{F}{2wL} \quad (7.18)$$

ここで、 $w$ は板幅、 $L$ は接着剤が塗布された長さである。

測定の結果、接着せん断強度 $k$ の値は約28.5~31.0MPaであった。

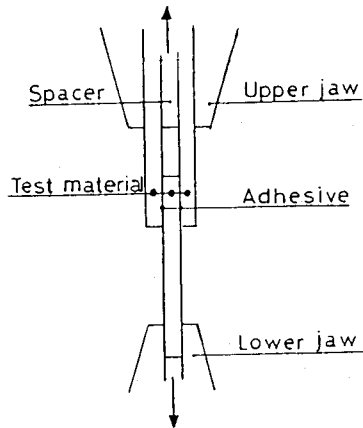


図 7. 2 セン断接着力測定のための装置概略図

#### 7. 4. 実験結果と考察

##### 7. 4. 1 異方性の主軸をそろえて貼り合わせた場合の結果

表7.1に実験で用いた単一材料の  $r$  値を測定した時のひずみ  $\epsilon$ 、その時の応力  $\sigma_a$ 、引張強さ  $\sigma_B$ 、加工硬化指数  $n$ 、加工硬化係数  $K$ 、破断までの伸び  $\delta$  を示す。

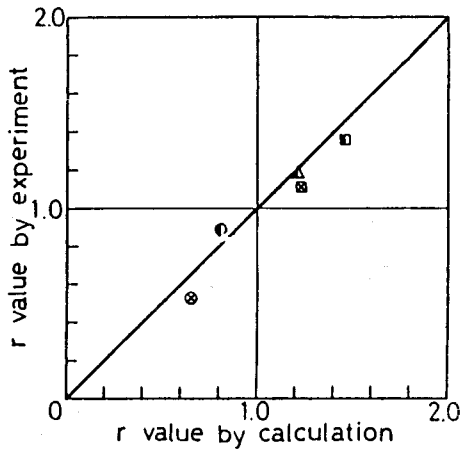
表7.2は表7.1の単一板を積層した場合の結果である。ただし、2枚の板はそれぞれ異方性の主軸をそろえて貼り合わせている。なお、 $r$  値の  $E \cdot V$  は実験値を示し、 $C \cdot V$  は上界法による計算結果を示す。 $r$  値はひずみとともに少し変動したが、表7.1, 7.2の  $\epsilon = 0.010$  と  $0.085$  との結果を比較するとその差異はわずかである。積層板の場合の実験値と計算値の比較を図7.3に示す。図7.3より明らかのように、モデル解析結果と実験は、ほぼ  $45^\circ$  線上にあり、実験結果と計算結果がよく一致していることがわかる。

表 7. 1 単一板の特性値

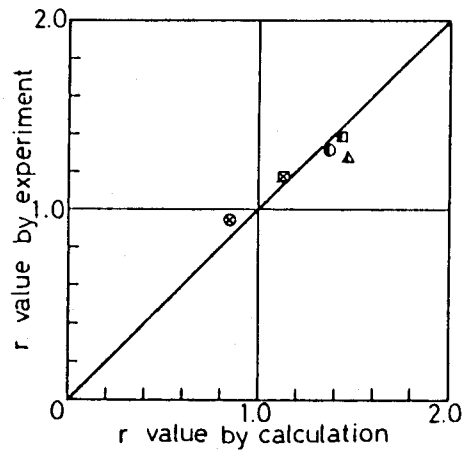
Material	$\alpha$	$\epsilon$	$\sigma_x$ (MPa)	$\sigma_y$ (MPa)	r - Value		n	K (MPa)	$\delta$ (%)
					E. V	C. V			
6-4Brass	0°	0.085	379	443	0.85	/	0.353	902	44.0
	45°		304	406	1.42	/	0.376	843	49.9
	90°		320	418	0.87	/	0.383	853	43.0
SPCC	0°		268	320	1.72	/	0.228	559	45.0
	45°		335	311	1.50	/	0.237	554	41.3
	90°		302	307	1.97	/	0.228	529	43.2
Al(O)	0°		76	81	0.72	/	0.297	160	38.1
	45°		73	78	1.18	/	0.324	157	53.1
	90°		74	80	0.87	/	0.344	162	46.4
6-4Brass	0°	0.010	258	443	0.83	/	0.353	902	44.0
	45°		217	406	1.12	/	0.376	843	49.9
	90°		246	418	0.86	/	0.383	853	43.0
SPCC	0°		218	320	1.79	/	0.228	559	45.0
	45°		228	311	1.55	/	0.237	554	41.3
	90°		203	307	1.92	/	0.228	529	43.2
Al( $\frac{1}{2}$ H)	0°		121	114	0.28	/	0.031	129	3.8
	45°		115	131	0.44	/	0.136	250	2.1
	90°		113	110	0.23	/	0.022	140	5.4

表 7. 2 積層板の特性値 (異方性の主軸をそろえて貼り合わせた場合)

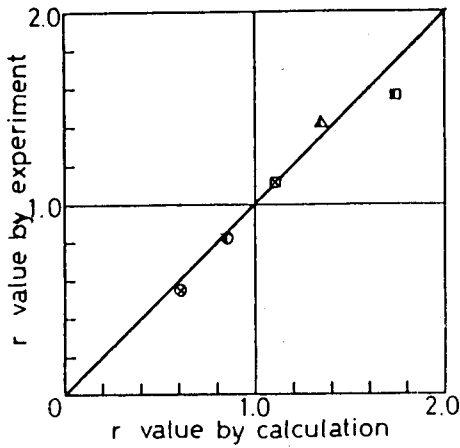
Material	$\alpha$	$\epsilon$	$\sigma_x$ (MPa)	$\sigma_y$ (MPa)	r - Value		n	K (MPa)	$\delta$ (%)
					E. V	C. V			
6-4Brass * SPCC	0°	0.085	321	361	1.18	1.21	0.325	706	44.8
	45°		296	365	1.27	1.47	0.321	715	46.2
	90°		298	346	1.42	1.34	0.315	686	46.4
6-4Brass * Al(O)	0°		187	247	0.89	0.82	0.372	510	43.6
	45°		187	238	1.31	1.38	0.377	490	50.4
	90°		189	240	0.84	0.87	0.389	500	44.5
SPCC * Al(O)	0°		183	195	1.36	1.46	0.256	370	42.1
	45°		181	193	1.40	1.44	0.272	363	41.6
	90°		189	191	1.56	1.74	0.275	362	40.2
6-4Brass * Al( $\frac{1}{2}$ H)	0°	0.010	168	253	0.53	0.66	0.329	500	37.6
	45°		163	251	0.94	0.86	0.304	480	37.4
	90°		168	254	0.55	0.61	0.300	483	37.5
SPCC * Al( $\frac{1}{2}$ H)	0°		163	218	1.11	1.23	0.195	361	28.5
	45°		158	212	1.16	1.13	0.192	355	34.4
	90°		157	208	1.11	1.11	0.194	351	36.8



(a)  $\alpha = 0^\circ$  の場合



(b)  $\alpha = 45^\circ$  の場合



(c)  $\alpha = 90^\circ$  の場合

- 6-4Brass x Al(O)
- ⊗ 6-4Brass x Al(1/2H)
- SPCC x Al(O)
- ⊠ SPCC x Al(1/2H)
- △ 6-4Brass x SPCC

図 7.3 r 値に関する計算値と実験値の比較  
(異方性の主軸をそろえて貼り合わせた場合)



### 7. 4. 2 異方性の主軸をずらして貼り合わせた場合の結果

7. 4. 1 では、2枚の板を異方性の主軸を同一方向に重ねて貼り合わせた場合の結果であるが、それぞれ異方性の主軸をずらして貼り合わせた場合の結果を表7.3に示す。

表7.3 積層板の特性値（異方性の主軸をずらして貼り合わせた場合）

Laminated plate	$\epsilon$	$\sigma_{\alpha}$ (MPa)	r - Value	
			E. V	C. V
SPCC90° * 6-4Brass45°	0.085	295	1.42	1.42
SPCC90° * Al 1/2H45°	0.010	159	1.13	1.29
SPCC90° * Al O 45°	0.085	157	1.70	1.79
SPCC45° * Al 1/2H45°	0.010	151	1.30	1.44
SPCC45° * Al O 45°	0.085	188	1.07	1.13
6-4Brass45° * Al 1/2H45°	0.010	152	0.93	0.86
6-4Brass45° * Al O 45°	0.085	195	1.30	1.38
SPCC0° * SPCC 45°	0.085	305	1.72	1.60
SPCC0° * SPCC 90°		300	1.84	1.83
SPCC45° * SPCC 45°		305	1.42	1.50
SPCC45° * SPCC 90°		279	1.66	1.71

表7.3において例えばSPCC 90° \* 6-4 Brass 45° とは、引張方向に対してSPCCの圧延方向を90°、6-4 Brass の圧延方向を45° 傾けて貼り合わせた試験片である。同様にして、0° の場合は、引張軸と圧延方向が一致する場合である。

$\epsilon$  は r 値を計測した時のひずみであり、その時の変形応力を  $\sigma_{\alpha}$  とする。r 値の実験値と計算値の結果を図にまとめて、図7.4, 7.5に示す。

図7.4は、同種材料[SPCC]を異方向に貼り合わせた場合の結果である。実験値と計算値はよく一致しており、本モデル解析法が有効であることが解る。SPCCは単一板において圧延方向とそれに直角方向の r 値が大きい。そのため圧延方向を圧延方向に直交する方向に貼り合わせた場合、すなわち 0°\*90°の積層材料の r 値が大きい。また単一板において、圧延方向に対して45° 方向の r 値は小さいため、45° ずらした場合、45°\*45°の積層材料の r 値は小さくなる。

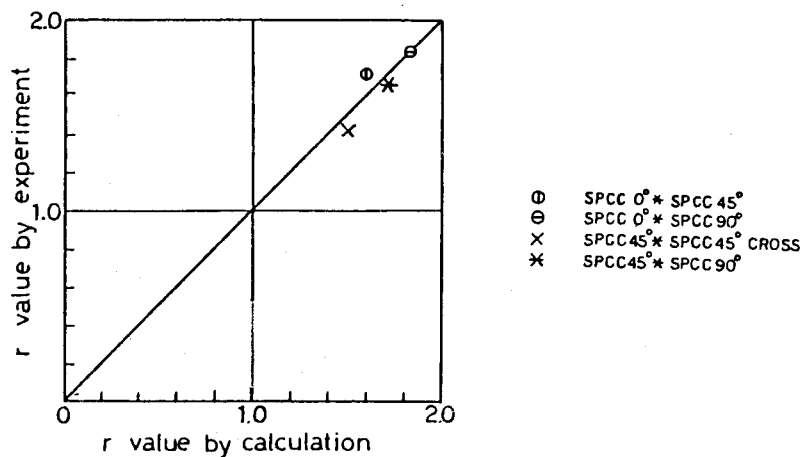


図7.4 r値に関する計算値と実験値の比較  
(異方性の主軸をずらして貼り合わせた場合)

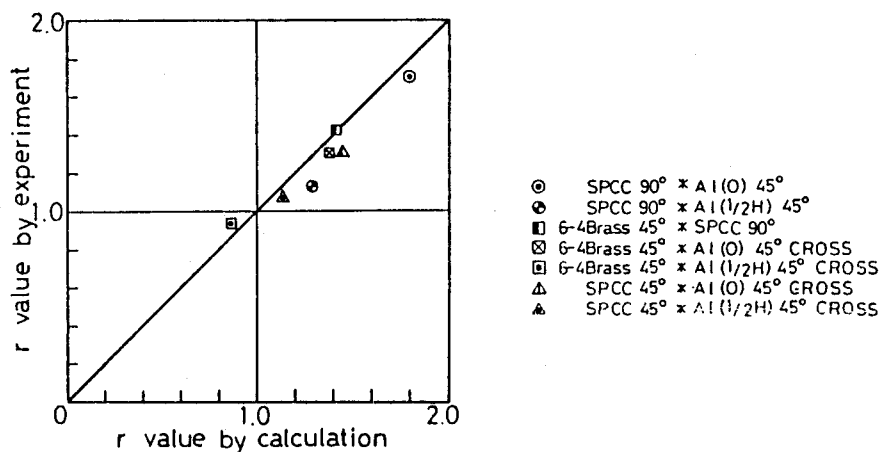


図7.5 r値に関する計算値と実験値の比較  
(異方性の主軸をずらして貼り合わせた場合)

図7.5は異種材料を異方性の主軸をずらして貼り合わせた場合の実験結果を示す。図7.4と同様、モデル解析結果と実験結果には少しずれがあるが、ほぼ一致する。図7.5の結果を複合則にしたがってまとめると図7.6のようになり、45°の線上から離れており、r値を単純平均する複合則には従わないことがわかる。

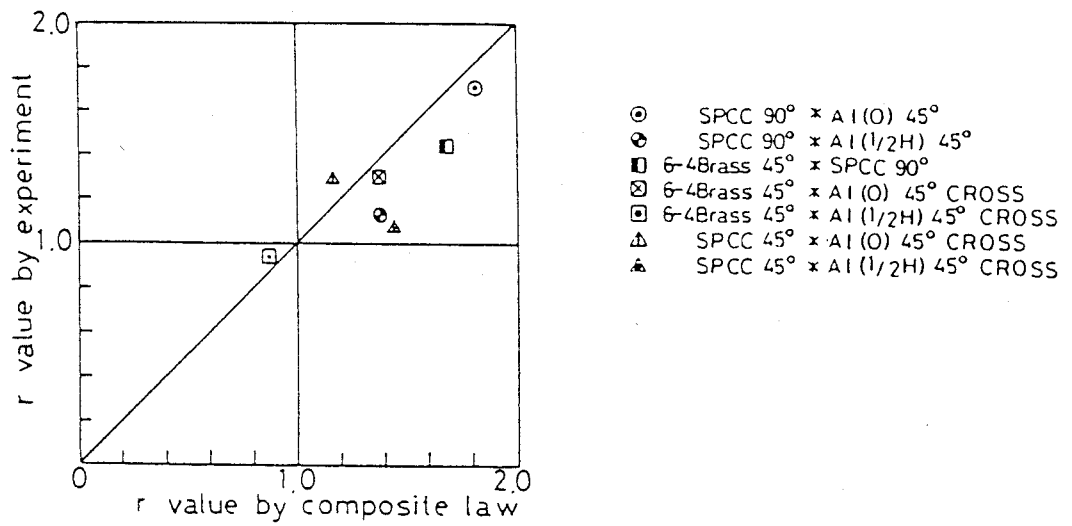


図 7. 6 複合則による計算値と実験値の比較

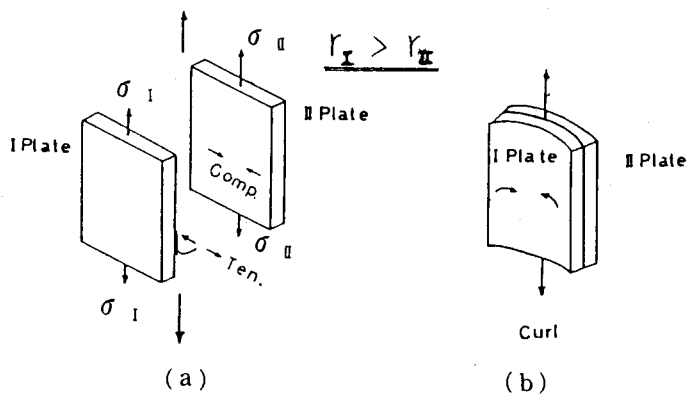
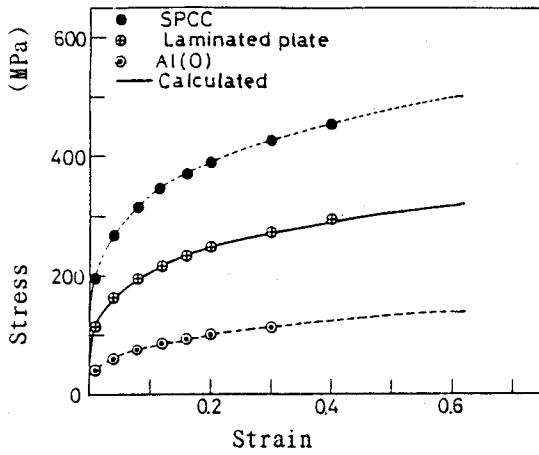


図 7. 7  $r$  値の異なる材料からなる積層板の変形挙動

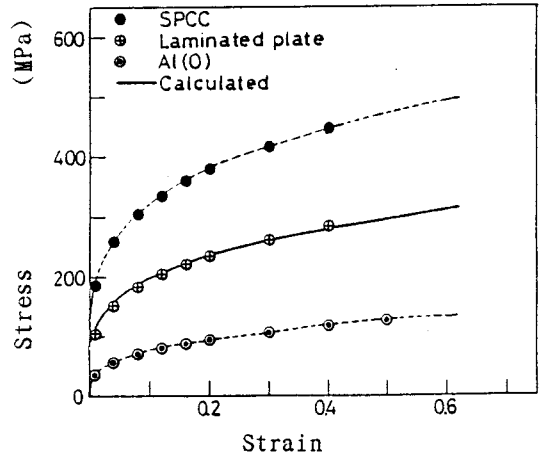
Semiatin<sup>(4)</sup>も指摘しているが、図7.7(a)に示すように  $r$  値の異なる板材を積層して単軸引張すると、 $r_1 > r_2$  の時に、界面を介して板幅方向に、I板には引張りの、II板には圧縮の応力が作用することになる。したがって、接着強さが十分でないと、変形中に両板間ですべりを生じ、両板のひずみは異なってくる。しかし、本実験の場合のように30MPa程度の接着強さがあればずれは生じなかった。このような場合、変形がかなり大きくなると、図7.7(b)に示されるように  $r$  値の大きな構成板は、内側にカールする。3層構造にすることによって、カールは防止することができる。ここでの引張実験においては、 $r$  値の測定はカールする以前のひずみ1%または8.5%において行なった。

#### 7. 4. 3 積層板の応力-ひずみ関係

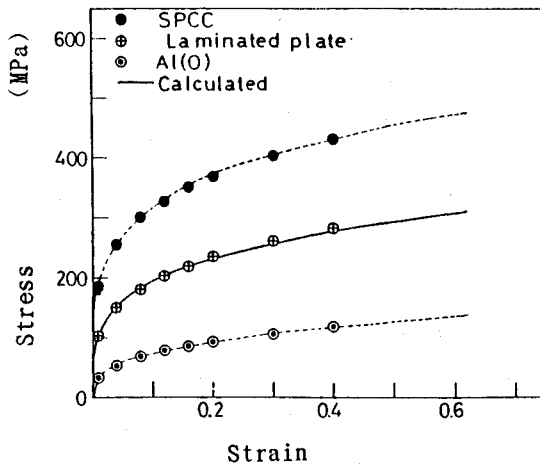
積層板を構成する各部材の  $K$  値、 $n$  値、 $r$  値を知ることにより、積層板の応力-ひずみ関係を、式(7.17)によって計算で求めることができることを示した。計算結果の一例を図7.8に示す。SPCCとアルミニウム軟質材の結果であるが、図7.8中の各印は実験点を示す。破線は単一板の実験点を結んだものである。これら2曲線から  $n$  値、 $K$  値を求めた。一方、実線で示した積層板の応力-ひずみ曲線は、これらの  $n$  値、 $K$  値を用いて計算した結果である。図7.8より明らかなように計算による応力-ひずみ関係は、実験結果とよく一致しており、本解析法の有効性が示された。



( a )  $\alpha = 0^\circ$  の場合



( b )  $\alpha = 45^\circ$  の場合



( c )  $\alpha = 90^\circ$  の場合

図 7.8 単一板と積層板との応力-ひずみ線図

## 7. 5 結言

Hillの塑性理論を用いて、上界法による積層金属板の引張変形を解析した。また、有機接着剤で貼り合わせた積層金属板を用いた実験を行い、解析結果と比較した。その結果次のことがわかった。

- (1) 2枚の単一板の $r$ 値( $r_0$ ,  $r_{45}$ ,  $r_{90}$ )を知ることによって、それぞれの板を任意の方向に貼り合わせた積層板の $r$ 値を計算することができた。実験結果と比較すると、複合則による計算結果はあまりよい一致は見られなかったが、本法による計算結果はよい一致が見られた。
- (2) 単一板の応力-ひずみ関係を $n$ 乗硬化則で与え、本モデル解析を適用することにより、積層板の応力-ひずみ関係を計算で求めることができた。計算結果は実験結果とよく一致した。
- (3) 本解析法によって、比較的簡単な計算で積層板の引張変形挙動が解析的に予測できる。すなわち、本解析法の有効性が示された。

## 参 考 文 献

- (1) Hawkins, R. and Wright, J. C., J. Inst. Met., **99** (1971) 357.
- (2) 平岩・近藤, 日本機械学会論文集(第3部), **40** (1974) 2398.
- (3) 平岩・近藤, 日本機械学会論文集(第3部), **42** (1976) 2625.
- (4) Semiatin, S. L. and Pieler, H. R., Metall. Trans, Series A, **10** (1979) 85.
- (5) 大沢・西村, 日本機械学会論文集(A), **50** (1984) 1992.
- (6) 例えば, Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity (1950) 317, Clarendon Press.
- (7) 例えば, 大矢根 他, 塑性加工学 (1974) 236, コロナ社.

## 第8章 積層金属板の r 値と 限界絞り比

### 8. 1 緒 言

単一板の r 値を知ることにより、積層板の r 値を上界法によるモデル解析より推定する方法については、第7章において述べた。本章においては、板材の圧延方向に対して任意の方向に切出した板材を積層した場合の r 値を前章と同様な方法で計算し、計算された r 値と、積層板を深絞りした場合の耳の発生仕方、および r 値と限界絞り比との関係などについて述べる。また、積層板の接着による効果を明らかにするために、接着しないで、ただ単に重ねた場合についても、あるいは板界面に潤滑した場合についても深絞り実験を行ない板界面の接着の有無による限界絞り比に対する影響について考察を行なった。

### 8. 2 実験条件

#### (1) 使用材料

実験における材料は、冷間圧延鋼板 (SPCC)、4-6黄銅1/2硬板 [C2801-H/2](6-4Brass)、工業用アルミニウム硬質板[Al050PH24](Al(1/2H)), 工業用アルミニウム軟質板[Al050PO]((Al(O))またはAl)などである。なお、以下においては()内で示した材料標記で略記する。試験片は、0.4, 0.5, 0.8, 1.0, 2.0mmの板厚のものを用いた。

#### (2) 接着条件

2枚の板を重ねる場合には、試験片界面をアセトンまたはエチルアルコールで脱脂して用いた。この場合を以後、重ねと言う。また、板界面の滑

りを容易にするため、PTFE. (ポリテトラ・フロロエチレン、商標名テフロンであるが、以後 PTFE. という) 機械油などで潤滑した場合についても深絞り実験を行なった。合わせの場合には、アセトンまたはエチルアルコールで脱脂した後、速硬化型エポキシ樹脂系接着材を用い、接着時に約0.1 MPa で加圧後、24~30時間硬化後に用いた。この場合は、第7章でも述べた積層板であるが、本章ではこれ以後、合わせという。接着強度は最高約31.0MPa 程度であった。

### (3) しわ押さえ力

必要なしわ押さえ力は板厚によって変化し、合わせ板や重ね板の場合の適確なしわ押さえ力について計算式がないが、Siebel<sup>(1)</sup>による次式によって計算し、その約30~50%増減したしわ押さえ力によって深絞りの予備実験を行ない、完全に絞りができた場合のしわ押さえ力を用いた。

$$P=(0.002\sim 0.003)X[(B_0-1)^3+0.005\delta]\sigma_b \quad (8.1)$$

ここでPはしわ押さえ力[kg]、 $B_0$ は絞り比、 $\delta$ はダイス内径、 $\sigma_b$ は板材の降伏強度である。

### (4) 深絞り条件

深絞り実験においては、直径40mm、ポンチ肩部半径8mmのポンチを用い、最大ストローク約60mm、平均負荷速度約6mm/minで行なった。ダイスは試験片板厚1.0mm に対して内径42.5mm、内角半径8mmのものを、試験片板厚2.0mmに対して内径45mm、内角半径10mmのものをを用いた。なお、実験はすべて室温で行なった。合わせ板の構成板境界面以外の潤滑条件としては、ポンチ側は無潤滑であり、ダイス側にのみジョンソンワックス #700を塗布し、乾燥を待たずすぐに実験を行なった。とくにポンチ頭部の摩擦が少ない状態で実験を行なう必要がある場合には、PTFEの薄板をポンチと加工材の間に用いた。



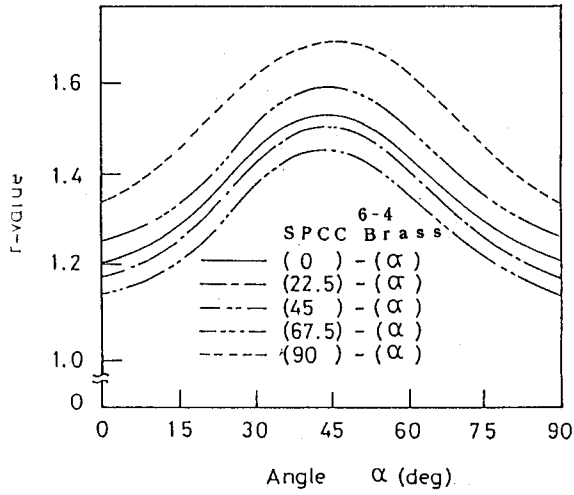
## 8. 3 解析方法と解析結果と実験結果の一例

### 8. 3. 1 任意の方向に貼り合わせた場合の $r$ 値の変化

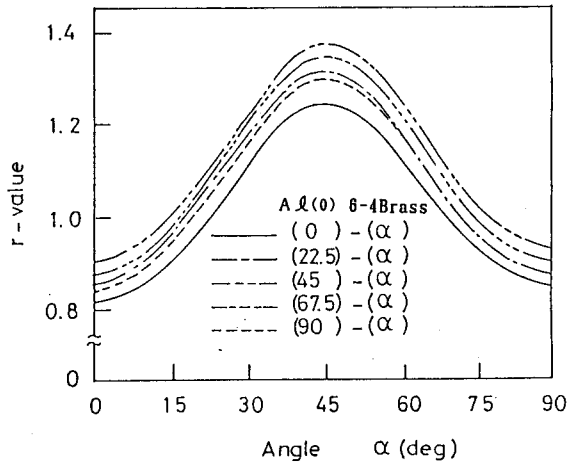
第7章においては、合わせ板の引張軸と異方性主軸となす角 $\alpha$ が $0^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$ のみであったが、 $0^\circ$ から $90^\circ$ までの任意の方向(角度)における $r$ 値を計算によって推定することは可能である。前章において述べたように合わせ板を構成する板材の板界面が完全接着と仮定し、上界法によるエネルギー最小時の板幅ひずみを求めることができる。

図8.1(a), (b), (c)は、合わせ板を引張軸とのなす角 $\alpha$ に貼り合わせた場合の $r$ 値の変化の計算結果を示している。なお、図8.1(a)のSPCCの下の( )中の数値は、引張軸とSPCCの圧延方向とのなす角であり、6-4Brassの下の $\alpha$ は、6-4Brassの圧延方向と引張軸のなす角であって、この角 $\alpha$ を横軸にとっている。図8.1(b)では、(a)と同様にAl(0)の下の( )中の数値は引張軸と試験片の圧延方向とのなす角であり、この角を一定値： $0^\circ$ 、 $22.5^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $67.5^\circ$ 、 $90^\circ$ にしておいて、6-4Brassを圧延方向と引張軸とのなす角 $\alpha$ に貼り合わせて単軸引張試験を行なった結果である。図8.1(c)は、Al(0)とSPCCの積層板の結果である。

図8.1(a)よりSPCC単一板の $r$ 値は圧延方向に対して $45^\circ$ の方向が一番小さい値であるが、6-4Brassの方に支配されて圧延方向に対して $45^\circ$ で最大値となる。図8.1(b)はAl(0)、6-4Brassいずれも単一板において圧延方向に対して $45^\circ$ の方向が最大の $r$ 値であり、これらを積層した積層板の結果も $45^\circ$ 方向で最大の $r$ 値である。しかしながら、図8.1(c)のようにAl(0)の $r$ 値は圧延方向に対して $45^\circ$ の方向が最大であっても、SPCCの方に支配されて圧延方向に対して $45^\circ$ が最低値となる。なお計算は、圧延方向と引張軸とのなす角 $\alpha$ が、 $0^\circ$ 、 $22.5^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $67.5^\circ$ 、 $90^\circ$ のみで行ない、それらの結果を曲線で結んだ。以上の図より圧延方向と引張軸とのなす角 $\alpha$ によって $r$ 値が変化することがわかる。以上のように計算のみによって $r$ 値が推定できるが、次に実験値との比較を試みる。

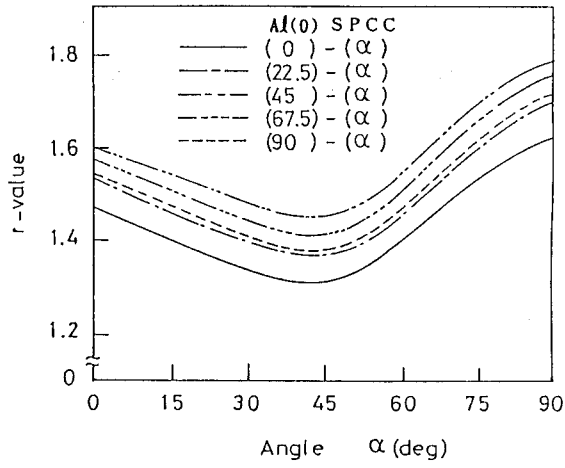


( a ) SPCCと6-4Brassの計算結果の一例

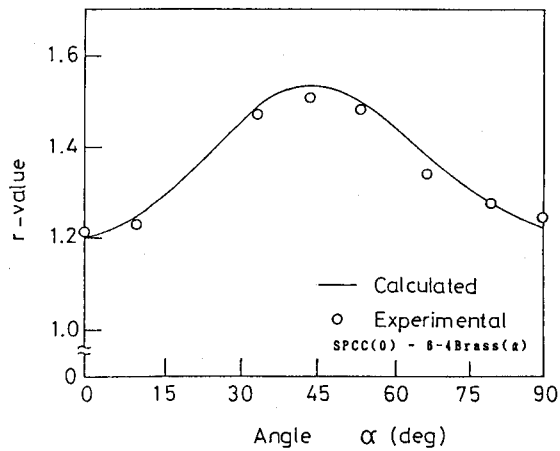


( b ) Al(0)と6-4Brassの計算結果の一例

図 8.1 任意の角度  $\alpha$  で貼り合わせた合わせ板の r 値の計算結果と実験結果



(c) Al(0)とSPCCの計算結果の一例



(d) SPCCと6-4Brassの実験結果の一例

図 8.1 任意の角度 $\alpha$ で貼り合わせた合わせ板のr値の計算結果と実験結果

図8.1(d)は、試験片引張軸にSPCC板の圧延方向を一致させ、6-4Brass板の圧延方向を $\alpha^\circ$ 傾けて貼り合わせて試験片を作り、引張実験した結果である。図中の計算結果を示す曲線は図8.1(a)の実線をそのままとりなおしたものである。図より実験値と計算結果は、ほぼ一致していることがわかる。

### 8. 3. 2 合わせ板を構成する板材の板厚比による r 値の変化

図8.2には、合わせ板の構成板の板厚によって r 値がどのように変動するかを示した。横軸は、板厚比  $t_s$ 。(SPCCの板厚/合わせ板の板厚)を縦軸は r 値を示している。図中左端の板厚比 0 のところはAl(0)の単一板のみであり、右端の板厚比 1 のところはSPCC単一板のみの計算結果である。図中板厚比 0.5のところがAl(0)とSPCCが同一の板厚であることを示す。図中のAはSPCCの圧延方向と引張軸の方向が一致する場合であり、Bは圧延方向と引張軸の方向が $45^\circ$ ずれている場合であり、CはSPCCの圧延方向と引張軸の方向が $90^\circ$ ずれている場合である。

図8.2は計算のみの結果であるが、板厚比に対する r 値の変化が直線的でないことから、複合則とは異なる結果になっている。

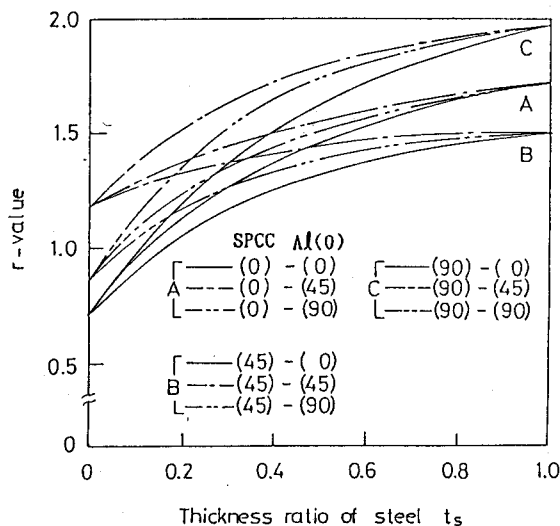


図 8. 2 SPCCとAl(0)の合わせ板の板厚比に対する r 値の変化

### 8. 3. 3 任意の方向に貼り合わせた合わせ板の引張強度の変化

第7章の式(7.1)から(7.17)を用いて、任意の方向に貼り合わせた場合の引張強度の変化を計算した結果を図8.3(a), (b), (c)に示す。なお、図中の横軸はBrass板の圧延方向と引張軸とのなす角 $\alpha$ を、縦軸は変形応力を示している。

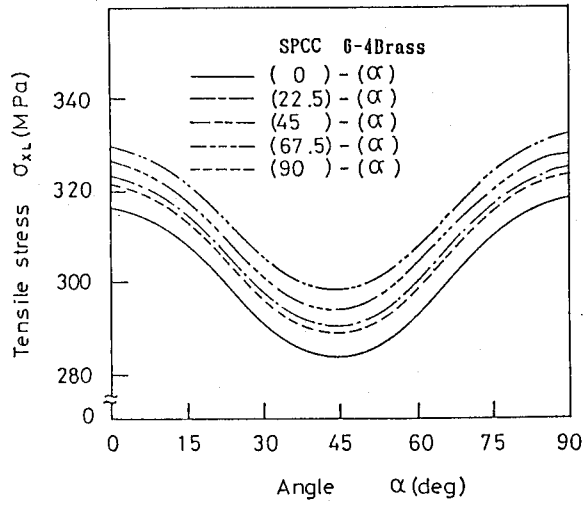
図8.3(d)は図8.1(d)と同じ条件であるが、 $r$  値の変化ではなくて変形応力の変化について計算した結果と実験結果の一例を示し、図中実線の計算結果は、図8.3(a)の実線をそのままとりなおしたものである。図より計算結果と実験結果は対応していることがわかり、本計算方法が有効であることがわかる。

### 8. 3. 4 合わせ板における $r$ 値の変化

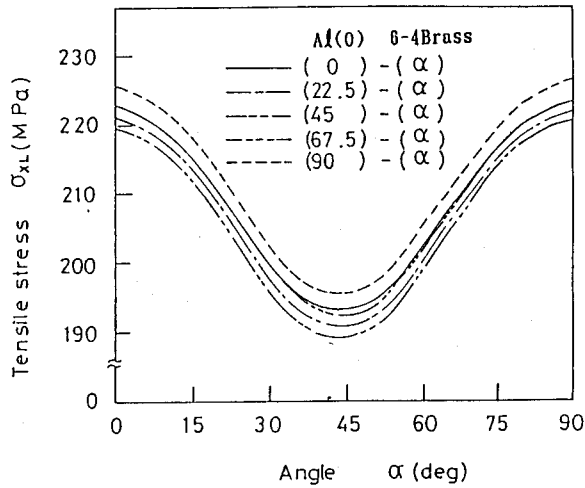
図8.4(a), (b)の実線は、(c)に示すようにI板とII板との圧延方向を揃えて貼り合わせて合わせ板を作った後、圧延方向と引張試験片軸とのなす角 $\alpha$ を種々に変化させて単軸引張を行なった場合の $r$  値の計算と実験結果である。

また破線は図(d)に示すようにI板とII板との圧延方向を $45^\circ$  ずらして貼り合わせて合わせ板を作った後、圧延方向とI板の引張試験片の引張軸とのなす角 $\alpha$ を種々に変化させて単軸引張を行なった場合の $r$  値の計算と実験結果である。

図(a)では $r$  値の変動量の大きいのは実線、すなわち、圧延方向に2枚の板をそろえた場合である。表7.1より単一板において、Al(1/2H)、Brassのいずれも $r$  値の大なる方向は、圧延方向に対して $45^\circ$ の方向であり、したがって、BrassとAl(1/2H)を圧延方向をそろえて貼り合わせれば $r$  値の変動量が大きくなる。これに対して圧延方向に対して $45^\circ$ ずれるように貼り合わせれば、 $r$  値の小なる方向と、大なる方向が重なり、図8.4(a)破線で示されるように $r$  値の変動量は小さくなる。

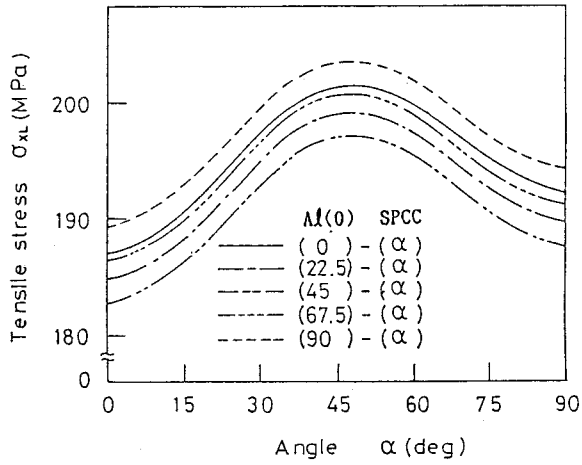


( a ) SPCCと6-4Brassの計算結果の一例

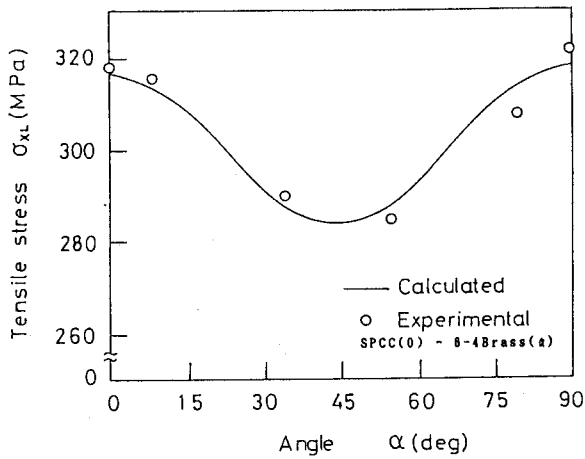


( b ) Al(0)と6-4Brassの計算結果の一例

図 8. 3 任意の角度  $\alpha$  で貼り合わせた合わせ板の引張強度の計算結果と実験結果



(c) Al(0)とSPCCの計算結果の一例



(d) SPCCと6-4Brassの実験結果の一例

図 8. 3 任意の角度  $\alpha$  で貼り合わせた合わせ板の引張強度の計算結果と実験結果

図8.4(b)では、両材料を圧延方向にそろえて図(c)のように貼り合わせるとSPCCのr値の最小の方向(圧延方向に $45^\circ$ )とAl(1/2H)のr値の最大の方向(圧延方向に $45^\circ$ )とを合わせて作った複合板のr値は双方のr値を平均化させることになり、図中実線で示されるようにr値の変動量は小さくなる。SPCCとAl(1/2H)との貼り合わせで図(d)のようにすれば、SPCCのr値最大の方向(圧延方向)とAl(1/2H)のr値最大の方向(圧延方向に $45^\circ$ )とが一致し、r値の変動量も大きくなる。図(b)の破線がこれである。

図(a)と(b)中の黒丸点は図(c)のように貼り合わせ引張試験を行なった場合の実験点を示す。実験点は、図中の実線の場合におけるものであり、あまり計算結果に対応していないようだが傾向だけは、うかがえる。

## 8. 4 深絞り実験結果と考察

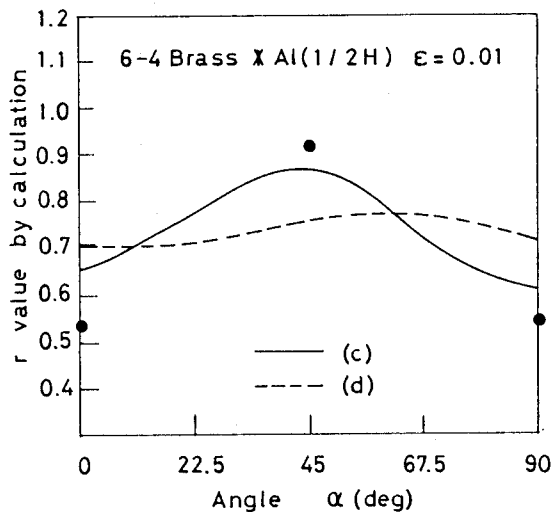
### 8. 4. 1 合わせ板にすることによる耳の防止

単一板の深絞りにおける耳はr値の大なる方向に発生する。すなわち、Al(0)、Al(1/2H)、6-4Brassでは、圧延方向に対して $45^\circ$ の方向に4つの耳が発生し、SPCCは圧延方向と圧延方向に直交する方向に4つの耳となる。

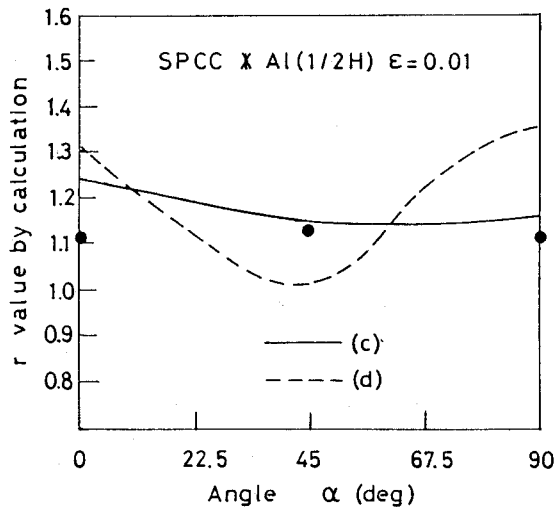
I板とII板の圧延方向を角度 $\theta(^\circ)$ だけずらして貼り合わせて深絞り実験を行ない、絞られた試験片の耳の高さの変化を図8.5に示す。耳の高さ $\Delta h$ は、図8.5の上部に示すように、高さの最大値 $h_{max}$ と最小値 $h_{min}$ の差として定義され、 $\Delta h = h_{max} - h_{min}$ である。また、図中 Al(1/2H)0.8 \* SPCC0.4 と示される材料の後の数値は、それぞれ構成板の板厚をmm単位で示している。

SPCCにAl(1/2H)を圧延方向を同一にして貼り合わせて合わせ板にして、深絞り実験を行なった結果、耳の高さが図中  $\text{---}\oplus\text{---}$  印で示されるようになる。 $\theta = 0$ の場合の耳の高さ $\Delta h = 0.4\text{mm}$ である。これは図8.4(b)の実線の場合に対応する。耳の高さが小さく、r値の変動も少ないことがわか

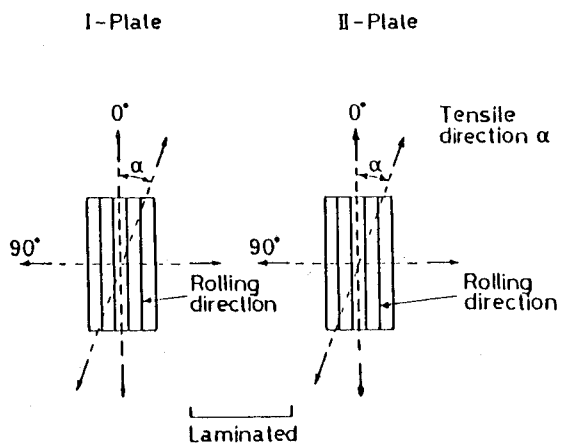




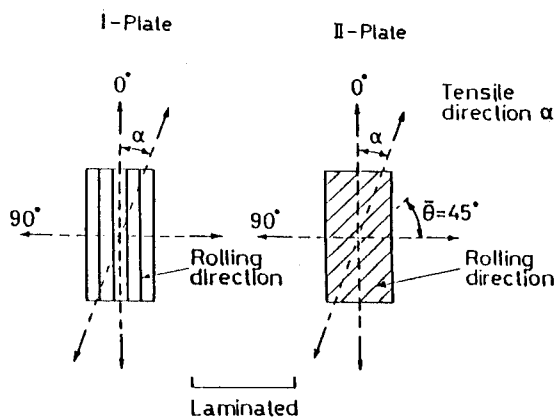
( a ) Brass \* Al(1/2H)



( b ) SPCC \* Al(1/2H)



( c ) 圧延方向をそろえて貼り合わせた場合 (実線)



( d ) 圧延方向に対して45°方向にずらして貼り合わせた場合 (破線)

図 8. 4 合わせ板の圧延方向と引張軸とのなす角  $\alpha$  度

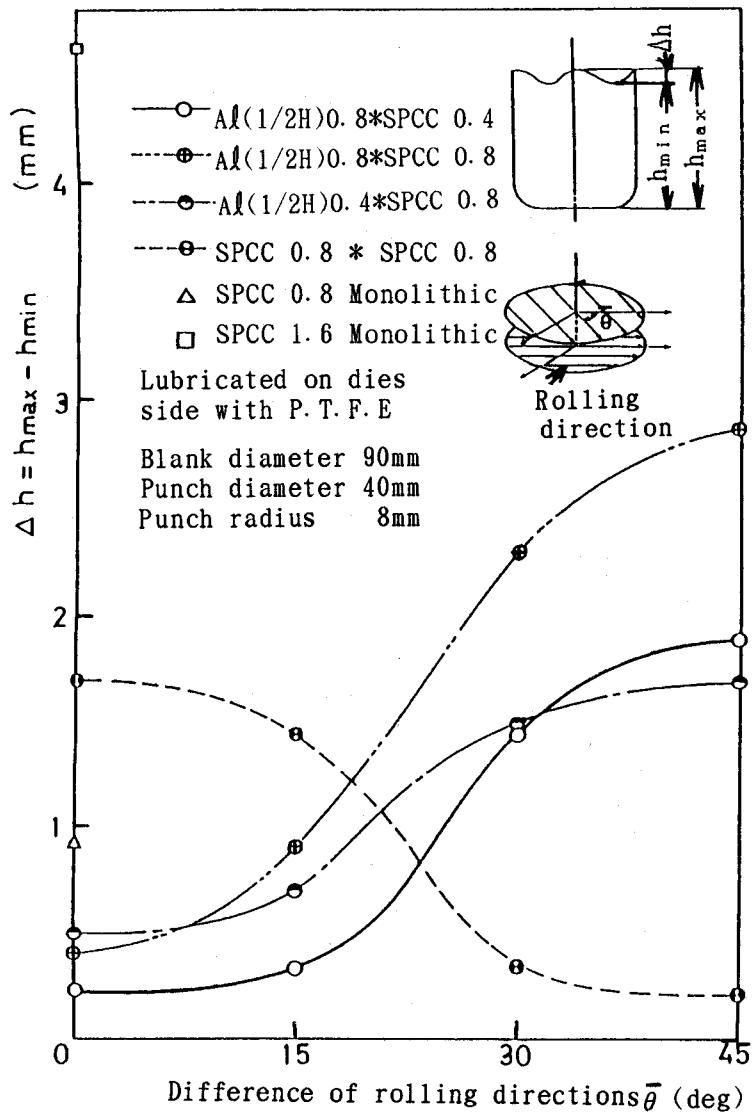


図 8.5 圧延方向に対して、角度  $\bar{\theta}$  度  
 だけずらして貼り合わせるこ  
 による耳の高さの変化

る。SPCCにAl(1/2H)を圧延方向に対して45°ずらせて貼り合わせると( $\bar{\theta} = 45^\circ$ の場合)、 $\Delta h = 2.9\text{mm}$ となり、圧延方向をそろえた場合の約7倍の耳の高さを示す。これは図8.4(b)破線の場合に対応しており、 $r$ 値の変動が大きい。

次にSPCCの同じ単一板材を圧延方向をそろえて貼り合わせ、深絞りした場合に、耳の高さ $\Delta h = 1.7\text{mm}$ にもなる。この場合I板とII板とは、同一材料であるので、 $r$ 値の大なる方向が圧延方向に対して同じ方向であり、図8.4(a)の実線で示されるような $r$ 値の変動量の場合に対応する。45°ずらせて貼り合わせれば、図8.5の $\bar{\theta} = 45^\circ$ で $\Delta h = 0.2\text{mm}$ となり、約1/8に耳の高さが減少し、図8.4(a)破線の場合に対応する。図8.5の $\bar{\theta} = 0^\circ$ における単一板(SPCC)の耳高さは0.9mmであり、同一材料であっても、合わせ板の $r$ 値の変動を小さくするような方向に貼り合わせるならば耳の発生を防止することができる。

#### 8. 4. 2 $\bar{r}$ 値と限界絞り比との関係

実験により求めた $r_0$ 、 $r_{45}$ 、 $r_{90}$ を用いて、平均 $\bar{r}$ 値を次式によって求める。

$$\bar{r} = (r_0 + 2r_{45} + r_{90}) / 4 \quad (8.2)$$

平均 $\bar{r}$ 値を横軸にとり、合わせ板、重ね板それぞれの限界絞り比(LDR)を縦軸にとって実験結果を図8.6に示す。図中黒丸のAdhesiveは、合わせ板境界面をボンド接着した場合であり、白丸のPTFEは、重ね板境界面をPTFE薄板で潤滑した場合である。なお重ね板の場合にはそれ自体の $\bar{r}$ 値は存在しないけれども便宜上対応する合わせ板の $\bar{r}$ 値を用いて図8.6のように表示した。したがって重ね板の横座標は単なる目安のみを与えている。図8.6よりバラツキはあるものの、限界絞り比は平均 $\bar{r}$ 値の増加とともに増加する。

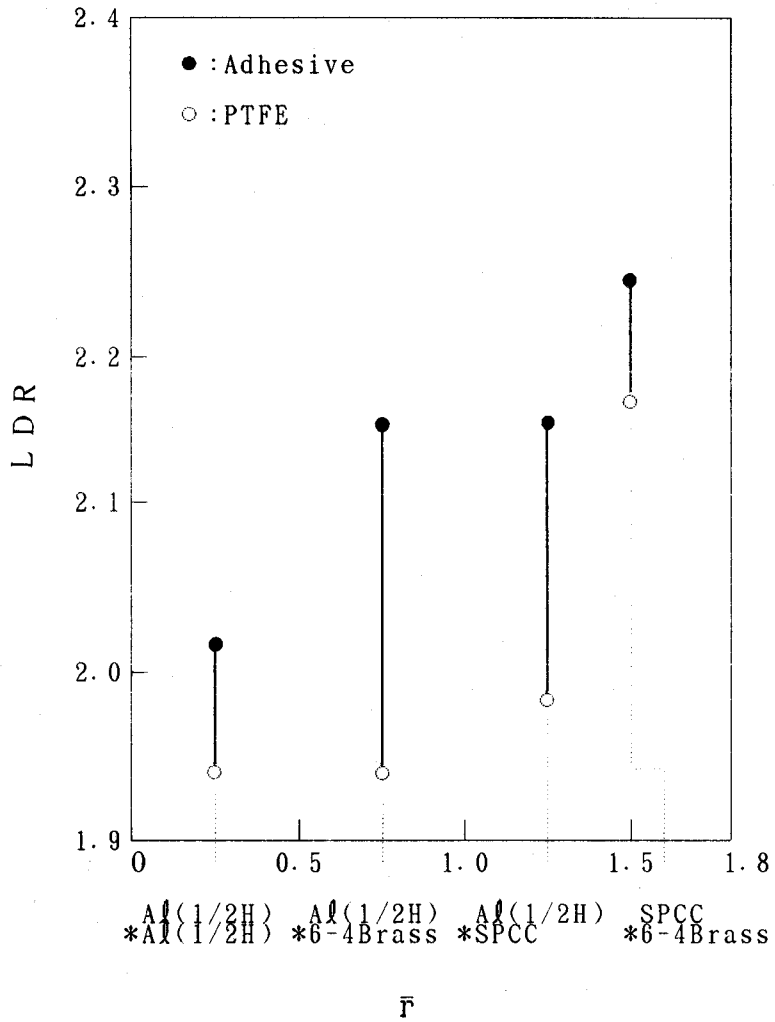


図 8.6 限界絞り比と  $\bar{r}$  値の関係  
(実験結果の一例)

単一板の場合においても、LDRと $\bar{r}$ 値は、ほぼ直線関係であることがわかっている。合わせ板にしても同じような傾向になっている。黒丸と白丸を比較すれば明らかなように、板境界面の潤滑が十分なされると、LDRが全般的に減少することがわかる。これは板間でのすべりが容易になるため、板間の相互拘束がなくなり、ひずみの集中がある局部的な部分に起こるためと考えられる。板界面間での摩擦が大なる程ひずみの集中が緩和されて、平均化するものと考えられる。

#### 8. 4. 3 板境界面のすべりによる限界絞り比の低下

8. 4. 2で述べたように、板境界面のすべりが生じる場合は、板相互間の拘束効果がなく、8. 2で求めた $r$ 値による整理はあまり意味をもたなくなる。図8. 7に板境界面のすべりと限界絞り比減少率とのあいだの関係を示す。

図中横座標はI板とII板の変形量の差の絶対値の平均値で、相対すべり長さ $\lambda = |\delta_1 - \delta_2|$ で示される。なお、ここで $\delta_1$ は、I板の変形量、 $\delta_2$ はII板の変形量であり、単一板の状態において、板面内に格子状、あるいは板面中心から同心円状にケガキを施した後、合わせ板、重ね板として実験を行ない実験後二面を離して、ケガキ線の変形前と後の寸法差でもって変形量を計測した。縦軸は限界絞り比減少率で

$$LDR_d = \frac{L(\text{adhesive}) - L}{L(\text{adhesive})} \quad (8.3)$$

で定義した。ここで、 $L(\text{adhesive})$ は合わせ板の深絞りにおける限界絞り比で、 $L$ は重ね板境界面を潤滑した場合の限界絞り比である。PTFE、あるいは機械油で板界面間を潤滑することにより限界絞り比は減少し、また板界面間の相対すべり長さも大きいことがわかる。板界面間の相対すべり長さが大きくなれば、限界絞り比が減少することが明らかである。またボン

ドで接着したものも合わせ板境界のすべりが認められた。

なお、図示しなかったが、同種材料 SPCC あるいは Al(1/2H) を貼り合わせた板で深絞りを行なうと、すべりはあっても限界絞り比に変化を与える程の影響はなかった。

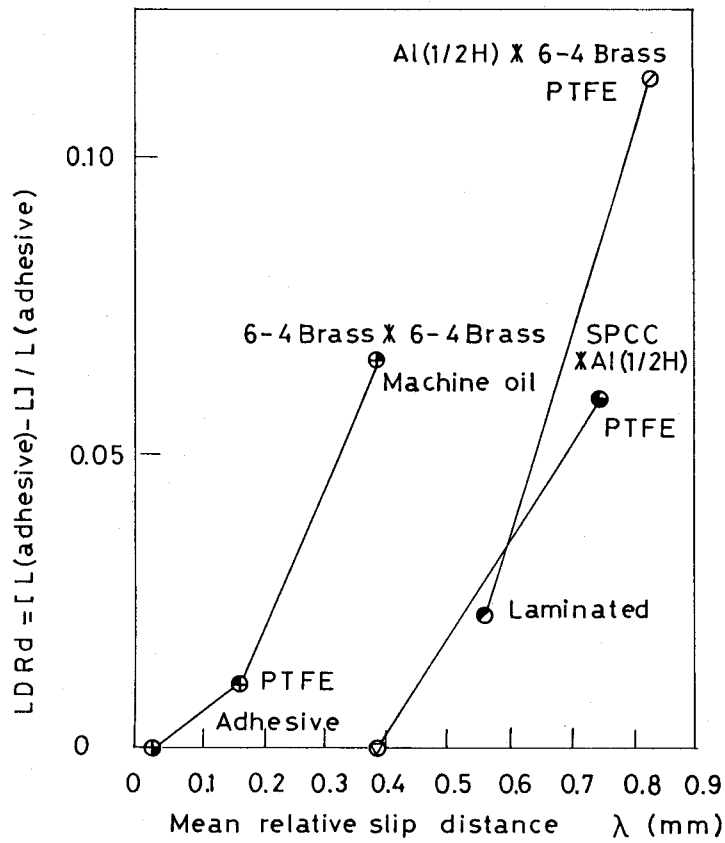


図 8. 7 板境界面のすべりと限界絞り比減少率

#### 8. 4. 4 重ね板、合わせ板のエリクセン値

深絞り性を支配する一つの因子として張出し成形性があるが、これについては、単一板においてすでにエリクセン値によって評価されている。本節では、重ね板、合わせ板に対して同様の試験を行ない張出し成形性を調べた。JISで規定されたエリクセン値の測定において、鋼球の直径は20mmであるが、本実験では鋼球(以後これをポンチという)の直径は 12, 17, 21, 26, 30mm とした。厳密に言えばJIS規定のエリクセン値とは異なるが、以後、これをエリクセン値という。なお実験は、周辺を固定して板材に押しさえ力1000kgを負荷するB法によって行なった。

図8. 8に重ね板(Laminated composite)、合わせ板(Adhesive bonded composite)のエリクセン値の実験結果の一例を示す。

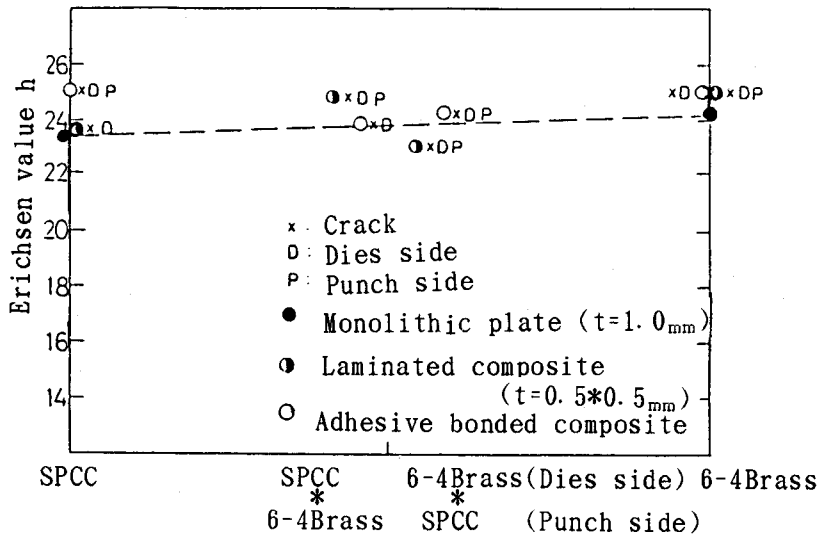


図 8. 8 重ね板(Laminated composite)、合わせ板(Adhesive bonded composite)のエリクセン値 (B法)

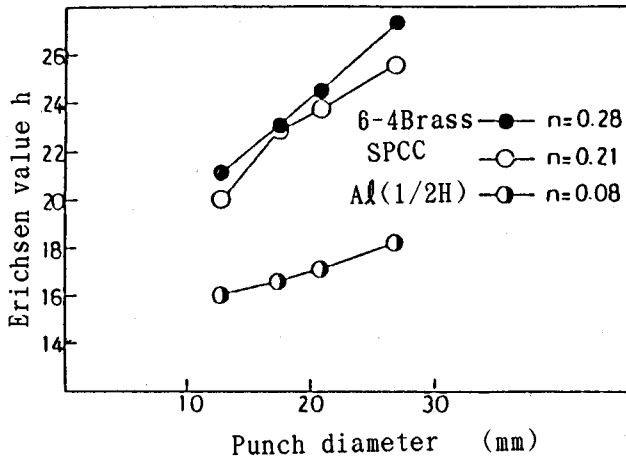


図 8.9 ポンチ直径に対するエリクセン値 (B法) の変化

図中の左右端においてSPCC(黒丸)、6-4Brass単一板(黒丸)と、同一材料の合わせ板(白丸)、重ね板(半黒丸)のエリクセン値をそれぞれ示す。横座標中央において、これら材料を合わせ板、重ね板にした時のエリクセン値を示す。横座標はあまり意味をもたないが、表示を容易にするために図のようにまとめた。図中の破線は単一板のエリクセン値を結んだものであり、中央の6-4Brass(ダイス側)\*SPCC(ポンチ側)の重ね板のみが単一板よりも小さなエリクセン値であることを示す。また、図中XD.Pはダイス側、ポンチ側、いずれにもクラックがはいった場合を、XDはダイス側のみにクラックが入った場合を示す。なお、ダイス側にクラックが発生しないでポンチ側にクラックが入ることは、すべての実験においてなかった。



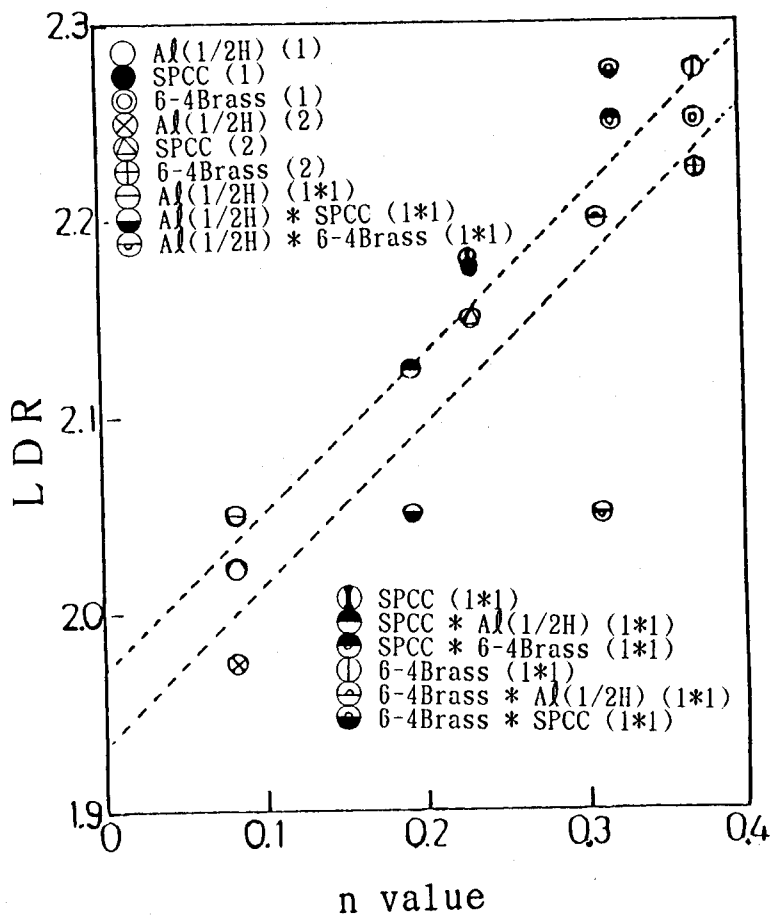
図より明らかなように同一材料であっても、合わせ板にすることによって、エリクセン値は向上することがわかる。図8.8より6-4Brassを外材にした方(Dies side)が、エリクセン値がわずかながら大きく、Hawkinら<sup>(2)</sup>の結果とも同じである。合わせ板の接着境界面ですべりが生じるならば、外側の板材にとってあたかも、エリクセンの鋼球の直径が増加しているかのような効果があるはずである。この傾向を調べるためにポンチの直径を変化させた単一板の実験を行なった。図8.9に示すように、横軸のポンチ直径の増大と共に、エリクセン値も向上している。合わせ板のエリクセン値も見掛けの直径増加により向上したものと考えられる。

#### 8. 4. 5 合わせ板のn値に対する限界絞り比の変化

単一板における限界絞り比と加工硬化指数n値とは、ほぼ正の相関が認められており、合わせ板の場合についても同様な傾向になるかを整理したものを、図8.10に示す。

図中、横座標のn値は、単軸引張試験の結果より求めたもので、図中の材料記号における二つの材料名のうち前の材料はつねにダイス側、すなわち外材を示す。また、材料名の後の(1)は1mm単一板を、(2)は2mm単一板を、(1\*1)は1mm板の単一板を合わせ板にしたことを示す。上側の破線は各種の単一材料1.0mmの限界絞り比を最小二乗法で求め結んだものである。下側の破線は単一材料2.0mmの限界絞り比を同様に結んだものである。バラツキはあるが以下のようにまとめられる。

- (1) Al(1/2H)\*6-4BrassとSPCC(1\*1)を除いて、合わせ板も単一板と同様、概ね、LDRとn値には、正の相関があり、n値が大きくなる程、限界絞り比は向上する。
- (2) Al(1/2H)、6-4Brass、SPCCいずれも、板厚1mmの方が2mmに比較してLDRが大である。これは材質の差によるものと考えられる。



上側の破線は、板厚1mmの単一材料のLDR  
 下側の破線は、板厚2mmの単一材料のLDR  
 (最少二乗法で求めた。)

図8.10 合わせ板の限界絞り比とn値の関係

- (3) 上記、三種類の材料を通じて1mm\*1mmつまり1mm板を2枚はり合わせた方が単一板よりLDRが大で、このことより積層構造にすることにより塑性加工性が向上することになる。
- (4) 一般に加工性の良い材料を外材にした方が、LDRの向上が期待される。特にAl(1/2H)\*6-4Brassとするよりも、6-4Brass\*Al(1/2H)とする方がLDRはかなり向上する。

#### 8. 4. 6 合わせ板の $\bar{r}$ 値に対する限界絞り比の変化

加工硬化指数 $n$ 値と同様、 $\bar{r}$ に対する限界絞り比(LDR)の変化についても、単一板の場合、河合<sup>(3)</sup><sup>(4)</sup>の報告があり、ほぼ正の相関があることが確認されている。

合わせ板と重ね板についてまとめたのが、図8.11である。なお図中のプロットは、図8.10より整理しなおしたものであり、プロットに示される材料記号も同じで、図中プロットをつなぐ、3本の垂直線はAl(1/2H)、6-4Brass、SPCCそれぞれの板厚1mm単一板の2枚合わせ(上側のプロット)と、1mm単一板(下側のプロット)のLDRを示す。また線で結ばれていないが、図中La-minatedは重ね板を、PTFEはPTFEを二枚板の間にはさんで深絞りした場合のLDRを示す。材料名の記入されている部分は、単一材料の板厚2mmを示す。図の横軸の平均 $\bar{r}$ 値は、単軸引張試験結果から求めたものである。重ね板の $\bar{r}$ 値は形式的に合わせ板の $\bar{r}$ 値と同じとした。

図より以下の諸点にまとめられる。

- (1) バラツキはあるが、 $\bar{r}$ 値とLDRは、ほぼ正の相関関係にあり、 $\bar{r}$ 値が大になる程LDRは大となる。
- (2) 重ねただけでもLDRの向上が期待できる。(図8.11□印)図8.8のエリクセン値の結果とも傾向は一致している。ただし、重ね板面にPTFEをはさむことによりLDRはかなり減少する。

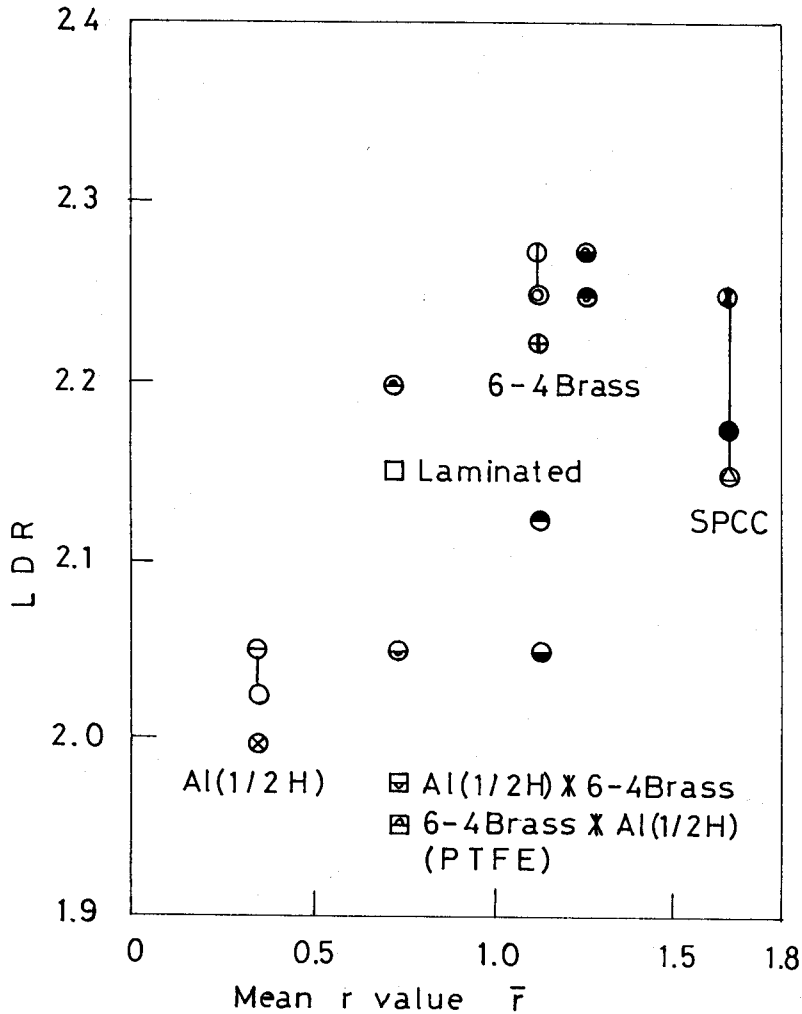


図 8.11 合わせ板の限界絞り比と  $\bar{r}$  値の関係

### 8.5 結 言

異方性の主軸の方向を任意にずらして貼り合わせた場合の  $r$  値の変化と引張強度の変化を計算と単軸引張実験によって求めた。求めた結果を深絞り加工に用い、耳の高さの変化と  $r$  値の関係、 $r$  値や  $n$  値と限界絞り比の関係などについて実験検証を行ない、合わせ板境界の接着効果と限界絞り比の関係などについて実験ならびに考察を行なった。

計算と実験を行った範囲において以下のようにまとめられる。

- (1) 上界法によるモデル解析により任意の方向に板を貼り合わせた場合の  $r$  値の推定を行ない、 $r$  値の変動を小さくする方向で板材を貼り合わせるにより耳の発生が防止できることを計算と実験で示した。
- (2) 実験点にバラツキはあるものの上記で求めた  $\bar{r}$  値の計算値と限界絞り比の実験値の関係は、ほぼ直線関係にあることがわかった。
- (3) 以上の傾向は、板間の境界面ですべりがある場合については必ずしも見られず、板界面ですべりが生じるとそうでない場合より限界絞り比が減少する。
- (4) 限界絞り比は、 $n$  値、 $\bar{r}$  値に対して、合わせ板の場合においても正の相関がある。
- (5) 合わせ板の加工性の判定にエリクセン値で評価しても良いと考えられる。

## 参 考 文 献

- (1) Siebel, E. and Beisswanger, H., Tiefziehen (1955)  
Carl Hanser Verlag.
- (2) Hawkin, R. and Wright, J. C., J. Inst. Met., 99 (1971) 357.
- (3) 河合, 塑性加工学 (1973) 213, 朝倉書店
- (4) 河合, 日本機械学会論文集(第3部), 35 (1969) 440, 449.

## 第9章 総括

等方性あるいは異方性多孔質材料の強度を上界法により求め、降伏曲面を得た。また多孔質材料の空孔部分に硬質の第二相が含まれる複合材料についても同様の計算を行ない、複合材料の降伏強度を求めた。そして、簡単なモデル試験片によって強度と変形挙動につき実験を行なった。第二相のアスペクト比 $\lambda$ が無限大になった場合として、積層板の $r$ 値とその強度を計算と実験により求めた。求めた $r$ 値と深絞り加工における耳の高さとの関係を求め、計算の結果の有効性を検証した。

以下得られた結果を総括する。

第2章においては、三次元軸対称形の楕円体空孔を有する多孔質材料の強度解析を上界法を用いて行ない、アスペクト比 $\lambda$ をパラメータにして降伏強度の計算を行なう過程について述べた。このアスペクト比 $\lambda$ によって異方性が変わり、異方性多孔質材料の降伏条件を求めることができた。本章における結果を第3章～第5章までの各問題に応用した。

第3章においては、アスペクト比 $\lambda = 1$ の球形の空孔を有する等方性多孔質材料の降伏条件を、第2章と同じ可容変形速度場を用いて上界法による強度解析より求めた。ただ第2章と異なる点は、一軸方向の変形をベクトル的に重ね合わせることにより、一般の三次元変形の降伏曲面を得た。そして、また単軸引張・圧縮実験の結果は、体積率 $V_f = 0.2$ の範囲において実験結果に一致した。等方性多孔質材料の降伏は降伏楕円曲面になることを示した。これらの結果は、いままでに提案されている多孔質体の降伏条件に一致することがわかった。

第4章においては、第2章における可容変形速度場を用い、異方性多孔質材料に対してモデル解析した結果であり、アスペクト比 $\lambda$ が1より大きくなるにしたがい、 $\lambda = 1$ のときの降伏曲面が時計方向に回転することがわかった。また、ひずみ速度ベクトルは、降伏曲線に垂直で、いわゆる垂

直則を満足することもわかり、いままでに提案されている多孔質体の降伏条件にも一致することがわかった。これらの結果を用いることによって多孔質材料の加工力と強度を推定することができる。

第5章においては、第4章までの解析における空孔部分に第二相材料として硬質材が充填された場合について解析を行なった。このような複合材料の降伏はvon Misesの降伏条件に従うことがわかった。またアスペクト比が大になれば、複合則で計算しても良いが、アスペクト比 $\lambda$ が1の球状の場合は、とくに第二相の体積率が小さい時に、第二相は変形せず、複合則による計算では、実際よりも、大きい強度を与えることになる。また、母材と第二相材料の相対強度が大になる程上記の傾向が強まることがわかった。以上より硬質層を含む複合材料の加工力と強度を計算のみによって推定できる。

第6章においては、第5章の解析結果をふまえて、第二相粒子を含む焼結銅の変形と強度特性を実験検証したもので、電解銅粉末中に、ステンレス線、炭素鋼のねじ、タングステンカーバイト粒を介在させ圧粉焼結したモデル試験片によって単軸引張試験や引抜試験を行なった。

実験を行なった範囲において、変形応力に対して第二相材料の分布の影響は、あまり見られず、第二相材料のアスペクト比 $\lambda$ が $\lambda=1$ の場合において複合強度が一番低かった。そしてアスペクト比 $\lambda$ が増加する程変形応力は増加した。これらの結果は、第5章の解析結果とも一致している。また、 $\lambda=1$ の場合は、母材材料中に剥離や分離が発生して、母材材料の密度は、ひずみの進行とともに急激に減少した。また、アスペクト比 $\lambda=10$ では、重量分率とともに変形応力も増加したが、 $\lambda=1$ において、むしろ反対に減少した。また、延性についても同じ傾向で、アスペクト比 $\lambda=60$ では、延性はかなり増加する。しかしながら第二相の重量分率の増加とともに減少する。第二相材料境界面における接着は強度増加に対して支配的であり、界面に不規則な凹凸のある方が、接着強度が強く複合強度も大で

ある。

第7章においては、積層金属板の引張変形特性を、異方性を考慮に入れて上界法によるモデル解析を行ない、 $r$ 値が実験結果と一致することがわかった。

また、単一板の応力ひずみ曲線の $n$ 値を与え、これを用いた解析より積層板の応力-ひずみ関係を求めることができた。

第8章においては、第7章における解析結果より、異方性の主軸と引張軸の方向が任意の方向に貼り合わせた板の $r$ 値の変化と引張強度の変化を計算と単軸引張実験によって求めた。求めた結果を深絞り加工に用い、 $r$ 値の変動と耳の高さの変化が対応し、 $r$ 値が大きな異方性の主軸と小さな異方性主軸をそろえて貼り合わせることにより、耳の高さが減少することを示した。また、積層板の接着が完全でないと、限界絞り比(LDR)があまり向上しないこともわかった。

以上、粒子分散型強化複合材料と積層板材料から多孔質材料までの塑性強度を、複合材料も多孔質材料も同じ変形の速度場を用いて、上界法により求めた。

求めた結果と実験結果を比較することにより本モデル解析が有効であることがわかった。粒子分散強化複合材料、多孔質材料における第二相材料あるいは空孔形状のアスペクト比を変化させることにより異方性を表わすことができ、これらの解析結果をも示し、複合材料と多孔質材料の塑性強度と加工力の解析に対して、本解析が有効であることが確認できた。



## 謝 辞

本論文をまとめるに当たり、懇切な御指導を賜りました、大阪大学工学部 花崎 伸作 教授、堀 茂徳 教授、北川 浩 教授に深甚なる謝意を表します。

本研究を進めるにあたって、京都大学名誉教授であり現在 摂南大学工学部 大矢根 守哉 教授には多大な御指導を賜り心より謝意を表します。

京都大学および摂南大学 奥島 啓弑 名誉教授と大阪大学名誉教授・現摂南大学工学部 長谷川 嘉雄 教授には、著者が研究遂行上の困難に直面した時に、多大の励ましをいただき心より感謝致します。

本研究を行なう端緒を与えていただいた立命館大学理工学部 大南 正瑛 教授には、著者が、立命館大学在職中以降公私にわたり終始変わらぬ励ましを頂いたことを付記し、感謝の意を表します。

本研究を行なう過程においては、多くの方の御指導、御助言、御援助をいただきました特に、京都大学 島 進 教授には、著者の京都大学への内地留学中を含め長年月にわたり議論に加わっていただきました。

大阪大学基礎工学部 小坂田 宏造 教授、京都工芸繊維大学工芸学部 山口 克彦 教授をはじめとする、かつての京都レポート研究会の皆様には、多大な御援助をいただきました。また、著者が、摂南大学へ移ってから、大阪工業大学工学部 真崎 才次・田端 強 両教授をはじめとする大阪工業大学・摂南大学に関係する方々の御援助をいただきました。

最後に、本研究を進める上で一般連続体力学の研究会に関係する方々、とりわけ東京都立科学技術大学 田中 喜久昭 教授の有益な議論に感謝し謝意を表します。