



Title	手数料を考慮した株式ポートフォリオにおけるアクティブ運用の不確実性
Author(s)	中西, 真悟
Citation	大阪大学, 2015, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/52042">https://doi.org/10.18910/52042</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 博士学位論文

手数料を考慮した  
株式ポートフォリオにおける  
アクティブ運用の不確実性

中西真悟

大阪大学大学院経済学研究科



# 目 次

1 章 緒 論 .....	7
1.1 先行研究と問題提起 .....	7
1.1.1 ファイナンスにおける歴史的背景と問題提起 .....	7
1.1.2 効用関数のファイナンスに至るまでの先行研究 .....	9
1.1.3 アクティブ運用におけるインフォメーション・レシオの先行研究 .....	16
1.1.4 手数料に関する分類 .....	21
1.2 本論文の目的 .....	24
1.3 本論文の構成 .....	26
 2 章 平均分散モデルの特徴と不確実性 .....	29
2.1 緒 言 .....	29
2.2 モデリングのための統計量の表記方法 .....	30
2.2.1 平均の表記 .....	30
2.2.2 高次統計量の表記 .....	34
2.2.3 時系列統計量の表記と検定 .....	36
2.3 モデリングのための数理計画法による考え方 .....	37
2.3.1 等式制約付きの二次計画法の解法 .....	37
2.3.2 等式制約付きの一次項のない二次計画法の解法 .....	38
2.4 株式の空売りを認める平均分散モデル .....	39
2.4.1 安全資産利子率を含まない空売りを 認めるポートフォリオの平均分散モデル .....	39
2.4.2 最小分散ポートフォリオのための平均分散モデルの解法 .....	42
2.4.3 期待効用最大化ポートフォリオの 平均分散モデルの解法（リスク調整ポートフォリオ） .....	43
2.4.4 安全資産利子率を含む空売りを認める ポートフォリオの平均分散モデル（資本市場線） .....	45

2.4.5 安全資産利子率を含む空売りを認める接点ポートフォリオの平均分散モデル（シャープ・レシオ最大化）	48
2.5 空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル	52
2.5.1 安全資産利子率を含まない空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル	52
2.5.2 安全資産利子率を含む空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル	54
2.6 同時分布の信頼橙円体を考慮した平均分散モデルの考察	55
2.6.1 ポートフォリオ管理における機会制約条件モデル	56
2.6.2 平均分散モデルにおける信頼橙円体	58
2.7 資本資産評価モデル（CAPM）の導出	59
2.7.1 資本市場線（CML）とシャープ・レシオ	59
2.7.2 証券市場線（SML）とマーケット・モデル（シングル・ファクタ・モデル）	60
2.8 データ分析と考察	61
2.8.1 資本資産評価モデルの指標の算出	62
2.8.2 平均分散モデルにおける効率的フロンティアの視覚化	63
2.8.3 空売りのある場合の平均分散モデルにおける投資比率の傾向	66
2.8.4 資本市場線におけるマーケット・ポートフォリオの傾向	68
2.8.5 シャープ・レシオの上位 10 証券の傾向	70
2.8.6 計量期間 5 年ごとの平均分散モデルの推移	72
2.8.7 算術平均と対数平均による平均分散モデルの比較	73
2.8.8 統計量と平均分散モデルの比較	74
2.8.9 時系列傾向と平均分散モデルの考察	78
2.8.10 同時分布と平均分散モデルの考察	80
2.9 結 言	82
付録図 2.A 計量期間 60 か月ごとの平均分散モデル	83
付録図 2.B 同時分布（散布図）による平均分散モデルの比較	86

3 章 手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの賭け	88
3.1 緒 言	88
3.2 手数料を考慮したコイン投げおよびサイコロ投げの賭けの前提条件	90
3.2.1 勝敗の確率が等確率のコイン投げの前提条件	91
3.2.2 勝つ確率が負ける確率より若干小さいコイン投げの前提条件	92
3.2.3 サイコロ投げの前提条件	92
3.3 一人のプレイヤーの利得モデル	93
3.3.1 一人のプレイヤーが 1 回ゲームを試行するモデル	93
3.3.2 一人のプレイヤーが $N$ 回独立にゲームを試行するモデル	94
3.3.3 $N$ 回独立試行におけるモデルの正規近似	96
3.3.4 一人のプレイヤーのゲーム試行列のパフォーマンス測度	100
3.4 $m$ 人のプレイヤーのうち勝者の総獲得賞金モデルと敗者の期待損失モデル	102
3.5 勝者の獲得賞金の総和最大化とべき乗回帰分析	106
3.6 数値実験による考察とモデルの注意点	114
3.6.1 等確率で手数料が勝者の利得に確率の場合	114
3.6.2 コイン投げの表と裏が異なる確率の場合	115
3.6.3 プレイヤー数の大きさに対応するモデルの傾向	117
3.6.4 サイコロ投げの場合およびモデルの適用範囲の限界	118
3.7 結 言	119
4 章 手数料を考慮したインフォメーション・レシオ	121
4.1 緒 言	121
4.2 インフォメーション・レシオの考察と手数料を含む場合の定式化	122
4.2.1 ベンチマーク超過収益率の正負の判別の記述例	122
4.2.2 ベンチマーク超過収益率の記述例に基づく インフォメーション・レシオの不变性の欠如	123
4.2.3 標準化変換法	125
4.2.4 拡張一次近似二次モーメント法の探索法の改良	127
4.3 勝者の獲得賞金最大化の確率と片側確率点の数理的関係	129
4.4 正規分布の累積分布関数の導関数と $\lambda$ の数理的関係	139

目 次

4.5 インフォメーション・レシオと $\lambda$ および手数料の数理的関係	142
4.6 結 言	151
5 章 結 論	153
参考文献	155
発表論文および会議報告	164
謝 辞	166

# 1章 緒論

## 1.1 先行研究と問題提起

### 1.1.1 ファイナンスにおける歴史的背景と問題提起

ファイナンスの分野では、テキストを著作するときには投資家の選好においてリスクと効用は欠かせない領域の一つである。たとえば、日本証券アナリスト協会の推奨するテキスト<sup>[1][2]</sup>でも第一に取扱っている。投資家の選好において、Von Neumann と Morgenstern<sup>[3][4]</sup>による期待効用最大化原理では、合理的な投資家が複数存在する投資案の選択において最大の期待効用を得るために行動することが主張されている。1964年にWilliam Sharpeは資本資産評価モデル(CAPM: Capital Pricing Model)<sup>[5]</sup>により、1959年にMarkowitzが平均分散モデル<sup>[6]</sup>により効率的な市場において市場に参加する投資家が安全資産と接点ポートフォリオの組合せによって最適なポートフォリオを実現できることを提案している。すなわち、すべての証券の需要と供給が一致する市場では、市場は均衡しておりマーケット・ポートフォリオは接点ポートフォリオでなければならないことを提唱している<sup>[7][8]</sup>。William Sharpe や Markowitz らの考え方は今日でも現代ポートフォリオ理論において最も古典的分野であると同時に種々の分野の出発点となり広く活用されている<sup>[9][10]</sup>。この考え方は、ベンチマークになるマーケットと同程度のパフォーマンスを狙うインデックス運用を主張した効率的市場仮説<sup>[11][12]</sup>へと続くが市場が効率的か否かは未だ決着はついていない<sup>[1][2]</sup>。

一方で、インデックス運用がベンチマークと同様の収益率を目指すのに対して、アクティブ運用はベンチマークを上回る収益率を目指す運用のことをいう<sup>[1][2]</sup>。伝統的なアクティブ運用では、TOPIXなどをベンチマークとして比べることが多いようだが、近年ではヘッジファンドのように絶対収益率を追及するアクティブ運用も存在する。この場合は、現金がベンチマークの役割を果たし比較することになる。

インデックス運用の目的が低コストでベンチマークと等価のパフォーマンスを追及するのに対し、アクティブ運用の目的は調査・分析・売買執行などの運用コストを余分に加算しつつも超過収益率という付加価値を追及することである。しかし、市場の効率性を前提としたとき、安定的に超過収益率を享受することは不可能とも言われている。このことは、日本アナリスト協会編の「新・証券投資論Ⅱ」<sup>[2]</sup>でも先行研究において、アクティブ運用のパフォーマンスは、ベンチマークを上回るのか否かは定かではないことが記されている。中でも、1969年のJensenの先行研究<sup>[13]</sup>のようにアクティブ運用の平均的なパフォーマンス

はベンチマークを上回ることができなかったという実証分析結果が報告されている。このような類似報告は数多く存在する<sup>[2]</sup>。すなわち、アクティブ運用のパフォーマンスを測定するためには、運用に関して余分に追加した手数料が重要な因子とも考えられる。

同様にアクティブ運用の成果について、Charles D. Ellis<sup>[14][15]</sup>は著書「敗者のゲーム」で次のように記している。

「機関投資家の大多数が市場よりも良い成果をあげられるという基本的的前提は正しくない。なぜなら機関投資家そのものが市場なのだから、機関投資家全体としては、自分自身に打ち勝つことができない。その上、顧問料や売買手数料、その他のコストを支払わなければならず、長い目で見て運用期間全体の75%の成績は市場水準を下回るだろう<sup>[15]</sup>。」

このように考えると、投資成果において儲かった勝者となる投資家のパフォーマンスに注目しがちだが、手数料まで考慮すると上記を前提とする勝者全体の利得はどのようなものであろうか。

このため、市場が効率的な場合を想定すると、市場における勝者全体のパフォーマンスがどの程度か定量的に見積もることは重用視されなければならない。このような背景において計量的なアクティブ運用<sup>[16][17][18]</sup>は、現代ポートフォリオ理論の中で亜流に位置付けられている<sup>[16][17]</sup>。市場の効率性に重点を置く現代ポートフォリオ理論では、アクティブ運用は不可能に近い立場にあるからである。

ところで、現代ポートフォリオ理論が基本としてきた投資家の合理的行動と市場の効率性について、Kahneman と Tversky<sup>[19][20]</sup>は異議を唱えている。すなわち、Kahneman と Tversky<sup>[19][20]</sup>が提案した行動ファイナンス<sup>[21]</sup>におけるプロスペクト理論<sup>[19][20][21][22]</sup>が今日では注目されている。しかしながら、投資家が学習や訓練を積めば、非合理的どころか理にかなった行動をすることも多く、今日でも伝統的ファイナンスの主張を覆すまでには至っていない<sup>[23]</sup>。にもかかわらず、Kahneman と Tversky は利益に対するリスク回避的な態度と損失に対するリスク愛好的な態度について価値関数として 2 組のべき関数によりモデル化していることは大変重要である<sup>[19][20]</sup>。さらに、その影響度は損失の方が大きいことを示していることも興味深い。

一方で、平均的に市場に打勝つアクティブ運用は、果たして存在するかは不明としても、Ellis<sup>[14][15]</sup>は投資にかかるコストを減らす投資行動を推奨している。このように手数料はアクティブ運用のパフォーマンスにおいて無視できない存在であるにもかかわらず、一般的には投資成果の公表は手数料を含めない問題が残る。投資家の立場や目的は、真にベンチ

マークよりも投資にかかるコストを含めて利得を得ることができたか、どの程度の計量的成果を収めたのかが関心の対象となる。

また、投資にかかるコストを明示したパフォーマンス評価は、リスクを定量的に示す透明性や真のアクティブ運用成果の評価にも役立つ<sup>[24]</sup>。このため、遠くない将来においてアクティブ運用の予測にはこのような市場の動きや投資環境の整備の発展も必要な問題である。

以上をもとに、まず 1.1.2 において効用関数のファイナンスに至るまでの先行研究についてまとめ、1.1.3 ではアクティブ運用のパフォーマンス評価に欠かせないインフォメーション・レシオについて簡単に考察する。その後、1.1.4 で本研究において重要な手数料について、取引コストと手数料の違いを説明し、本研究で用いる手数料のモデルの枠組みを示す。さらに、1.2 で本論文の目的を明確にして、1.3 でその論文の構成を記す。

### 1.1.2 効用関数のファイナンスに至るまでの先行研究

前項の 1.1.1 では、ファイナンスの歴史的背景とアクティブ運用における問題提起について記述した。本項では、ファイナンスにおける市場に限定せず、本研究で重要な勝者の効用について取扱う。特に、べき関数の効用関数に関する先行研究を調査している。

リスク<sup>1</sup>における歴史<sup>[24]</sup>を紐解くと、リスクの計量化の発端と言われる 1494 年に Pacioli が「算術、幾何および比例大全<sup>2</sup>」の中で balla(公平なゲーム)を取り扱ったのに始まり、1500 年代に「ギャンブルの最大の利益は、それをやらないことで得られる<sup>[24]</sup>。」の言葉を残した Cardano は、不確実性について「偶然のゲームの書<sup>3</sup>」を著してギャンブルの確率的洞察をまとめようと試みている<sup>[24]</sup>。その後、1600 年代に Pascal と Fermat は、何通もの手紙を通じてゲームの結果に確率を適応した研究について取組んでいる<sup>[24]</sup>。さらに、ギャンブルにおける勝者が得る賞金問題としては、1738 年に公表された Daniel Bernoulli による St. Petersburg のパラドックスが発表されている<sup>[24][25]</sup>。この研究はコイン投げによる利得の傾向を示し、プレイヤーと胴元の行方を数理的に考察したものである。期待結果が無限大になる問題だが、Daniel Bernoulli は対数式の効用関数を発表した。その発表前の 1728 年にも、

<sup>1</sup> 出所原典は、Peter L. Bernstein, “Against the Gods: The Remarkable Story of Risk”, Wiley, 1998.

<sup>2</sup> 原題は、 “Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita”, 1494.

<sup>3</sup> 原題は、 ”Liber de ludo aleae”, 1560. (1663 年に発刊)

Gabriel Cramer はこの問題に対して Nicolaus I Bernoulli への手紙で平方根を用いており、べき関数の効用関数を示している<sup>[25]</sup>. その後、時を得て 1957 年に Stevens<sup>[26][27]</sup>が人間の刺激や感覚は、べき関数が良くあてはまる事を示している. Von Neumann と Morgenstern<sup>[3][4]</sup>の期待効用最大化原理により、市場の効率性に注目する経済学やファイナンスの分野でも効用関数は活用されることとなる. たとえば、ファイナンスの分野では、 $W$  を富とするとき

$$\text{2 次型効用関数: } U(W) = W - \beta W^2 \quad \left(0 < \beta < \frac{1}{2W}\right) \quad (1.1)$$

$$\text{指数型効用関数: } U(W) = 1 - e^{-\beta W} \quad (\beta > 0) \quad (1.2)$$

$$\text{対数型効用関数: } U(W) = \log W \quad (1.3)$$

$$\text{べき型効用関数: } U(W) = W^\beta \quad (0 < \beta < 1) \quad (1.4)$$

の効用関数が活用されている<sup>[28][1]</sup>.

その後、べき関数は 1979 年に市場の効率性に異議を唱えた Kahneman と Tversky のプロスペクト理論<sup>[19][20]</sup>でも、後の 1991 年にべき関数を価値関数<sup>[20]</sup>に用いていることから、大変重要な役割を果たしている.

ところで、式(1.1)から式(1.4)のうち、べき関数と対数関数に対する考え方は、早くから物理量と心理量との関係を注目する心理物理学(精神物理学とも呼ばれる)<sup>[29]</sup>でも注目されてきた. 特に、1860 年に Fechner が刺激強度  $I$  を用いて Weber の考案した  $\Delta I/I = \text{const.}$  をもとに

$$dS = k \frac{dI}{I} \quad (1.5)$$

より

$$S = k \log \frac{I}{I_0} \quad (1.6)$$

とする感覚尺度の対数式を提案している<sup>[29]</sup>. ここに、 $I_0$  は規準化された刺激強度である. この考え方には、Daniel Bernoulli と同じ対数式を導出している点でも大変興味深いといえる. 一方で、同じ心理物理学の分野において Stevens は Fechner とは異なる見解を示している

[26]. Stevens は 1957 年の論文<sup>[26]</sup>と 1975 年に著書<sup>[27]</sup>の中で、人間の感覚刺激に関する特徴において、Cramer の平方根によるべき関数<sup>[25]</sup>を拡張して

$$\psi = kI^\beta \quad (1.7)$$

を示している<sup>[26][27]</sup>. ここに、 $I$  は刺激強度、 $\psi$  は刺激とそれによる感覚の強さを関係付ける精神物理的関数、 $\beta$  は刺激の種類により決まる指数、 $k$  は刺激の種類と使用する単位によって決まる比例定数である. 特に、両対数図の関係式を用いて

$$\log \psi = \beta \log I + \log k \quad (1.8)$$

のように  $\beta$  を傾きとする直線として表示できるので、べき関数の評価において対数評価としても役立つ<sup>[27]</sup>. 式(1.8)を用いて最小二乗法により今日までに多くのことが実証的に解明されているため、式(1.7)は Stevens のべき法則と呼ばれている<sup>[29]</sup>.

そこで、以上の考え方をまとめると図 1.1 に示すように効用関数を描くことが可能となる. 図 1.1(a)では対数評価式の基本となる Bernoulli の考え方の例<sup>[27]</sup>を、図 1.1(b)では平方根を基準としたべき関数の評価を見出す Cramer の考え方の例<sup>[24]</sup>を、図 1.1(c)では両対数評価をもとに指数部の考え方の基本をまとめた Stevens の考え方の例<sup>[26][27]</sup>を視覚化している. 図 1.1(a)と図 1.1(b)では  $k$  の値を変化させることで効用関数を複数描いているが、図 1.1(c)では  $k$  を一定値として指数部  $\beta$  の変化により複数描いている. このため、単純比較はできないが、図 1.1(c)では、図 1.1(b)の動きを合成した特徴を描くことも可能である. したがって、Stevens は、図 1.1(a)の対数表現よりも図 1.1(c)のべき関数による表現は優れていると主張していることがわかる. また、Stevens により示された式(1.8)で取扱っている両対数図の関係を視覚化するために、図 1.2 として図 1.1 と同じ対応の関係図を示している.

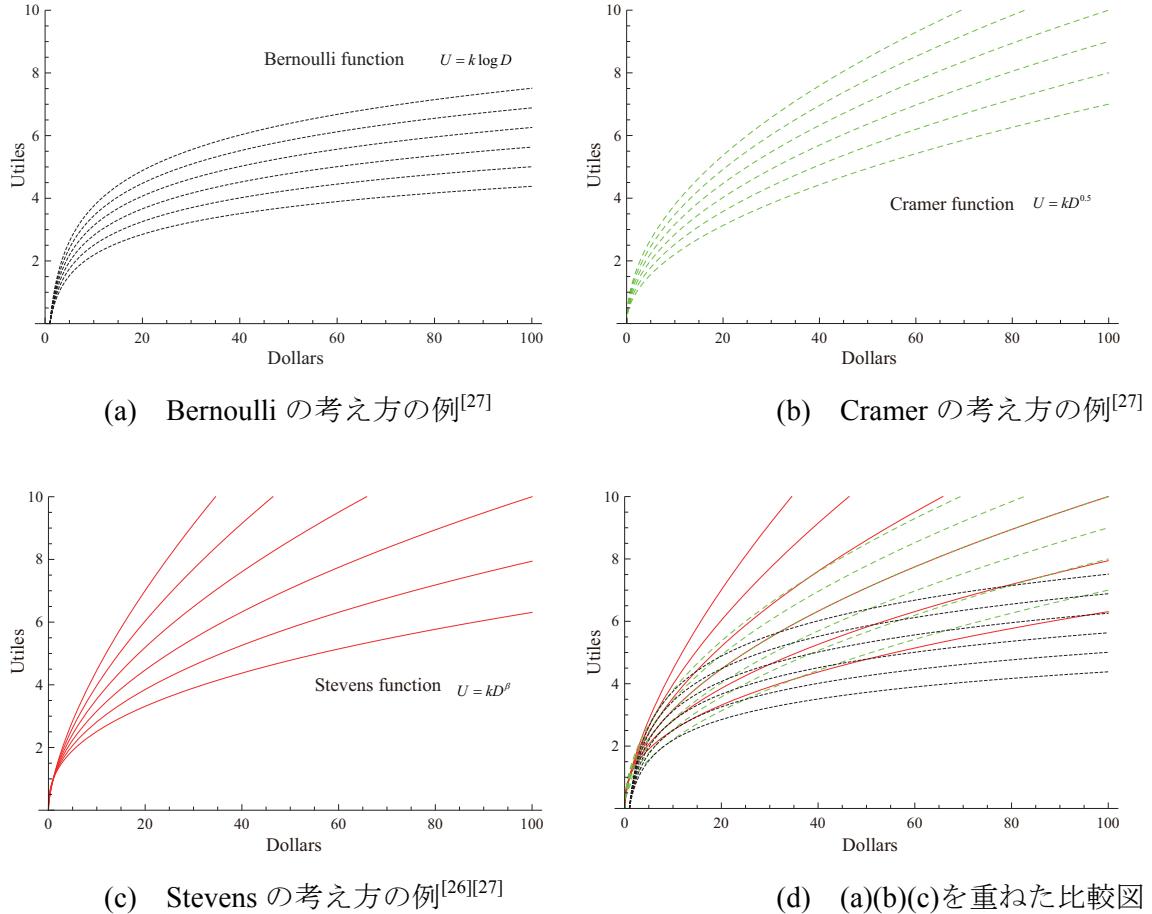


図 1.1 効用関数の考え方の例

すなわち、図 1.2(a)では対数評価式の基本となる Bernoulli の考え方の例を、図 1.2(b)では平方根を基準としたべき関数の評価を見出す Cramer の考え方の例を、図 1.2(c)では両対数評価をもとに指指数部の考え方の基本をまとめた Stevens の考え方の例<sup>[26][27]</sup>を視覚化している。図 1.1 と同様に比較のため、図 1.2(a)と図 1.2(b)では、 $k$  の値を変化させることで効用関数を複数描いている。図 1.2(c)では  $k$  を一定値として指指数部  $\beta$  の変化により複数描いている。このため、図 1.1 と同様に単純比較はできないが、図 1.2(c)では図 1.2(b)の動きと合成した特徴を描くことが可能である。図 1.2 の特徴より、べき関数による効用関数は、両対数図において線形関係を示すため、取扱いも容易で実証的研究において非常に重要な役割を有している。

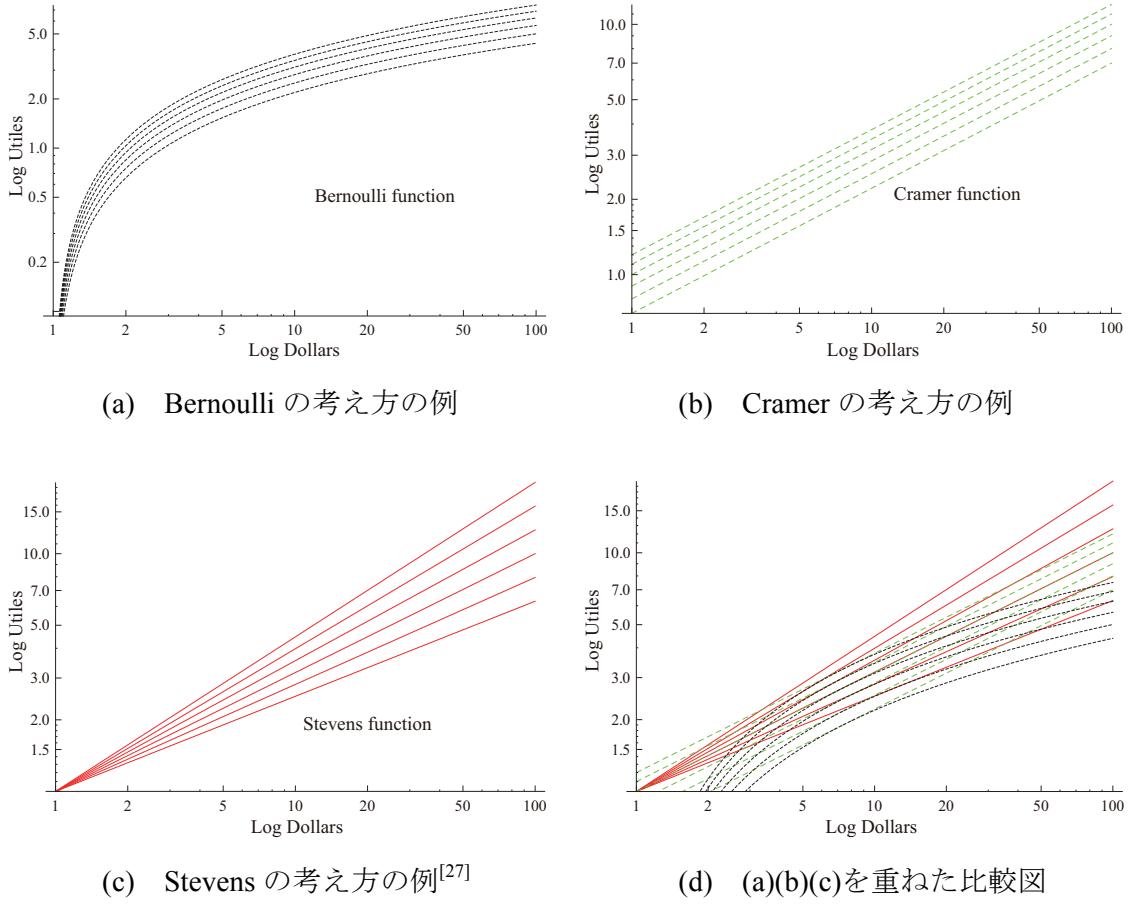


図 1.2 両対数図による効用関数の考え方の例

ところで、図 1.1 に対して、Stevens は St. Petersburg のパラドックスの期待結果<sup>[25]</sup>である

$$\begin{aligned}
 EV &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot 2^{-k} \\
 &= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{8}\right) + \dots \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \\
 &= \infty
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

のように人間の感覚尺度と矛盾する問題において、図 1.1(a)に示すように Daniel Bernoulli の対数式による効用関数<sup>[27]</sup>

$$U = k \log D \tag{1.10}$$

の提案や、図 1.1(b)に示すように Daniel Bernoulli の発表の中で記述される Gabriel Cramer の平方根によるべき関数である効用関数<sup>[27]</sup>

$$U = kD^{0.5} \quad (1.11)$$

について視覚化したが、心理物理学の分野では 1959 年に Luce が関数方程式<sup>[30][31]</sup>

$$u(kI) = K(k)u(I) + C(k) \quad k > 0, K(k) > 0 \quad (1.12)$$

を用いて、式(1.12)を満たす連続関数  $u(I)$  は下記の 2 つの関数しかありえないことを証明している<sup>[30][31]</sup>。すなわち

$$u(I) = a \log I + \beta \quad (1.13)$$

もしくは

$$u(I) = aI^\beta \quad (1.14)$$

である<sup>[30][31]</sup>。これらの成果もまた、本研究で取扱うファイナンスや数理経済学<sup>[30]</sup>の効用関数において人間の感覚尺度を合理的に導入するために大変有効な関係式だと言える。

また、後に Luce はべき関数の効用関数を用いて、本研究でも重要な説明変数が負の領域まで考慮された効用関数

$$U(x) = \begin{cases} \alpha x^\beta, & x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ -\alpha'(-x)^{\beta'}, & x < 0, \alpha' > 0, \beta' > 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

を 2014 年の著書<sup>[32]</sup>の中で示している。式(1.15)はプロスペクト理論を含む領域まで拡張されている。式(1.15)の原典ともいえる Kahneman と Tversky による累積プロスペクト理論<sup>[20]</sup>では、式(1.15)の提案に、損失の大きさが与えるインパクトは利得を得るよりも影響力があること考慮して、実証的に  $\alpha = 1.0$ ,  $\alpha' = 2.25$ ,  $\beta = \beta' = 0.88$  を導出している<sup>[20]</sup>。St.

Petersburg のパラドックスとプロスペクト理論の傾向については、2005 年に Blavatskyy<sup>[34]</sup>、2006 年に Oliver と Wang<sup>[35]</sup>でも述べられている。一方で、2011 年に Peters<sup>[36]</sup>は St. Petersburg のパラドックスの賭けにおける時間平均についても考察しており、異なるアプローチにもかかわらず Daniel Bernoulli の対数式とも共通の特徴がある。また、St. Petersburg のパラドックスに対する期待効用では、Menger の論証<sup>4</sup>が Daniel Bernoulli の対数式に一致している<sup>[37][38]</sup>。

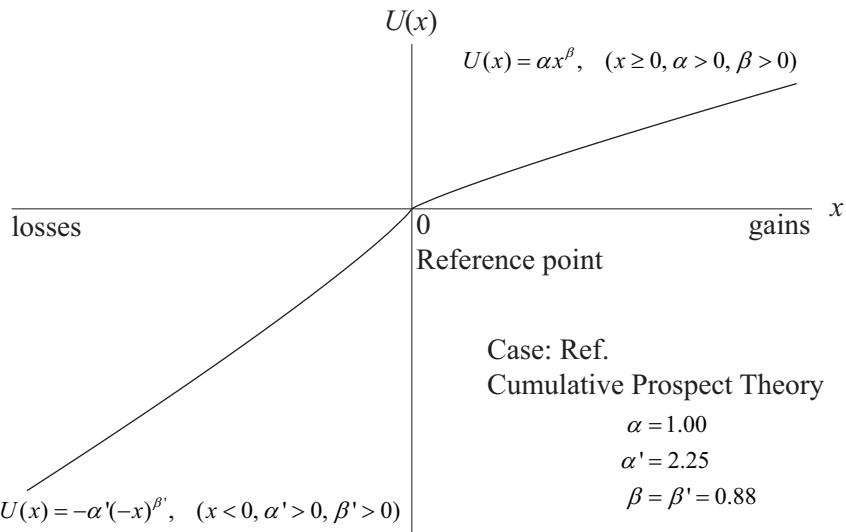
図 1.3 には、式(1.15)をもとに Kahneman と Tversky の値の傾向を視覚化している。一般に他のモデルを想定しても損失の大きさは利得を得る大きさよりその影響度が大きいと言える。このため、べき関数の視覚化は概ね図 1.3 と同様の傾向を示すと考えられる。ところで、図 1.3 のように説明変数について負の領域まで示した視覚化は、プロスペクト理論よりも早く 1957 年に Devidson, Suppes, Siegel らによる効用関数<sup>5</sup>の推定例<sup>[29]</sup>がある。この例がプロスペクト理論と同様の傾向を示していることは重要である。また、1952 年に Markowitz<sup>[39]</sup>もファイナンスでは初めて説明変数の負の領域までを考慮し、非線形の効用関数の特徴を提案している。Markowitz の提案については、Kahneman と Tversky もまた言及している<sup>[20]</sup>。さらに、Fishburn と Kochenberber も負の領域まで線形関数、べき関数、指数関数を効用関数に当てはめて考察している<sup>[135]</sup>。本研究でも式(1.15)の数式と同じ特徴に着目している。

以上で、べき関数について考察したが、次項 1.1.3 では本研究においてもう一つの重要な評価指標であるインフォメーション・レシオについて簡単に考察する。

---

<sup>4</sup> 出所原典は、Menger, Karl., “Das unsicherheitsmoment in der wertlehre”, *Journal of Economics*, Vol. 5, No. 4, pp. 459-485, 1934.

<sup>5</sup> 出所原典は、Davidson, D., Suppes, P. and Siegel, S. “Decision Making: An Experimental approach”, Stanford University Press, 1957.

図 1.3 累積プロスペクトの価値関数の視覚化<sup>[22]</sup>

### 1.1.3 アクティブ運用におけるインフォメーション・レシオの先行研究

アクティブ運用の中で、ファンド・マネジャーのパフォーマンス評価には、インフォメーション・レシオが用いられている<sup>[16][17][18]</sup>。このため、日本証券アナリスト協会でも2003年に「運用制約とインフォメーション・レシオ」の特集号を組んでいる<sup>[40]</sup>。そこで、本項では、本論文の4章で重要な役割を果たすインフォメーション・レシオの意義について簡単に考察する。

まず、実務におけるアクティブ運用において重要な役割を果たすインフォメーション・レシオではあるが、その原典について、竹原<sup>[41]</sup>は以下のように言及している。

「ファイナンスの研究史においてインフォメーション・レシオ(以下では、IRとも称する。)とは、本来は Treynor と Black<sup>[39]</sup>の評価指標(appraisal ratio)であった。しかし、その後において、実務界には別な考え方が定着した。すなわち、ベンチマーク・トラッキング・エラーの期待値の標準偏差に対する比としての IR へと、定義が「いつの間にか」変更された<sup>[41]</sup>。」

そこで、Treynor と Black の考え方<sup>[42]</sup>について竹原の解説<sup>[38]</sup>を再考する。まず、 $j$ 番目の運用証券の収益率を  $\tilde{R}_j$  と表記し、ベンチマークとする市場の収益率を  $\tilde{R}_B$  と表記し、安全資産の収益率を  $R_F$  と表記するとき、ベンチマーク超過収益率を定量的に示す方法は、シングル・ファクタ・モデルを考えると

$$\begin{aligned}y_j &= \tilde{R}_j - R_F \\y_B &= \tilde{R}_B - R_F \\y_j &= \theta_j + \beta_j y_B\end{aligned}\tag{1.16}$$

である。ここに、 $y_j$  は  $j$  番目の運用証券の超過収益率、 $y_B$  はベンチマーク運用証券の超過収益率、 $\theta_j = \alpha_j + \varepsilon_j$  はレジデュアル・リターン、 $\beta_j$  はベンチマークに対するリスク感応度を示す。また、 $\alpha_j$  は期待レジデュアル・リターン(Appraisal premium)、 $\varepsilon_j$  は残差項である。このとき、 $E(\theta_j) = \alpha_j$  と次の関係式

$$\begin{aligned}E((\theta_j - E(\theta_j))^2) &= E((\theta_j - \alpha_j)^2) = \omega_j^2 \\E((y_B - E(y_B))^2) &= \sigma_B^2 \\E((\theta_j - \alpha_j)(\theta_l - \alpha_l)) &= 0 \\E((\theta_j - \alpha_j)(y_B - E(y_B))) &= 0\end{aligned}\tag{1.17}$$

が成立するものと仮定する<sup>[41][42]</sup>。すなわち、 $j$  番目の証券と  $l$  番目の証券の収益率には無相関な相関関係を想定し、 $j$  番目とベンチマークの収益率にも無相関な相関関係を想定する。このことを表現すると

$$\mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \text{Sym.} \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \omega_N^2 & \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_B^2 \end{bmatrix}\tag{1.18}$$

と表せる<sup>[41]</sup>。仮に、式(1.16)について  $E(\theta_j) = 0$  ならば、資本資産評価モデル(CAMP)<sup>[5]</sup>と同じ意味を有するが、Treynor と Black は式(1.16)について CAPM の成立は言及していない。ここで、証券の超過収益率のベクトル  $\mathbf{y}$  とレジデュアル・リターン・ベクトル  $\boldsymbol{\theta}$  とリスクの感応度を意味するベータ・ベクトルをそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \{y_1, \dots, y_N\}^T \\ \boldsymbol{\theta} &= \{\theta_1, \dots, \theta_N\}^T \\ \boldsymbol{\beta} &= \{\beta_1, \dots, \beta_N\}^T\end{aligned}\tag{1.19}$$

と表記する。また、運用証券への投資比率ベクトルを

$$\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_N\}^T \quad (1.20)$$

を表記し、ベンチマークに対する投資比率を

$$\begin{aligned} w_B &= 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w} \\ \mathbf{1} &= \{1, \dots, 1\}^T \end{aligned} \quad (1.21)$$

とするとき、式(1.16)を用いたアクティブ・ポートフォリオの超過収益率は

$$\begin{aligned} y_A &= \mathbf{y}^T \mathbf{w} + y_B w_B \\ &= (\boldsymbol{\theta} + y_B \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{w} + y_B w_B \\ &= \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{w} + y_B (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{w} + w_B) \end{aligned} \quad (1.22)$$

と表現できる<sup>[41]</sup>。また、式(1.16)より

$$\theta_j = y_j - \beta_j y_B \quad (1.23)$$

は、アクティブ・ファンドが 1 単位の買い持ちとなるロング・ポジションとベンチマークが  $\beta$  単位の空売りとなるショート・ポジションのポートフォリオとして考えることができる<sup>[41]</sup>。ただし、竹原<sup>[41]</sup>は、このときゼロ・コストではないと言及しているので、本論文でも手数料を加えたインフォメーション・レシオについて 4 章で考察している。ところで、式(1.23)はゼロ・ベータ・ポートフォリオ<sup>[43][7][8]</sup>のポジションを構築した際のベンチマークのショート・ポジションを加えたものである<sup>[41]</sup>。

ここで、投資比率ベクトル  $\mathbf{w}_A$  と期待超過収益率  $\boldsymbol{\mu}_A$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_A &= \{\mathbf{w}^T, \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{w} + w_B\}^T \\ \boldsymbol{\mu}_A &= \{\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}), E(y_B)\}^T \end{aligned} \quad (1.24)$$

と定義するとき, 平均分散モデル<sup>[6]</sup>として以下のように考えることができる. ここに,  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$  は期待レジデュアル・リターン・ベクトル,  $E(y_B)$  はベンチマークの期待超過収益率を意味する. すなわち

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \mathbf{w}_A^T \mathbf{V}_A \mathbf{w}_A \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{w}_A = \mu_A \\ & \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w}_A = 1 \end{aligned} \tag{1.25}$$

である. 式(1.25)に Lagrange の未定乗数法<sup>[41][42][44]</sup>を用いて

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}_A^T \mathbf{V}_A \mathbf{w}_A + \lambda (\boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{w}_A - \mu_A) \tag{1.26}$$

と表記するとき,  $\mathbf{w}_A$  と  $\lambda$  に関する一階の導関数

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}_A} &= \mathbf{V}_A \mathbf{w}_A + \lambda \boldsymbol{\mu}_A = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{w}_A - \mu_A = 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

より

$$\mathbf{w}_A = -\lambda \mathbf{V}_A^{-1} \boldsymbol{\mu}_A \tag{1.28}$$

と求まる. したがって,

$$\begin{aligned} \mu_A &= \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{w}_A \\ &= -\lambda \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{V}_A^{-1} \boldsymbol{\mu}_A \\ \sigma_A &= \mathbf{w}_A^T \mathbf{V}_A \mathbf{w}_A \\ &= \lambda^2 \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{V}_A^{-1} \mathbf{V}_A \mathbf{V}_A^{-1} \boldsymbol{\mu}_A \\ &= \lambda^2 \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{V}_A^{-1} \boldsymbol{\mu}_A \end{aligned} \tag{1.29}$$

と表現できるので、シャープ・レシオ<sup>[45][46]</sup>の2乗は

$$\begin{aligned}
 SR_A^2 &= \frac{\mu_A^2}{\sigma_A^2} \\
 &= \frac{(-\lambda \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{V}_A^{-1} \boldsymbol{\mu}_A)^2}{\lambda^2 \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{V}_A^{-1} \boldsymbol{\mu}_A} \\
 &= \boldsymbol{\mu}_A^T \mathbf{V}_A^{-1} \boldsymbol{\mu}_A \\
 &= \left( \frac{E(y_B)}{\sigma_B} \right)^2 + \sum_{j=1}^N \left( \frac{E(\theta_j)}{\omega_j} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{E(y_B)}{\sigma_B} \right)^2 + \sum_{j=1}^N \left( \frac{\alpha_j}{\omega_j} \right)^2
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

が成立する<sup>[41][42]</sup>。このとき、式(1.30)の第1項はベンチマークのシャープ・レシオの2乗、第2項はTreynorとBlackによるappraisal ratioである<sup>[41][42]</sup>。この第2項を竹原<sup>[41]</sup>だけではなく、Goodwinもインフォメーション・レシオの特徴<sup>[47]</sup>の一つとして取扱っている。

ところで、式(1.23)について  $\beta_j = 1$  のとき、RollによるTracking Error Volatility(TEV)は

$$\begin{aligned}
 \text{Tracking Error} &= \theta_j \\
 &= y_j - y_B \\
 &= (\tilde{R}_j - R_F) - (\tilde{R}_B - R_F) \\
 &= \tilde{R}_j - \tilde{R}_B \\
 \text{TEV} &= \text{Var}(\theta_j) \\
 &= \text{Var}(\tilde{R}_j - \tilde{R}_B) \\
 &= \sigma_j^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{jB}\sigma_j\sigma_B
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

が成立する<sup>[48]</sup>。ここに、TEVはトラッキング・エラーの分散、 $\sigma_j^2$ は $j$ 番目のアクティブ運用証券の収益率の分散、 $\sigma_B^2$ はベンチマークの収益率の分散、 $\rho_{jB}$ は証券 $j$ とベンチマークの収益率の相関係数である。このとき、式(1.23)では $\theta_j$ と $y_B$ が無相関であることを想定していたが、式(1.31)では $\theta_j$ と $\tilde{R}_B$ は無相関ではない。この前提のもとに本論文において重要な役割を果たすインフォメーション・レシオは

$$\begin{aligned}
 IR_j &= \frac{E(\tilde{R}_j - \tilde{R}_B)}{\sqrt{V(\tilde{R}_j - \tilde{R}_B)}} \\
 &= \frac{\mu_j - \mu_B}{\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{jB}\sigma_j\sigma_B}} \\
 &= \frac{\alpha_j}{\omega_j}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

として記述を進める<sup>[49]</sup>。特記すべき点として再度記述するが、式(1.32)と式(1.30)の第2項の形式は似ているが、導出は異なる<sup>[41]</sup>。また、式(1.32)のIRは変動係数の逆数でもあるため、分野は異なるがエンジニアリング・サイドの安全評価尺度としても同様な指標が活用されている<sup>[50][51]</sup>。したがって、このような定量的安全性評価尺度と同様に、IRもまたアクティブ運用の成果において市場水準以上か否かの定量評価が行える確率的尺度としての数理的意義について検証しなければならない。

次項1.1.4では、本研究における手数料の枠組みについて説明する。

#### 1.1.4 手数料に関する分類

Haroldが指摘するように取引コストは早くからマーケットにおいて重要であった<sup>[52]</sup>。アクティブ運用に関する取引コストとは、最適ポートフォリオを構築するために必要なリバランスの対価を目指すことを意味する<sup>[18]</sup>。一般的に取引コストは事後的に計測されるコストで表1.1のような分類がなされている。

したがって、表1.1に基づく総取引コストは

$$\begin{aligned}
 \text{取引コスト(TC)} &= \text{手数料} \\
 &+ \text{ビッド・アスク・スプレッド} \\
 &+ \text{マーケット・インパクト} \\
 &+ \text{機会コスト}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

と定義できる<sup>[18]</sup>。表1.1と式(1.33)において、手数料とビット・アスク・スプレッドは目に見えるコストである。Fabozziら<sup>[53]</sup>もマーケット・インパクトや機会コストは見えないコストではあるが取引の中で重要視している。式(1.33)を考慮するとき、インフォメーション・レシオ(IR)を式(1.32)の $\alpha$ とトラッキング・エラーの標準偏差TE( $=\omega$ )で表わすのと同

様に、取引コストを導入していない場合と導入した場合の付加価値は

$$VA = \alpha - \lambda TE^2 \quad (TC \text{ を導入しない場合}) \quad (1.34)$$

$$VA = \alpha - \lambda TE^2 - TC \quad (TC \text{ を導入する場合})$$

と定義できる<sup>[16][18]</sup>.

表 1.1 IS(Implementation Shortfall)法による取引コストの分解<sup>[18]</sup>

分類整理 No.	取引コストの構成要素	内 容
1	手数料	取引金額に応じて支払う固定コスト
2	ビッド・アスク・スプレッド	マーケット・メイカーが提示する買い気配と売り気配の差。最も有利な気配で取引する場合に支払うコスト
3	マーケット・インパクト	最も有利な気配値で取引できるサイズ以上の数量を取引する場合に見込まれる追加的コスト
4	機会コスト	未約定となった注文から生じるコスト

さらに、式(1.34)は IR と TE を用いて

$$VA = IR \cdot TE - \lambda TE^2 \quad (TC \text{ を導入しない場合}) \quad (1.35)$$

$$VA = IR \cdot TE - \lambda TE^2 - TC \quad (TC \text{ を導入する場合})$$

と定義しなおすことができる<sup>[16][17]</sup>。このため、TE について一階の導関数を用いると最適付加価値の値を求めることができる。

一方で、取引コストとしてではなく、手数料の観点から整理するとき、多用な手数料が考えられる<sup>[15]</sup>。たとえば、投資信託の費用<sup>[54]</sup>には、

- ・購入時には、販売時手数料
- ・保有時には、信託報酬、監査報酬、
- ・株式の売買時には、売買委託手数料、
- ・換金時には、信託財産留保額

が考えられる。この他にも、Fabozzi ら<sup>[55][56]</sup>が指摘するように税金などパフォーマンスを引き下げるコストと同じ要因は存在する。

そこで、保有時においてベンチマークよりも追加的に支払う手数料を  $\delta$  としたとき、手数料を考慮したアクティブ運用のポートフォリオにおける収益率からベンチマーク運用のポートフォリオにおける収益率を差し引く次のモデルを設定する。すなわち

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{R}}) &= \tilde{R}_A - \tilde{R}_B - \delta \\ \tilde{\mathbf{R}} &= \{\tilde{R}_A, \tilde{R}_B\}^T \end{aligned} \quad (1.36)$$

である。この式(1.36)は、 $g(\tilde{\mathbf{R}}) > 0$  のとき、手数料を含むアクティブ運用成果はベンチマークを上回り、 $g(\tilde{\mathbf{R}}) < 0$  のとき、手数料を含むアクティブ運用成果はベンチマークを下回ることを意味する。このとき、上記の費用項目のうち成果に対する費用項目は、式(1.36)の  $\tilde{R}_A$  に剩余算として費用項目を考えることも想定できるが、本研究ではあえてモデルの単純化のために考慮しなかった。 $\delta$  として表される項目のみが市場に対して、どのように  $g(\tilde{\mathbf{R}})$  に影響するかに注視して研究を行っている。

ところで、式(1.36)のようにモデルを考えると、アクティブ運用もまたマーケットを構成する証券であるため、平均的に考えるならば、手数料の分だけパフォーマンスは悪化することが予測できる。このため

$$\begin{aligned} E[g(\tilde{\mathbf{R}})] &= E(\tilde{R}_A) - E(\tilde{R}_B) - \delta \\ &= \mu_A - \mu_B - \delta \\ &= \alpha - \delta \\ &= -\delta \end{aligned} \quad (1.37)$$

と定義できる。ここに、 $\mu_A$  はアクティブ運用の期待収益率、 $\mu_B$  はベンチマーク運用の期待収益率である。ここでは、市場は効率的だと考えて、 $E(\tilde{R}_A) - E(\tilde{R}_B) = 0$  が成立する

ものと仮定している。このことは、一般にアクティブ運用がベンチマーク運用を上回る成果を残すことは、平均的にみると半分程度である。また、手数料を考慮するとおよそ 70%から 80%が負け越していると考えられていることと<sup>[57]</sup>、1.1 で引用した Ellis の著書「敗者のゲーム」<sup>[15]</sup>に記されるとおり、75%のアクティブ運用が市場水準を下回ると述べたことも整合的である。本研究では、ファイナンスにおいて手数料の影響を明らかにすることが目的ではあるが、式(1.37)の示す構造が簡易的であるので、研究成果を手数料とアクティブ運用評価の基礎的研究に位置付けて数理的導出を行う。すなわち、その導出においてモデルを単純化して、手数料を考慮したコイン投げの繰り返しゲームを想定する。

## 1.2 本論文の目的

1.1 では、本研究における歴史的背景のほかに、

- (1) 評価のための効用関数を考慮したべき関数、
- (2) アクティブ運用の評価指標であるインフォメーション・レシオ、
- (3) アクティブ運用における手数料

の 3 つの視点について簡単に説明した。これら 3 つの視点により、本節では本論文の目的を下記のように示す。

今日でも市場は効率的であるかについて議論が分かれているが、本研究ではアクティブ運用や行動ファイナンスにも言及しているにもかかわらず、市場が効率的であると想定して理論の展開を実施している。もちろん、実際に実証的研究で議論が分かれているので、このことに新しい立場や事実を提案するものではない。すなわち、仮に市場が効率的であるならば、1.1.3 の式(1.33)で示した手数料の枠組みのとおりアクティブ運用は市場水準であるベンチマーク運用を継続的に上回ることを目指すことは、ゲーミング(ギャンブリングや賭けと同意)の性質があるものと考えられるので、その立場から理論的な検証を行っている。

そこで、本研究では以下の 2 つの着眼点を考えて研究を進めることとする。

1 つ目の着眼点は、現代ポートフォリオ理論の原点に立ち戻って理論を数理的に再考することと、IT 技術の進歩により実際に簡単なデータ解析を実行することである。現代ポートフォリオ理論が誕生した 1950 年代から 1970 年代ごろまでは、一般的にファイナンスのデータ分析は機関投資家や研究者などの専門家の領域であったが、Big Data が注目される今日の分析<sup>[58]</sup>では一般投資家でもインターネットを活用してかつての大規模クラスに相当するデータ分析が容易に行える時代となった。たとえば、次のような利用の方法が一例と

して考えられる。

- ・インターネット上に長期にわたる膨大な株価データを掲載する Yahoo! ファイナンスから、正確に大量のデータをダウンロードできる。
- ・表計算ソフトを代表する Microsoft Excel でも大量のデータ解析が可能であり、プログラミングやソルバーを活用できる。
- ・ホームユースのデータベースソフトを代表する Microsoft Access でもデータベースの SQL 操作が可能であり、プログラミングや Excel との連携操作が可能である。

このような利点を考えると、一般投資家でもインターネットに公開される大量の株価データをホームユースのデータベースにより操作でき、現代ポートフォリオ理論に基づくファイナンスの評価や分析のために表計算ソフトを容易に活用することができる。したがって、東京証券取引所等に公開される多数の証券について長期にわたる株価データを入手し、現代ポートフォリオ理論の再考のための数値実験の実施も可能である。本研究では、現代の IT の進歩にも着目して、現代ポートフォリオ理論を数理的立場からと数値実験の立場から両者の特徴や不確実性について再考する<sup>[59][60]</sup>。その一例として、平均分散モデルと資本資産評価モデルについて簡易なケース・スタディを設定しその数値実験にもとづき市場の効率性の特徴や不確実性について考察を試みている。

第 2 の着眼点は、市場が効率的である前提のもとで、1.1.3 で枠組みを設定した手数料を考慮する。このことにより、アクティブ運用を想定した市場において投資家を意味するプレイヤーは公平なゲームにおける勝者や敗者として取扱う。そして、勝者と敗者に加えてゲームを開催して手数料をプレイヤーから参加代として受取る金融機関(ここでは、ゲーミング企業と同意とする)を加えた 3 者が参加するマイナス・サム・ゲームを考える。この際に 1.1 において説明してきた(1)から(3)の 3 つの視点で数理的意義について導出を試みることが目的である。そこで、ファイナンスに限定せず、この条件のもとで勝者が得ることのできる利得の最大化について着目し、得られた数理的根拠をファイナンスに適用することを目指す方針で市場をコイン投げの繰り返しゲームとして考察している。まず、その特徴のモデル化のためべき関数を設定した回帰分析を実施し、その傾向は式(1.15)のようになるべき関数で示せることを明らかにしている。その結果、手数料との関係式として勝者とゲーミング企業の均衡関係において  $\lambda = 0.612$  という数値をもとに成立することを明らかにしている<sup>[61]</sup>。そこで、得られた数値  $\lambda$  の数理的根拠の導出を行い<sup>[62]</sup>、この数値がアクティブ運用のパフォーマンス評価において、手数料との関係に役立つことを付加価値のモ

ルに適用して考察を試みている<sup>[63]</sup>. また, 手数料と取引コストの意味は明確な違いがあることは1.1.3でも示しているので, 本研究では本論文の中では手数料は取引コストと同義としてインフォメーション・レシオの付加価値を考察している. したがって, 本研究では目的とする手数料の影響について, 取引コストの中の手数料に注目し, 保有期間とする一定期間に定期的に支払うコストの影響を調べた研究成果をまとめている. 加えて, インフォメーション・レシオの活用において, アクティブ運用の評価のための確率的尺度としてインフォメーション・レシオが算出できるように, 拡張1次近似2次モーメント法の改良を提案し, 手数料も考慮できることを示している<sup>[64]</sup>.

以上の2つの着眼点にもとづき, 手数料を含めたアクティブ運用成果の定量的な評価法として

(A) アクティブ運用に対する現代ポートフォリオ理論の特徴や不確実性の再考

(B) 効率的な市場におけるアクティブ運用の手数料の役割とその特徴

の二つの立場から, 次節1.3では本論文を構成している.

### 1.3 本論文の構成

1.2では3つの視点と2つの着眼点を示した. このことを考慮した本論文の構成図は, 図1.4に示すとおりである.

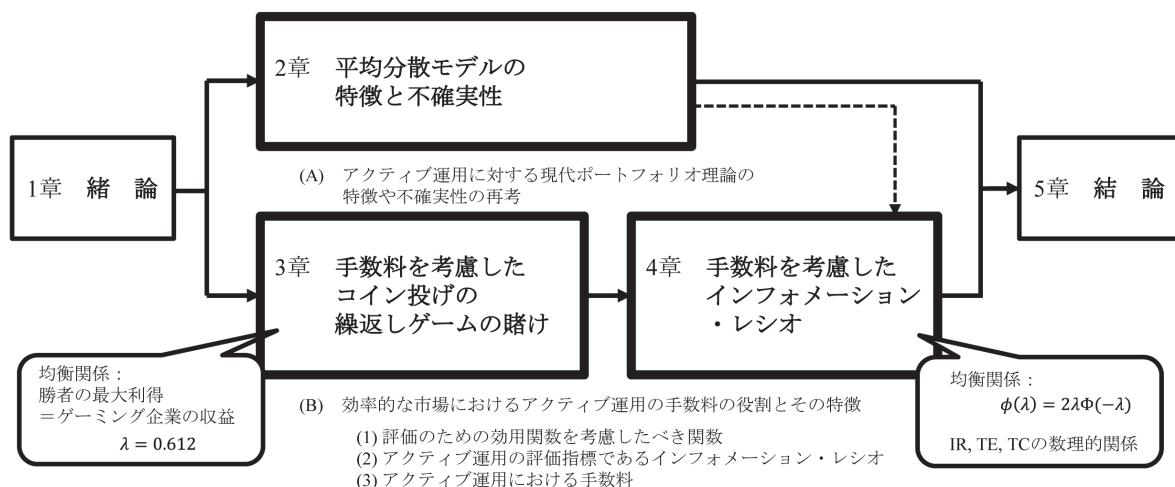


図1.4 本論文の構成図

2章では、平均分散モデルに関する現代ポートフォリオ理論の特徴や不確実性の再考を試みる。すなわち、平均分散モデルの数理的特徴のみならず、Big Data などデータ分析が注目され、その活用目的について重要度が増している<sup>[58]</sup>ことから、インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発を行っている<sup>[59]</sup>。そして、その活用として平均分散モデルと資本資産評価モデルへの応用を行っている。具体的には、Yahoo! ファイナンス<sup>[65]</sup>からデータをダウンロードしてデータベースを構築し<sup>[59]</sup>、1990年1月から2009年12月までの20年間の長期投資<sup>[66]</sup>に、安全資産利子率には長期国債利回り<sup>[67]</sup>を用いたケース・スタディとして平均分散モデルのデータ分析を行っている<sup>[59][60]</sup>。このとき、ケース・スタディでは手数料が考慮されない場合について数値実験を実施している。その数値実験の結果を用いて、アクティブ運用がベンチマーク運用を上回るか否かを確認している<sup>[60]</sup>。また、この他に計量期間中のパフォーマンス評価について、算術平均と対数平均モデルの対比、計量期間の統計量や時系列の分析、同時分布について考察を行っている<sup>[60]</sup>。以上をもとに、平均分散モデルの理論の整合性としての特徴や不確実性を再考した後、計量期間のデータ分析で明らかになったことをまとめている。

3章では、アクティブ運用についてゲーミング(賭けやギャンブリングと同意)<sup>[68][69][70]</sup>を想定して市場をコイン投げに置き換えてモデル化しながら手数料の影響を調べている<sup>[61]</sup>。すなわち、独立試行によるコイン投げの繰返しゲームに、手数料を得るゲーミング企業の収益と、多数のプレイヤーのうち、勝者の獲得賞金や、敗者の損失の傾向を考察している。特に、勝者の獲得賞金総額の最大化の特性を、試行回数との関係として取扱っている。その結果、勝者の満足を考慮したゲームの停止試行回数を、決定する意思決定基準モデルを提案するために、べき乗回帰分析を用いている。また、勝者のリスク回避と敗者のリスク愛好的傾向について、べき関数の視覚化の視点から鏡映効果<sup>[21]</sup>のモデル化を試みている。仮に市場が効率的だと想定すると、アクティブ運用におけるパフォーマンスの期待値はゼロである。この状態に手数料を加えると公平なゲームがマイナス・サム・ゲームになる。本章では、マーケットをコイン投げの繰り返しゲームに例えて分析を試みている。このとき、手数料の分だけ、超過収益率は負である。それでも元本以上を得る勝者が一定以上の割合で存在することを想定し、その特徴を数理的に考察する。したがって、本研究は2章で取扱った株価に関するファイナンスの研究ではあるが、3章はファイナンスに限定せず、ゲーミングの数理的特徴としても体系化できるように、平易にコイン投げの数理的現象として記述している。

4章では、3章で明らかになった数理的現象の数値の数理的根拠を調べて、アクティブ運用への適用を試みている。すなわち、3章の後編として4章は記述しているが、アクティブ運用のパフォーマンス評価において重要なインフォメーション・レシオへの適用を実施しながら考察を試みている。まず、アクティブ運用の評価のために、インフォメーション・レシオがどの程度高いかを判断する場合にベンチマークに対する超過収益率の説明式をいくつか設定している。これらの不变性の欠如の問題にそれぞれの確率変数が正規分布に従う場合として相関関係を無相関化した標準正規分布に従う空間で評価するならば、統計学的特性が幾何学的特性として評価が可能となり役立つことを考察している<sup>[62]</sup>。続いて、3章で明らかにした勝者とゲーミング企業の均衡関係<sup>[61]</sup>において求まった係数値の数理的根拠を正規分布の片側確率点と確率密度関数、累積分布関数を用いて明らかにしている<sup>[64]</sup>。この結果をインフォメーション・レシオで表現する付加価値に適用し、手数料を含む場合のインフォメーション・レシオがどのように定量化できるかをべき関数を用いてモデル化している<sup>[63]</sup>。モデル化されたインフォメーション・レシオと手数料の関係よりアクティブ運用における均衡関係について考察をまとめている。

5章では、本研究の結論として得られた成果を総括している。

以上のように、「手数料を考慮した株式ポートフォリオにおけるアクティブ運用の不確実性」を提案し、数値解析や数理的根拠の導出により有効性を実証している。

## 2章 平均分散モデルの特徴と不確実性<sup>1,2</sup>

### 2.1 緒 言

平均分散モデルは、現代ポートフォリオ理論<sup>[1]</sup>もしくはアセット・アロケーション<sup>[2]</sup>の分散投資の観点から最適資産配分<sup>[94]</sup>による資産運用の中心的役割を果たし、投資意思決定において極めて重要なモデルである<sup>[1][2][94]</sup>。また、このため、平均分散モデル<sup>[74][28][75]</sup>は平均分散分析<sup>[8][17]</sup>、平均分散ポートフォリオ<sup>[72][73]</sup>、ポートフォリオ理論<sup>[80][11]</sup>、ポートフォリオ分析<sup>[76]</sup>、ポートフォリオモデル<sup>[78]</sup>、マルコビツツモデル<sup>[10]</sup>、平均分散アプローチ<sup>[94]</sup>、平均分散法<sup>[2]</sup>など多くの名称としても親しまれ用いられている。そこで、複数の証券に投資したときの資産構成をポートフォリオと呼び<sup>[11]</sup>、本章での投資比率に関する表記は、ポートフォリオとして表記している。また、手法やモデリングについて基本的には平均分散モデルと表記して、数理モデルの再考とデータ分析を実施している。

一方で、Big Dataなどのデータ分析が注目されており、その活用目的について重要度が増している<sup>[58]</sup>。本章では、インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発を行い<sup>[59]</sup>、その活用として平均分散モデルと資本資産評価モデルへの応用を行っている。具体的には、Yahoo!ファイナンス<sup>[65]</sup>から株価情報データをダウンロードしてデータベースを構築し<sup>[59]</sup>、1990年1月から2009年12月までの20年間の長期投資<sup>[66]</sup>に、安全資産利子率には長期国債利回り<sup>[67]</sup>を用いたケーススタディを設定し平均分散モデルのデータ分析を行っている。

このため、下記のとおり

- ・平均分散モデルの数理的傾向に関するレビュー
- ・計量期間中のパフォーマンス評価
- ・算術平均と対数平均モデルの対比
- ・計量期間の統計量の分析

<sup>1</sup> 出典： 中西真悟，“インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発とその活用 —平均分散モデルと資本資産価格モデルへの応用—”，大阪工業大学紀要，Vol. 55, No. 1, pp.11-24 (2010年10月)

<sup>2</sup> 出典： 中西真悟，“平均分散モデルの特徴と不確実性に関する考察 — 数理モデルと Microsoft Excel 活用によるデータ分析 —”，大阪工業大学紀要，Vol. 59, No. 2, pp.17-46, (2015年1月10日発行予定, 掲載決定)

- ・計量期間の時系列の分析
- ・同時分布としての分析

について考察を行っている。また、活用するデータは、Yahoo!ファイナンスからダウンロードした後<sup>[59]</sup>のデータベースに含まれる東証株価 2153 証券の株価上昇率上位 50 証券中の茶色実線で描かれるシャープ・レシオの上位 10 証券によるポートフォリオを用いてデータ分析を進める。

以上をもとに、平均分散モデルの理論の整合性や不確実性を再考した後、計量期間のデータ分析で明らかになったことをまとめると。

## 2.2 モデリングのための統計量の表記方法

### 2.2.1 平均の表記

時点  $t$  での証券  $i (= 1, \dots, n)$  のネットの資産収益率(騰落率)は

$$R_{i_t} = \frac{S_{i_t} + D_{i_t} - S_{i_{t-1}}}{S_{i_{t-1}}} = \frac{S_{i_t} + D_{i_t}}{S_{i_{t-1}}} - 1 \quad (2.1)$$

である<sup>[28][7][8]</sup>。ここに、 $S_{i_t}$  は時点  $t$  における  $i$  番目の証券価格、 $D_{i_t}$  は時点  $t$  における  $i$  番目の証券の配当支払い価格である。また、時点  $t$  での証券  $i$  のグロスの資産収益率は、ネットの資産収益率に 1 を加えたものなので、 $1 + R_{i_t}$  である。式(2.1)の時点  $t - k$  から時点  $t$  期までの直近  $k$  期間の資産の収益率において配当支払いを考慮しない場合には

$$\begin{aligned} & 1 + R_{i_t}(k) \\ &= (1 + R_{i_t})(1 + R_{i_{t-1}}) \cdots (1 + R_{i_{t-k+1}}) \\ &= \left( \frac{S_{i_t}}{S_{i_{t-1}}} \right) \left( \frac{S_{i_{t-1}}}{S_{i_{t-2}}} \right) \cdots \left( \frac{S_{i_{t-k+1}}}{S_{i_{t-k}}} \right) \\ &= \frac{S_{i_t}}{S_{i_{t-k}}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

と表記できる<sup>[7][8]</sup>。式(2.2)をもとに基準時点からの資産の上昇率を見積もることができる。証券  $i$  のこの期間中の資産収益率を単位期間当たりのネット資産収益率  $E(R_{i_t})$  に換算す

るために

$$\hat{\mu}_{Geo_i}(k) = E(R_{i_t}) = \left[ \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{i_{t-j}}) \right]^{\frac{1}{k}} - 1 \quad (2.3)$$

と、幾何平均を用いて表すことができる<sup>[7][8]</sup>。ファイナンスでは、算術平均よりも運用パフォーマンスにおいてこの幾何平均を用いることが望ましいとされている。ファンド・マネジャーの評価においても重要である。

しかしながら、一般には式(2.3)について  $R_{i_t} = 0$  近傍における一次近似式

$$\hat{\mu}_i(k) = E(R_{i_t}) \approx \bar{R}_{i_t} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{i_{t-j}} \quad (2.4)$$

により算術平均の收益率を実用することが多いようである<sup>[7][8]</sup>。式(2.3)と式(2.4)の値が近い場合には問題がないが、高次の項を無視できない場合には差異が問題となり、式(2.4)による算出の近似では十分ではない。

一方で、式(2.3)のような幾何平均を計算することが容易ではないので、複利收益率による計算方法がある。この考え方は近似ではなく資産の收益率のモデル化において重要な。資産の連続複利の收益率の対数(騰落率)は、グロスの資産收益率  $(1 + R_{i_t})$  の自然対数を用いて

$$r_{i_t} \equiv \log(1 + R_{i_t}) = \log\left(\frac{S_{i_t}}{S_{i_{t-1}}}\right) \quad (2.5)$$

と表記できる<sup>[28][7][8]</sup>。したがって、多期間の連続複利收益率は

$$\begin{aligned}
r_{i_t}(k) &= \log(1 + R_{i_t}(k)) \\
&= \log\left(\prod_{j=0}^{k-1}(1 + R_{i_{t-j}})\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \log(1 + R_{i_{t-j}}) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} r_{i_{t-j}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

と和の形式で表すことができる。

ここで、時点  $t$  のポートフォリオにおいて投資比率  $w_i (i = 1, \dots, n)$ 、すなわち投資比率ベクトル

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\
\mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\
\mathbf{1}^T \mathbf{w} &= 1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

と表すか、もしくは安全資産利子率  $R_F$  の投資比率  $w_F$  も投資に含めて

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\
\mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\
\mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F &= 1
\end{aligned} \tag{2.8}$$

による資産形成を考える。このとき、ポートフォリオの収益率

$$\begin{aligned}
r_{P_t} &= \sum_{i=1}^n w_i r_{i_t} = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_t \\
\therefore \mathbf{r}_t &= \{r_{1_t}, r_{2_t}, \dots, r_{n_t}\}^T
\end{aligned} \tag{2.9}$$

は厳密には対数の和ではないことに注意を要する。この場合、 $R_{i_t} = 0$  近傍で対数の一次

近似を用いて

$$\begin{aligned}
 r_{P_t} &= \log(1 + R_{P_t}) \\
 &= \log\left(1 + \sum_{i=1}^n w_i R_{i_t}\right) \\
 &\cong \sum_{i=1}^n w_i R_{i_t} \\
 &= \mathbf{w}^T \mathbf{R}_t \\
 \therefore \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_t &= \{R_{1_t}, R_{2_t}, \dots, R_{n_t}\}^T
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

と表すことができる。本章では後ほど2.8.7のデータ分析において式(2.9)と式(2.10)についてパフォーマンスの違いを考察している。

したがって、対数平均による証券  $i$  の期待資産収益率を

$$E(r_{i_t}) = \bar{r}_{i_t} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} r_{i_{t-j}} \tag{2.11}$$

と表記し、算術平均による証券  $i$  の期待資産収益率を

$$E(R_{i_t}) = \bar{R}_{i_t} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{i_{t-j}} \tag{2.12}$$

と表記する<sup>[7][8]</sup>。ただし、次項以降において平均の表記を用いる場合には、説明を簡略化のため、特に言及しない限り対数平均でも  $E(R_i)$  を用いることとする。そして、その平均ベクトルを

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \{E(R_1), \dots, E(R_n)\}^T \tag{2.13}$$

と表記し<sup>[7][8]</sup>、次項の統計量と併せて平均分散モデルを記述する。

### 2.2.2 高次統計量の表記

本項では、平均だけではなく、本章で用いる高次の統計量についても表記方法を示す。たとえば、分散は

$$\begin{aligned}
 \sigma_{i_t}^2 &= \text{Var}(R_{i_t}) \\
 &= E[(R_{i_t} - E(R_{i_t}))^2] \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

と表記する。このとき、データ分析では平均も未知のため、 $k-1$ で割ることが望ましいのだが、共分散や相関係数には $k$ で割る Microsoft Excel(以下、Excelと称する)の標準関数を活用し、Microsoft Access(以下、Accessと称する)のデータベース操作<sup>[59]</sup>にも都合が良いので、式(2.14)のように示すこととする。

このため、後ほどの2.8.8で示すExcelのユーザ定義関数として歪度

$$\begin{aligned}
 \text{Skew}(R_{i_t}) &= E\left[\frac{(R_{i_t} - E(R_{i_t}))^3}{\sigma_{i_t}^3}\right] \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))^3}{\sigma_{i_t}^3}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

や、超過尖度

$$\begin{aligned}
 \text{Kurt}(R_{i_t}) &= E\left[\frac{(R_{i_t} - E(R_{i_t}))^4}{\sigma_{i_t}^4}\right] - 3 \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))^4}{\sigma_{i_t}^4} - 3
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

の表記も $k$ で割る方法を採用する<sup>[7][8]</sup>。ただし、歪度と超過尖度を推定するExcelの標準

関数の定義式<sup>[82]</sup>とは異なるのでデータ分析の際に、この場合の差異についても後ほどの2.8.8で改めて考察している。

また、共分散は

$$\begin{aligned}
 \rho_{il}\sigma_i\sigma_l &= \text{Cov}(R_{i_t}, R_{l_t}) \\
 &= E[(R_{i_t} - E(R_{i_t}))(R_{l_t} - E(R_{l_t}))] \\
 &= E[R_{i_t}R_{l_t}] - E(R_{i_t})E(R_{l_t}) \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))(R_{l_{t-j}} - E(R_{l_t})) \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

と表記する。式(2.17)の中で用いた  $\rho_{il}$  は収益率  $R_{i_t}$  と収益率  $R_{l_t}$  の相関係数であり

$$\begin{aligned}
 \rho_{il} &= \text{Corr}(R_{i_t}, R_{l_t}) \\
 &= \frac{\text{Cov}(R_{i_t}, R_{l_t})}{\sigma_{i_t}\sigma_{l_t}} \\
 &= E\left[\frac{(R_{i_t} - E(R_{i_t}))}{\sigma_{i_t}} \frac{(R_{l_t} - E(R_{l_t}))}{\sigma_{l_t}}\right] \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))}{\sigma_{i_t}} \frac{(R_{l_{t-j}} - E(R_{l_t}))}{\sigma_{l_t}} \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

と表記する<sup>[7][8]</sup>。

以上をもとに、収益率  $\mathbf{R}$  の分散共分散行列は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= E[(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})^T] \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \text{Sym.} \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \cdots & \rho_{n-1n}\sigma_{n-1}\sigma_n & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

と表記する<sup>[73][7][8]</sup>.

### 2.2.3 時系列統計量の表記と検定

本項では、本章で用いる時系列に関する統計量の表記方法を示す。 $k$  次の自己共分散  $\gamma_i(k)$  と自己相関係数  $\rho_i(k)$  は以下のように表記する。すなわち

$$\begin{aligned}\gamma_i(k) &\equiv E[(R_{i_t} - E(R_{i_T}))(R_{i_{t+k}} - E(R_{i_T}))] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (R_{i_t} - \bar{R}_{i_T})(R_{i_{t+k}} - \bar{R}_{i_T})\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\rho_i(k) &\equiv \frac{\gamma_i(k)}{\gamma_i(0)} \\ &= \frac{E[(R_{i_t} - E(R_{i_T}))(R_{i_{t+k}} - E(R_{i_T}))]}{E[(R_{i_t} - E(R_{i_T}))^2]} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (R_{i_t} - \bar{R}_{i_T})(R_{i_{t+k}} - \bar{R}_{i_T})}{\sum_{t=1}^T (R_{i_t} - \bar{R}_{i_T})^2}\end{aligned}\quad (2.21)$$

である<sup>[7][8][76]</sup>。ただし、

$$\bar{R}_{i_T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i_t} \quad (2.22)$$

である。ここで、自己相関係数の検定として

$$\begin{cases} H_0: \rho_i(k) = 0 \\ H_1: \rho_i(k) \neq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

を考える。すなわち、Ljung -Box 統計量

$$Q_{i_m} \equiv T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\rho_i^2(k)}{T-k} \sim \chi^2(k) \quad (2.24)$$

を用いて検定する<sup>[7][8][76]</sup>.

### 2.3. モデリングのための数理計画法による考え方

#### 2.3.1 等式制約付きの二次計画法の解法

数理計画法における二次計画法の解法として、下記のモデル

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \mathbf{c}^T \mathbf{w} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.25}$$

を考える<sup>[82]</sup>. ここに、 $\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}$  は投資比率ベクトル  $\mathbf{w}$  と  $n$  個の証券の収益率ベクトル  $\mathbf{R}$  から構成されるポートフォリオの分散である. この表記は、本章では重要である. このときの Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \mathbf{c}^T \mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{b}) \tag{2.26}$$

である. 式(2.26)について一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} + \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.27}$$

もしくは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

である. ゆえに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} &= -(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{c} + \mathbf{b}) \\ \mathbf{w} &= -\mathbf{V}^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\right)\mathbf{c} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.29)$$

と求まる<sup>[82]</sup>. ただし、ここで  $\mathbf{I}$  は単位行列である.

### 2.3.2 等式制約付きの一次項のない二次計画法の解法

2.3.1 では一次項を含む二次計画法としての解法を確認したが、一次項のない場合の下記モデル

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}\end{aligned}\quad (2.30)$$

を考える<sup>[82]</sup>. このときの Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{b}) \quad (2.31)$$

である. 式(2.31)について一階の導関数より

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V}\mathbf{w} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (2.32)$$

もしくは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

である<sup>[6]</sup>. ゆえに

$$\begin{aligned}\lambda &= -(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}\tag{2.34}$$

と求まる<sup>[82]</sup>. また, 式(2.25)と式(2.30)のモデルに投資比率の制約条件  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  を追加して空売りを考慮しない場合が, Markowitz によりモデリングされている<sup>[6]</sup>. 2.4 では, 本章の平均分散モデルは, 2.3.1 もしくは 2.3.2 の解法が基本となり, 空売りを認める場合のモデルについて考察している. この解の形式は 2.4 の説明において重要である.

## 2.4. 株式の空売りを認める平均分散モデル

### 2.4.1 安全資産利子率を含まない空売りを認めるポートフォリオの平均分散モデル

まず, 一般的な解法で表すポートフォリオをポートフォリオ  $P$  と呼ぶことにする. すなわち, 式(2.30)を参考に

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} \\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{w} = \mu_P \\ &\quad \mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1\end{aligned}\tag{2.35}$$

と表記する<sup>[73][10][74][83][89][44]</sup>. あるいは

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} \\ &\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mu_P \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.36}$$

と表記することも可能なので, 式(2.36)を用いて考察を進める. ここに,  $\mathbf{w}$  は  $n$  個の証券からなる投資比率ベクトルである.  $\mu_P$  は目標として設定する期待收益率である.  $\mathbf{1}$  は  $n$  個の要素がすべて 1 であるベクトルである. さらに,  $\boldsymbol{\mu}$  は  $n$  個の証券の期待收益率のベクトル,  $\mathbf{V}$  は  $n$  個の証券の收益率の分散共分散行列である. このため,  $\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w}$  はポートフォリオの收益率の分散,  $\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{w}$  はポートフォリオの期待收益率である. このとき, 式(2.36)の Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{Bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \quad (2.37)$$

である。この一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} + [\boldsymbol{\mu} \ \mathbf{1}] \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{Bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= - \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} [\boldsymbol{\mu} \ \mathbf{1}] \right)^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{w} &= [\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \ \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

と求まる<sup>[89][91]</sup>。ここで

$$\begin{aligned} a &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ b &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ c &= \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ D &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} = ac - b^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

とおくとき

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_P &= \frac{1}{D} ((c\mu_P - b)\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} + (a - b\mu_P)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}) \\
&= \frac{1}{D} \left( (c\mu_P - b)\mathbf{z}_{\mu} + (a - b\mu_P)\mathbf{z}_1 \right) \\
\lambda_P &= \frac{1}{D} \left\{ c\mu_P - b \right\} \\
\sigma_P^2 &= \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} = \frac{1}{D} (c\mu_P^2 - 2b\mu_P + a) \\
&= \frac{1}{c} + \frac{c}{D} \left( \mu_P - \frac{b}{c} \right)^2 \\
&= \sigma_c^2 + \frac{c}{D} \left( \mu_P - \frac{b}{c} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

と導出できる<sup>[44]</sup>. ただし、ここで  $\det[\cdot]$  は  $\cdot$  の行列式を意味する. このとき、 $\mathbf{z}_{\mu} = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ ,  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}$  と表記して数式の表記を整理している. また、 $\sigma_c^2$  は次項で記述する最小分散ポートフォリオの分散である.

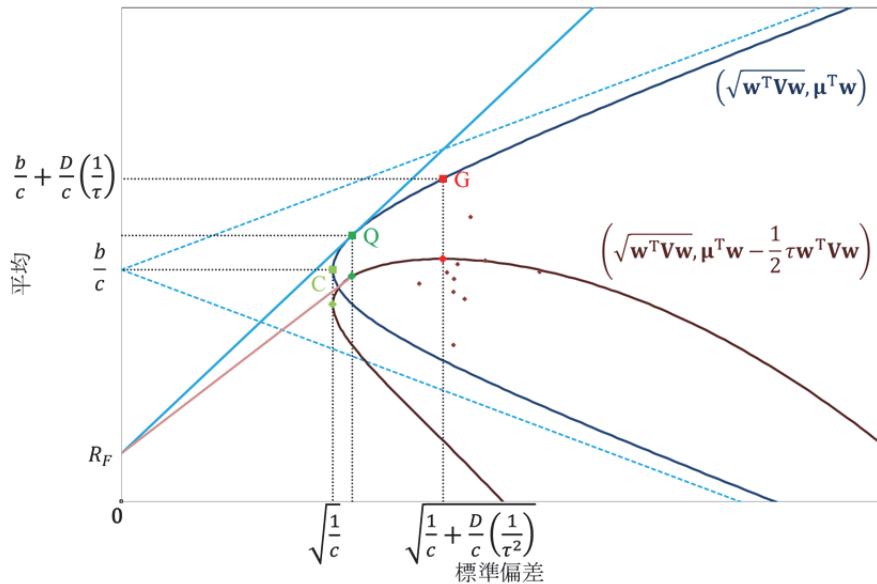


図 2.1 空売りを認める平均分散モデルの数理的特性の視覚化<sup>[71][72][10][5][1][95][44]</sup>

したがって、式(2.41)の  $\sigma_P^2$  について平方完成により双曲線<sup>[97]</sup>

$$\frac{\sigma_P^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2} - \frac{\left(\mu_P - \frac{b}{c}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{D}}{c}\right)^2} = 1 \tag{2.42}$$

が示され<sup>[44]</sup>, ポートフォリオの目標とする期待收益率  $\mu_p$  と標準偏差  $\sigma_p$  の関係は, 図 2.1 の青色実線による曲線のように描くことができる<sup>[73][10]</sup>. このとき, 水色破線は双曲線の漸近線を示している. ただし, 点 Q が点 C の上方に位置するように算出するためには,  $b/c > R_F$  を満たさなければならない<sup>[10]</sup>. このことは後ほど 2.8.6 で考察する.

### 2.4.2 最小分散ポートフォリオのための平均分散モデルの解法

ポートフォリオの中でも分散が最小となるポートフォリオを本章では特にポートフォリオ C と呼ぶことにする. 図 2.1 では点 C を意味するポートフォリオである. すなわち, 式(2.30)を参考に

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \tag{2.43}$$

である. このときの Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda (\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \tag{2.44}$$

なので, 一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \end{aligned} \tag{2.45}$$

となる. ゆえに

$$\begin{aligned}
 \lambda_C &= -\frac{1}{(\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1})} \\
 &= -\frac{1}{c} \\
 \mathbf{w}_C &= \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} \\
 &= \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{c} \\
 &= \frac{\mathbf{z}_1}{c} \\
 &= \frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{1}^T \mathbf{z}_1} \\
 \sigma_C^2 &= \mathbf{w}_C^T \mathbf{V} \mathbf{w}_C \\
 &= \frac{1}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} \\
 &= \frac{1}{c} \\
 \mu_C &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}_C \\
 &= \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} \\
 &= \frac{b}{c}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

と導出できる<sup>[7][8][55]</sup>. この式(2.46)に、式(2.41)の  $\mu_P = b/c$  を代入すると、 $\sigma_p^2 = \sigma_C^2$  となり完全に一致することがわかる. また、式(2.46)から  $\mathbf{w}_C$  は  $\mathbf{z}_1 / \mathbf{1}^T \mathbf{z}_1$  の比率を意味していることも理解できる. 以上より、ポートフォリオ C は図 2.1 の点 C のようにリスクを最小にしていることがわかる.

### 2.4.3 期待効用最大化ポートフォリオの平均分散モデルの解法(リスク調整ポートフォリオ)

Arrow-Pratt 型リスク回避度  $\tau$ <sup>[55]</sup>を考慮した期待効用ポートフォリオを考察する. このときのポートフォリオをポートフォリオ G と呼ぶことにする. 図 2.1 と図 2.2 では点 G を意味するポートフォリオである. すなわち、式(2.25)を参考に

$$\begin{aligned}
 \text{maximize} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\
 \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

である<sup>[71][72][55][84]</sup>. ここに, 目的関数  $\mu^T \mathbf{w} - \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} / 2$  は1章の式(1.1)のようにポートフォリオの期待効用最大化のための2次型期待効用関数である. このときのLagrange関数は

$$L = \mu^T \mathbf{w} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \quad (2.48)$$

なので, 一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mu - \tau \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

である. ゆえに

$$\begin{aligned} \lambda_G &= \frac{b - \tau}{c} \\ \mathbf{w}_G &= \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{c} + \frac{1}{c\tau} (c \mathbf{V}^{-1} \mu - b \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{w}_C + \frac{1}{c\tau} (c \mathbf{V}^{-1} \mu - b \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{w}_C + \frac{1}{c\tau} (c \mathbf{z}_\mu - b \mathbf{z}_1) \\ \sigma_G^2 &= \mathbf{w}_G^T \mathbf{V} \mathbf{w}_G = \frac{1}{c} + \frac{D}{c} \left( \frac{1}{\tau^2} \right) \\ &= \sigma_C^2 + \frac{D}{c} \left( \frac{1}{\tau^2} \right) \\ \mu_G &= \mu^T \mathbf{w}_G = \frac{b}{c} + \frac{D}{c} \left( \frac{1}{\tau} \right) \\ &= \mu_C + \frac{D}{c} \left( \frac{1}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

と導出できる<sup>[84]</sup>. このときポートフォリオ G は, 最小分散ポートフォリオ C よりも  $1/\tau$  のリスク許容度(リスク回避度の逆数)だけ積極的な投資スタイルを有していることが明らかである. また, 一般には最大期待収益率から最小分散ポートフォリオの期待収益率

までを効率的フロンティアとして検討するが、図 2.1 に示す最適成長ポートフォリオ ( $\tau = 1.0$  の場合)<sup>[71][72]</sup>である点 G から最小分散ポートフォリオの点 C までの間で投資の意思決定を行うことができることも図 2.1 の傾向より改めて確認できる。また、この部分は効率的フロンティアの一部分を意味しており、投資において有効な投資戦略の決定範囲でもある。

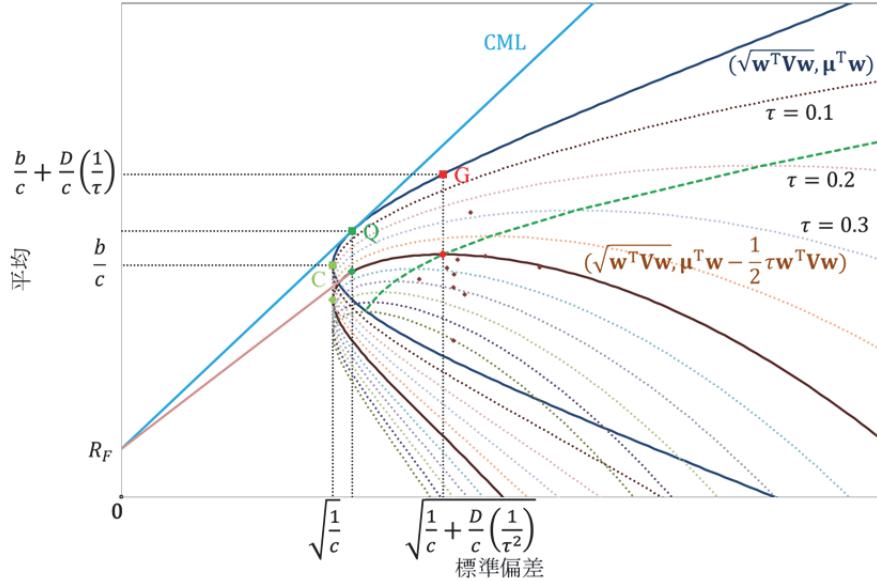


図 2.2 リスク回避度による  $\mu^T w - \tau w^T V w / 2$  の傾向

以上より、ポートフォリオ G は期待効用最大となる図 2.2 の点 G を意味していることがわかる。また、期待効用最大化ポートフォリオは図 2.2 の緑色破線の傾向として示している。加えてわかりやすいように、細実線で  $\tau = 0.1 \sim 1.0$  までの効率的フロンティアを追加している。また、その下部分である非効率的なポートフォリオを図示し、リスク回避度  $\tau$  によるポートフォリオの傾向を示している。

#### 2.4.4 安全資産利子率を含む空売りを認めるポートフォリオの平均分散モデル(資本市場線)

安全資産利子率  $R_F$  を含むポートフォリオをポートフォリオ PF と呼ぶことにする。すなわち、式(2.30)を参考に

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\
& \text{subject to} && \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + R_F w_F = \mu_P \\
& && \mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F = 1
\end{aligned} \tag{2.51}$$

である<sup>[73][74][44]</sup>. ここに,  $\mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F$  は全投資比率の総和なので 1 である. この式(2.51)について予算制約より, 安全資産利子率  $R_F$  の投資比率は  $w_F = 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w}$  だから, 次のように

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\
& \text{subject to} && (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w} = \mu_P - R_F
\end{aligned} \tag{2.52}$$

と変形できる<sup>[74]</sup>. 式(2.52)の Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda((\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w} - (\mu_P - R_F)) \tag{2.53}$$

であるので, その一階の導関数より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1}) = \mathbf{0} \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w} - (\mu_P - R_F) = 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

となる. ゆえに,  $\mathbf{R}_Q = \boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1}$ ,  $H = \mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q = a - 2bR_F + cR_F^2$  とおくと<sup>[73][10][74][44]</sup>

$$\begin{aligned}
 \lambda_{PF} &= -\frac{\mu_P - R_F}{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\
 &= \frac{\mu_P - R_F}{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\
 &= \frac{\mu_P - R_F}{a - 2bR_F + cR_F^2} \\
 &= \frac{\mu_P - R_F}{H} \\
 \mathbf{w}_{PF} &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\
 &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\
 &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{a - 2bR_F + cR_F^2} \\
 &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{H} \tag{2.55} \\
 w_F &= 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w}_{PF} \\
 &= \frac{(\boldsymbol{\mu} - \mu_P \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{H} \\
 \sigma_{PF}^2 &= \mathbf{w}_{PF}^T \mathbf{V} \mathbf{w}_{PF} \\
 &= \frac{(\mu_P - R_F)^2}{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\
 &= \frac{(\mu_P - R_F)^2}{a - 2bR_F + cR_F^2} \\
 &= \frac{(\mu_P - R_F)^2}{H} \\
 \mu_{PF} &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}_{PF} + R_F w_F \\
 &= \mu_P
 \end{aligned}$$

と導出できる<sup>[44]</sup>.

この式(2.55)において投資比率の和が  $\mathbf{1}^T \mathbf{w}_{PF} = 1$  を満たす  $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}_{PF} = \mu_P$  のとき、安全資産利子率  $R_F$  の投資比率  $w_F = 0$  が成立する。したがって、これを代入するとポートフォリオ PF はポートフォリオ P としても完全に一致することが期待できる。

以上より、ポートフォリオ PF は資本市場線(CML; Capital Market Line)上<sup>[10][5]</sup>のポートフォリオを意味し、図 2.1 と図 2.2 の上側の水色実線を意味することがわかる。2.4.5 では、このうちの接点ポートフォリオについて考察する。

### 2.4.5 安全資産利子率を含む空売りを認める接点ポートフォリオの平均分散モデル(シャープ・レシオ最大化)

ポートフォリオ  $\mathbf{P}$  の解を示す式(2.55)において、安全資産利子率  $R_F$  の投資比率  $w_F = 0$  となる場合がある。このことは、ポートフォリオ  $\mathbf{P}$  とも関係があるはずである。そこで、特にこのポートフォリオをポートフォリオ  $\mathbf{Q}$  と呼ぶことにする。すなわち

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

である<sup>[28][55]</sup>。そして、目的関数はシャープ・レシオが最大となるようにモデル化されている。ここで、シャープ・レシオを

$$SR_Q = \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}} = \frac{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}} \quad (2.57)$$

とおき、一階微分して左辺に分母を移項すると

$$(\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w})^{3/2} \frac{dSR_Q}{d\mathbf{w}} = (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})(\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}) - SR_Q \mathbf{V} \mathbf{w} = 0 \quad (2.58)$$

が得られる<sup>[28]</sup>。そこで、式(2.56)の制約式と式(2.58)より構成される下記の方程式

$$\begin{cases} SR_Q \mathbf{V} \mathbf{w} = (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})(\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}) \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{cases} \quad (2.59)$$

について解くと

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_Q &= \frac{\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\
&= \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\
&= \frac{\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{b - c R_F} \\
&= \frac{\mathbf{z}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{z}_Q} \\
&= \frac{\mathbf{z}_{\boldsymbol{\mu}} - R_F \mathbf{z}_1}{b - c R_F} \\
\sigma_Q^2 &= \mathbf{w}_Q^T \mathbf{V} \mathbf{w}_Q \\
&= \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})}{(\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1}))^2} \\
&= \frac{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{(\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q)^2} \tag{2.60} \\
&= \frac{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{z}_Q}{(\mathbf{1}^T \mathbf{z}_Q)^2} \\
&= \frac{a - 2bR_F + cR_F^2}{(b - cR_F)^2} \\
\mu_Q &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}_Q \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{z}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{z}_Q} \\
&= \frac{a - bR_F}{b - cR_F}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{SR}_Q &= \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w}_Q}{\sqrt{\mathbf{w}_Q^T \mathbf{V} \mathbf{w}_Q}} \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\
&= \sqrt{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\
&= \sqrt{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{z}_Q}
\end{aligned}$$

と導出できる<sup>[28]</sup>. ただし,  $\mathbf{z}_Q = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q$  である. まず, ここで安全資産利子率を  $R_F \rightarrow -\infty$  と仮定すると式(2.60)から

$$\begin{aligned}
\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \mathbf{w}_Q &= \lim_{R_F \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\mathbf{z}_{\mu}}{R_F} - \mathbf{z}_1}{\frac{b}{R_F} - c} = \frac{\mathbf{z}_1}{c} = \mathbf{w}_C \\
\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \sigma_Q^2 &= \lim_{R_F \rightarrow -\infty} \frac{\frac{a}{R_F^2} - \frac{2b}{R_F} + c}{\frac{b^2}{R_F^2} - \frac{2bc}{R_F} - c^2} = \frac{1}{c} = \sigma_C^2 \\
\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \mu_Q &= \lim_{R_F \rightarrow -\infty} \frac{\frac{a}{R_F} - b}{\frac{b}{R_F} - c} = \frac{b}{c} = \mu_C
\end{aligned} \tag{2.61}$$

としてポートフォリオ Q はポートフォリオ C に収束する<sup>[28]</sup>. すなわち, 図 2.1 の安全資産利子率  $R_F$  をマイナス方向に大きく移動させると点 Q が点 C に近づく様子がイメージできる.

ところで, 式(2.60)と式(2.55)より,  $\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_{PF}$  とするとき

$$\frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} = \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \tag{2.62}$$

から

$$\frac{\frac{(\mu_P - R_F)}{\sqrt{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}}}{\frac{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\sqrt{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}}} = \frac{(\mu_P - R_F)}{\sqrt{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}} \quad (2.63)$$

となる。ここで、2.7でも後述する資本資産評価モデル(CAPM)<sup>[5]</sup>におけるマーケット・ポートフォリオの平均を  $\mu_M$  とし、標準偏差を  $\sigma_M$  とすると

$$\frac{\mu_P - R_F}{\sigma_P} = \rho_{PM} \frac{\mu_M - R_F}{\sigma_M} \quad (2.64)$$

より

$$\mu_P - R_F = \rho_{PM} \frac{\sigma_P}{\sigma_M} (\mu_M - R_F) \quad (2.65)$$

となる。式(2.65)は  $\rho_{PM} = 1.0$  のときの資本市場線<sup>[10][5]</sup>である。すなわち、リスクの感応度も  $\beta = \rho_{PM}\sigma_P/\sigma_M = 1.0$  である。ここに、 $\rho_{PM}$  はポートフォリオ P とマーケット・ポートフォリオ M の収益率の相関係数である。このときのシャープ・レシオは、ポートフォリオ P がポートフォリオ Q でもあるため

$$\frac{(\mu_Q - R_F)}{\sigma_Q} = \frac{(\mu_P - R_F)}{\sigma_P} = SR_Q \quad (2.66)$$

である。したがって、 $\mathbf{w}_P = \mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_{PF}$  が成立するため、式(2.41)に一致するときは必ず式(2.60)の  $\mu_Q = \mu_P = \mu_{PF} = (a - bR_F)/(b - cR_F)$  を満たすことがわかる。このため、ポートフォリオ PF はポートフォリオ Q を通過する。ゆえに、ポートフォリオ Q がマーケット・ポートフォリオ M として接点ポートフォリオと呼ばれていることが理解できる。

ところで、ポートフォリオ Q とポートフォリオ C について

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{z}_\mu \\ \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} &= \mathbf{z}_1 \end{aligned} \quad (2.67)$$

を用いるとき、式(2.60)のポートフォリオ Q の投資比率  $\mathbf{w}_Q$  と、(2.46)のポートフォリオ C の投資比率  $\mathbf{w}_C$  より

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_P &= \frac{\mu_Q - \mu_P}{\mu_Q - \mu_C} \mathbf{w}_C + \frac{\mu_P - \mu_C}{\mu_Q - \mu_C} \mathbf{w}_Q \\ &= \frac{1}{D} \left( (\mu_P c - b) \mathbf{z}_\mu + (a - \mu_P b) \mathbf{z}_1 \right)\end{aligned}\quad (2.68)$$

として式(2.41)のポートフォリオ P の投資比率  $\mathbf{w}_P$  に一致する<sup>[16][17]</sup>。したがって、目標とするポートフォリオの期待収益率  $\mu_P$  が与えられた状況下で分散を最小にするポートフォリオ P は接点ポートフォリオ Q と最小分散ポートフォリオ C の線形結合であることがわかる。また、2.8 で後述する投資比率の視覚化の図の傾向とも良く調和している。

さらに、ポートフォリオの期待収益率  $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}$  がリスク回避度  $\tau$  の大きさにより、期待効用ポートフォリオの効用関数  $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} / 2$  とともに変化していく様子を破線として図 2.2 に示す。このとき、横軸はポートフォリオの標準偏差  $\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}$  を示すため、ポートフォリオ C の標準偏差  $\sigma_C$  は、 $\tau$  の大きさに関係なく一定で、ポートフォリオ Q の標準偏差  $\sigma_Q$  についてはポートフォリオ G と連動していることが改めて確認できる。

## 2.5. 空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル

本項では、空売りを認めた場合の個々の条件で呼ぶこととしたポートフォリオ X に対して、投資比率が  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  となる制約を加えた空売りを認めない場合のポートフォリオにプライムを付けてポートフォリオ X' と定義して考察を行うことにする。

### 2.5.1 安全資産利子率を含まない空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル

一般的なモデルとして取扱った 2.4.1 のポートフォリオ P に投資比率の制約条件式  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  を加えたモデルを考える。このポートフォリオをポートフォリオ P' と呼ぶことにする。ただし、時点  $t$  のポートフォリオにおいて投資比率  $w_i (i = 1, \dots, n)$ 、すなわち投資比率ベクトル

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\
 \mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\
 \mathbf{1}^T \mathbf{w} &= 1 \\
 \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

を用いて、ポートフォリオ  $\mathbf{P}'$  の最適化問題

$$\begin{aligned}
 \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\
 \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} = \mu_P \\
 & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\
 & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

を考える。ここで最適解を示すために式(2.70)を

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda_1^T \left\{ \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \mu_P \right\} + \lambda_2^T (-\mathbf{w}) \tag{2.71}$$

とおき、KKT 条件(Karush-Kuhn-Tucker 条件)

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{w}} L &= \mathbf{V} \mathbf{w} + [\boldsymbol{\mu} \ \mathbf{1}] \lambda_1 - \lambda_2 = \mathbf{0} \\
 \nabla_{\lambda_1} L &= \left\{ \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \mu_P \right\} = \mathbf{0} \\
 \nabla_{\lambda_2} L &= -\mathbf{1} \leq \mathbf{0} \\
 \lambda_2 &\geq \mathbf{0} \\
 \lambda_2^T \nabla_{\lambda_2} L &= 0
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

を満たす最適解  $\mathbf{w}_{P'}$  を探索する<sup>[74][75][96]</sup>。本章では、最適解は Excel の Solver を用いて解く。すなわち、Solver を VBA で操作しながら探索する<sup>[59][77][78][79][80][81]</sup>。

### 2.5.2 安全資産利子率を含む空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル

一般的なモデルとして取扱った 2.4.4 のポートフォリオ PF に  $n$  個の証券からなる投資比率ベクトル  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ , 安全資産利子率  $R_F$  の投資比率  $w_F \geq 0$  の条件を加えたモデルを考える。このポートフォリオをポートフォリオ PF' と呼ぶことにする。ただし、時点  $t$  の証券のポートフォリオにおいて投資比率  $w_i (i = 1, \dots, n)$  である。すなわち、投資比率ベクトル  $\mathbf{w}$  と安全資産利子率  $R_F$  の投資比率  $w_F$  も投資に含めて

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\ \mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F &= 1 \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0} \\ w_F &\geq 0\end{aligned}\tag{2.73}$$

を用いてポートフォリオ PF' の最適化問題

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + R_F w_F = \mu_P \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \\ & w_F \geq 0\end{aligned}\tag{2.74}$$

より最適解を探索する。

以上について図 2.1 を示したときと同じ条件で数値実験してみると、図 2.3 に示すように PF' の傾向は安全資産利子率  $R_F$  の点 RF から点 Q' までは CML 上に求まり、点 Q' から点 G' までは空売りのない場合の解と同様に得られる。この図 2.3 に示す破線は、図 2.1 と図 2.2 で示した空売りを認める場合のポートフォリオの傾向である。

ところで、本項までは平均を縦軸に、標準偏差を横軸に説明し、平均分散モデルを取扱ってきたが、実際には  $n$  証券の多変量データの挙動を分析している。そこで、次節では多変量のデータ解析を実施するために用いる同時分布を考察する観点で平均分散モデルを取扱う。また、後ほど 2.8 ではデータ分析として、次節の同時分布を用いて、図 2.1,

図2.2, 図2.3に得られるポートフォリオの特性について考察している。

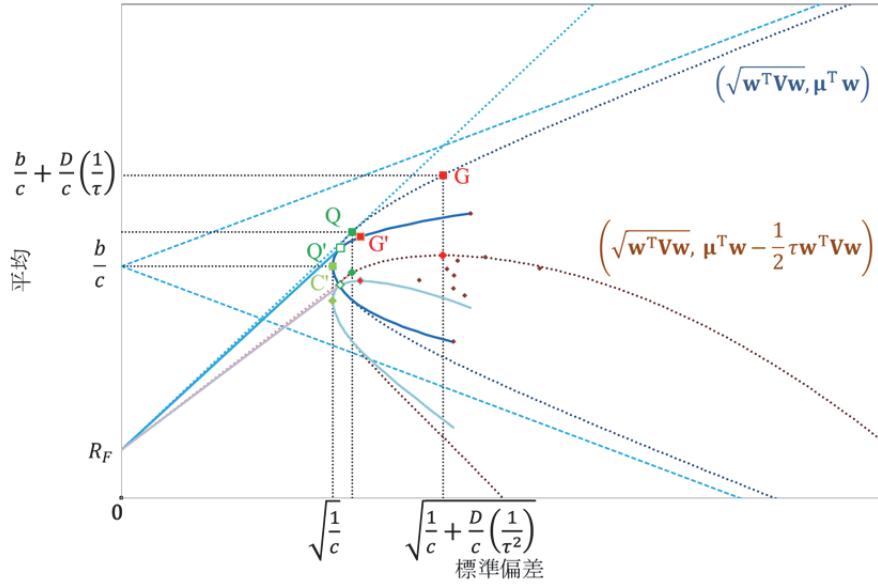


図2.3 空売りを認めない平均分散モデルの数理的特性の視覚化<sup>[71][72]</sup>

## 2.6 同時分布の信頼橿円体を考慮した平均分散モデルの考察

証券のポートフォリオ管理では、平均分散モデルを用いて評価されることが前節まででわかった。一方で、意思決定における不確実性は、機会制約条件モデル<sup>[86][101]</sup>における等価確定式でも取扱うことができる。前者と後者はともに相関係数の大きさを取り扱うことが可能であるが、機会制約条件モデルでの相関係数の大きさに関しては、Agnewらが平均分散モデルに適用している<sup>[101]</sup>。このことを多変量解析としてモデル化するために、同時分布の信頼橿円体<sup>[98][99]</sup>とも融合して考察することは、平均分散モデルの分散投資の視覚化の観点からも重要と考えられる。

そこで、本節では機会制約条件モデルの特徴を鑑みながら、同時分布の信頼橿円体を考慮した平均分散モデルとの関係について考察を実施している。これまでにも平均分散モデルを提案した Markowitz<sup>[6]</sup>も同時分布と平均および標準偏差の幾何学的特性について取扱っている。これに相関係数の大きさの特徴をより詳細に調査することが重要である。

また、一般に空売りを認めない場合のみを考慮した平均分散モデルは2.5で記述したように表記される。そして、収益率  $\mathbf{R}$  は確率変数として取扱っている。厳密な意味でも平均分散モデルのポートフォリオ管理では、解析のために投資比率を  $\mathbf{w}$  として確定的に取

扱うことが一般的である。しかし、実際には投資比率どおりに正確に買い付けることが困難である。

そこで、特記すべき点として、 $\mathbf{R}$  ほどバラツキが大きいわけではないが、 $\tilde{\mathbf{w}}$  も確率変数として本来は取扱われなければならない。すなわち、このことを意識した中で、投資比率の不確実性を想定することは重要である。以下では、投資比率  $\tilde{\mathbf{w}}$  に関する機会制約条件モデルを説明する。

### 2.6.1 ポートフォリオ管理における機会制約条件モデル

平均分散モデルのポートフォリオ管理として、 $\tilde{R} = \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}$  の投資比率  $\tilde{\mathbf{w}}$  の期待値  $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}})$  と分散  $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{w}}}$  を用いて分析する。

このとき、正規分布の片側確率点を  $\lambda_{CCM}$  とするとき、等価確定式<sup>[86]</sup>

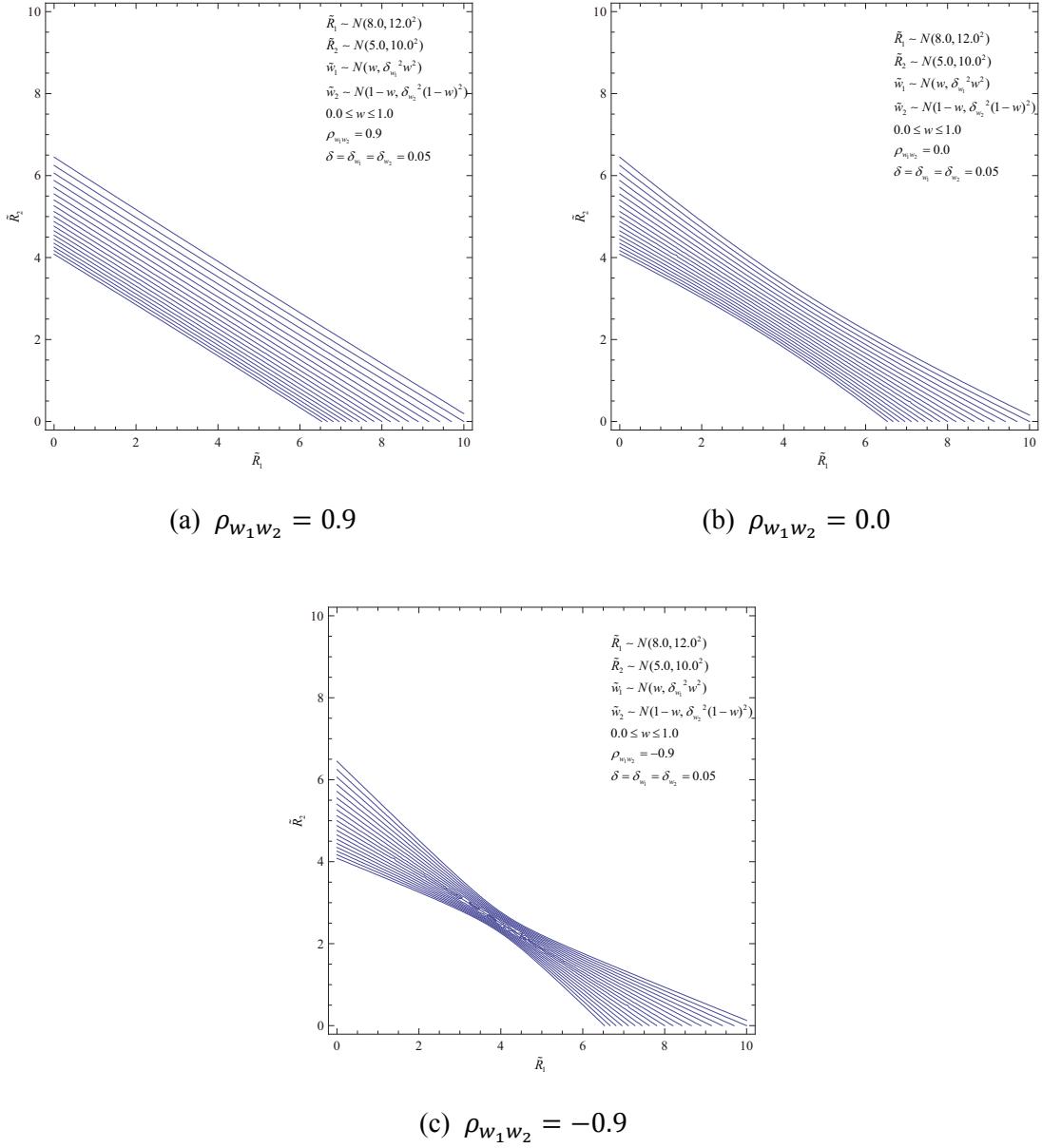
$$\frac{\mathbf{R}^T (\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}}))}{\sqrt{\mathbf{R}^T \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{w}}} \mathbf{R}}} \geq \lambda_{CCM} \quad (2.75)$$

を二乗した

$$\lambda_{CCM}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{w}}} \mathbf{R} - (\mathbf{R}^T (\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}})))^2 \leq 0 \quad (2.76)$$

は、平均分散モデルをリターンによる直交座標系で視覚化した傾向として示すことができる。すなわち、図 2.4 のように相関係数の大きさに応じて不確実性が確認できる。

ここで、図 2.4(a)では、投資比率  $\tilde{w}_1$  と  $\tilde{w}_2$  の相関係数  $\rho_{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2} = 0.9$  の場合を取り扱っている。図 2.4(b)では、投資比率  $\tilde{w}_1$  と  $\tilde{w}_2$  の相関係数  $\rho_{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2} = 0.0$  の場合を取り扱っている。図 2.4(c)では、投資比率  $\tilde{w}_1$  と  $\tilde{w}_2$  の相関係数  $\rho_{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2} = -0.9$  の場合を取り扱っている。このように、それぞれの相関関係を視覚化できる。すなわち、図 2.4 は与えられた相関係数  $\rho_{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2}$  のもとで、 $\tilde{w}_1$  の変動係数を  $\delta_1 = 0.05$ 、 $\tilde{w}_2$  の変動係数を  $\delta_2 = 0.05$  として、 $E(\tilde{w}_1) = w$ 、 $E(\tilde{w}_2) = 1 - w$  の特徴を示すために、 $\lambda$  の値を変化させながら複数本の曲線を描いた図である。


 図 2.4 機会制約条件モデルによる視覚化<sup>[85]</sup>

また、相関係数  $\rho_{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2}$  の値が図 2.4 と異なる場合でも図 2.4 の傾向からバラツキの様子を予測できる。このように投資比率間の不確実性として相関関係についても考慮することは重要かもしれない。

## 2.6.2 平均分散モデルにおける信頼橙円体

一方で、投資比率を対角行列  $\mathbf{W} = \text{diag}[w_i]$  と置くとき、平均分散モデルのリターンの同時分布上の信頼橙円体は

$$\left( \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{WE}(\tilde{\mathbf{R}}) \right)^T (\mathbf{WVW})^{-1} \left( \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{WE}(\tilde{\mathbf{R}}) \right) = \lambda_{SDM}^2 \quad (2.77)$$

と記述できる<sup>[85]</sup>。ここに、 $\text{diag}[\cdot]$  は対角成分  $\cdot$  による対角行列を意味する。また、 $\lambda_{SDM}$  は正規分布の片側確率点である。

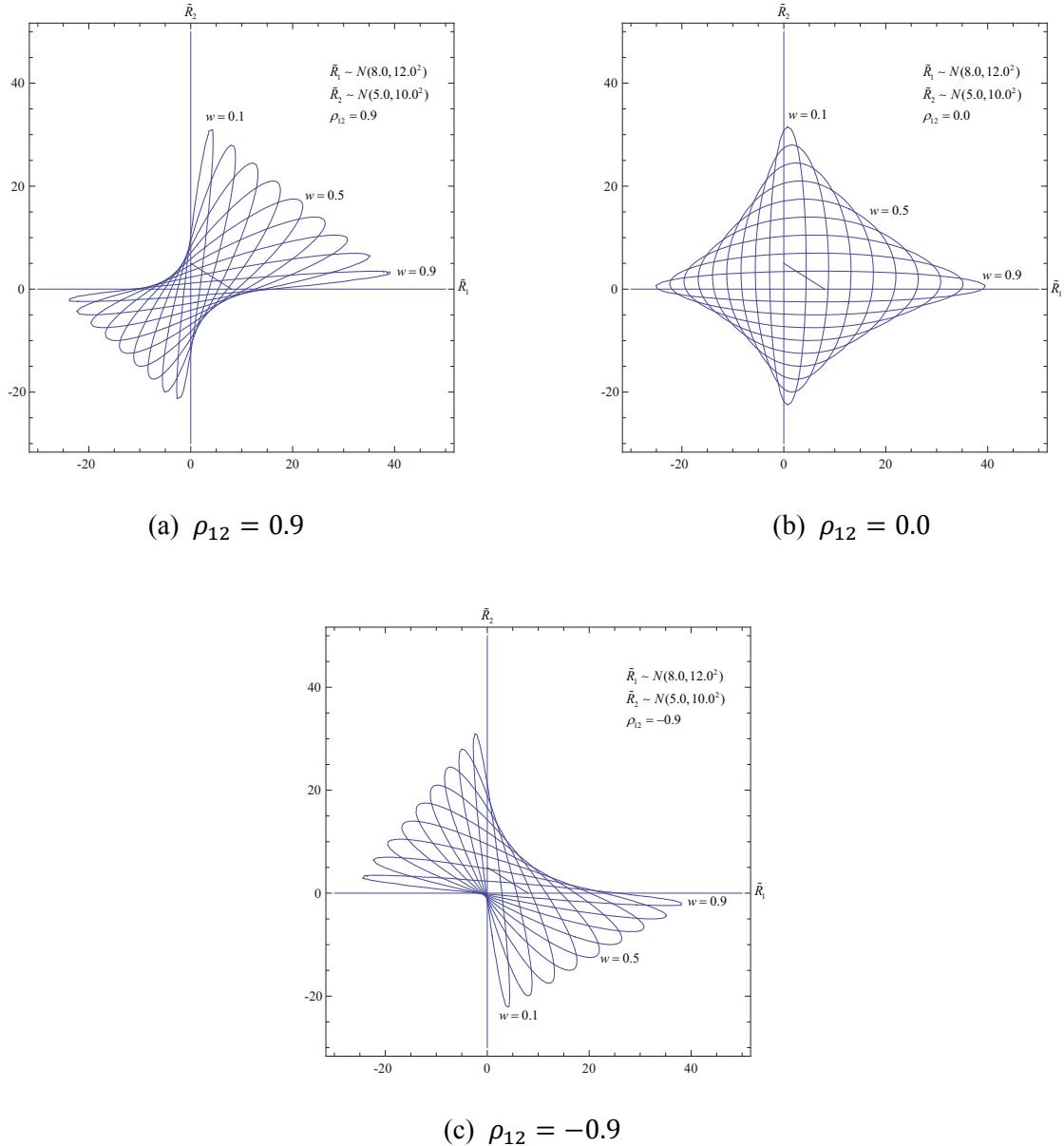
式(2.77)を用いるとき、機会制約条件モデルと同様の傾向を示しながら、各投資比率における信頼橙円体の振舞いが図 2.5 のように視覚化できる。このとき、図 2.5 には  $R_1$  の投資比率を  $w$ 、 $R_2$  の投資比率を  $1 - w$  として  $w$  を 0.0 から 0.9 まで 0.1 ずつ増加させた傾向をそれぞれ図示している。

ここで、図 2.5(a)では、確率変数  $R_1$  と  $R_2$  の相関係数  $\rho_{R_1 R_2} = 0.9$  の場合を取り扱っている。図 2.5(b)では、確率変数  $R_1$  と  $R_2$  の相関係数  $\rho_{R_1 R_2} = 0.0$  の場合を取り扱っている。図 2.5(c)では、確率変数  $R_1$  と  $R_2$  の相関係数  $\rho_{R_1 R_2} = -0.9$  の場合を取り扱っている。このようにそれぞれ相関関係を視覚化できる。また、相関係数  $\rho_{R_1 R_2}$  の値が図 2.5 と異なる場合でも図 2.5 の傾向から予測でき、確率変数間の相関係数に対する同時分布の特徴がわかる。

この結果、機会制約条件モデルよりも、投資比率が明確に異なる同時分布の信頼橙円体のパフォーマンスは、 $\mathbf{WVW}$  を考慮している点で、平均分散モデルの不確実性を忠実に表現できていることになる。

また、再度記述するが、図 2.5 では投資比率が確定的として視覚化されているにもかかわらず、投資比率の不確実性を考慮しなくとも、平均分散モデルのリスク低減効果は相関係数の大きさにより同時分布の信頼橙円の形状の変化として視覚化できる。

これに、図 2.4 の投資比率の不確実性を加えて信頼橙円体の中心座標が揺れるのが現実の投資スタイルではないかと考えられる。

図 2.5 平均分散モデルの信頼橿円体<sup>[85]</sup>

## 2.7 資本資産評価モデル (CAPM) の導出

### 2.7.1 資本市場線 (CML) とシャープ・レシオ

無リスク資産を考慮した効率的フロンティアとなる資本市場線は下式として定義できる<sup>[5][92]</sup>。すなわち

$$E(R_P) = R_F + \left( \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M} \right) \sigma_P \quad (2.78)$$

である。ここに、 $E(R_M)$  はマーケット・ポートフォリオの期待収益率であり、 $\sigma_M$  はマーケット・ポートフォリオの標準偏差である<sup>[92]</sup>。この式の意味は、「期待収益率=安全資産利子率+リスクの市場価格×リスク量」としてとらえることができる。そのため、式(2.56)と式(2.57)で示されるようにリスクの市場価格であるシャープ・レシオ  $SR_Q$  を探索して資本市場線（CML）を活用することができる<sup>[92]</sup>。

### 2.7.2 証券市場線（SML）とマーケット・モデル（シングル・ファクタ・モデル）

均衡状態における任意の個別証券  $i$  の均衡価格式について

$$\begin{aligned} E(R_i) &= R_F + E(R_M) - R_F \cdot \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} \\ &= R_F + \beta_i(E(R_i) - R_F) \end{aligned} \quad (2.79)$$

と定義される<sup>[5][92]</sup>。ここに、 $Cov(R_i, R_M)$  は証券  $i$  とマーケット・ポートフォリオの収益率の共分散である。このとき、リスク量として見積もるベータ  $\beta_i$  は

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} \quad (2.80)$$

として算出できる<sup>[5][92]</sup>。これは、マーケット・ポートフォリオの超過収益率を回帰式として

$$R_i - R_F = \alpha_i + \beta_i(R_M - R_F) + \epsilon_i \quad (2.81)$$

を立てて回帰分析することによって、マーケット・ポートフォリオに依存しない収益率の期待値  $\alpha_i$  と、マーケット・ポートフォリオの収益率に対する感応度  $\beta_i$  を推定するとき、安全資産利子率  $R_F$  に対する証券  $i$  の期待超過収益率は

$$E(R_i) - R_F = \alpha_i + \beta_i(R_M - R_F) \quad (2.82)$$

と算出できる<sup>[5][92]</sup>. このときの  $\alpha_i$  とベータ  $\beta_i$  は式(2.82)にもとづいてデータベースの操作により容易に求めることができる. また, 個別証券のベータをベクトルとして表わすとき

$$\mathbf{b} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}^T \quad (2.83)$$

を用いて, TOPIX や日経平均のようなインデックスによるマーケット・ポートフォリオではなく, 証券のみで作成される効率的フロンティアと資本市場線(CML)との接点であるマーケット・ポートフォリオ  $Q$  を選択するならば, その最適投資比率であるウェイトベクトル  $\mathbf{w}$  からそのベータは

$$\beta_Q = \mathbf{b}^T \mathbf{w} = 1 \quad (2.84)$$

となる関係が成立する. このため, ポートフォリオの期待収益率が市場平均ポートフォリオと一致する<sup>[100]</sup>. このことは, 後ほど 2.8.4 の数値実験でも Excel にデータ接続して確認している.

## 2.8 データ分析と考察

本節で用いるデータは, 東証株価のうち, 伊領<sup>[140]</sup>による Excel の株価分析に掲載される全証券に若干加えて 2153 証券について, 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間分の月次データを Yahoo! ファイナンス<sup>[65]</sup>からダウンロードしたものである. ダウンロードされたデータについては, Access によりローカル・データベースを構築している. 以降では, これらのデータをもとに上記までで説明した平均分散モデルに関するデータ分析を実施している. Excel で株価分析が容易であることと, インターネットによる経済指標<sup>[67][141]</sup>の検索も容易であることは, ファイナンスや経済学における分析にとって非常に有益である.

そこで, 本章ではこの利点を生かして Excel と Access を用いて以降の分析結果を考察する.

### 2.8.1 資本資産評価モデルの指標の算出

日経ヴェリタス 2010 年 1 月 10 日号掲載の 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間の騰落率の上位 50 証券<sup>[66]</sup>を検索すると, Yahoo! ファイナンスに 20 年間分のデータがない 18 証券が確認できる. これらを除き, その不足分の証券をデータベースから抽出して, 期待収益率と標準偏差を示したものが表 2.1 である. 本章で作成した Access のデータベースにより検索した月次騰落率上位 50 証券には, 日経ヴェリタスでは 68 位までの証券が整合しており, 月次騰落率を補正して 20 年間の資産上昇倍率に直すと期待収益率はほぼ一致することが確認できる.

表 2.1 謄落率上位 50 証券の期待収益率と標準偏差

順位	証券コード	期待収益率	標準偏差	順位	証券コード	期待収益率	標準偏差
1	4530	0.00634	0.0920	26	6367	0.00222	0.0989
2	6861	0.00537	0.0959	27	7739	0.00213	0.1024
3	8113	0.00528	0.0886	28	6923	0.00211	0.1041
4	8227	0.00512	0.1103	29	4502	0.00209	0.0670
5	7267	0.00510	0.0858	30	6273	0.00207	0.0938
6	7741	0.00495	0.0877	31	6988	0.00199	0.1095
7	7751	0.00485	0.0786	32	7251	0.00186	0.1077
8	4063	0.00467	0.0875	33	7259	0.00178	0.0914
9	4543	0.00450	0.0905	34	6971	0.00173	0.1087
10	4062	0.00450	0.1193	35	6857	0.00163	0.1349
11	6967	0.00408	0.1373	36	4452	0.00146	0.0595
12	6963	0.00387	0.1114	37	6767	0.00142	0.1392
13	8035	0.00358	0.1276	38	6301	0.00141	0.0999
14	7915	0.00349	0.1098	39	5444	0.00139	0.1138
15	7269	0.00348	0.0875	40	6995	0.00129	0.1028
16	6981	0.00339	0.1019	41	7756	0.00126	0.1350
17	6794	0.00315	0.1380	42	4185	0.00123	0.1083
18	6806	0.00289	0.0918	43	9735	0.00120	0.0764
19	7974	0.00288	0.1001	44	7221	0.00111	0.0767
20	7309	0.00281	0.0979	45	6586	0.00096	0.0961
21	7733	0.00279	0.0954	46	6902	0.00086	0.0765
22	6370	0.00264	0.1053	47	5214	0.00085	0.1168
23	7203	0.00256	0.0722	48	7731	0.00082	0.1342
24	4523	0.00255	0.0847	49	4021	0.00082	0.1114
25	5947	0.00230	0.0817	50	6363	0.00080	0.1033

また, このデータベースの月次騰落率をもとに標準偏差を計算している.

次に, 表 2.1 に示す証券について TOPIX との資本資産評価モデルを作成して, そのうちのアルファの降順に上位 20 証券を表 2.2 に示している. 実際には, もう少し短期のパ

フォーマンスを調べるために期間を短く設定するようであるが、表2.2に関する算出結果は計量期間を2005年1月から2009年12月までの5年間とした。表2.2には、表2.1に掲載の証券のうち、アルファの降順に上位20証券のみの掲載ではあるが、Accessによるデータベースではこの期間に1885証券の証券と日経平均、TOPIX自身を合わせた1887証券の計算をほとんどストレスなく算出できるので、アルファの大きさによるソートだけではなく、ベータの大小のソートを実施した検証が可能である。

表2.2 資本資産評価モデルの指標算出例

順位	証券コード	アルファ	ベータ	期待收益率	標準偏差
1	6794	0.0280	1.7068	0.0204	0.1686
2	6363	0.0257	0.9577	0.0220	0.1084
3	6301	0.0241	1.7046	0.0165	0.1190
4	7915	0.0212	0.5801	0.0194	0.1437
5	5444	0.0200	1.4284	0.0139	0.1071
6	6370	0.0151	0.9746	0.0113	0.0985
7	4062	0.0148	1.4761	0.0085	0.1326
8	4543	0.0144	0.7305	0.0118	0.0833
9	6767	0.0142	1.9199	0.0055	0.1602
10	4021	0.0141	1.3713	0.0082	0.1076
11	6586	0.0140	1.1147	0.0095	0.1085
12	7731	0.0140	1.7718	0.0061	0.1354
13	7974	0.0127	0.9044	0.0092	0.1012
14	5214	0.0126	1.4729	0.0063	0.1364
15	6967	0.0121	1.8142	0.0040	0.1517
16	7733	0.0110	1.3740	0.0052	0.1148
17	8113	0.0101	0.3344	0.0096	0.0551
18	5947	0.0086	0.3264	0.0081	0.0687
19	6367	0.0086	1.2151	0.0035	0.1072
20	6995	0.0080	1.2667	0.0027	0.1135

### 2.8.2 平均分散モデルにおける効率的フロンティアの視覚化

平均分散モデルのために必要な基礎情報である平均、標準偏差、相関係数、共分散を必要に応じてAccessのクエリ（一般的にデータベースではビューと呼ぶ）を活用し、SQLで記述する。ここに、平均と標準偏差はAccessの標準関数であるが、Accessの標準関数にない共分散や相関係数は式(2.17)と式(2.18)を活用し算出しなければならない。このため、本章では、分散や標準偏差の分母も整合性をとることから、株価情報のデータ数で割る

Access の標準関数を用いて SQL により設定している。

まず、クエリで SQL を用いて、1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 240 カ月の期間について得られた株価情報データから 2153 証券の月次株価騰落率の平均を降順にソートし、表 2.1 に示す騰落率上位 50 証券を抜取る。次に、この証券コードをもとに騰落率上位 50 証券の月次騰落率の相関係数行列に相当するデータを同様に SQL で計算し、式(2.18)の結果であるクエリを生成する。その後に、Excel にデータ接続して共分散を表示すると、Excel にて式(2.35)に示す平均分散モデルの空売りのある場合の解法<sup>[89][44]</sup>を用いて効率的フロンティアを図 2.6 に示すとおりに容易に描画できる。

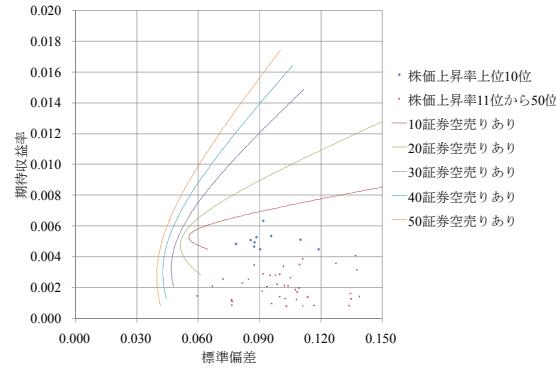


図 2.6 空売りのある場合の効率的フロンティアとその下の非効率フロンティア

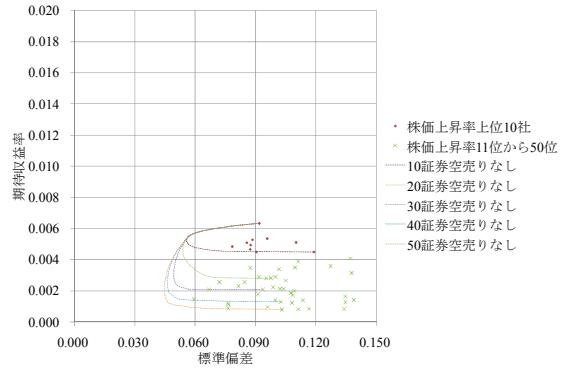


図 2.7 空売りのない場合の効率的フロンティアとその下の非効率フロンティア

図 2.6 に示す効率的フロンティアの上部は、最大期待收益率を有する証券と最小期待收益率の証券の期待收益率の差を 2 倍上まで描画しており現実的ではないが、その曲線傾向について視覚化を行っているので、その特性は理解しやすい。ただし、個別証券のうちの最大期待收益率を超える投資比率を作成するときには注意を要する。

また、式(2.70)に示す空売りのない場合の平均分散モデルの解の探索のため、Excel の Solver を VBA で操作し<sup>[77][78][79][80]</sup>、同様に図 2.7 に描画することができる。しかしながら、大規模な最適化の計算実行なので、図 2.7 に示された描画には相当の待ち時間をする課題が残る。図 2.6 と図 2.7 の表示結果から、空売りの有無の視覚化による資産分散のリスク低減効果の傾向を理解できるので、両者を合わせた図 2.8 を作成して効率的フロンティアとその下の部分を描画している。

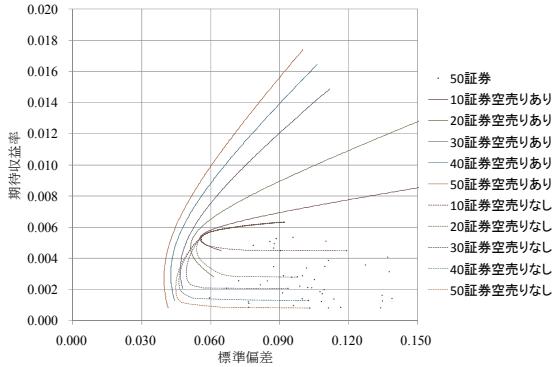


図 2.8 月次株価騰落率上位 50 証券の効率的フロンティアとその下の非効率フロンティア（騰落率の降順）

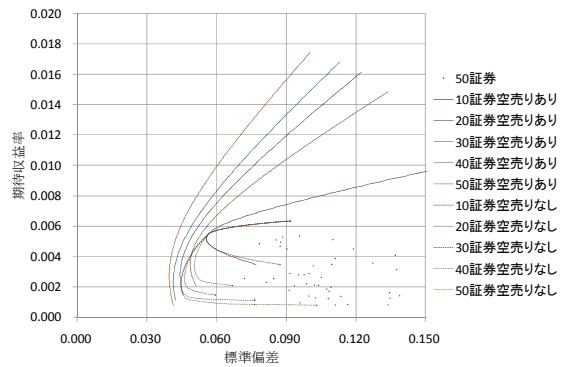


図 2.9 月次株価騰落率上位 50 証券の効率的フロンティアとその下の部分（シャープ・レシオの降順）

この図 2.8 から空売りのない場合には、期待収益率の大きい証券からポートフォリオに取込むリスク低減効果は認められるものの、最小分散ポートフォリオの期待収益率の減少がより大きくなる可能性を残すこともわかる。また、この場合には資本市場線を 10 証券もしくは 50 証券により作成したとしても、シャープ・レシオについてはあまり大きな変化は想定されないことも理解できる。

同様に、図 2.9 はシャープ・レシオの大きい証券から 10 証券ずつ増してポートフォリオを作成し、効率的フロンティアとその下部分である非効率的なポートフォリオを描画したものである。図 2.8 と図 2.9 では効率的フロンティアとその下部分である非効率的なポートフォリオの形状こそ異なるものの、本質的な資産分散によるリスク低減効果については空売りのない場合と空売りのある場合の傾向は図 2.8 と同様の性質であることが確認できる。これはデータベースから騰落率上位 50 証券を予め検索している影響も含まれた効果であるともいえる。したがって、証券数が少ない場合は、騰落率の上位 10 証券の効率的フロンティアか、シャープ・レシオの上位 10 証券の効率的フロンティアかで図 2.8 と図 2.9 に見られる形状の違いのように異なるポートフォリオであることを認識しておく必要がある。

### 2.8.3 空売りのある場合の平均分散モデルにおける投資比率の傾向

次に、空売りのある場合の投資比率効果について月次騰落率上位 10 証券に対して、視覚化したものが図 2.10 である。

図 2.10 の横軸のマイナスの符号領域は売りポジションを意味し、プラスの符号領域は買いポジションの投資比率の解の傾向を示している。また、縦軸の目盛りは表示していないが、個別証券のうち最大期待収益率と最大期待収益率の差を取り、最小期待収益率を下端に取り、その差を 2 倍したもの加えたものを上端として以降の縦軸の目盛りのない図を表示している。

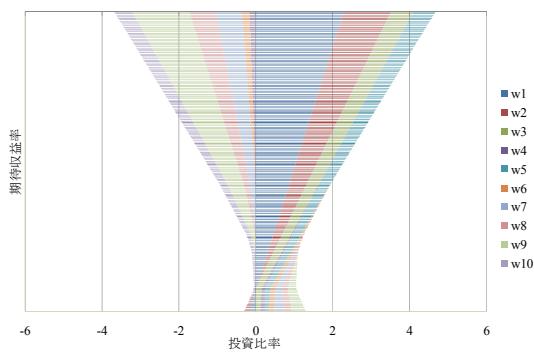


図 2.10 空売りのある場合の投資比率  
(月次株価騰落率上位 10 証券)

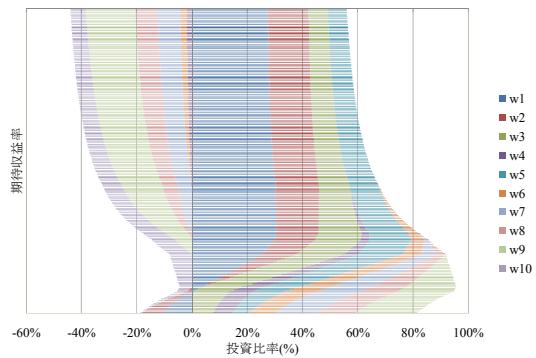


図 2.11 空売りのある場合の投資比率の絶対値の総和が 1 である場合  
(月次株価騰落率上位 10 証券)

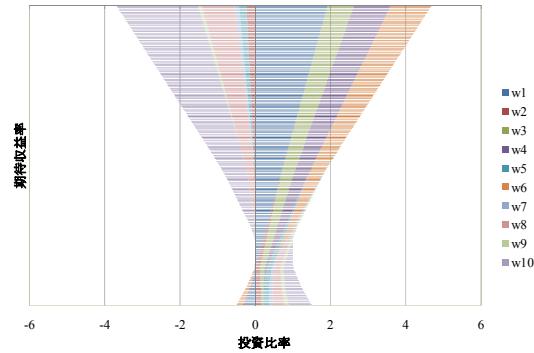


図 2.12 空売りのある場合の投資比率  
(シャープ・レシオ上位 10 証券)

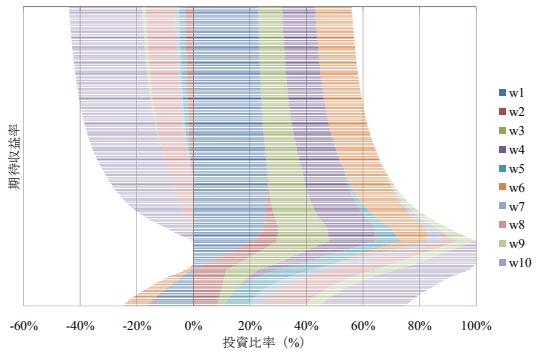


図 2.13 空売りのある場合の投資比率の絶対値の総和が 1 である場合  
(シャープ・レシオ上位 10 証券)

この図 2.10 から最小分散ポートフォリオ付近の投資比率の絶対値の総和が小さく、効率的フロンティアの上部に移動するに従って条件の良い証券の投資比率がかなり買いポジションになり、逆に良くない証券は売りポジションになる投資比率が大きくなる傾向がわかる。また、投資比率を計算したにもかかわらず、その総和が 1 を満たすことだけが成立し、個別証券の投資比率  $w_i$  の絶対値の総和は期待収益率の大きさによりかなり異なっていることと、場合によってはその絶対値の総和が大きくなることもわかる。また、個別証券の最大期待収益率をポートフォリオのパフォーマンスが超えるとき、売りポジションと買いポジションの投資比率が共に大きくなるので現実的な側面からこの結果を修正し直して用いる必要がある。

そこで、空売りのある場合には、容易に効率的フロンティアを描画した投資比率を算出できることから、図 2.10 の傾向について空売りを含む全体の相対投資比率の絶対値の総和が 100%になるように騰落率上位 10 証券のポートフォリオを視覚化しなおしたものを作成している。最小分散ポートフォリオに近づくにつれて空売りの比率が減少していくので、ねじれて歪んだ投資比率の傾向が確認できる。

同様に、図 2.12 は表 2.1 のうちの証券のシャープ・レシオが大きいもの上位 10 証券について、式(2.35)の解法により投資比率を求めた傾向を図 2.10 と比較するために示したものである。その傾向は、概ね同様の特徴が得られるようである。そこで、図 2.11 とも比較のために図 2.13 を作成すると、最小分散ポートフォリオ付近の投資比率が売りのポジションのない投資になるので、図 2.11 とは異なる形状でねじれて歪んだ傾向を有することがわかる。すなわち、この場合には空売りのない場合と一致する期待収益率の区間を得るポートフォリオが存在することが改めて確認できる。

さらに、式(2.35)の解法について表 2.1 に示す月次騰落率上位 50 証券の投資比率についても調べてみるため、図示したものが図 2.14 および図 2.15 である。図 2.14 は図 2.10 の特徴と同様の傾向があり、最小分散ポートフォリオの付近の期待収益率では、その他の区間に比べて投資比率の絶対値の総和が小さいことは明らかである。また、図 2.15 は図 2.11 の傾向と同様なので、ポートフォリオに含まれる証券数の影響は見られないようである。したがって、図 2.10、図 2.12、図 2.14 のような期待収益率の大きさに応じた投資比率の変化が他の数値例についても確認できると考えられる。

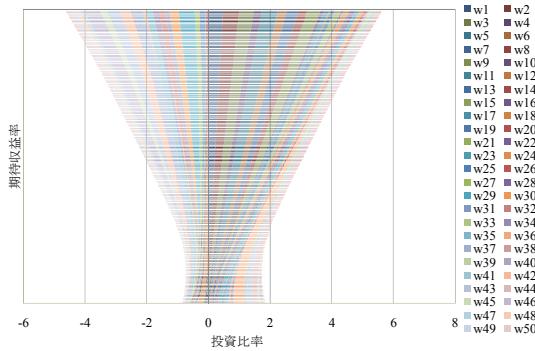


図 2.14 空売りのある場合の投資比率  
(月次株価騰落率上位 50 証券)

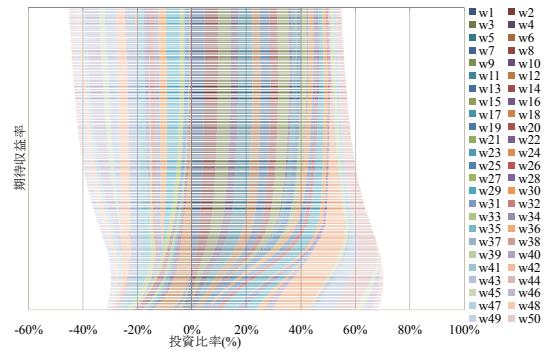


図 2.15 空売りのある場合の投資比率の  
絶対値の総和が 1 である場合  
(月次株価騰落率上位 50 証券)

#### 2.8.4 資本市場線におけるマーケット・ポートフォリオの傾向

本項では、2009年12月末の長期国債金利（通常は短期の安全資産利子率を用いる）である1.285%を月次調整し、安全資産利子率として活用する。図2.16では▲と◆が重なる点である。これを用いて、式(2.70)の平均分散モデルにより最適化の計算で得られた空売りのない場合のポートフォリオと資本市場線との交点をマーケット・ポートフォリオ◆とする。すなわち、図2.16において描かれた効率的フロンティアと資本市場線上の交点◆の投資を実施するポートフォリオである。

また、空売りのある場合の期待收益率を◆に投資するポートフォリオと期待收益率が等価になるように安全資産利子率を組み合わせたポートフォリオを考える。すなわち、図2.16の資本市場線上にポートフォリオ▲として示す投資である。このポートフォリオ▲は安全資産利子率への投資によるリスクの低減効果を図2.16から確認することができる。しかしながら、同じ期待收益率を得る方策として、空売りを検討すればリスクが軽減される効果は大きいが投資規模が空売りなしの場合よりもかなり大きい。このため、安全資産利子率との投資比率の関係も重要であることがわかる。

図2.16におけるポートフォリオ◆の投資とポートフォリオ▲の投資について、Accessによるデータベースから時系列の騰落率を得て、計量期間中20年間の騰落率の時系列推移を図示したものが図2.17である。図2.16に示す結果のとおりに、図2.17ではポートフォリオ◆の月次騰落率の時系列推移のブレ幅よりもポートフォリオ▲によるリスク低減効果が確認できる。

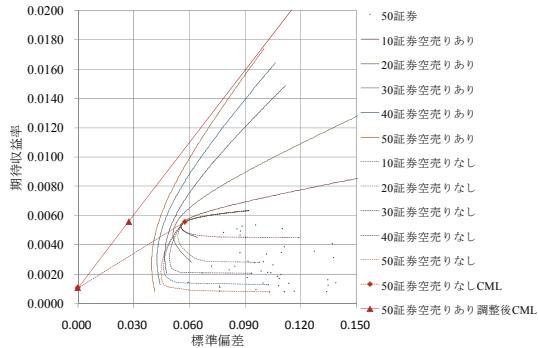


図 2.16 空売りのある場合とない場合の資本市場線のマーケット・ポートフォリオの活用（月次株価騰落率上位 50 証券）

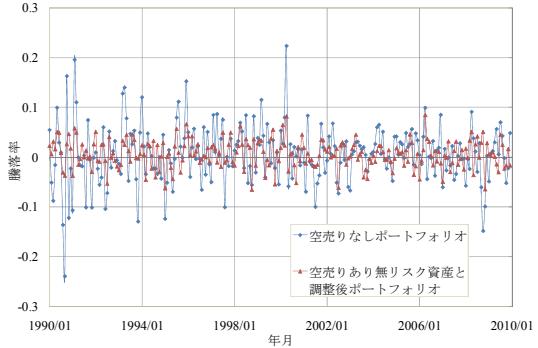


図 2.17 図 2.16 で示したマーケット・ポートフォリオの騰落率の時系列推移（月次株価騰落率上位 50 証券）

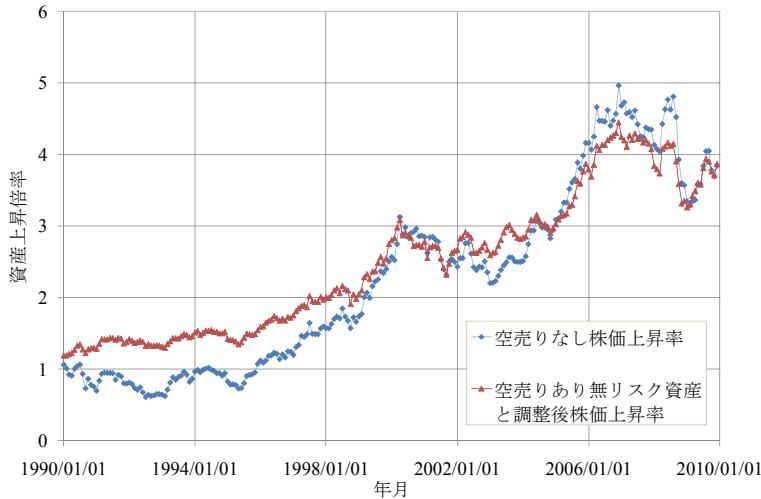


図 2.18 図 2.16 で示したマーケット・ポートフォリオの資産上昇傾向の時系列推移（月次株価騰落率上位 50 証券）

その結果として、資産上昇倍率を計量期間中の時系列推移として図示してみたものが図 2.18 である。この図 2.18 から、図 2.17 の特徴と同様にリスク低減効果の視覚化ができる。

さらに、別の数値例として期間中 20 年間の騰落率について 1993 年 1 月から 2009 年 12 月までの各月より以前の 3 年間の空売りなしのマーケット・ポートフォリオのベータを計算した場合に、インデックスとして用いたマーケット・ポートフォリオが  $\beta_Q = 1$  となる

式(2.84)が成立することも Access と Excel のデータ接続により確認できる。

したがって、本章で開発したデータベースを使用すると平均分散モデルと資本資産評価モデルに有効に活用できることが数値計算例を通じて確認できる。

### 2.8.5 シャープ・レシオの上位 10 証券の傾向

本項では、シャープ・レシオの上位 10 証券の分析に着目する。以降は上位 10 証券の分析を実施する。図 2.19 は、1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間に渡る株価上昇率の上位 50 証券を選択後、その中のシャープ・レシオが上位 10 証券である平均分散モデルの効率的フロンティアを図示したものである。同時に、後頁の付録図 2.A に計量した 20 年間の期間中、各計量期間を 60 か月である 5 年間に限定した平均分散モデルの傾向を 1 年ごとに移動させて比較できるよう視覚化している。

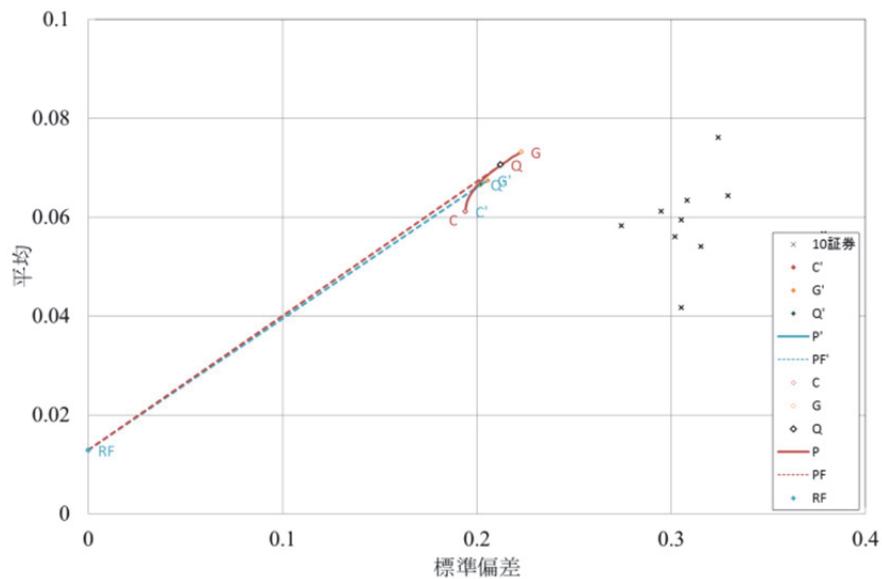


図 2.19 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間の株価上昇率上位 50 証券中、シャープ・レシオ上位 10 証券の効率的フロンティア

同様に、同期間の時系列資産の上昇倍率を視覚化すると、図 2.20 のように図 2.19 に用いられた 10 証券が、好不況の推移とともに着実に上昇した傾向がわかる。また、図 2.19 の傾向のように長期間安定的に株価上昇を収めた証券を選定しているため、図 2.19 の効率的フロンティアは、計量期間を 5 年間に限定した効率的フロンティアとして付録図 2.A に示す個々の効率

的フロンティアと比較しても小さな範囲に収まっていることもわかる。図 2.20 にはポートフォリオ  $Q'$  を赤色実線で、 $C'$  を黒色実線で示し、時系列な資産の上昇推移と同時に分散投資によるリスク低減効果が視覚化できている。

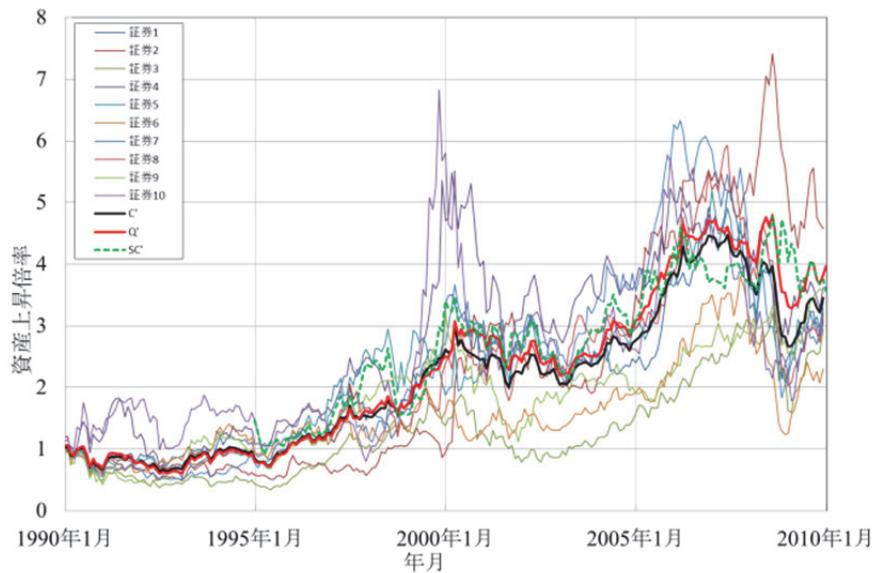


図 2.20 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間の証券 10 証券と最小分散ポートフォリオと接点ポートフォリオの資産上昇倍率推移図

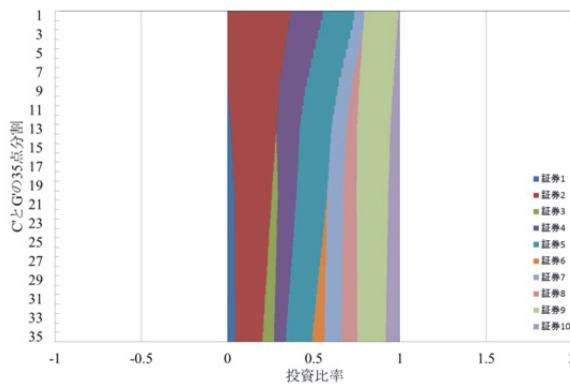


図 2.21 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間のポートフォリオ  $G'$  からポートフォリオ  $C'$  までの投資比率(空売りなし)

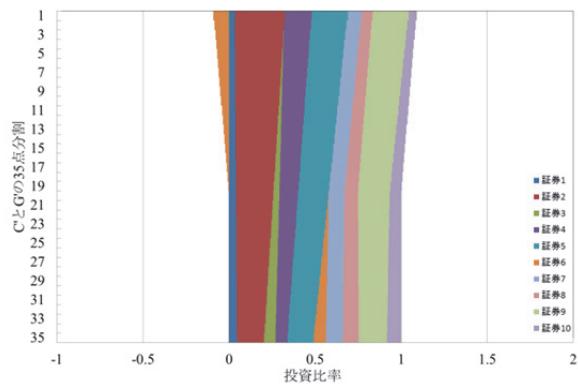


図 2.22 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間のポートフォリオ  $G'$  とリターンの同じポートフォリオからポートフォリオ  $C$  までの投資比率(空売りあり)

さらに、図2.19では空売りの有無に関わらず、ポートフォリオCとC'は一致しており、このことは空売りを認めない場合の最小分散ポートフォリオの証券投資比率を示す図2.21と、空売りを認める場合の証券投資比率を示す図2.22の縦軸の投資比率35番からも理解できる。図2.21では、空売りを認めない場合のポートフォリオG'を縦軸の証券投資比率1番に、ポートフォリオC'を縦軸の投資比率35番に示し、その間の期待収益率を等分割し、ポートフォリオP'の投資比率を示している。図2.22では、期待収益率がポートフォリオG'とポートフォリオC'の間に図2.21と同じ期待収益率の位置に設定し、ポートフォリオPの投資比率を示している。この図2.21と図2.22から空売りの有無の影響が比較的小さいことが付録図2.Aと比較してもわかる。

### 2.8.6 計量期間5年ごとの平均分散モデルの推移

ところで、付録図2.Aには、1995年1月から2009年12月までの15年間の各時点での直近5年間、すなわち60か月間の計量期間をもとに平均分散モデルのパフォーマンス評価のために、それぞれ4つの図を示している。具体的には付録図2.Aの左側から、(a)効率的フロンティア、(b)資産上昇倍率の時系列傾向、(c)空売りを認めない場合の投資比率、(d)空売りを認める場合の投資比率の4図を1年ごとに時点を移動させて比較のために図示している。(c)と(d)の縦軸の設定は、図2.21と図2.22と同様にそれぞれのポートフォリオG'とポートフォリオC'の期待収益率を等分割して示したものである。

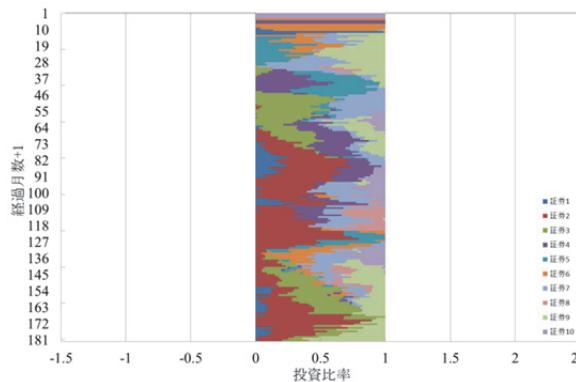


図2.23 1995年1月から2009年12月における直近60か月間のポートフォリオQ'の平均分散モデルの投資比率の推移(空売りなし)

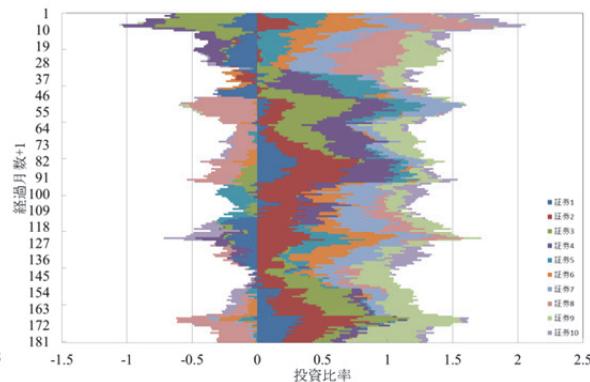


図2.24 1995年1月から2009年12月における直近60か月間のポートフォリオQ'と同じリターンの平均分散モデルの投資比率の推移(空売りあり)

特記すべき点として、この期間中で、計量期間が 1990 年 1 月から 1994 年 12 月までのポートフォリオ C' の期待収益率  $\mu_{C'}$  が安全資産利子率  $R_F$  より小さいために CML の描画が図 2.3 のように示されていないことが確認できる。

ところで、付録図 2.A において空売りのない場合のポートフォリオ Q' の投資比率が、時系列に対してどのように変化するかを図示したものが図 2.23 である。同様にポートフォリオ Q' と同じ期待収益率  $\mu_{Q'}$  を示すポートフォリオ P の投資比率の時系列推移を示したものが図 2.24 である。

これらは、本来ならば定期的に 1 年後にパフォーマンス評価を行うように実施時期を設定すべきだが、取引コスト<sup>[56][88][2]</sup>のないリバランスをできるだけ多く実施したアクティブ運用の実施結果を計量するために、1 か月ごとに計量し直しリバランスするアクティブ運用を検討して視覚化している。この条件のもとで、図 2.23 に示す投資比率の変化に従うリバランスを実施し、計量期間の直後の 1 か月後のパフォーマンスを調べたものを図 2.20 上に緑色破線として描いている。

しかしながら、想定していたパフォーマンスは得られず、ポートフォリオ Q' と同等の結果を最終的に得るような傾向が得られた。このため、この期間中に計量したデータからはリバランスによるアクティブ運用の計量予測値は優れていたものの、その直後の 1 か月後の計量結果のパフォーマンスからは証明できなかったといえる。このような不確実性を調べるために、2.8.8 では統計量について平均分散モデルの計量期間をもとに考察している。その前に、次項では平均の算術方法による違いと平均分散モデルの不確実性について取扱う。

### 2.8.7 算術平均と対数平均による平均分散モデルの比較

本項では、算術平均による平均分散モデルと対数平均による平均分散モデルの実施例を比較する。具体的には、図 2.25 のように 1995 年 1 月から 2000 年 12 月までの 5 年間の計量期間の両者の効率的フロンティアを描いたものを同時に図示している。

同じ期間の株価から図示したにも関わらず、式(2.1)による騰落率の算術平均と式(2.5)による騰落率の対数平均による平均分散モデルを用いた上で両者は別物である。このため、ポートフォリオの計量結果だけを確認するのではなく、計量プロセスの違いも十分に認識して投資の意思決定を行うことが重要である。

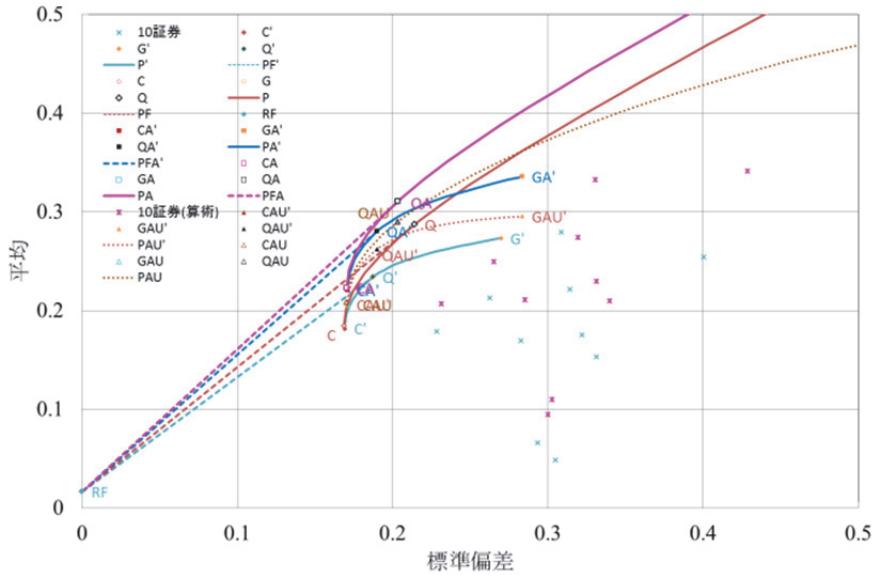


図 2.25 算術平均と対数平均のポートフォリオの効率的フロンティアの対比 (計量期間: 1995 年 1 月から 1999 年 12 月までの 60 か月間月次データより年率変換)

また、図 2.25 に橙色の破線で示すように算術平均を用いた期待効用ポートフォリオを描いたが、本章で取扱う対数平均を用いる平均分散モデルとは平均算出の取扱いの違いで対象とする効率的フロンティアの曲線の描画が大きく異なることがわかる。

### 2.8.8 統計量と平均分散モデルの比較

今野と鈴木<sup>[90]</sup>は歪度まで考慮するモデルを考察している。そこで、平均分散モデルについて計量期間中に統計量である平均、標準偏差、歪度、超過尖度による影響がどの程度かを調べる。すなわち、図 2.20 に示すように 20 年間の時間推移の中で経済的なイベントによる影響がいくらか確認できる。このため、本項では 60 か月ごとの計量期間の基本統計量への影響を考察する。

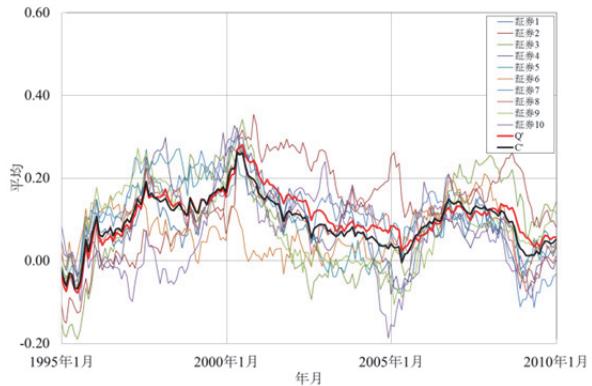


図 2.26 10 証券とポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の平均の推移

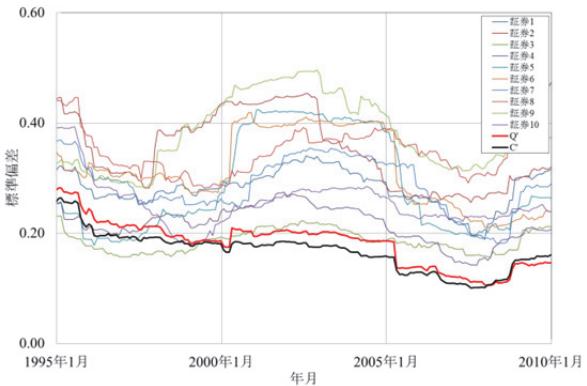


図 2.27 10 証券とポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の標準偏差の推移



図 2.28 10 証券とポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の歪度の推移

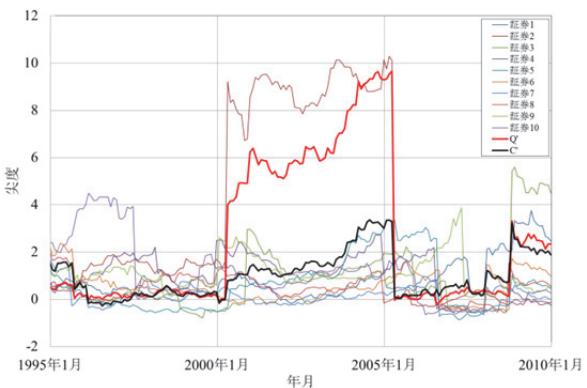


図 2.29 10 証券とポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の超過尖度の推移

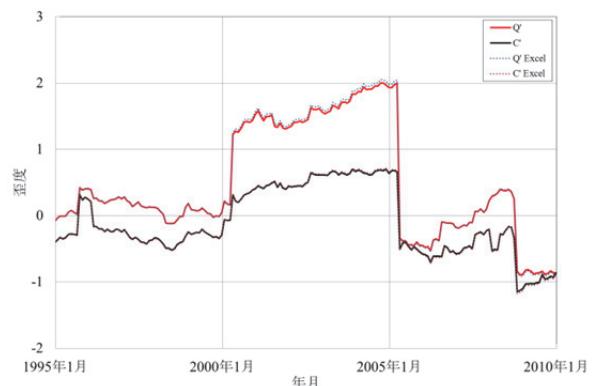


図 2.30 ユーザ定義と Excel 標準関数の歪度の比較

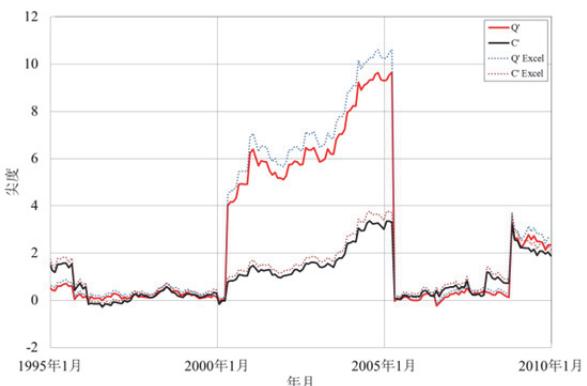


図 2.31 ユーザ定義と Excel 標準関数の超過尖度の比較

まず、図2.26に示す平均の傾向であるが、図2.27に示す標準偏差よりも値の変化の頻度は大きい。このため、この傾向が投資比率の時間推移にも影響を及ぼしていることがわかる。したがって、個別の証券の平均の変化の大きさから図2.23と図2.24のように投資比率が安定しないことがわかる。また、図2.27からわかるようにポートフォリオQ'とポートフォリオC'の標準偏差は投資対象の10証券の標準偏差の変化よりも安定している。このことは平均分散モデルを活用するには重要な特徴である。

ところで、式(2.15)と式(2.16)で示した標本数  $k$  を意味する  $T$  で割る歪度と超過尖度は、Excelの標準関数 SUMPRODUCT を用いたユーザ定義関数として活用しても良いし、もしくは直接Cellに入力して

$$\text{歪度} = \text{SUMPRODUCT}(\mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}))/\text{COUNT}(\mathbf{x})/\text{STDEV.P}(\mathbf{x})^3 \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \text{超過尖度} &= \text{SUMPRODUCT}(\mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \\ &\quad \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x})) \\ &/\text{COUNT}(\mathbf{x})/\text{STDEV.P}(\mathbf{x})^4 - 3 \end{aligned} \quad (2.86)$$

ただし

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}^T \quad (2.87)$$

$$T = \text{COUNT}(\mathbf{x})$$

と表記して活用できる。ここで、式(2.87)の  $\mathbf{x}$  は、計量する値の配列を意味する。式(2.85)と式(2.86)では、標本数  $T$  で割っているが、Excelの標準関数では、歪度と超過尖度は

$$\begin{aligned} \text{Skew}(\mathbf{R}) &= \frac{T^2}{(T-1)(T-2)} \frac{m_3}{s^3} \\ \text{Kurt}(\mathbf{R}) &= \frac{T^2}{(T-1)(T-2)(T-3)} \cdot \frac{(T+1)m_4 - 3(T-1)m_2^2}{s^4} \end{aligned} \quad (2.88)$$

ただし

$$m_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^k$$

$$s_k = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^2} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{R} = \{R_1, \dots, R_n\}^T$$

なので、式(2.85)と式(2.86)と比較すると若干の差異を含んでいる。ただし、このとき  $\mathbf{R}$  は騰落率のデータを示すセル配列である。これまでの計量期間は 60 か月間なので、 $T = 60$  が影響する。すなわち、歪度と超過尖度に関する式(2.88)と式(2.85)の差異は  $T$  に依存している。

一方、図 2.27 の標準偏差、図 2.28 の歪度、図 2.29 の超過尖度からは、時系列データの計量期間が重なる期間の影響が明確に表われ、値の変化が連動している様子がわかる。すなわち、2000 年 5 月から 2005 年 4 月までの間で特定の証券の歪度と超過尖度が大きくなっている。このことは同様に標準偏差でも影響を確認できるが、ポートフォリオ Q' とポートフォリオ C' の標準偏差には、分散投資によるリスク低減効果も示されている。

したがって、歪度と超過尖度の分母に標準偏差があるため、これらの値の大きさへの影響が明確に表われることがわかる。この傾向については、図 2.28 と図 2.29 に視覚化された特徴からも再確認できる。

さらに、この計量期間に対する歪度は、図 2.30 にユーザ定義関数と Excel 標準関数として図示している。両者の計算結果はほとんど誤差がない。すなわち、両者の相対誤差は約 2.52% で一定である。これに対して、超過尖度は、図 2.31 に示されるように値が大きいほど、ユーザ定義関数と Excel 標準関数の誤差が大きく、場合により相対誤差の取扱いには注意を要する。このため標本数を考慮し、ユーザ定義関数は使用することが望ましい。

本項では、計量期間  $T = 60$  の平均分散モデルに対する統計量について調査したが、対数平均を用いる平均分散モデルの平均は、計量期間において証券価格の期首価格と期末価格による騰落率の算出構造式のために、付録図 2.A と図 2.26 から図 2.31 までの傾向より投資比率が安定しないことが改めてわかる。また、高次統計量は計量期間を時系列で重複する場合には同じ要因でしばらくの期間、同じ傾向が連動することも理解できる。したがって、統計処理を行う場合には、対象とする計量期間について適切に分割を設定しながら実施することが望ましい。

### 2.8.9 時系列傾向と平均分散モデルの考察

2.8.8 では歪度と超過尖度を含めて同期間を比較する分析を実施した。石島と内田<sup>[87]</sup>は自己相関の有無に関するモデルを紹介している。そこで、本項では1995年1月から2009年12月までの直近60か月間のそれぞれの計量期間の時系列の影響を考察するために自己相関係数を計算している。

たとえば、 $k$ 次の自己共分散はExcelの標準関数SUMPRODUCTを用いてユーザ定義関数を活用するか、もしくは直接Cellに入力して

$$\begin{aligned} k\text{次の自己共分散} &= \text{SUMPRODUCT}( \\ &\mathbf{x}_1 - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_2 - \text{AVERAGE}(\mathbf{x})) / \text{COUNT}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.90)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_1, \dots, x_n\}^T \\ \mathbf{x}_1 &= \{x_1, \dots, x_{n-k}\}^T \\ \mathbf{x}_2 &= \{x_{k+1}, \dots, x_n\}^T \end{aligned} \quad (2.91)$$

である。ここで、 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{x}_1$ 、 $\mathbf{x}_2$ は計量に用いられる値のセル配列である。

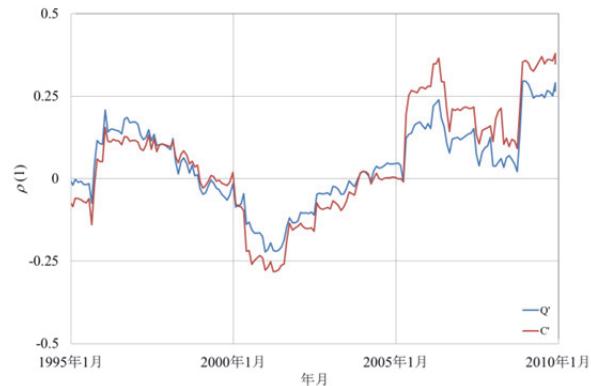


図2.32 ポートフォリオQ' とポートフォリオC' の1次自己相関係数の推移



図2.33 ポートフォリオQ' とポートフォリオC' の2次自己相関係数の推移

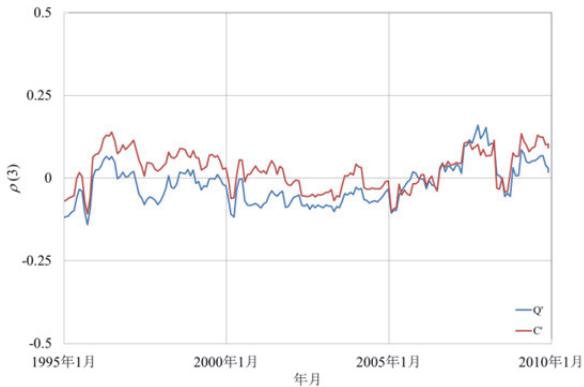


図 2.34 ポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の 3 次自己相関係数の推移

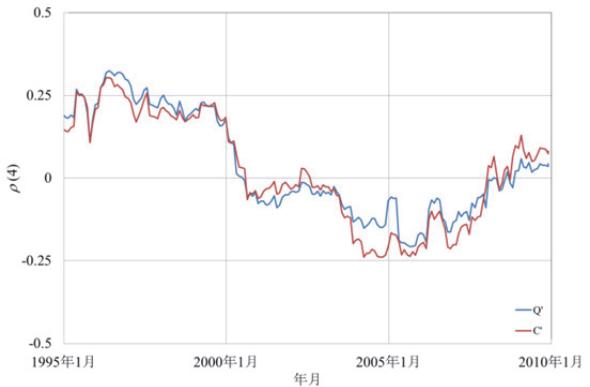


図 2.35 ポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の 4 次自己相関係数の推移

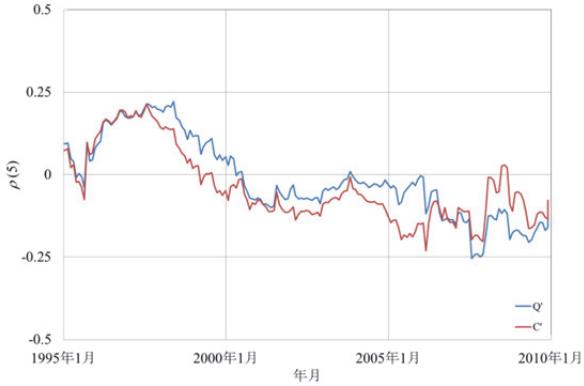


図 2.36 ポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の 5 次自己相関係数の推移

式(2.90)と式(2.91)を用いて、図 2.32 から図 2.36 にそれぞれ 1 次自己相関係数から 5 次自己相関係数について計量期間中の傾向を図示している。

計算結果と図 2.32 から図 2.36 までの傾向より、全体的には 1 次自己相関係数、2 次自己相関係数、3 次自己相関係数の順に少しずつ減衰している様子がわかる。これに対し、4 次自己相関係数と 5 次自己相関係数は、3 次自己相関係数より大きい結果が得られている可能性がある。

そこで、10 証券とポートフォリオ  $Q'$  と  $C'$  について、1990 年 1 月から 1994 年 12 月まで、1995 年 1 月から 1999 年 12 月まで、2000 年 1 月から 2004 年 12 月まで、2005 年 1 月 2009 年 12 月までの 5 年ごとに 4 分割し、図 2.37 に示すようにコレログラム(本来は縦軸と横軸

の表示は逆表示)の図示を試みている。

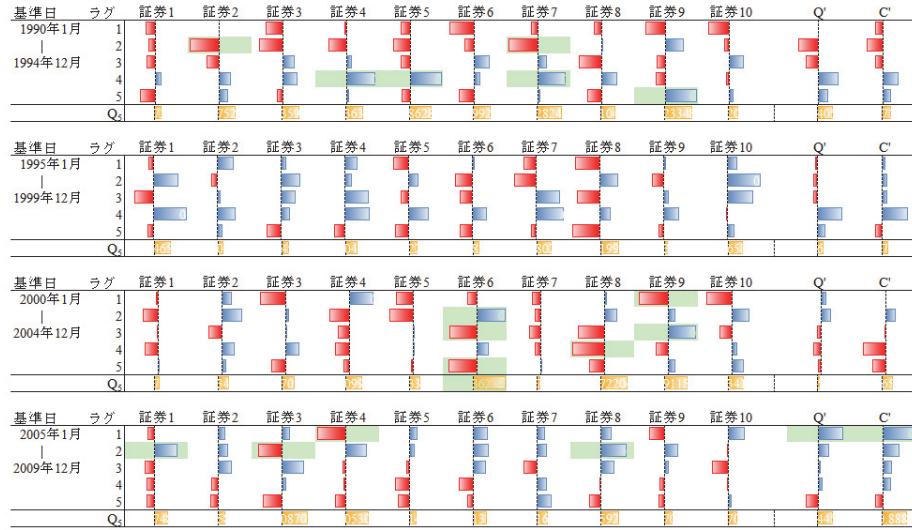


図 2.37 自己相関係数のコレログラム

このとき、図 2.37 では有意となる臨界値  $\pm 0.25$  を超える場合には、薄緑色で背景を表示している。また、検定として式(2.24)の Ljung-Box 統計量  $Q_5$  を算出し、図 2.37 のコレログラムの下に値の大きさのイメージを黄土色で表示している。個別証券では時系列への影響はそれぞれに確認されているが、図 2.37 からポートフォリオへの影響は小さくなっていることが確認できる。

### 2.8.10 同時分布と平均分散モデルの考察

一方で、平均分散モデルと同時分布もしくは散布図の比較調査も重要である。そこで、付録図 2.B に示すように 1995 年 1 月から 2009 年 12 月まで直近 60 か月間のポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  の同時分布について 1 か月ごとの時間推移を図示している。そして、空売りなしの場合を左図の散布図として記載している。同時に、右図にはポートフォリオ  $Q'$  とポートフォリオ  $C'$  とそれぞれ同じ目標値とする平均について空売りがある場合の散布図の傾向として図示している。付録図 2.B の散布図と図 2.5(a)の同時分布の傾向は相関係数の値の大きさが近いため、同様の傾向を示すことがわかる。しかし、一方で前項までで考察した統計量の不確実性や時系列の不確実性がバラツキの様子としてそれぞれの計量期間の特徴に表れていることもわかる。また、2.6 でも記述したとおり、実際にはこれに

投資比率の不確実性を考慮する必要があるかもしれない。

すなわち、実際の運用には計量期間の直後に、理論値に基づく証券投資比率どおり売買を行うことは難しいことがわかる。このため、当月の高値と安値を参考値に騰落率への影響を考察する。すなわち、高値と安値の騰落率に影響する度合いとして

$$\text{高値率} - \text{安値率} = \log\left(\frac{\text{当月高値}}{\text{前月終値}}\right) - \log\left(\frac{\text{当月安値}}{\text{前月終値}}\right) \quad (2.92)$$

なる指標を定義する。図2.38では、この高値率-安値率と騰落率の時系列を図示している。

図2.38 上に図示は実施していないが、個別の10証券の傾向も大体同じ傾向である。経済的なイベントの前後の高値と安値の差異が大きくなる傾向があり、翌月内に実施するポートフォリオのリバランスがある場合、計画通りに執行できない可能性がある。実際には手数料<sup>[88]</sup>を含む取引コスト<sup>[56][2]</sup>も考慮する必要があり、この不確実性についても見積もあることが重要である。

以上、平均分散モデルの不確実性に関して多岐にわたり確認できるのだが、それにもかかわらずにデータ分析を通じて分散投資のリスク低減効果を再確認することができた。

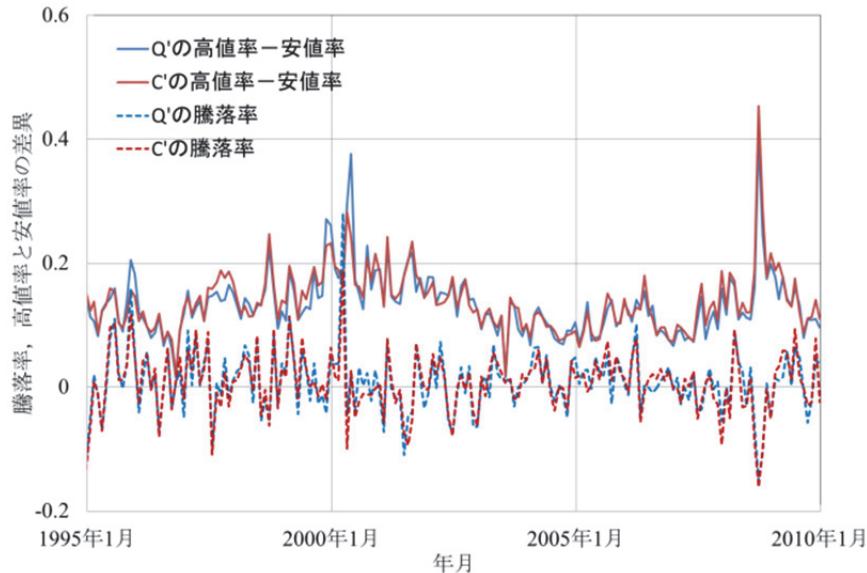


図2.38 高値率と安値率の差異と騰落率の比較

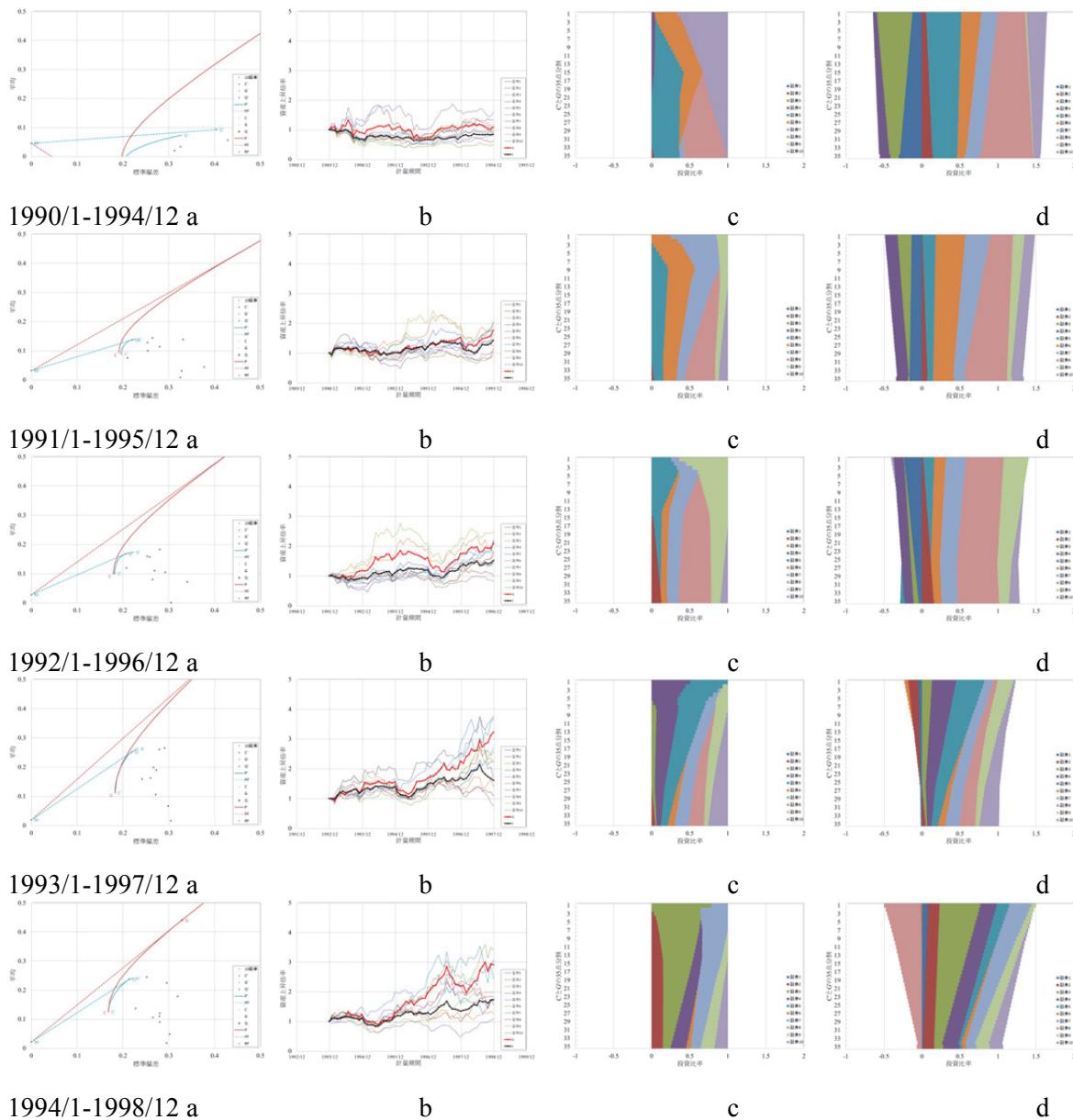
## 2.9 結 言

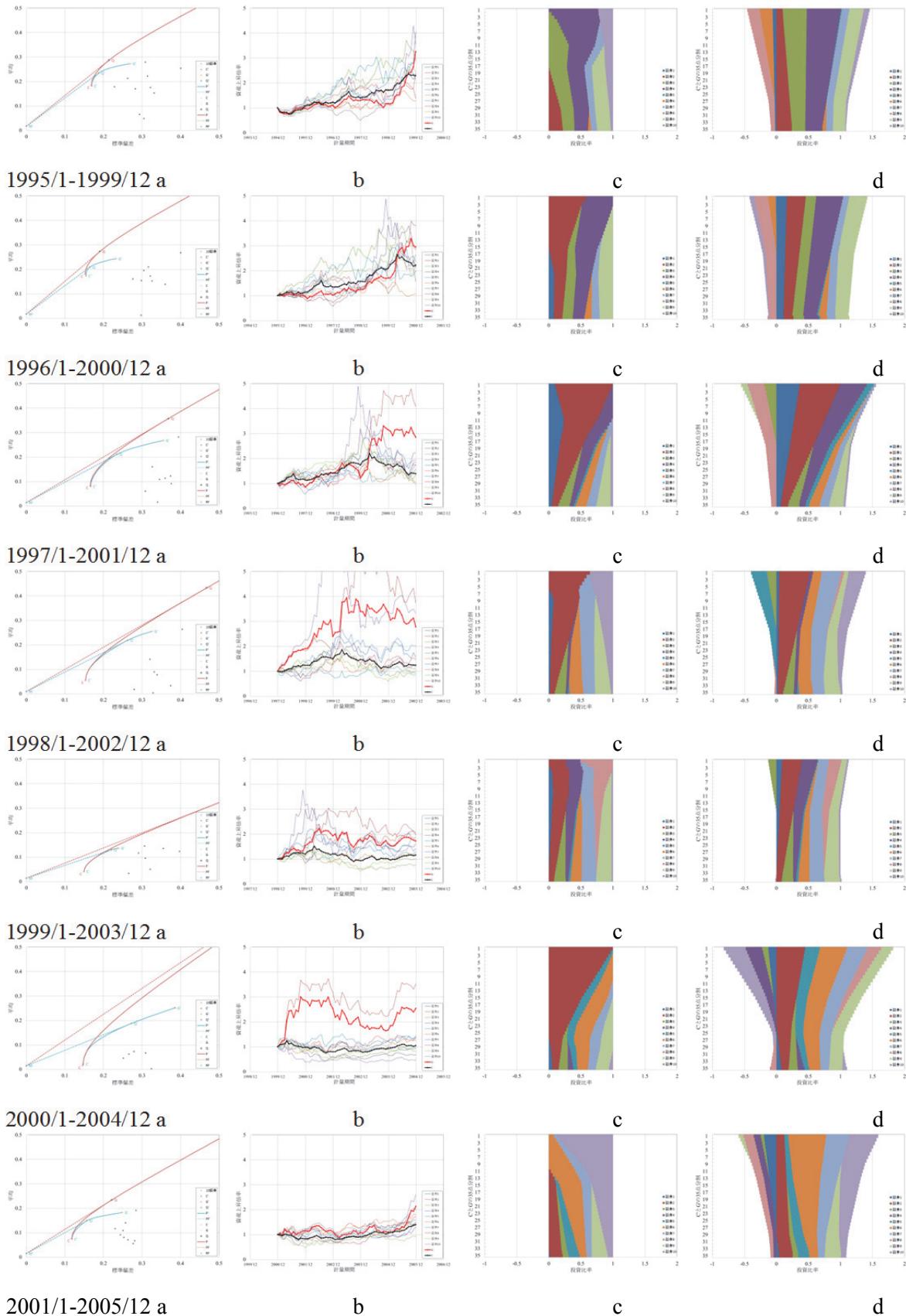
本章では、平均分散モデルの数理モデルの再考と Excel による 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までのデータ分析を通じて、その特徴や不確実性の考察を実施した。まず、数理モデルを再考し、最小分散ポートフォリオ、接点ポートフォリオ、最適成長ポートフォリオの特徴を再確認できた。そして、同時分布による平均分散モデルの特徴を考察し、不確実性を有するもののリスク低減効果を確認できた。また、数値実験の中に手数料は含めずに各月ごとのポートフォリオを構築し、アクティブ運用の良好なパフォーマンスを期待したが、あらかじめ長期で設定したマーケット・ポートフォリオと同等以上の成果は収められなかった。したがって、限られた条件下ではあるが、アクティブ運用の成果がベンチマーク運用よりも必ずしも良い成果を残すとは言えないことを一例として示した。

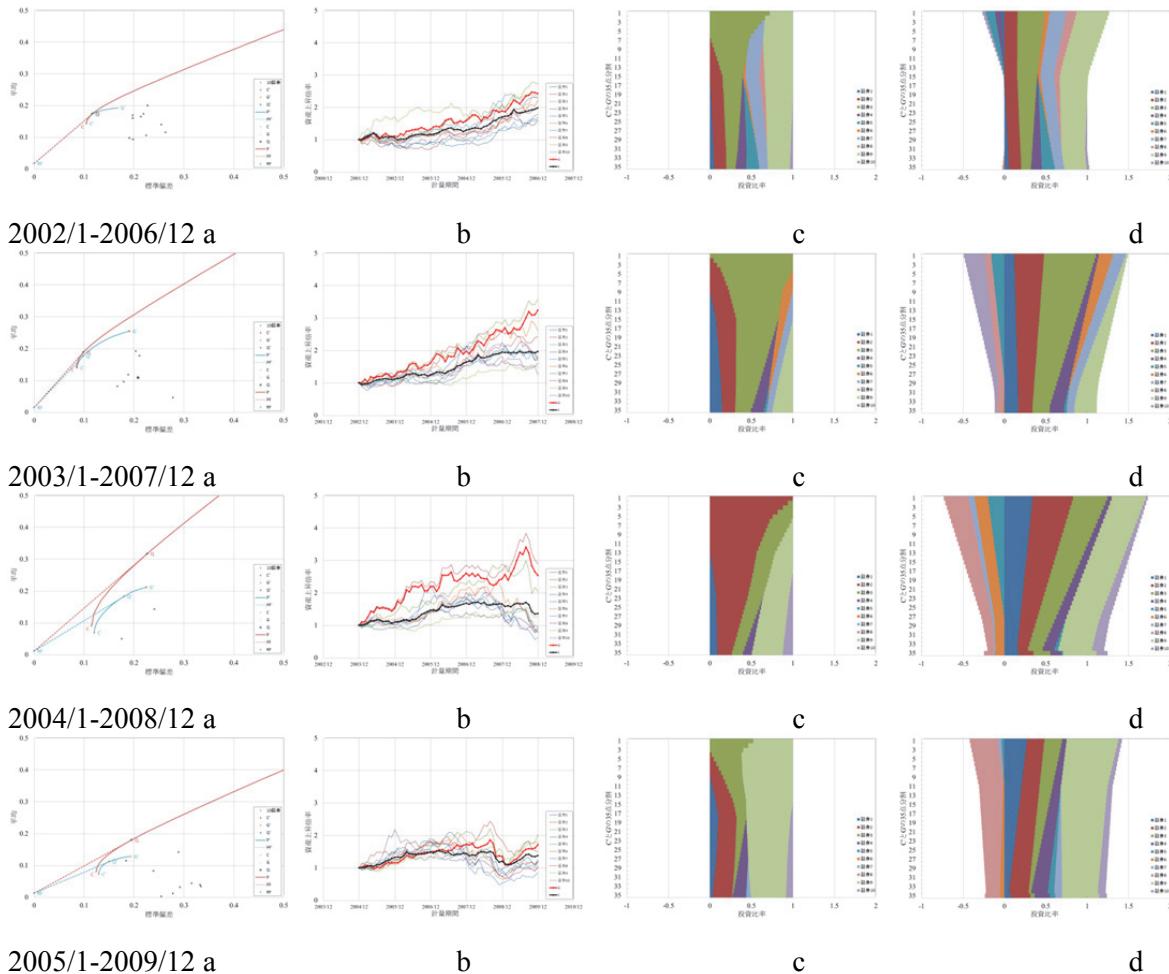
以上をもとに、計量期間中に得られた結果より、理論とデータ分析の同一の傾向と不確実性について改めて再検証することができた。

## 付録図 2.A 計量期間 60か月ごとの平均分散モデル

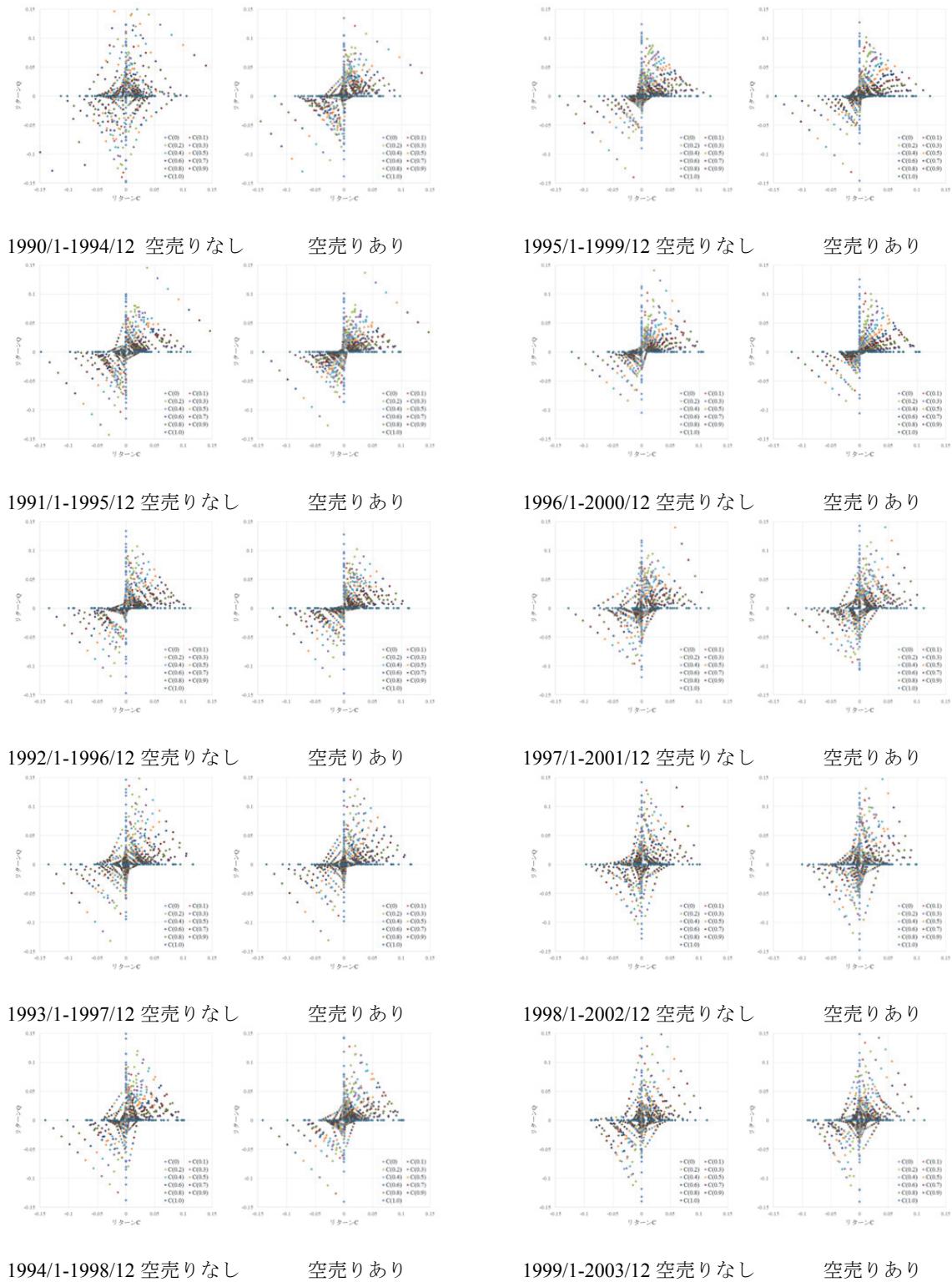
- (a) 効率的フロンティア,
- (b) 資産上昇倍率,
- (c) 投資比率(空売りなし),
- (d) 投資比率(空売りあり)

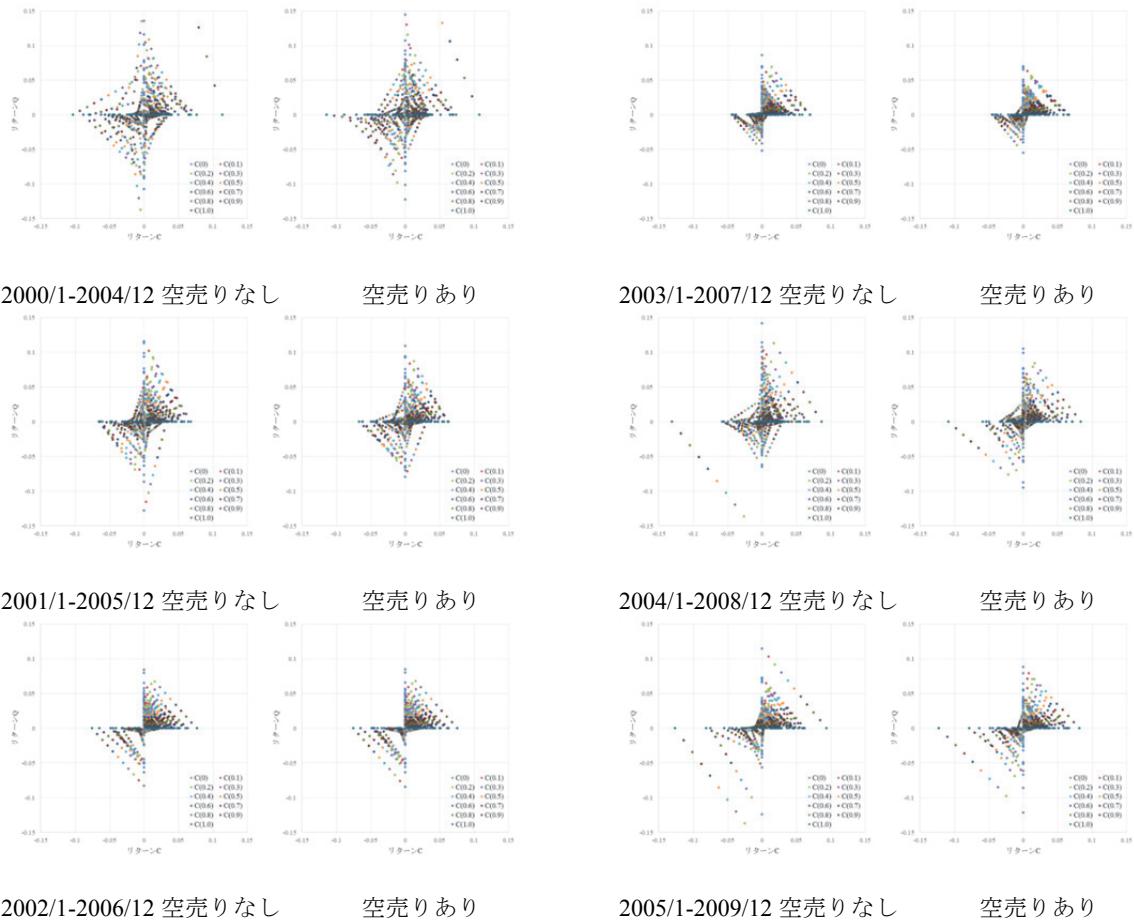






付録図 2.B 同時分布(散布図)による平均分散モデルの比較





## 3章 手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの賭け<sup>1</sup>

### 3.1 緒 言

市場が効率的だと想定すると、市場全体のアクティブ運用におけるパフォーマンスの合計はゼロである。この状態に手数料を加えると公平なゲームがマイナス・サム・ゲームになる。本章では、市場全体をコイン投げの繰り返しゲームに例えて分析を試みている。このとき、手数料の分だけ、超過リターンは負である。それでも元本以上を得る勝者が一定以上の割合で存在することを想定し、以下のゲーミングを考察する。

まず、ゲーミングとは本章の意図とは異なるが、軍事やビジネス状況において何かを教えたり、問題解決を促したりするために開発されたゲームを実施することを意味する<sup>[107]</sup>。OR 学会誌<sup>[119]</sup>でも、かつて同様の意義で特集が組まれたことがあり、今日までにその発展が実社会に活かされている。

一方で、本章が意図するゲーミングはギャンブリングと同義語として用いられることがある<sup>[68]</sup>。遙か昔に、ギャンブリングを賭け<sup>[69][70]</sup>という意味で用いたころから、時代を得ながらカジノを中心としてゲーミング企業という言葉を使う慣習になったようである。すなわち、賭博業を意味するギャンブリング産業という呼び方は、家族連れのテーマパークとして変身をとげたラスベガスなどのリゾート地において、ゲーミング産業という呼び方に変わってきたように、ゲーミングを用いることが一般的である。また、アメリカのいくつかの大学でも、観光学科にゲーミング・マネジメントという単位修得科目を設置している<sup>[68]</sup>。したがって、本章では後者のゲーミングをギャンブリングと同義語として用いている。

ギャンブリングを意味する実用的な研究の中には、最近では、パリミュチュアル方式のロトに対して、期待賞金額の基準のもとで最適な賭けを導き出す研究<sup>[102]</sup>もなされている。このような実例を含め、本章ではギャンブリングでの実践成果の数理的特徴を調べるために、コイン投げの繰返しゲームを通じて基礎的な研究を目的としている。このため、原始的な

---

<sup>1</sup> 出典： 中西真悟，“手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの賭けにおけるすべての勝者の獲得賞金の総和最大化とその試行回数の関係”，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.55, pp.1-26 (2012年12月)

ギャンブリングで胴元が存在したように、論文中では胴元をゲーミング企業と呼ぶことにする。このゲーミング企業は収益を追求するが、プレイヤーの一定の満足が得られなければ、ゲームを開催しているマーケットを失う<sup>[68]</sup>。このため、本章では、これまであまりゲーミングの中で取扱われていなかった手数料に着目し、プレイヤーの満足とゲーミング企業の収益について取扱っている。具体的には、本章では手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの勝者の獲得賞金の特徴について取扱っている。このとき、本章で取扱う勝者の意味は、コイン投げを繰返し試行した結果、元本割れをしなかったプレイヤーを勝者と定義する。逆に、元本割れをしたプレイヤーを敗者と記述を区別する。

ここで、コイン投げの傾向について、ゲーミングに限定せずにこれまでの研究動向を大別すると、

- (1) 確率過程として取扱う研究<sup>[117][116][122][124]</sup>.
- (2) コイン投げの平均の挙動を取扱っている研究<sup>[117][125][126][24][29]</sup>.
- (3) コイン投げの乱数発生について取扱っている研究<sup>[120][114][115]</sup>.
- (4) コイン投げの特徴を数理的もしくは物理学的に取扱っている研究<sup>[109][128][103][106]</sup>.
- (5) コインをゲームに応用している研究<sup>[110][123]</sup>.

のような研究動向がわかる。特に、本章で重要な(1)については、確率過程をランダム・ウォークとして取扱い、試行回数が大きい場合には、正規分布における挙動との関連が注目されるので、ファイナンスをはじめ、多くの分野でその説明に活用されている<sup>[113][117]</sup>。

一方、効用関数や価値関数の分析について、意思決定の側面からの研究もなされてきた<sup>[29][127][112][104][105]</sup>。プレイヤーは獲得賞金の規模ではなく、本来は期待効用の最大化、価値関数の感応度最大化をもとに行動するが、プレイヤーを勧誘するマーケティング戦略ではなく、ゲーミング企業はプレイヤーのゲーム試行の結果、獲得賞金の総和が最大になるよう検討することも重要である。そこで、賭けによる獲得賞金の総和の関係を直接示す価値を期待結果として、本章では取扱うこととする。このため、心理的側面からの様々な研究がなされてきた近年の傾向<sup>[29]</sup>と違い、数理的にモデル構築を展開する。

ところで、実際に多くのプレイヤーがそれぞれ独立にコイン投げを繰返し、ゲームを試行するとき、ゲームを運営するゲーミング企業は、コイン投げというゲームを開催するマーケットを有しているので、参加しているプレイヤーから各1回の試行に対する手数料を得ることができる。このため、ゲーミング企業はマーケットにおいてプレイヤー数が多く、かつ、プレイヤーが繰返しコイン投げを続けてくれているうちは、収益を得続けるこ

とができる。したがって、ゲーミング企業の最適戦略はゲームを止めないことになる<sup>[69]</sup>。

しかしながら、プレイヤーはコイン投げを繰返して、ゲームの勝敗成績による利得もしくは損失の傾向と、ゲーミング企業に支払う手数料の大きさの影響で、コイン投げを繰返す行為が続かなくなり、マーケットから退出することも考えなければならない。また、一般には、マーケットとしてコイン投げを繰返し行う場合には、手数料がいくらで、いつ、何人のプレイヤーが同時にそれぞれコイン投げを試行しているか、プレイヤーの人数と時刻におけるその変動も考慮する必要がある。

そこで、本章では、手数料の大きさにより、プレイヤーが何回まで続けてコイン投げを繰返すかの特徴を調べるために、プレイヤーの人数が一定のもとで、プレイヤーが一定回数までコイン投げを繰返し続けるものとしてマーケットからの退出を認めない制約を与えることとする。また、各プレイヤーは独立にそれぞれコイン投げを繰返し続けるもの(i.i.d.<sup>[104][105]</sup>)として、ゲーム理論<sup>[130]</sup>で取扱うようなプレイヤー間の取引や協力を排除してモデルの単純化を行ったもとで、ゲーミングのいくつかの特徴を調べている。すなわち、次節のとおり前提条件を設定し、ゲーミングの特徴としてプレイヤーのうち勝者に限定したプレイヤーの総獲得賞金の総和の最大値と、ゲーミング企業が設定する手数料の傾向について、数理的現象にべき乗回帰分析を用いて調べている。

その結果に基づいて、ゲーミング企業が勝者の獲得賞金の期待利得の最大化を考慮したゲームの試行回数を、決定するための意思決定の基準について考察している。得られた基準から、不確実な状況下において勝者のリスク回避的な特徴と、敗者のリスク愛好的な特徴を手数料による費用の関係として考察している。これを、期待利得に関する2組のべき関数<sup>[29][20]</sup>として、鏡映効果<sup>[21]</sup>の視覚化を試みている。さらに、得られたゲームの停止試行回数において、ゲーミング企業の期待収益と、勝者のみの獲得賞金の期待利得は均衡していることを導出している。

### 3.2 手数料を考慮したコイン投げおよびサイコロ投げの賭けの前提条件

一般にゲーミングにおいて、各プレイヤーが支払う金額よりも得られる期待値は低い。にもかかわらず、宝くじ、競馬、競輪、競艇、パチンコやカジノなどに多くのプレイヤーが参加しマーケットが成立する。すなわち、マーケットに参加する多くのプレイヤーは負けるにもかかわらず、リスクに対して愛好的になる傾向がある。これには、期待値が低くなる要因が考えられる。そこで、本章では

- (A) コイン投げの勝ち負けの確率が  $1/2$  の場合(二項モデル)
- (B) コイン投げの勝つ確率が負ける確率より若干小さい場合(二項モデル)
- (C) サイコロ投げで出る目の確率がそれぞれ  $1/6$  の場合(多項モデル)

の3つのケースで考察する。このとき、既に期待値が小さくなるのは、(B)のケースのみであるが、手数料を設定すると、3つの条件は期待値以下になる。すなわち、(A)(B)(C)には、ゲーミング企業の手数料、(B)には勝者の数が敗者の数よりも小数になるゲームの構造や仕組みによる費用が加わる。

以下、コイン投げとサイコロ投げの賭けについて、本章で仮定する前提条件をそれぞれ記述する。このとき、コイン投げで、(A)は勝敗の確率が等確率の場合として、(B)は勝つ確率が負ける確率よりも若干小さい場合として、後ほど定義するモデルの妥当性を数値実験で取扱うために設定している。(C)は(A)の勝敗の多項に分岐する場合の例題としてコイン投げの繰返しゲームと同様に有効かを調べるために設定している。

### 3.2.1 勝敗の確率が等確率のコイン投げの前提条件

まず、(A)についてのコイン投げである。

- (A.1) 手数料のみの条件下で、コインの表の出る確率は  $p_1 = 1/2$  の場合について取扱う。
- (A.2) 一人のプレイヤーは1回のゲーム試行に手数料  $\alpha$  円を支払い、表が出た場合には1円の賞金を得て、裏が出れば1円を支払う。このため、ゲーミング企業は1回のゲーム試行で手数料  $\alpha$  円だけ無条件に収益を得る。
- (A.3) 一人のプレイヤーは  $N$  回のゲームを独立試行で続ける。途中でゲームを終了してマーケットから退出することはできない。
- (A.4) (A.1)(A.2)(A.3)のもとで、同時に  $m$  人のプレイヤーが、互いに独立にゲームを  $N$  回だけ繰返す。

ここで、特記すべき点として、本研究の1章では、 $\alpha$  はアクティブ運用のパフォーマンスを示すインフォメーション・レシオの分子を示すトラッキング・エラーの期待収益率であった。しかしながら、本章では  $-\alpha$  は負の値を示す手数料として取扱っている。この条件下で、本章の  $\alpha$  を用いて提案する成果をまとめている。

### 3.2.2 勝つ確率が負ける確率より若干小さいコイン投げの前提条件

続いて、(B)についてのコイン投げである。

- (B.1) コインの表の確率は  $1/2$  よりも若干小さい条件下  $p_1 < p_2 (= 1 - p_1)$  で、手数料  $\alpha_0$  円とゲームの仕組みによる費用  $\alpha_1 (= p_2 - p_1 = 1 - 2p_1)$  円も含めた場合について取扱う。これらを併せた費用を、単に手数料  $\alpha (= \alpha_0 + \alpha_1)$  円と呼ぶこととする。
- (B.2) 一人のプレイヤーは 1 回のゲーム試行に手数料  $\alpha (= \alpha_0 + \alpha_1)$  円を支払い、表が出た場合には 1 円の賞金を得て、裏が出れば 1 円を支払う。このため、ゲーミング企業は 1 回のゲーム試行で手数料  $\alpha$  円だけ無条件に収益を得る。
- (B.3) 一人のプレイヤーは  $N$  回のゲームを独立試行で続ける。途中でゲームを終了してマーケットから退出することはできない。
- (B.4) (B.1)(B.2)(B.3)のもとで、同時に  $m$  人のプレイヤーが、互いに独立にゲームを  $N$  回だけ繰返す。

### 3.2.3 サイコロ投げの前提条件

次にサイコロ投げである。

- (C.1) 手数料のみの条件下で、サイコロの目の出る確率はそれぞれ  $1/6$  の場合について取扱う。
- (C.2) 一人のプレイヤーは 1 回のゲーム試行に手数料  $\alpha$  円を支払い、サイコロを試行して出た目の数から、サイコロの目の期待値 3.5 を引いた値だけ賞金を得る。このため、ゲーミング企業は 1 回のゲーム試行で手数料  $\alpha$  円だけ無条件に収益を得る。
- (C.3) 一人のプレイヤーは  $N$  回のゲームを独立試行で続ける。途中でゲームを終了してマーケットから退出することはできない。
- (C.4) (C.1)(C.2)(C.3)のもとで、同時に  $m$  人のプレイヤーが、互いに独立にゲームを  $N$  回だけ繰返す。

以上の三つの条件を設定し、後ほど記述するモデルの有効性について数値実験を通じて考察する。次節では基本原理について(A)を中心にモデルを説明する。

### 3.3 一人のプレイヤーの利得モデル

まず、一人のプレイヤーのコイン投げのモデルを設定する。

#### 3.3.1 一人のプレイヤーが1回ゲームを試行するモデル

1回のゲームを試行するとき、 $n$ 個(コイン投げでは $n=2$ 、サイコロ投げでは $n=6$ )の獲得賞金 $c_i(i=1,\dots,n)$ を想定し、試行回数が $\tau$ 番目における1回のゲームの一人のプレイヤーの獲得賞金は

$$\begin{aligned} c(\tau) &= \sum_{i=1}^n c_i X_i(\tau), \\ \sum_{i=1}^n X_i(\tau) &= 1, \\ X_i(\tau) &= \begin{cases} 1 & (\text{選択される}) \\ 0 & (\text{選択されない}) \end{cases} \\ (i &= 1, \dots, n; \tau = 1, \dots, N) \end{aligned} \tag{3.1}$$

で表される<sup>[118]</sup>。ここに、 $X_i(\tau)=1$ は、 $i$ 番目の事象が選択され、それ以外の $X_j(\tau)(i \neq j)$ はすべて0とみなされることにより、賞金 $c_i$ を獲得するモデルである。たとえば、コイン投げでは1回の試行で1円だけ取得か、もしくは1円を支払うコイン投げ<sup>[104][105][113]</sup>を想定すると、基本的に2項モデルとして表現できる。これに対して前提条件(A)(B)にもとづき、 $c_i(i=1,2)$ には $\alpha$ だけゲーミング企業が取得する手数料が減算される。すなわち

$$\begin{cases} c_1 = 1 - \alpha & (\text{表}) \\ c_2 = -1 - \alpha & (\text{裏}) \end{cases} \tag{3.2}$$

と見積もることができる。また、サイコロ投げでは、前提条件(C)にもとづき

$$\begin{cases} c_1 = 1 - 3.5 - \alpha & (1\text{の目}) \\ c_2 = 2 - 3.5 - \alpha & (2\text{の目}) \\ c_3 = 3 - 3.5 - \alpha & (3\text{の目}) \\ c_4 = 4 - 3.5 - \alpha & (4\text{の目}) \\ c_5 = 5 - 3.5 - \alpha & (5\text{の目}) \\ c_6 = 6 - 3.5 - \alpha & (6\text{の目}) \end{cases} \tag{3.3}$$

の賞金のいずれかが一回のサイコロ投げのゲーム試行で得られるものとする。

このとき、1回の試行における期待利得は手数料だけ少なくなり、式(3.1)の期待値は

$$\begin{aligned} E(c(\tau)) &= \sum_{i=1}^n c_i p_i = -\alpha, \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1, \\ 0 \leq p_i &\leq 1 \\ (i &= 1, \dots, n; \tau = 0, 1, \dots, N) \end{aligned} \tag{3.4}$$

と表記できる<sup>[118]</sup>。ここに、 $p_i$  は  $i$  番目の事象が生起する確率である。また、その分散は

$$\begin{aligned} V(c(\tau)) &= \sum_{i=1}^n c_i^2 p_i - \left( \sum_{i=1}^n c_i p_i \right)^2 \\ &= \nu \\ (i &= 1, \dots, n; \tau = 0, 1, \dots, N) \end{aligned} \tag{3.5}$$

と同様に表記できる<sup>[118]</sup>。次項では、繰返し試行のモデルを記述する。

### 3.3.2 一人のプレイヤーが $N$ 回独立にゲームを試行するモデル

式(3.1)をもとに、試行回数  $N$  までゲームを独立試行するとき、一人のプレイヤーの獲得賞金は

$$\begin{aligned}
 X(N) &= \sum_{\tau=1}^N c(\tau) \\
 &= \sum_{\tau=1}^N \sum_{i=1}^n c_i X_i(\tau), \\
 \sum_{i=1}^n X_i(\tau) &= 1, \\
 X_i(\tau) &= \begin{cases} 1 & (\text{選択される}) \\ 0 & (\text{選択されない}) \end{cases} \\
 (i &= 1, \dots, n; \tau = 0, 1, \dots, N)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

である<sup>[118]</sup>. 本項のようにゲームを独立に試行し続けるとき, 常に式(3.1)を  $N$  回加算した期待利得を獲得することから, 試行回数  $N$  までの  $X(N)$  の期待利得は

$$\begin{aligned}
 E(X(N)) &= \left( \sum_{i=1}^n c_i p_i \right) N \\
 &= -\alpha N
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

と表される<sup>[118]</sup>. このとき, 1 回の試行で  $\alpha$  だけゲーミング企業の収益となり,  $-\alpha N$  ということはそれだけゲーミング企業に手数料を支払っていることになる. したがって, ゲーミング企業はプレイヤーにゲームを試行させ続けたいと考えている. また, このときの  $X(N)$  の分散は, 独立試行なので

$$\begin{aligned}
 V(X(N)) &= E((X(N) - E(X(N)))^2) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 p_i - \left( \sum_{i=1}^n c_i p_i \right)^2 \right) N \\
 &= \nu N
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

と同様に数学的期待値として表される<sup>[118]</sup>. この分散に従い, コインの繰返しゲームに不確実性が存在する. 次項では, この繰返し試行列を確率過程のランダム・ウォークとして, モデルの正規近似について記述する.

### 3.3.3 $N$ 回独立試行におけるモデルの正規近似

ここで、一度、基本原理を再考するために、前提条件(A)について、手数料がない特別の場合のコイン投げのランダム・ウォークに関する二項分布から、正規分布に近似できる方法について記述する<sup>[116][122][129]</sup>.

まず、手数料  $\alpha = 0$  となるコイン投げを独立に繰返し試行するランダム・ウォーク  $X(\tau)(= 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  は確率変数である。確率過程では、確率分布が試行回数を時間に捕らえ  $N$  に依存するため、ランダム・ウォークの確率関数は、時刻  $N$  までの間に合計  $N$  回だけ正か負へ移動している。このとき、正への移動回数を  $N_+$  とし、負への移動回数を  $N_-$  とすると

$$\begin{aligned} N_+ + N_- &= N, \\ N_+ - N_- &= X(N) \end{aligned} \tag{3.9}$$

が成立する<sup>[129]</sup>。ここで  $X(N)$  は正への移動と負への移動の回数の差だけで決まり、正、負の順序には依存しない。 $N$  回の移動のうち、正への移動が  $N_+$  回である確率は二項分布  $B(N, 1/2)$  に従うので

$${}_N C_{N_+} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{N!}{N_+! (N - N_+)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N \tag{3.10}$$

で与えられる。変数  $N_+, N_-$  と変数  $N, X(N)$  との関係は 式(3.9)で決まるので、これを逆に解いた

$$\begin{aligned} N_+ &= \frac{N + X(N)}{2}, \\ N_- &= \frac{N - X(N)}{2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

を式(3.10)に代入するとき、試行回数  $N$  にゲームの獲得賞金  $X(N)$  となる確率  $P_r(X(N), N)$  が得られる<sup>[129]</sup>。すなわち

$$P_r(X(N), N) = \frac{N!}{\left(\frac{N + X(N)}{2}\right)! \left(\frac{N - X(N)}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \tag{3.12}$$

と記述できる<sup>[129]</sup>.

ところで、式(3.12)には少し注意が必要である。すなわち、 $X(N)$  の取得る値は  $N$  の値が偶数と奇数に応じて、偶数か奇数に限られる。

$$\begin{cases} N \text{が偶数のとき, } X(N) = 0, \pm 2, \dots, \pm N \\ N \text{が奇数のとき, } X(N) = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm N \end{cases} \quad (3.13)$$

これは、式(3.11)で、 $N_+$  のとる値が  $N_+ = 1, 2, \dots, N$  であることを考慮している。

時刻  $N$  における獲得賞金  $X(N)$  は式(3.12)の分布に従う確率変数である。ここで、 $X(N)$  の平均と分散を求める。 $N_+$  が二項分布  $B(N, 1/2)$  に従うことを利用して

$$\begin{aligned} E(N_+) &= N \cdot \frac{1}{2} = \frac{N}{2}, \\ V(N_+) &= N \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{N}{4} \end{aligned} \quad (3.14)$$

と計算できる。したがって、式(3.11)から  $N_+ = (N + X(N))/2$  を用いるとき

$$\begin{aligned} E(X(N)) &= E(2N_+ - N) \\ &= 2 \cdot \frac{N}{2} - N \\ &= 0 \\ V(X(N)) &= E(X(N)^2) \\ &= E((2N_+ - N)^2) \\ &= 4 \cdot \frac{N}{4} \\ &= N \end{aligned} \quad (3.15)$$

と計算される<sup>[129]</sup>。すなわち、ランダム・ウォークでは平均は 0，分散は  $N$  である。

ここで、 $N$  が大きいときには正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{x^2}{2N}\right) \quad (3.16)$$

に従うことが予想される。これを示すためにスターリングの公式<sup>[129]</sup>

$$\log N! \cong \left( N + \frac{1}{2} \right) \log N - N + \frac{1}{2} \log(2\pi) \quad (3.17)$$

を用いるとき、式(3.12)について両辺の対数をとると

$$\begin{aligned} & \log P_r(X(N), N) \\ &= \log \frac{N!}{\left(\frac{N+X(N)}{2}\right)! \left(\frac{N-X(N)}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \\ &= \log N! - \log \left(\frac{N+X(N)}{2}\right)! - \log \left(\frac{N-X(N)}{2}\right)! - N \log 2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる<sup>[129]</sup>。さらに、右辺の各項に式(3.17)を適用して整理すると

$$\begin{aligned} \log P_r(X(N), N) &= \log 2 - \log \sqrt{2\pi N} \\ &\quad - \frac{N+X(N)+1}{2} \log \left(1 + \frac{X(N)}{N}\right) \\ &\quad - \frac{N-X(N)+1}{2} \left(1 - \frac{X(N)}{N}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

とまとめられる。ここで、泰イラー展開

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \dots \quad (-1 < y \leq 1) \quad (3.20)$$

を2次まで用いて、式(3.19)に代入すると

$$\log P_r(X(N), N) \cong \log \left( \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} \right) - \frac{x^2}{2N} + O\left(\frac{x^2}{N^2}\right) \quad (3.21)$$

を得る<sup>[129]</sup>。したがって

$$P_r(X(N), N) \cong \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{x^2}{2N}\right) \quad (3.22)$$

が得られる<sup>[129]</sup>. ここで、式(3.22)は離散分布の確率関数の近似式なので、連続分布の確率密度関数  $f(x)$  と  $x$  の周りに幅  $\Delta x$  をとった区間の確率に対応する

$$P_r(X(N), N) \cong f(x)\Delta x \quad (3.23)$$

の関係が成立する.

以上から、 $\Delta x = 2$  と置くとき、 $N$  が大きいときにはランダム・ウォークは正規分布で近似できる<sup>[129]</sup>. ゆえに、このゲームの試行回数  $N$  が大きいとき、連続変数  $t$  を用いて近似的に  $X(t) \sim N(0, t)$  に従うものとしてモデルを取り扱うことができる. この原理をもとに再び手数料  $\alpha$  を考慮した場合を想定すると、時刻  $t$  に依存した期待値  $E(X(N)) = -\alpha t$  だけ平行移動するランダム・ウォークが得られる. すなわち、図 3.1 に示すように、ゲーム試行列が放物線に従う標準偏差の制約のもとで、手数料だけ時刻に応じて平行移動する振舞いをすることが想定できる.

しかしながら、 $N$  が十分大きくない場合には、正規分布への近似精度は良くはないので、当然モデルの誤差についても考慮する必要がある. 一方で、図 3.2 に示すように、式(3.13)に従うコイン投げの繰返し試行は、離散確率変数の奇数回と偶数回による揺らぎの大きさが、顕著になるため、分布の適合度や裾野の誤差よりも結果に大きな影響を与える. このことから、一人のプレイヤーのゲーム試行回数  $N$  が十分大きくない場合には、参考程度に正規分布を活用して、モデルの動向を把握する目安に用いることが望ましい.

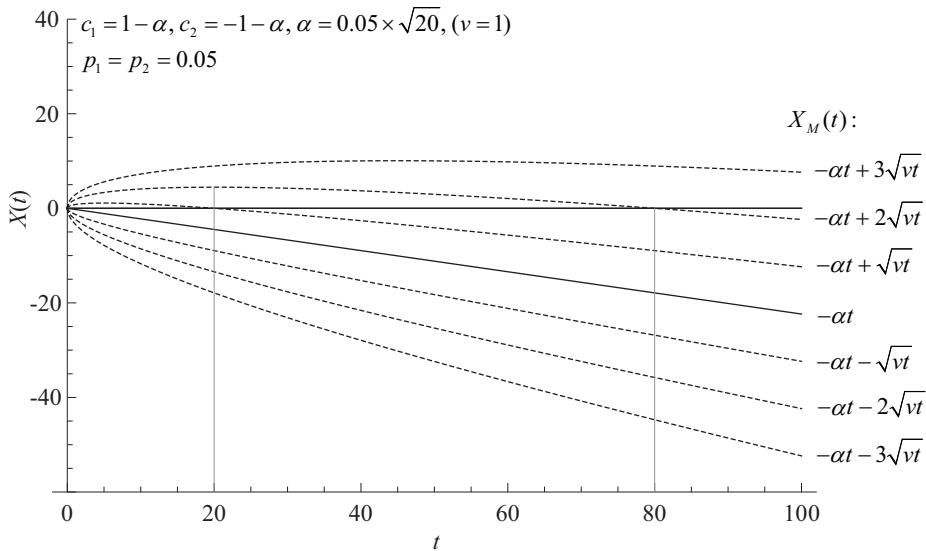


図 3.1 勝者の勝ちパターンの予想図

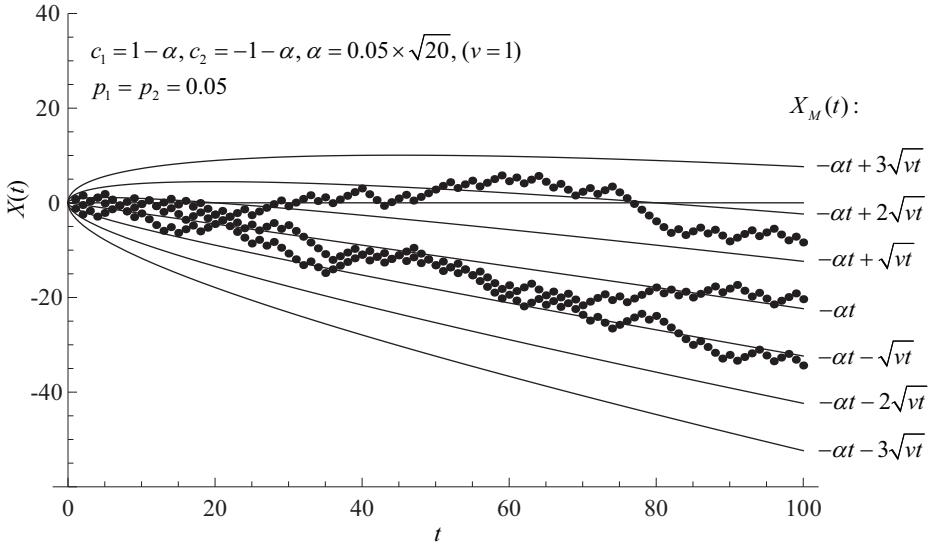


図 3.2 手数料を考慮したプレイヤーの試行列の例

### 3.3.4 一人のプレイヤーのゲーム試行列のパフォーマンス測度

ところで、ゲームの試行列の不確実性の傾向は、標準偏差  $\sqrt{vt}$  の大きさに応じて、図 3.1 に示されている。このとき、試行回数  $t$  におけるゲームの手数料を  $\alpha$  として、個々のプレイヤーの獲得賞金は、試行回数  $t$  が大きければ近似的に図 3.1 のような正規分布に従うと考えられる。勝者に限って観察すると、ゲームの不確実性に基づき最初は獲得賞金が増加するが、最大値を得て、その後減衰する傾向にあることが確認できる。図 3.2 の • 印による時系列は具体的な獲得賞金の推移の例である。

そこで、プレイヤーのうち獲得賞金が、比較的優秀な状況が手数料  $\alpha t$  により、どのように影響を受けるのか調べるために、次のようにゲームの利得が、標準偏差  $\sqrt{vt}$  の大きさに応じた成績の優秀なプレイヤーの獲得賞金予想曲線  $X_M(t)$  を定義する。すなわち

$$\frac{X(t) - E(X(t))}{\sqrt{V(X(t))}} = \lambda \quad (3.24)$$

より

$$X_M(t) = E(X(t)) + \lambda \sqrt{V(X(t))} = -\alpha t + \lambda \sqrt{vt} \quad (3.25)$$

と見積もる<sup>[118]</sup>. ここに,  $\lambda$  は標準正規分布の片側確率点を意味し, コイン投げの試行列のゲームの勝敗のパフォーマンスを意味する. すなわち, 標準偏差の  $\lambda$  倍だけゲームの試行結果の良否を定量的に示すことができる.

式(3.25)の曲線は手数料を支払うにもかかわらず, 標準偏差  $\sqrt{vt}$  の  $\lambda$  倍だけ優れたパフォーマンスを残す様子を表現したものである. ゲーミング企業は勝者がある程度勝ち続けたとしても, 無限に賞金を支払うことを想定していない. 逆にどの程度の手数料  $\alpha$  を設定すれば, ゲームにおける勝者の最大の獲得賞金  $X_M(t^*)$  とその試行回数  $t^*$  を得るのか調べておくことは重要である.

そこで, 式(3.25)の試行回数  $t$  は離散変数を連続変数として取扱っているので, 最大値を調べるために試行回数  $t$  で微分すると

$$\frac{dX_M(t^*)}{dt} = 0, \quad t^* = \frac{\lambda^2 v}{4\alpha^2}, \quad X_M(t^*) = \frac{\lambda^2 v}{4\alpha} \quad (3.26)$$

が得られる<sup>[118]</sup>. したがって, 個々のプレイヤーにとっては, 分散  $v$  はリスクに対する態度の決定因子でもあるし, その  $\lambda^2$  倍だけ結果に効果が及ぶ可能性があるといえる. しかし, 逆に手数料  $\alpha$  に反比例して, 最大値が減少していくことも把握できる.

さらに, 個々のプレイヤーが標準偏差の  $\sqrt{vt}$  だけ優れたパフォーマンスを続けてゲームを試行するとしても, 最終的には総手数料  $\alpha t$  の影響を受けて元本と同じ状態に戻るときを

$$X_M(t^{**}) = 0, \quad t^{**} = \frac{\lambda^2 v}{\alpha^2} \quad (3.27)$$

として見積もれる<sup>[118]</sup>.

したがって, ある一定の試行回数以上は, プレイヤーにはゲームを試行する魅力が無くなる. それゆえ, ゲーミング企業は収益と勝者の獲得賞金の満足のトレードオフを考える必要がある. すなわち, 両者の Win-Win 関係が築けるゲームの手数料を設定することが重要である. このため, 勝者の最大の獲得賞金の総和の算出が重要であり次節で詳述する.

### 3.4 $m$ 人のプレイヤーのうち勝者の総獲得賞金モデルと敗者の期待損失モデル

ここで、前提条件(A)のもとで、プレイヤー数  $m = 10^5$ 、試行回数  $N = 100$ 、表の出る確率  $p_1 = 0.5$ 、手数料  $\alpha = 0.1$  の条件として、式(3.2)で記述したコイン投げの繰返し試行を実施する。その結果の試行列の分布を示したもののが図 3.3 である。

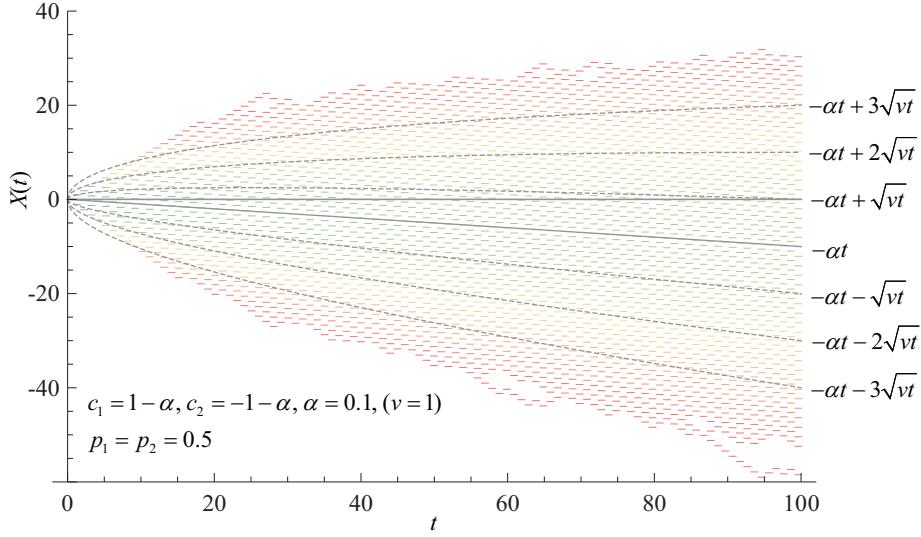


図 3.3 数値実験の傾向

前節で、時刻  $\tau (= 1, \dots, N)$  における一人のプレイヤーのゲーム試行列を記述した  $X(\tau)$  から、 $j (= 1, \dots, m)$  番目のプレイヤーが勝っているか、負けているかの情報を用いるため、試行回数  $\tau$  回目におけるプレイヤー  $j$  の獲得賞金の状態を

$$Y_{W_j}(\tau) = \max [X(\tau), 0] \quad (j = 1, \dots, m; \tau = 1, \dots, N) \quad (3.28)$$

とし、試行回数  $\tau$  回目におけるプレイヤー  $j$  の損失の状態を

$$Y_{L_j}(\tau) = \min [X(\tau), 0] \quad (j = 1, \dots, m; \tau = 1, \dots, N) \quad (3.29)$$

と区別して記述する。プレイヤー  $j$  について、式(3.28)もしくは式(3.29)は、0 以上か否かで一方は必ず 0 になることを示す。ここで、 $m$  人分のプレイヤーについて、式(3.28)を加算した後、プレイヤー数  $m$  人で割り、一人当たりのプレイヤーの総獲得賞金の平均値を

計算する。すなわち

$$\bar{Y}_W(\alpha, \tau) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_{W_j}(\tau) \quad (3.30)$$

と算出できる。この式(3.30)は、勝者の獲得賞金をプレイヤーにどの程度還元しているのか見積もる尺度となる。当然、式(3.30)の値  $\bar{Y}_W(\alpha, \tau)$  は、3.2で示した  $X_M(t)$  の傾向と同様に、ある試行回数  $\tau$  で最大値を示し、その後は減衰傾向になるものと考えられる。

また、同様に式(3.29)から一人当たりのプレイヤーの損失の平均値は

$$\bar{Y}_L(\alpha, \tau) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_{L_j}(\tau) \quad (3.31)$$

と算出できる。ここで、 $\bar{Y}_W(\alpha, \tau)$ ,  $\bar{Y}_L(\alpha, \tau)$  は試行回数が少ない場合には、モデルが記述する誤差も大きいが、勝者がどの程度儲かっているかを調べる尺度として重要な意味を持つ。

一方、数理的に  $X(t) \geq 0$  における勝者の最大獲得賞金の総和について一人当たりの期待利得を

$$E(Y_W(\alpha, t)) = \int_0^\infty \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi v t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{v t}\right)\right) dX(t) \quad (3.32)$$

と定義する。また、 $X(t) \leq 0$  における敗者の損失の総和について一人当たりの期待損失を

$$E(Y_L(\alpha, t)) = \int_{-\infty}^0 \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi v t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{v t}\right)\right) dX(t) \quad (3.33)$$

と定義する。

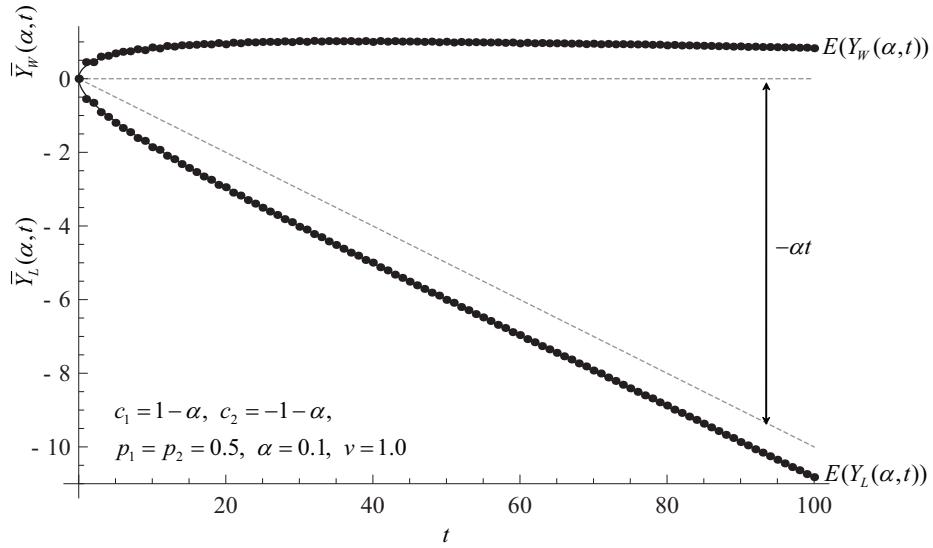


図 3.4 数値実験の整合性(勝者の獲得賞金の総和と敗者の損失の総和の傾向)

これを用いて、図 3.4 は、図 3.3 の数値実験をもとに、式(3.30)および式(3.32)と、式(3.31)および式(3.33)の傾向を描いたものである。すなわち、0 以上で、 $E(Y_W(\alpha, t))$  が実線、 $\bar{Y}_W(\alpha, t)$  が • 印として描かれており、0 以下で、 $E(Y_L(\alpha, t))$  が実線、 $\bar{Y}_L(\alpha, t)$  が • 印として描かれている。したがって、勝者にとって、一定の試行回数までは、獲得賞金が増加傾向にあるが、最大値を通過後に減衰し、魅力が無くなることが読み取れる。また、敗者にとって手数料とともに勝者に支払う損失の絶対値は、試行回数に応じてかなり大きくなることがわかる。すなわち、その内訳は、ゲーミング企業に支払う手数料の総額が、 $\alpha t$  として増加することが改めてわかる。

さらに、 $X(t) \geq 0$  における最大獲得賞金の総和について一人当たりの期待利得を、全体の勝者の比率で割った期待利得

$$Z_W(\alpha, t) = \frac{\int_0^\infty \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi vt}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)}{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi vt}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)} \quad (3.34)$$

と定義する。また、 $X(t) \leq 0$  における敗者の損失の総和について一人当たりの期待損失を、全体の敗者の比率で割った期待利得

$$Z_L(\alpha, t) = \frac{\int_{\infty}^0 \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi v t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)}{\int_{\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi v t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)} \quad (3.35)$$

と定義する。ここで、定義した  $Z_W(\alpha, t)$  は、獲得賞金が本来は勝者のみに、 $Z_L(\alpha, t)$  は損失が敗者のみに考慮されるべきであり、プレイヤー全体ではないことを考慮して、再定義したものである。

次節では、 $E(Y_W(\alpha, t))$  と  $E(Y_L(\alpha, t))$  について、勝者の獲得賞金の最大化の傾向について調べ、モデルについてべき乗回帰分析を用いて記述している。

表 1.  $U_W(t), U_L(t)$  と  $\alpha$  の傾向の数値例( $v = 1$ )

$\alpha$	$t_j$	$u_{W_j}$	$u_{L_j}$
0.10	$t_1 = 37.45480$ 回	$u_{W_1} = 1.01228$ 円	$u_{L_1} = -4.75776$ 円
0.12	$t_2 = 26.01028$ 回	$u_{W_2} = 0.84357$ 円	$u_{L_2} = -3.96480$ 円
0.14	$t_3 = 19.10959$ 回	$u_{W_3} = 0.72306$ 円	$u_{L_3} = -3.39840$ 円
0.16	$t_4 = 14.63078$ 回	$u_{W_4} = 0.63268$ 円	$u_{L_4} = -2.97360$ 円
0.18	$t_5 = 11.56012$ 回	$u_{W_5} = 0.56238$ 円	$u_{L_5} = -2.64320$ 円
0.20	$t_6 = 9.36370$ 回	$u_{W_6} = 0.50614$ 円	$u_{L_6} = -2.37888$ 円
0.22	$t_7 = 7.73860$ 回	$u_{W_7} = 0.46013$ 円	$u_{L_7} = -2.16262$ 円
0.24	$t_8 = 6.50257$ 回	$u_{W_8} = 0.42178$ 円	$u_{L_8} = -1.98240$ 円
0.26	$t_9 = 5.54065$ 回	$u_{W_9} = 0.38934$ 円	$u_{L_9} = -1.82991$ 円
0.28	$t_{10} = 4.77740$ 回	$u_{W_{10}} = 0.36153$ 円	$u_{L_{10}} = -1.69920$ 円
0.30	$t_{11} = 4.16164$ 回	$u_{W_{11}} = 0.33743$ 円	$u_{L_{11}} = -1.58592$ 円
0.32	$t_{12} = 3.65770$ 回	$u_{W_{12}} = 0.31634$ 円	$u_{L_{12}} = -1.48680$ 円
0.34	$t_{13} = 3.24003$ 回	$u_{W_{13}} = 0.29773$ 円	$u_{L_{13}} = -1.39934$ 円
0.36	$t_{14} = 2.89003$ 回	$u_{W_{14}} = 0.28119$ 円	$u_{L_{14}} = -1.32160$ 円
0.38	$t_{15} = 2.59382$ 回	$u_{W_{15}} = 0.26639$ 円	$u_{L_{15}} = -1.25204$ 円
0.40	$t_{16} = 2.34092$ 回	$u_{W_{16}} = 0.25307$ 円	$u_{L_{16}} = -1.18944$ 円

表 2.  $U_W(t), U_L(t)$  と  $v$  の傾向の数値例( $\alpha = 0.1$ )

$v$	$t_j$	$u_{W_j}$	$u_{L_j}$
1	$t_1 = 37.45480$ 回	$u_{W_1} = 1.01228$ 円	$u_{L_1} = -4.75776$ 円
2	$t_2 = 74.90960$ 回	$u_{W_2} = 2.02456$ 円	$u_{L_2} = -9.51552$ 円
3	$t_3 = 112.3644$ 回	$u_{W_3} = 3.03685$ 円	$u_{L_3} = -14.27329$ 円
4	$t_4 = 149.8192$ 回	$u_{W_4} = 4.04913$ 円	$u_{L_4} = -19.03105$ 円
5	$t_5 = 187.2740$ 回	$u_{W_5} = 5.06141$ 円	$u_{L_5} = -23.78881$ 円
6	$t_6 = 224.7288$ 回	$u_{W_6} = 6.07369$ 円	$u_{L_6} = -28.54657$ 円
7	$t_7 = 262.1836$ 回	$u_{W_7} = 7.08598$ 円	$u_{L_7} = -33.30434$ 円
8	$t_8 = 299.6384$ 回	$u_{W_8} = 8.09826$ 円	$u_{L_8} = -38.06210$ 円
9	$t_9 = 337.0932$ 回	$u_{W_9} = 9.11054$ 円	$u_{L_9} = -42.81986$ 円
10	$t_{10} = 374.5480$ 回	$u_{W_{10}} = 10.12282$ 円	$u_{L_{10}} = -47.57762$ 円

### 3.5 勝者の獲得賞金の総和最大化とべき乗回帰分析

まず、3.4で取扱った式(3.32)の $E(Y_W(\alpha, \tau))$ の最大値を

$$\begin{aligned} U_W(\alpha, t^{***}) &= \max_{0 \leq \tau \leq t} E(Y_W(\alpha, \tau)) \\ U_L(\alpha, t^{***}) &= E(Y_L(\alpha, t^{***})) \end{aligned} \quad (3.36)$$

と探索する。すなわち、この最大値 $U_W(\alpha, t^{***})$ は、勝者の獲得賞金の期待利得の最大値を示すので、手数料を含むコイン投げの繰返し試行における勝者の価値関数の値として定義する。また、 $U_L(\alpha, t^{***})$ は、敗者の期待損失による価値関数と定義する。本章では Mathematica を利用して Newton 法による標準の探索を試みている<sup>[131]</sup>。演算中に、Mathematica による数値結果は厳密解ではないと注記が示されるが、図 3.5 のようにほぼ最大値を得ることがわかる。その結果について、 $\alpha$ と式(3.36)の関係は、表 3.1 に示されるおりに得られる。

図 3.5 に示される $U_W(\alpha, t)$ の軌跡は、視覚的に 1 章で示した Stevens のべき関数<sup>[29][26][27]</sup>の値 $u_k$ と推測されるので

$$u_k \approx a_0 t_k^{a_1} \quad (3.37)$$

なる関係式を用いると、表 3.1 に示す $K$ 組のデータからなる対数をとった回帰式は

$$\log u_k = \log a_0 + a_1 \log t_k + \epsilon_k \quad (k = 1, \dots, K) \quad (3.38)$$

と見積もられる。これを最小二乗法<sup>[108]</sup>

$$\begin{aligned} \min J_1 &= \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \epsilon_k^2 \\ &= \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\log u_k - (\log a_0 + a_1 \log t_k))^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

により解く。すなわち、式(3.39)について、それぞれ  $a_0, a_1$  で偏微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1}{\partial a_0} &= \frac{1}{a_0} \left( K \log a_0 + a_1 \sum_{k=1}^K \log t_k - \sum_{k=1}^K \log u_k \right) = 0 \\ \frac{\partial J_1}{\partial a_1} &= \log a_0 \sum_{k=1}^K \log t_k \\ &\quad + a_1 \sum_{k=1}^K (\log t_k)^2 - \sum_{k=1}^K (\log t_k \log u_k) = 0\end{aligned}\tag{3.40}$$

とおくとき、正規方程式<sup>[108]</sup>

$$\begin{pmatrix} K & \sum_{k=1}^K \log t_k \\ \sum_{k=1}^K \log t_k & \sum_{k=1}^K (\log t_k)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K \log u_k \\ \sum_{k=1}^K (\log t_k \log u_k) \end{pmatrix}\tag{3.41}$$

より

$$a_0 = \exp \left( \frac{\sum_{k=1}^K (\log t_k)^2 \sum_{k=1}^K \log u_k - \sum_{k=1}^K \log t_k \sum_{k=1}^K (\log t_k \log u_k)}{K \sum_{k=1}^K (\log t_k)^2 - (\sum_{k=1}^K \log t_k)^2} \right)\tag{3.42}$$

および

$$a_1 = \frac{K \sum_{k=1}^K \log t_k \log u_k - \sum_{k=1}^K \log t_k \sum_{k=1}^K \log u_k}{K \sum_{k=1}^K (\log t_k)^2 - (\sum_{k=1}^K \log t_k)^2}\tag{3.43}$$

と導出できる。また、その決定係数<sup>[111]</sup>は

$$R^2 = \left( \frac{K \sum_{k=1}^K \log t_k \log u_k - \sum_{k=1}^K \log t_k \sum_{k=1}^K \log u_k}{\sqrt{(K \sum_{k=1}^K (\log t_k)^2 - (\sum_{k=1}^K \log t_k)^2)(K \sum_{k=1}^K (\log u_k)^2 - (\sum_{k=1}^K \log u_k)^2)}} \right)^2\tag{3.44}$$

と見積もられる。この式(3.37)から式(3.44)までを用いると、式(3.2)で定義したコイン投げ

について、その勝者の獲得賞金の総和最大化とその試行回数における関係式は

$$U_W(t) = 0.1654\sqrt{t} \quad (3.45)$$

(∵  $a_0 = 0.1654, a_1 = 0.5$ )

が得られる。

このとき、決定係数は  $R^2 = 1$  である。同様に、表 3.1 の  $U_L(\alpha, t)/U_W(\alpha, t)$  の関係は一定値なので、敗者の期待損失は

$$U_L(t) = -0.7774\sqrt{t} \quad (3.46)$$

と求まる。ここで、決定係数  $R^2 = 1$  ということは、 $U_W(\alpha, t)$  と  $U_L(\alpha, t)$  のモデルを  $t$  で完全に説明できることになる。

ところで、分散の大きさの影響について、表 3.2 に示す結果が得られる。そこで、式(3.26)を参考に、分母に  $\alpha$ 、分子に  $v$  が現れると想定して、式(3.37)から式(3.44)までと同様に、べき乗回帰分析の関数の値

$$u_k \approx b_0 \alpha_k^{b_1} v_k^{b_2} \quad (3.47)$$

と推測する。この関係式を用いると、表 3.1 と表 3.2 を併せた  $K$  組のデータからなる対数をとった回帰式は

$$\log u_k = \log b_0 + b_1 \log \alpha_k + b_2 \log v_k + \epsilon_k \quad (k = 1, \dots, K) \quad (3.48)$$

と見積もられる。これを最小二乗法<sup>[108]</sup>

$$\begin{aligned} \min J_2 &= \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \epsilon_k^2 \\ &= \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\log u_k - (\log b_0 + b_1 \log \alpha_k + b_2 \log v_k))^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

により解く。すなわち、式(3.49)について、それぞれ  $b_0, b_1, b_2$  で偏微分して

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_2}{\partial b_0} &= \frac{1}{b_0} \left( K \log b_0 + b_1 \sum_{k=1}^K \log \alpha_k + b_2 \sum_{k=1}^K \log v_k - \sum_{k=1}^K \log u_k \right) = 0 \\
 \frac{\partial J_2}{\partial b_1} &= \log b_0 \sum_{k=1}^K \log \alpha_k + b_1 \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k)^2 \\
 &\quad + b_2 \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k \log v_k) - \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k \log u_k) = 0 \\
 \frac{\partial J_2}{\partial b_2} &= \log b_0 \sum_{k=1}^K \log v_k + b_1 \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k \log v_k) \\
 &\quad + b_2 \sum_{k=1}^K (\log v_k)^2 - \sum_{k=1}^K (\log v_k \log u_k) = 0
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

とおくとき、正規方程式<sup>[108]</sup>

$$\begin{pmatrix}
 K & \sum_{k=1}^K \log \alpha_k & \sum_{k=1}^K \log v_k \\
 \sum_{k=1}^K \log \alpha_k & \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k)^2 & \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k \log v_k) \\
 \sum_{k=1}^K \log v_k & \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k \log v_k) & \sum_{k=1}^K (\log v_k)^2
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \log b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}
 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K \log u_k \\ \sum_{k=1}^K (\log \alpha_k \log u_k) \\ \sum_{k=1}^K (\log v_k \log u_k) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

を解くと

$$U_W(\alpha, v) = 0.101228 \frac{v}{\alpha} \quad (3.52)$$

(∴  $b_0 = 0.101228, b_1 = -1, b_2 = 1$ )

を得る。また、 $U_L(\alpha, v)/U_W(\alpha, v)$  は一定値のため

$$U_L(\alpha, v) = -0.475776 \frac{v}{\alpha} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} U_G(\alpha, v) &= U_W(\alpha, v) + U_L(\alpha, v) \\ &= -0.374548 \frac{v}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.54)$$

が得られた。ここに、 $U_W(\alpha, v)$  は勝者の価値関数を、 $U_L(\alpha, v)$  は敗者の価値関数を、 $U_G(\alpha, v)$  はゲーミング企業の価値関数を、 $\alpha$  と  $v$  で表現した式である。さらに、式(3.54)は  $-\alpha t$  でもあるため、 $t$  は

$$t = 0.374548 \frac{v}{\alpha^2} \quad (3.55)$$

の関係が得られる。この関係から、手数料  $\alpha$  を意思決定因子として調節して、獲得賞金の総和の最大値とそのゲームの試行回数の大きさを決定することができる。すなわち、試行回数  $t$  は  $\alpha$  の二乗に反比例し、その  $U_W(t), U_L(t), U_G(t)$  は  $\alpha$  に反比例する。また、式(3.52)から式(3.54)より、勝者の獲得賞金の総和が最大となるとき、 $\alpha$  と  $v$  の大きさに依らず、これらの係数の比率の割合に一致する勝者の期待利得、敗者の期待損失、ゲーミング企業の期待収益となることがわかる。

この結果から、式(3.52)から式(3.54)に式(3.55)を代入して、式(3.45)と式(3.46)のように  $t$  で表現し直すと

$$U_W(t) = 0.1654\sqrt{vt} \quad (3.56)$$

$$U_L(t) = -0.7774\sqrt{vt} \quad (3.57)$$

$$U_G(t) = -0.612\sqrt{vt} \quad (3.58)$$

が得られた。すなわち、式(3.56)の結果は図 3.5 の破線に相当する ( $v = 1$ )。

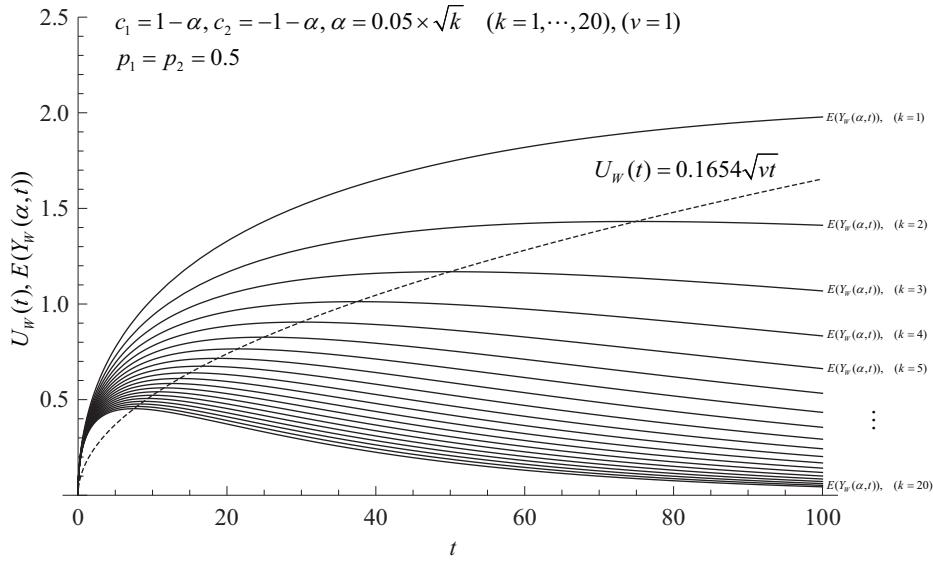


図 3.5 勝者の獲得賞金の総和の推移

また、図 3.5 の実線のうち、破線よりも左側については、勝者の獲得賞金の総和が大きくなるので、ゲームの試行回数について意思決定する価値があることがわかる。しかし、逆に破線よりも右側では、ゲーミング企業の収益となり、勝者にとって魅力がなくなるので、実線と破線の交点である試行回数  $t^{***}$  により、ゲームを停止することが望ましいことがわかる。

ところで、式(3.56)および式(3.57)から、勝者が凹関数としてリスク回避的であり、敗者が凸関数としてリスク愛好的であることがわかる。この関係は累積プロスペクト理論<sup>[29][20]</sup>の鏡映効果<sup>[21]</sup>を示すべき関数と同様の傾向である。そこで、図 3.6 に示すように、第4象限の敗者の傾向を、第3象限に写像する。すなわち

$$U_{L^*}(t) = -0.7774\sqrt{v(-t)} \quad (3.59)$$

で表記し直すと、敗者がリスク愛好的である結果は、鏡映効果で示される傾向に一致する。すなわち、ゲーム試行前の元本を原点とおき、参照点<sup>[29][20]</sup>とするとき、敗者は参照点まで戻る回数だけ余分にゲームを試行し直さなければならず、そうしたときに手数料の大きさに対して、敗者がリスク愛好的である傾向が説明できる。しかし、プロスペクト理論<sup>[29][20]</sup>は、編集段階で言語的表現の違いにより価値関数を定義している。このため、本章で導出したべき関数は、手数料と分散を内包した試行回数  $t$  で説明しているので、モデルの導出

が異なることに注意しなければならない。

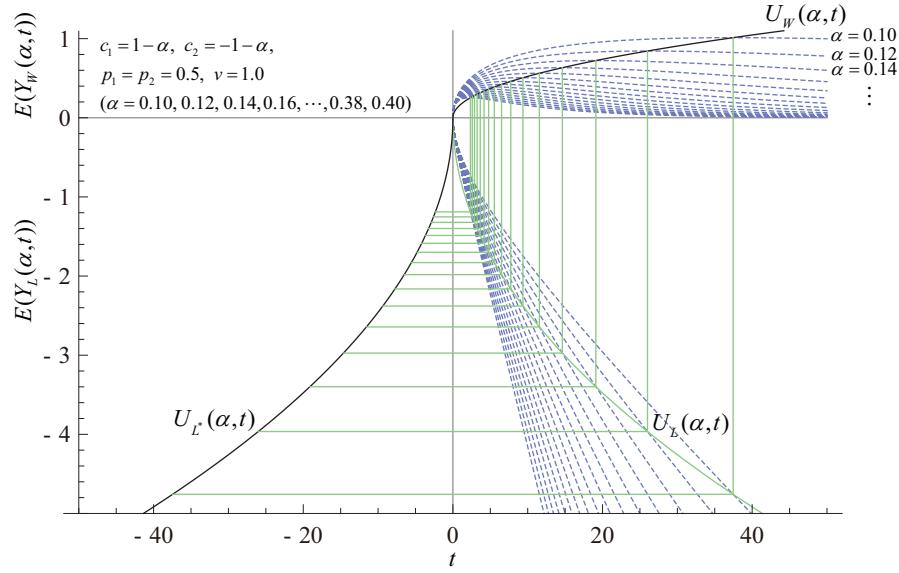


図 3.6 一人当たりの勝者の獲得賞金の総和と敗者の損失の総和の鏡映効果

一方、勝者のみに獲得賞金を還元する場合には、図 3.6 の特徴は、図 3.7 のように  $E(Y_W(\alpha, t))$  と  $E(Y_L(\alpha, t))$  ではなく、 $Z_W(\alpha, t)$  と  $Z_L(\alpha, t)$  により表現される。そこで、獲得賞金の総和の最大値は、 $Z_W(\alpha, t)$  と  $Z_L(\alpha, t)$  により算出されないが、 $\alpha$  と  $U_W(\alpha, t)$  との関係で算出された表 3.1 の  $t$  と  $\alpha$  の関係を適用すると、式(3.56)から式(3.58)と同様に

$$V_W(t) = \frac{1}{0.270268} U_W(t) = 0.612\sqrt{vt} \quad (3.60)$$

$$V_L(t) = \frac{1}{1 - 0.270268} U_L(t) = -1.065\sqrt{vt} \quad (3.61)$$

$$V_{L^*}(t) = -1.065\sqrt{v(-t)} \quad (3.62)$$

が得られる。

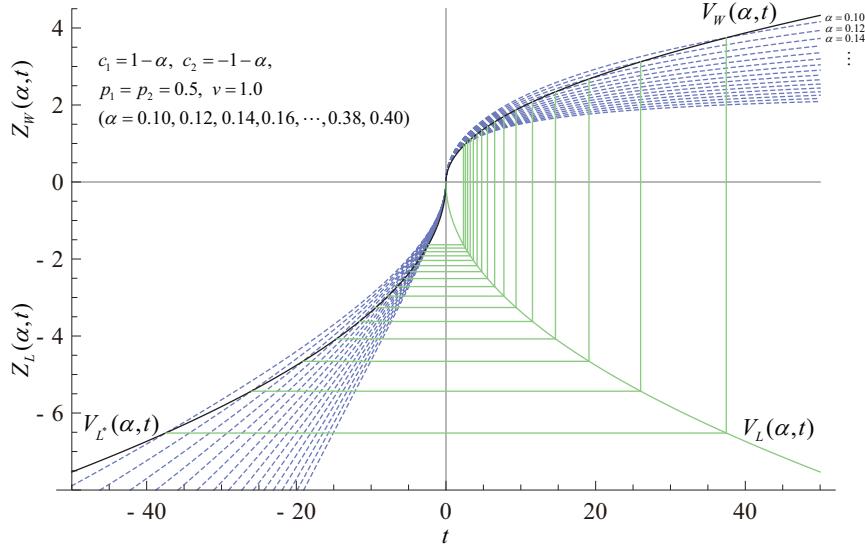


図 3.7 勝者の獲得賞金の総和の期待値と敗者の損失の期待値の鏡映効果

ここに,  $V_W(\alpha, t)$  は勝者の立場から獲得賞金を  $t$  により見積もる価値関数であり,  $V_L(\alpha, t)$  は敗者の立場から損失を  $t$  により見積もる価値関数である. また,  $t$  が  $\alpha$  により決定されるとき, 図 3.7 のように,  $Z_w(\alpha, t)$  の分母を記述する勝者の比率が, 一定値 0.270268 を示す値の軌跡であることがわかった. このため, 式(3.60)および式(3.61)に一致する値を得る式(3.34)および式(3.35)は, CVaR<sup>[121]</sup>のようにある確率のもとで分布の裾野の期待値を説明する式でもある.

さらに, 式(3.60)と式(3.26)を参考に, 式(3.56)を代入して, 分母に  $\alpha$ , 分子に  $v$  が現れる

$$\begin{aligned} V_W(t^{***}) &= 0.374548 \frac{v}{\alpha} \quad \left( = 0.612^2 \frac{v}{\alpha} \right), \\ t^{***} &= 0.374548 \frac{v}{\alpha^2} \quad \left( = 0.612^2 \frac{v}{\alpha^2} \right) \end{aligned} \tag{3.63}$$

に書き換えることができる. ここで,  $V_W(t)$  が  $-U_G(t)$  に等しいことに気がつく. すなわち, 本章で与えた制約のもとで, ゲーミング企業が勝者の満足を考慮しながら, ゲームを停止する試行回数  $t^{***}$  を決定する基準は, ゲーミング企業の期待収益と, 勝者のみを考慮した獲得賞金の期待利得が均衡する

$$V_W(t^{***}) + U_G(t^{***}) = 0 \tag{3.64}$$

と求まった。この関係を満たしながら、ゲーミング企業は、勝者の期待利得の最大化と手数料による収益確保のため、意思決定基準として試行回数をコントロールできる。また、このとき  $\lambda^{***} = \sqrt{0.374548} = 0.612$  とするとき、式(3.34)に示す  $Z_W(\alpha, t)$  の分母と同じ

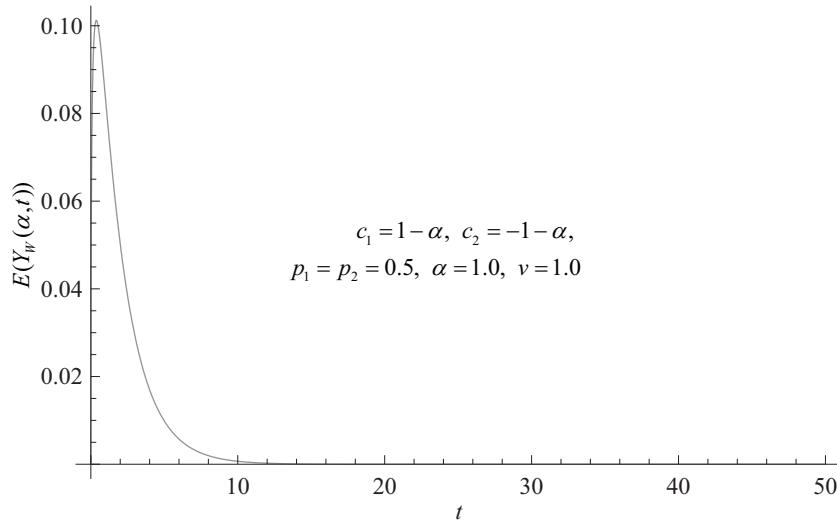
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda^{***}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy = 0.270268 \quad (3.65)$$

を得る。したがって、手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームは、勝者の比率が 0.270268 になるときにゲームを停止すると、勝者の獲得賞金の総和の最大化を実施することができる。以上で、モデルの提案について記述した。次節では、モデルの実用上の注意点について数値実験を通じて考察する。

### 3.6 数値実験による考察とモデルの注意点

#### 3.6.1 等確率で手数料が勝者の利得に確率の場合

設定条件(A)において、手数料  $\alpha = 1$  のときには、コイン投げの繰り返しゲームでは、優れたパフォーマンスを見せてても利得はない。にもかかわらず、図 3.8 は、試行回数  $t^{***} = 0.374548 = 0.612^2$ 、勝者の獲得期待利得  $U_W(t^{***}) = 0.101228$  を示す。これは、明らかに誤差になる。しかし、この数値は、本章で求めたモデルの係数そのものである。したがって、本章の提案モデルでは、この分布の形を試行回数に対応したべき関数に従って拡大させていることがわかる。ただし、このように試行回数の小さい区間に、提案モデルを適用する場合には、裾野の積分による誤差と、試行回数が偶数回か奇数回による揺れの挙動、分布形の適合度等に注意しなければならない。このため、得られた結果を一つの目安に近似解として取扱うことが望ましい。

図 3.8 手数料  $\alpha = 1$  の場合の誤差

### 3.6.2 コイン投げの表と裏が異なる確率の場合

ここで、3.2 の前提条件(B) ( $p_1 < p_2$ ) の数値実験を行う。各条件は、3.4 で示した前提条件(A)と同じ条件として、プレイヤー数  $m = 10^5$ 、試行回数  $N = 100$ 、手数料  $\alpha_0 = 0.1$  の条件としてコイン投げを繰返し試行する。

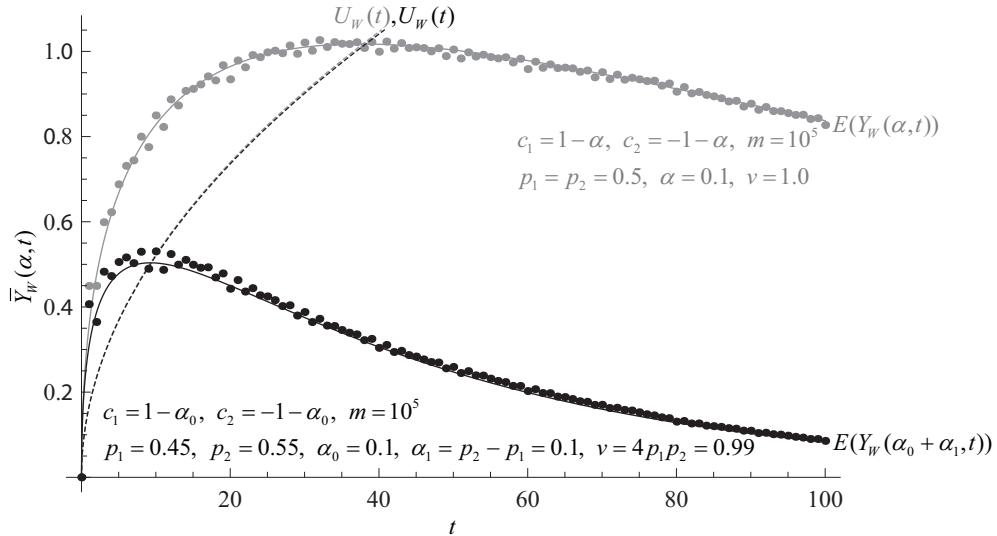


図 3.9 ゲームの仕組みによる費用構造を含む場合の数値実験

表 3.3 前提条件(A)と(B)の数値実験結果

指標	前提条件(A)	前提条件(B)
$U_W(t)$	1.01228	0.50108
$U_L(t)$	4.75776	2.35509
$t$	37.4548	9.2700

ここで、ゲーミング企業が手数料として、 $\alpha_0$ だけ得るよう見えるが、このゲーミングでは、ゲームの構造による費用が発生する。すなわち、本項の数値実験では、 $p_1 < p_2$ より、次のようなゲームの費用構造が

$$\begin{aligned}\alpha &= -((1 - \alpha_0)p_1 + (-1 - \alpha_0)p_2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_0 + (p_2 - p_1) \\ &= \alpha_0 + (1 - 2p_1)\end{aligned}\tag{3.66}$$

と見積もられる。また、分散は

$$\begin{aligned}v &= (1 - \alpha_0)^2 p_1 + (-1 - \alpha_0)^2 p_2 - ((1 - \alpha_0)p_1 + (-1 - \alpha_0)p_2)^2 \\ &= 4p_1(1 - p_1)\end{aligned}\tag{3.67}$$

と算出される。

ここで、一例として、表が出る確率  $p_1 = 0.45$ 、裏が出る確率  $p_2 = 1 - p_1 = 0.55$  と仮定する。このとき、前提条件(A)と前提条件(B)の勝者の獲得賞金の総和の最大値の傾向を示す数値実験の結果は、図 3.9 に示すとおりに得られた。また、比較のため理論値による最大値の結果は、表 3.3 に示す傾向を得た。図 3.9 と表 3.3 から読取れることは、勝者の獲得賞金の総和の最大値  $U_W(t)$  が 2 倍になるためには、手数料  $\alpha$  が 1/2 倍になることがある。しかし、前提条件(B)は手数料を  $\alpha_0 = 0.1$  とし、確率  $p_1$  の変化により、 $\alpha_1 = p_2 - p_1 = 0.1$  も手数料として、手数料は  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 = 0.2$  と約 2 倍になる。このことから、勝者の獲得賞金の総和の最大化とゲーミング企業の収益は、確率  $p_1$  の変化によっても大きな影響を受けることがわかる。

ところで、式(3.66)および式(3.67)を式(3.63)に代入すると

$$\begin{aligned}V_W(t^{***}) &= 0.374548 \left( \frac{4p_1(1 - p_1)}{(1 - 2p_1)} \right), \\ t^{***} &= 0.374548 \left( \frac{4p_1(1 - p_1)}{(1 - 2p_1)^2} \right), \\ \left( 0 \leq p_1 < \frac{1}{2} \right)\end{aligned}\tag{3.68}$$

と見積もることができる。これは、ゲームの構造の中に手数料を内包する一般的なゲーミングの傾向を示す。このとき、 $p_1$  が  $1/2$  より、わずかに小さい場合には、本章のモデルと誤差は小さい。しかし、 $p_1$  が  $1/2$  よりかなり小さくなると、式(3.68)の分子である分散に対応して小さくなるので、本項で提案する試行回数よりも小さくなる傾向がわかる。

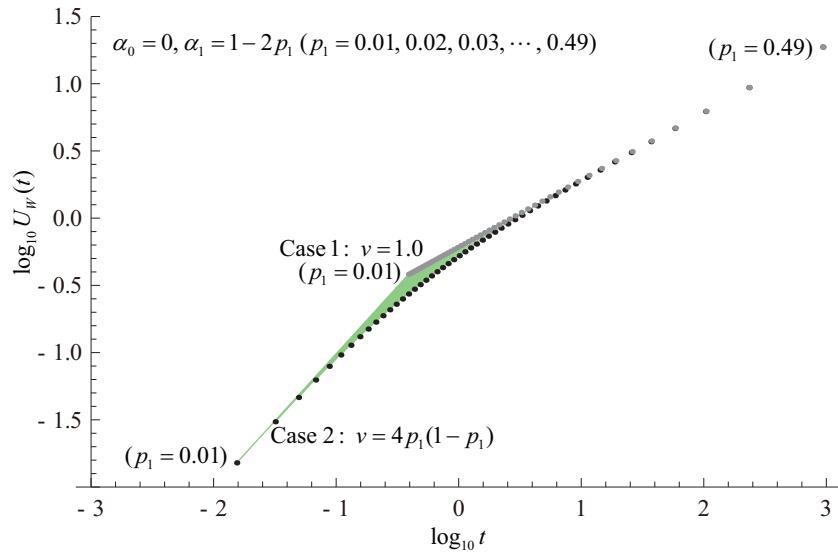
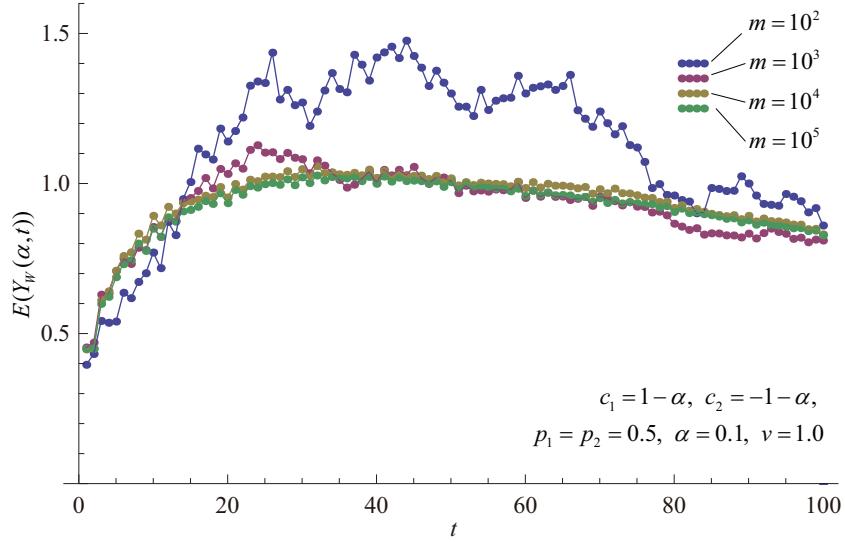


図 3.10 確率  $p_1$  の変化による誤差

すなわち、設定条件(B)では、確率  $p_1$  を変化させることにより、分散も大きさが変化する。その傾向を示したものが、図 3.10 である。この図は、試行回数の小さい区間を強調するために、常用対数による両対数表示で図示している。この傾向より、逆に手数料  $\alpha_1$  が、1 に近づくと分散が小さくなるため、図 3.8 のように、試行回数が小さいときは、勝者の期待利得を過大評価しない。しかし、図 3.10 の傾向のとおり、モデルのべき関数に分散の変化が乗算されるために、提案モデルはべき関数だけの表現ではなくなる。このため、試行回数が小さい区間では、誤差に注意しなければならない。

### 3.6.3 プレイヤー数の大きさに対応するモデルの傾向

さらに、プレイヤー数を  $m = 10^2, m = 10^3, m = 10^4, m = 10^5$  の場合について、数値実験の結果を図示すると、図 3.11 のように視覚化できる。

図 3.11 プレイヤー数  $m$  の変化によるモデルの不確実性

したがって、図 3.11 の傾向は、3.1 で問題提起したプレイヤー数  $m$  の変化として、ある時刻  $t$ においてプレイヤーが自由に参加と退出を行うとき、マーケットの安定性の挙動の目安になる。 $m$  人のプレイヤーのコイン投げによる確率試行列の期待利得のため、 $m$  の大きさによる不確実性が現れ、提案モデルの試行回数における期待利得との乖離の幅が大きくなることもある。このため、ゲーミング企業は実際に本章の成果を適用するには、この不確実性についても実用上は検討する必要がある。

### 3.6.4 サイコロ投げの場合およびモデルの適用範囲の限界

サイコロ投げの場合、出る目の数から 3.5 を引く値が獲得賞金となる多項モデルである。コイン投げと同様に、同じ分布により互いに独立試行できるため、ゲーミングとしては同じ傾向が期待できる。

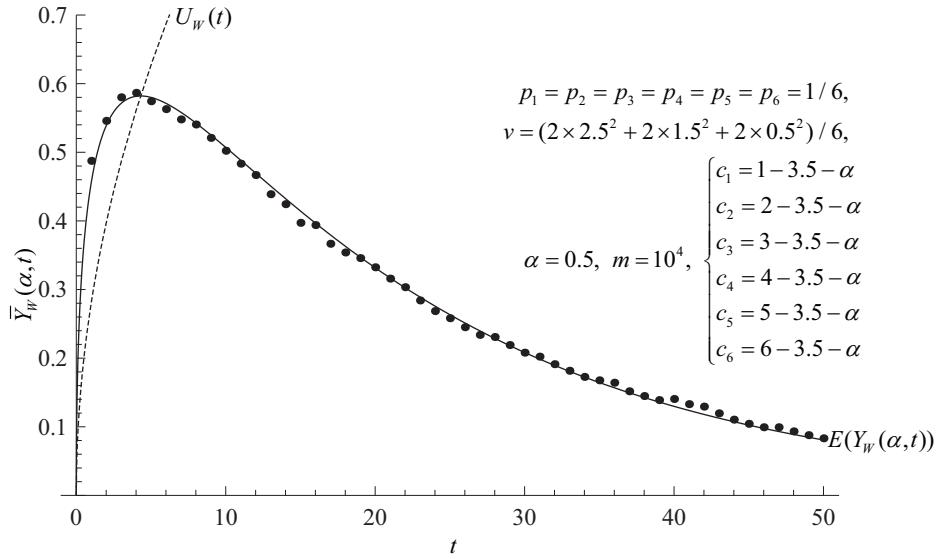


図 3.12 サイコロ投げの数値実験

そこで、 $\alpha = 0.5$  とするとき、すなわち、出る目から 4 を引くときの傾向を示した図が、図 3.12 である。このように、多項分布に従うモデルでも、正規分布に近づく試行回数があり多くなくてもよい場合には、本章で示す傾向を得ることができる。

一方、一般に籤(くじ)のように複数の当りが存在し、小さな確率で高額の賞金が当たる場合には、多項モデルのツリー構造にジャンプが発生する。このため、繰返しゲームの試行列には多峰性の問題が生じて本章の傾向は得られなくなる。また、前項で考察したとおり、極端にプレイヤー数が少ない場合やプレイヤー数が変化する場合では、1 回の試行で勝者の数が敗者の数を著しく上回るときがあり、ゲーミング企業の収益は安定しない。

このため、提案モデルが前提条件を維持し、その適合度が非常に良い場合にだけ本章で示した研究成果は保証されることになる。

### 3.7 結 言

本章では、多人数のプレイヤーが同時に互いに独立にコイン投げをゲーミング企業が設定する試行回数まで試行する制約条件を設定した。この条件下で、勝者の獲得賞金の総和の最大化をもとに、ゲーミング企業のゲームを停止する意思決定基準を考察した。

その結果、勝者の満足できる獲得賞金の最大値を得る試行回数は、ゲーミング企業が一人当たりから得る期待収益と、勝者に還元する一人当たりの獲得賞金の期待利得が等しいことがわかった。この試行回数までは、プレイヤーはゲームを試行する利点があるが、こ

れ以上は試行を続けても期待利得が減少するのみである。そこで、ゲーミング企業は、マーケットを開催する際に、この試行回数と獲得利得を考慮し、ゲームの手数料を決定することが、意思決定に役立つものと考えられる。また、手数料を考慮した結果、べき乗回帰分析を用いて、勝者のリスク回避的傾向と敗者のリスク愛好的傾向を鏡映効果により、本章で提案したべき関数のモデルの導出および視覚化を示すことができた。以上の成果について、4章でアクティブ運用のパフォーマンス評価に当てはめて検証を試みる。また、本章で導出した数値結果の数学的根拠についても同様に4章では明らかにしている。

## 4章 手数料を考慮したインフォメーション・レシオ

### 4.1 緒 言

アクティブ運用の成果はインフォメーション・レシオ(以下、IRと称する)が通常使われている。IRとは1章で簡単に考察したとおり、ベンチマーク超過収益率の平均値を、その標準偏差で割ったものである。より低いリスクで、より高い超過収益率を得ることで、IRが高くなるため、優れたアクティブ運用とはIRの期待値が高い運用になることになる<sup>[16][17][82]</sup>。

そこで、まずIRがどの程度高いかを判断する場合に構築するベンチマーク超過収益率の説明式をいくつか考案する。しかし、異なるベンチマーク超過収益率の定義式からは当然異なるIRの値が得られることが予測できる。そこで、これらの不变性の欠如の問題に対してアクティブ運用収益率とベンチマーク収益率のそれぞれの確率変数が正規分布に従う場合に、本章では相関関係を無相関化した2変量の標準正規分布に従う空間(標準化空間と呼ぶ<sup>[62][51]</sup>)へ写像してIRの役割について考察する。写像された標準化空間において不变性を有する定義式の問題を解決するために、本章では拡張一次近似二次モーメント法<sup>[51][50]</sup>を適用してIRが定量的尺度かを評価する。すなわち、IRがアクティブ運用のためのベンチマーク超過収益率のパフォーマンス測度としての数理的意義を有しているかを照査している。その結果、写像後に得られたIRは、変動係数の逆数としての意義だけではなく、正規分布の片側確率点としての意義を幾何学的にも有していることを示し、本研究で重要な手数料を考慮しても不变性が保証できることを示す。

続いて、3章で明らかにした勝者とゲーミング企業の均衡関係<sup>[61]</sup>において求まった係数値 $\lambda = 0.612$ の数理的根拠について正規分布の片側確率点と確率密度関数、累積分布関数を用いて考察する。すなわち、 $\lambda = 0.612$ が正規分布に従う統計学的特性が、幾何学的特性である関係式を示す。したがって、3章でべき乗回帰分析として導出した $\lambda = 0.612$ の数理的関係が明確になり、3章のモデルの意義が保証されるので、この結果を用いて手数料を考慮したアクティブ運用のパフォーマンス評価に応用する。具体的には、アクティブ運用への応用のためIRを1章で説明した付加価値に適用する。これに、手数料(以下、TCと称する)を含む場合のIRがどのように定量化できるかを考察している。また、3章では手数料を定期的に支払う結果を、全体のパフォーマンスが下落していく様子としてモデル化したが、アクティブ運用を個別にみるとベンチマーク運用を上回るパフォーマンスの運

用証券も想定できる。したがって、3章の図3.1を  $t$  軸を対称軸に反転してパフォーマンスが時間に対応して上がっていくモデルも同じ考え方で構築することができる。そこで、

- (1) アクティブ運用がベンチマーク運用を上回る成果のとき
- (2) アクティブ運用がベンチマーク運用と同じ成果のとき
- (3) アクティブ運用がベンチマーク運用を下回る成果のとき

の3つの場合に分けてモデルを考察する。得られた数理的傾向から IR と TC のアクティブ運用における均衡関係について明らかにしている。

## 4.2 インフォメーション・レシオの考察と手数料を含む場合の定式化

### 4.2.1 ベンチマーク超過収益率の正負の判別の記述例

まず、アクティブ運用証券の収益率を  $\tilde{R}_A$  と表記し、ベンチマーク運用証券の収益率を  $\tilde{R}_B$  と表記する。これらを併せて正規分布に従う確率変数ベクトル  $\tilde{\mathbf{R}} \sim N(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}), \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{R}}})$  であると仮定する。ここに、 $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})$  は確率変数ベクトルの期待値ベクトル、 $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  はその分散共分散行列である。このとき、ベンチマーク超過収益率を定量的に示す方法がいくつか考えられる<sup>[47][41][132][42][49]</sup>。すなわち、1章で示した式(1.23)と同様に Treynor と Black の考え方<sup>[42]</sup>を適用すると

$$g(\tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{R}_A - \beta \tilde{R}_B \quad (4.1)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \{\tilde{R}_A, \tilde{R}_B\}^T$$

である。ここに、 $\beta$  はリスク感応度である。式(4.1)は Roll<sup>[48]</sup>が示したように  $\beta = 1$  のとき

$$g_1(\tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{R}_A - \tilde{R}_B \quad (4.2)$$

と表記できる。式(4.2)から明らかになることは、 $g_1(\tilde{\mathbf{R}}) > 0$  のとき、アクティブ運用成果はベンチマーク運用成果を上回ることと、 $g_1(\tilde{\mathbf{R}}) < 0$  のとき、アクティブ運用成果はベンチマーク運用成果を下回ることがわかる。このように考えると、下記に示すように他の数式として定義<sup>[62]</sup>しても運用成績の正負の意味は損なわれない。すなわち

$$g_2(\tilde{\mathbf{R}}) = \log \frac{\tilde{R}_A}{\tilde{R}_B} \quad (4.3)$$

$$g_3(\tilde{\mathbf{R}}) = \frac{\tilde{R}_A}{\tilde{R}_B} - 1 \quad (4.4)$$

$$g_4(\tilde{\mathbf{R}}) = 1 - \frac{\tilde{R}_B}{\tilde{R}_A} \quad (4.5)$$

と定義する。この他にも運用成績の正負の符号の意味が等価ならば、 $\tilde{R}_A$  と  $\tilde{R}_B$  の 2 乗の差等と定義しても良い。 $g_i(\tilde{\mathbf{R}})$  はいずれも 0 以上でベンチマーク超過収益率が正であることを意味する尺度として同一の役割を果たす。ただし、式の構造からもわかるようにどれだけ定量的にパフォーマンスを計量できるかを見積もるときの  $g_i(\tilde{\mathbf{R}})$  は異なるので、一般には、式(4.1)と式(4.2)により基準を明確にした  $\tilde{R}_A$  と  $\tilde{R}_B$  の差が活用される。

#### 4.2.2 ベンチマーク超過収益率の記述例に基づくインフォメーション・レシオの不变性の欠如

そこで、これらの  $g_i(\tilde{\mathbf{R}})$  から 1 章で示したとおり IR の大きさを考えることができる。すなわち

$$\begin{aligned} \text{IR}_i &= \frac{E(\tilde{R}_{TE})}{\sqrt{V(\tilde{R}_{TE})}} \\ &= \frac{E(g_i(\tilde{\mathbf{R}}))}{\sqrt{V(g_i(\tilde{\mathbf{R}}))}} \\ &= \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}} \\ &= \frac{\alpha_i}{\text{TE}_i} \end{aligned} \quad (4.6)$$

により算出できる。ここに、 $\text{TE}_i$  は  $i$  番目に定義したベンチマーク超過評価式  $g_i(\tilde{\mathbf{R}})$  のトラッキング・エラーの標準偏差を意味し、 $\alpha_i (= \mu_A - \mu_B)$  はトラッキング・エラーの期待収益率である。また、 $\mu_A$  はアクティブ運用の期待収益率、 $\mu_B$  はベンチマーク運用の期待収益率である。 $\sigma_A$  はアクティブ運用の収益率の標準偏差、 $\sigma_B$  はベンチマーク運用の収益率の標準偏差、 $\rho_{AB}$  はアクティブ運用とベンチマーク運用の収益率の相関係数である。しかしながら、異なる  $i$  番目に定義したベンチマーク超過評価式  $g_i(\tilde{\mathbf{R}})$  からは IR は異なる値が求まることが予測できる。そこで、このことを明らかにするために、次のような近似を考える。まず、 $g_i(\tilde{\mathbf{R}})$  をアクティブ運用収益率  $\tilde{R}_A$  とベンチマーク運用収益率  $\tilde{R}_B$

からなる確率変数ベクトル  $\tilde{\mathbf{R}}$  の期待収益率ベクトル  $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}) = \{\mu_A, \mu_B\}^T$  において一次近似して

$$\begin{aligned} g_i(\tilde{\mathbf{R}}) &\approx g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) + \nabla g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))^T (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) \\ \therefore \nabla g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) &= \left\{ \frac{\partial g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))}{\partial \tilde{R}_A}, \frac{\partial g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))}{\partial \tilde{R}_B} \right\}^T \end{aligned} \quad (4.7)$$

と見積もるとき、IR は

$$\text{IR}_i = \frac{E(g_i(\tilde{\mathbf{R}}))}{\sqrt{V(g_i(\tilde{\mathbf{R}}))}} = \frac{g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))}{\sqrt{\nabla g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))^T \mathbf{V}_{\mathbf{R}} \nabla g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))}} \quad (4.8)$$

と定式化できる。ここに、 $\nabla g_i(\cdot)$  は、 $g_i(\cdot)$  の  $\cdot$  における方向ベクトルである。このとき、式(4.2)から式(4.5)について、Treynor と Black<sup>[42]</sup>が仮定したように  $\tilde{\mathbf{R}}$  に相関関係が認められない特殊なケースでは、式(4.2)から式(4.5)より

$$\text{IR}_1 = \frac{E(\tilde{R}_A) - E(\tilde{R}_B)}{\sqrt{V(\tilde{R}_A) + V(\tilde{R}_B)}} \quad (4.9)$$

$$\text{IR}_2 = \frac{\log \frac{E(\tilde{R}_A)}{E(\tilde{R}_B)}}{\sqrt{\frac{V(\tilde{R}_A)}{E(\tilde{R}_A)^2} + \frac{V(\tilde{R}_B)}{E(\tilde{R}_B)^2}}} \quad (4.10)$$

$$\text{IR}_3 = \frac{\frac{E(\tilde{R}_A)}{E(\tilde{R}_B)} - 1}{\sqrt{\frac{V(\tilde{R}_A)}{E(\tilde{R}_B)^2} + \frac{E(\tilde{R}_A)^2 V(\tilde{R}_B)}{E(\tilde{R}_B)^4}}} \quad (4.11)$$

$$\text{IR}_4 = \frac{1 - \frac{E(\tilde{R}_B)}{E(\tilde{R}_A)}}{\sqrt{\frac{E(\tilde{R}_B)^2 V(\tilde{R}_A)}{E(\tilde{R}_A)^4} + \frac{V(\tilde{R}_B)}{E(\tilde{R}_A)^2}}} \quad (4.12)$$

と見積もることができる。このようにパフォーマンス測度としての不変性が欠如していることがわかる。この問題を解決するために次項で示す標準化変換法<sup>[133]</sup>を用いる。

### 4.2.3 標準化変換法

標準化変換法とは、相関を有する様々な確率分布を有する確率変数から、無相関な正規分布に従う確率変数へ変換する方法を意味する<sup>[133]</sup>。本章では、 $\tilde{\mathbf{R}}$  が正規分布に従うことを探定しているので確率変数の無相関化と正規化のみを考慮すれば良い。まず、 $\tilde{\mathbf{R}}$  から正規化された標準正規分布に従う  $\tilde{\mathbf{U}} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_U)$  に変換する。ここに、 $\mathbf{V}_U$  は確率変数ベクトル  $\tilde{\mathbf{U}}$  の分散共分散行列であるが、確率変数ベクトル  $\tilde{\mathbf{R}}$  の相関係数行列でもある。さらに、Cholesky 分解による下三角行列  $\mathbf{L}_U$  を用いた標準化変換、あるいは固有値の平方根の対角行列  $\Lambda_U^{1/2}$  とその直交行列  $\mathbf{P}_U$  を用いた標準化変換により無相関化できる<sup>[62][51]</sup>。この標準化変換を視覚化すると図 4.1 に示すとおりである。

具体的な標準化変換法の写像式は

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))^T \mathbf{V}_R^{-1} (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) &= \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{V}_U^{-1} \tilde{\mathbf{U}} \\ &= (\mathbf{L}_U^{-1} \tilde{\mathbf{U}})^T (\mathbf{L}_U^{-1} \tilde{\mathbf{U}}) \\ &= \tilde{\mathbf{Y}}_1^T \tilde{\mathbf{Y}}_1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))^T \mathbf{V}_R^{-1} (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) &= (\mathbf{P}_U \Lambda_U^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_U^T \tilde{\mathbf{U}})^T (\mathbf{P}_U \Lambda_U^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_U^T \tilde{\mathbf{U}}) \\ &= \tilde{\mathbf{Y}}_2^T \tilde{\mathbf{Y}}_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))^T \mathbf{V}_R^{-1} (\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) &= (\Lambda_U^{-1/2} \mathbf{P}_U^T \tilde{\mathbf{U}})^T (\Lambda_U^{-1/2} \mathbf{P}_U^T \tilde{\mathbf{U}}) \\ &= \tilde{\mathbf{Y}}_3^T \tilde{\mathbf{Y}}_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

である<sup>[62][51]</sup>。ここに、無相関な多変量標準正規分布に従う確率変数ベクトル  $\tilde{\mathbf{Y}}_j \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  である。これらの変換式は、まず、図 4.1(a)に示す  $\tilde{\mathbf{R}} \sim N(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}), \mathbf{V}_R)$  の同時確率密度関数の等高線で描かれた楕円が、平均ベクトルを零ベクトル  $\mathbf{0}$ 、分散共分散行列を単位行列  $\mathbf{I}$  に変換される前に相関関係を残して、図 4.1(b)に示すように正規化を行う。次に、 $\tilde{\mathbf{U}} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_U)$  の同時確率密度関数の等高線が写像されて、図 4.1(c)に示すように無相関化される変換法である。すなわち、 $\tilde{\mathbf{Y}}_j \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  の同時確率密度関数の等高線である原点を中心とする円までの写像を意味している。したがって、式(4.13)から式(4.15)に応じて、 $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ 、 $\tilde{\mathbf{Y}}_2$ 、 $\tilde{\mathbf{Y}}_3$  は変換過程が異なるので、図 4.1(c)に異なる 3 点を区別してプロットしている。このため、無相関化

変換を実施するために式(4.13)から式(4.15)のいずれを使用しても、写像された空間  $\tilde{\mathbf{Y}}_j$  では原点から  $g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j) = 0$  を満たす  $\tilde{\mathbf{Y}}_j$  までの最短距離は不变性が保障される。しかしながら、用いた標準化変換法によって位置座標が異なることに注意を要する。この標準化変換法を用いた空間  $\tilde{\mathbf{Y}}_j$  において、次項では拡張1次近似2次モーメント法<sup>[50]</sup>を用いて IR の不变性を考察する。

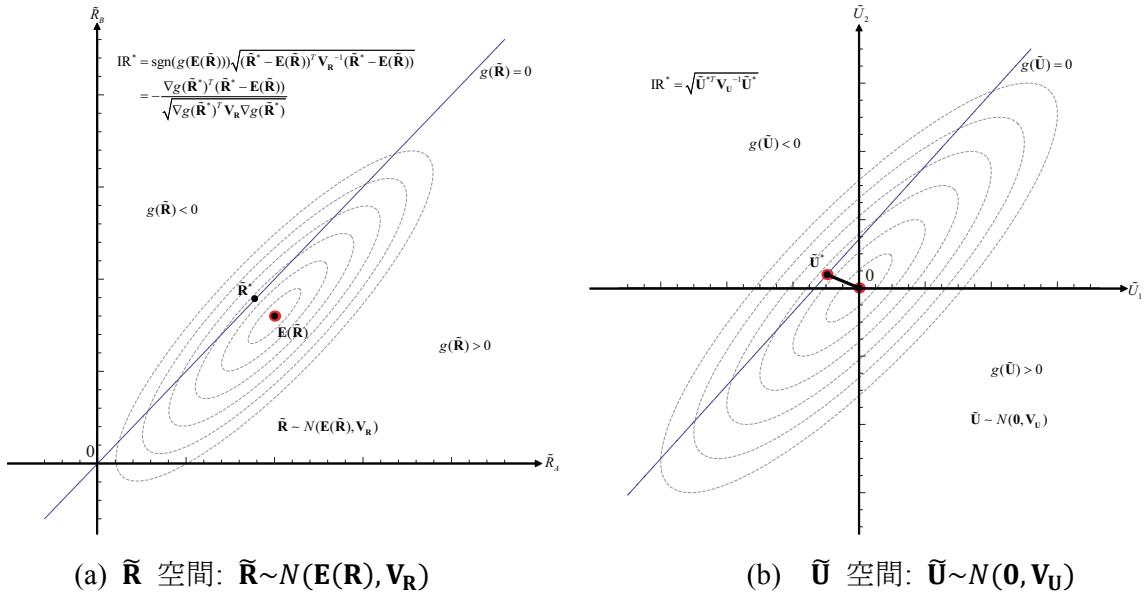


図 4.1 IR の統計学的意味と幾何学的意味

#### 4.2.4 拡張一次近似二次モーメント法の探索法の改良

アクティブ運用とベンチマーク運用の運用成果が等しい場合,  $g_i(\tilde{\mathbf{R}}) = 0$  として表現できることは, 式(4.2)から式(4.5)でも成立する. そこで, 標準化変換された空間  $\tilde{\mathbf{Y}}_j$  において  $g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j) = 0$  に注目した評価が重要になる. このため,  $g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*) = 0$  となる  $\tilde{\mathbf{Y}}_j^*$  において一次近似

$$\begin{aligned} g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j) &\approx \nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T (\tilde{\mathbf{Y}}_j - \tilde{\mathbf{Y}}_j^*) \\ \therefore \nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*) &= \left\{ \frac{\partial g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)}{\partial \tilde{Y}_{j_1}}, \frac{\partial g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)}{\partial \tilde{Y}_{j_2}} \right\}^T \end{aligned} \quad (4.16)$$

を行う. このとき, 式(4.16)を Hesse の標準形<sup>[97]</sup>を用いて

$$\begin{aligned} g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j) &= \frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)\|} (\tilde{\mathbf{Y}}_j - \tilde{\mathbf{Y}}_j^*) \\ &= \frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)\|} - \nabla h_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^* \\ &= \frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)\|} + \text{IR}_i^* \end{aligned} \quad (4.17)$$

と定式化するとき, 定数項  $\text{IR}_i^*$  は原点からの最小距離として  $\text{IR}$  の値を見積もることができる. ここに,  $\|\cdot\|$  は,  $\cdot$  のノルムを表わしている. すなわち,  $\text{IR}_i^*$  は一次元の正規分布に従っているため, 片側確率点に相当する  $\text{IR}_i^*$  は

$$\Pr(g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*) \geq 0) = \Phi(\text{IR}_i^*) \quad (4.18)$$

とも表現できる. したがって, 式(4.2)から式(4.5)により異なる評価式を定義したにもかかわらず, 等価な  $\text{IR}$  を見積もることができる. しかしながら,  $\text{IR}$  の算出のためには  $\tilde{\mathbf{Y}}_j^*$  を探索する必要がある.

そこで, Newton Raphson 法を用いて下記のように探索する<sup>[42]</sup>. ベンチマーク超過収益率の正負の符号に注意して拡張 1 次近似 2 次モーメント法を改良したモデル

If  $g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) \geq 0$  then

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \left[ -\frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j)\|} \tilde{\mathbf{Y}}_j \right] = -\frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)\|} \tilde{\mathbf{Y}}_j^* \\ & \text{or minimize } [\|\tilde{\mathbf{Y}}_j\|] = \|\tilde{\mathbf{Y}}_j^*\| \\ & \text{subject to } g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

もしくは

Else if  $g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) < 0$  then

$$\begin{aligned} & -\text{minimize } \left[ \frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j)\|} \tilde{\mathbf{Y}}_j \right] = -\frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)\|} \tilde{\mathbf{Y}}_j^* \\ & \text{or} -\text{minimize } [\|\tilde{\mathbf{Y}}_j\|] = -\|\tilde{\mathbf{Y}}_j^*\| \\ & \text{subject to } g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

により探索が可能となる。ここに、 $k+1$ 回目の探索回数の  $\tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k+1)}$  を下記のように十分収束するまで更新する。すなわち

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k+1)} = \frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k)})^T \tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k)} - g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k)})}{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k)})^T \nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k)})} \nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^{(k)}) \quad (4.21)$$

である。式(4.19)や式(4.20)と、 $\tilde{\mathbf{R}}$  の整合性を調べると、式(4.13)、式(4.14)、式(4.15)のいずれを用いても  $\mathbf{IR}^*$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{IR}^* &= -\frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)^T}{\|\nabla g_i(\tilde{\mathbf{Y}}_j^*)\|} \tilde{\mathbf{Y}}_j^* \\ &= -\frac{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{R}}^*)^T (\tilde{\mathbf{R}}^* - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))}{\sqrt{\nabla g_i(\tilde{\mathbf{R}}^*)^T \mathbf{V}_R \nabla g_i(\tilde{\mathbf{R}}^*)}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

と表記するか、もしくは

$$\begin{aligned}
IR^* &= \operatorname{sgn} \left( g_i \left( \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}) \right) \right) \| \tilde{\mathbf{Y}}_j^* \| \\
&= \operatorname{sgn} \left( g_i \left( \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}) \right) \right) \sqrt{(\tilde{\mathbf{R}}^* - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))^T \mathbf{V}_{\mathbf{R}}^{-1} (\tilde{\mathbf{R}}^* - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}))} \\
\therefore \operatorname{sgn} \left( g_i \left( \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}) \right) \right) &= \begin{cases} + & \left( g_i \left( \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}) \right) > 0 \right) \\ 0 & \left( g_i \left( \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}) \right) = 0 \right) \\ - & \left( g_i \left( \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}}) \right) < 0 \right) \end{cases} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

として符号の付く Mahalanobis 距離<sup>[134]</sup>を示し、唯一に写像前の空間  $\tilde{\mathbf{R}}$  でも不变性を有していることがわかる<sup>[62]</sup>。したがって、 $g_i(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})) = 0$  の場合に、市場において超過収益率の有無を明確に示す評価式ならば、IR は等価な値として求めることが可能である。

ここで、仮に式(4.2)から式(4.5)における  $g_i(\tilde{R}_A, \tilde{R}_B)$  の  $\tilde{R}_A$  について 3 章で示したように手数料  $\alpha$  を  $\delta$  と表記し直して減算した場合を想定したとき、 $\tilde{R}_{A'} = \tilde{R}_A - \delta$  と定義できる。そこで、 $\tilde{R}_A$  から  $\tilde{R}_{A'}$  に置き換えた場合でも  $g_i(\tilde{R}_{A'}, \tilde{R}_B) = 0$  を満たすならば、手数料を含むインフォメーション・レシオ  $IR_{TC}$  は求まる。すなわち、異なる定義式として式(4.2)から式(4.5)のように表したとしてもその評価は等価であることは明らかである<sup>[63]</sup>。したがって、IR もしくは手数料を含む  $IR_{TC}$  を正規分布の片側確率点として見積もるとき、アクティブ運用の定量的評価に役立つことがわかる。

次節 4.3 では、3 章で明らかにした均衡関係<sup>[61]</sup>で求まった  $\lambda = 0.612$  の数理的根拠<sup>[64]</sup>を導出する。また、その結果を用いて、4.5 で改めて  $IR_{TC}$  を付加価値に導入したモデルを考察する。

### 4.3 勝者の獲得賞金最大化の確率と片側確率点の数理的関係

3 章では、勝者とゲーミング企業の均衡関係が  $\lambda = 0.612$  により成立することが導出された<sup>[61]</sup>。本節では、 $\lambda$  の数理的根拠について考察する。

まず、その準備として数理的根拠の導出過程において重要な下式を示す。すなわち

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^u \phi(z) dz
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(-u) &= 1 - \Phi(u) \\
&= \int_u^\infty \phi(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{-u} \phi(z) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_u^\infty z\phi(z) dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \right]_u^\infty \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -0 + \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \\
&= \phi(u)
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^u z\phi(z) dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \right]_{-\infty}^u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) + 0 \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \\
&= -\phi(u)
\end{aligned}$$

である。また、本節の導出において、1章で示した IR の分子であるトラッキング・エラーの期待収益率  $\alpha$  と 3 章の手数料  $\alpha$  は、記号表記が同じなので注意を要する。したがって、下記の展開では、 $\alpha$  を本節では  $a$  と表記して説明する。以上の前提をもとに、3 章で示した式(3.32)を展開するとき

$$E(Y_W(a, t)) = \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi vt}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x+at)^2}{vt}\right) dx \tag{4.26}$$

に

$$\begin{aligned}
 \lambda &= a\sqrt{\frac{t}{v}}, z = \frac{x+at}{\sqrt{vt}}, \\
 x &= z\sqrt{vt} - at \\
 x = 0 &\Leftrightarrow z = \lambda (= \text{Const.}), \\
 dx &= \sqrt{vt}dz
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

として、式(4.24)および式(4.25)を用いると

$$\begin{aligned}
 E(Y_W(a, t)) &= E(Z_W) \\
 &= \int_{a\sqrt{\frac{t}{v}}}^{\infty} \frac{(z\sqrt{vt} - at)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
 &= \sqrt{vt} \int_{a\sqrt{\frac{t}{v}}}^{\infty} z\phi(z)dz - at \int_{a\sqrt{\frac{t}{v}}}^{\infty} \phi(z)dz \\
 &= \sqrt{vt}\phi\left(a\sqrt{\frac{t}{v}}\right) - at\Phi\left(-a\sqrt{\frac{t}{v}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

と展開できる。ゆえに、3章の式(3.63)の関係式  $t = \lambda^2 v/a^2$  の条件下で  $E(Y_W)$  の極大値が求まるので、式(4.27)と3章の式(3.36)を用いて式(4.28)を  $\sqrt{vt}$  で整理すると

$$\begin{aligned}
 U_W(t) &= \max_{t>0} E(Y_W(t)) \\
 &= \max_{t>0} \left( \sqrt{vt}\phi\left(a\sqrt{\frac{t}{v}}\right) - at\Phi\left(-a\sqrt{\frac{t}{v}}\right) \right) \\
 &= \max_{t>0} \left( \sqrt{vt} \int_{a\sqrt{\frac{t}{v}}}^{\infty} z\phi(z)dz - at \int_{a\sqrt{\frac{t}{v}}}^{\infty} \phi(z)dz \right) \\
 &= \left( \sqrt{vt} \int_{\lambda}^{\infty} z\phi(z)dz - at \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z)dz \right) \\
 &= \left( \sqrt{vt} \int_{\lambda}^{\infty} z\phi(z)dz - \lambda\sqrt{vt} \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z)dz \right) \\
 &= \left( \int_{\lambda}^{\infty} z\phi(z)dz - \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z)dz \right) \sqrt{vt} \\
 &= (\phi(\lambda) - \lambda\Phi(-\lambda)) \sqrt{vt}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

と表せる。もしくは、 $v/a$  で整理すると

$$\begin{aligned}
U_W(t) &= \max_{t>0} E(Y_W(t)) \\
&= \max_{t>0} \left( \sqrt{vt} \phi \left( a \sqrt{\frac{t}{v}} \right) - at \Phi \left( -a \sqrt{\frac{t}{v}} \right) \right) \\
&= \max_{t>0} \left( \sqrt{vt} \int_{a\sqrt{\frac{t}{v}}}^{\infty} z \phi(z) dz - at \int_{a\sqrt{\frac{t}{v}}}^{\infty} \phi(z) dz \right) \\
&= \left( \sqrt{vt} \int_{\lambda}^{\infty} z \phi(z) dz - at \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z) dz \right) \\
&= \left( \lambda \frac{v}{a} \int_{\lambda}^{\infty} z \phi(z) dz - \lambda^2 \frac{v}{a} \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z) dz \right) \\
&= \left( \int_{\lambda}^{\infty} z \phi(z) dz - \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z) dz \right) \lambda \frac{v}{a} \\
&= (\lambda \phi(\lambda) - \lambda^2 \Phi(-\lambda)) \frac{v}{a}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

と表せる。ここに、 $U_W(t)$  はベンチマーク運用とアクティブ運用の差を表しており、以下では後者が前者に比べてどの程度優れているかを測るための目的で用いることとする。さらに、3章で示した式(3.56)の係数の値  $k_W=0.1654$  にもとづいて

$$\begin{aligned}
U_W(t) &= k_W \sqrt{vt} \\
&= (\phi(\lambda) - \lambda \Phi(-\lambda)) \sqrt{vt}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

と表記し直すか、もしくは、3章で示した式(3.52)の係数の値  $l_W=0.101228$  にもとづいて

$$\begin{aligned}
U_W(t) &= k_W \lambda \frac{v}{a} \\
&= l_W \frac{v}{a} \\
&= (\lambda \phi(\lambda) - \lambda^2 \Phi(-\lambda)) \frac{v}{a}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

と表記し直して数理的意義について考察を進める。

以上について、視覚化すると図4.2のように示すことができる。図4.2の青破線は、 $a$  を変化させながら式(4.26)と式(4.28)で示した  $E(Y_W(a, t))$  の曲線の特徴を描いたものである。このとき、 $a$  の変化に対応した  $E(Y_W(a, t))$  の極大値も同時に赤丸としてプロットしている。これは、式(4.29)で示した  $U_W(t)$  のように放物線である。したがって、 $U_W(t)$  は  $a$  の

変化に対応して極大値の特徴として描かれていることがわかる。

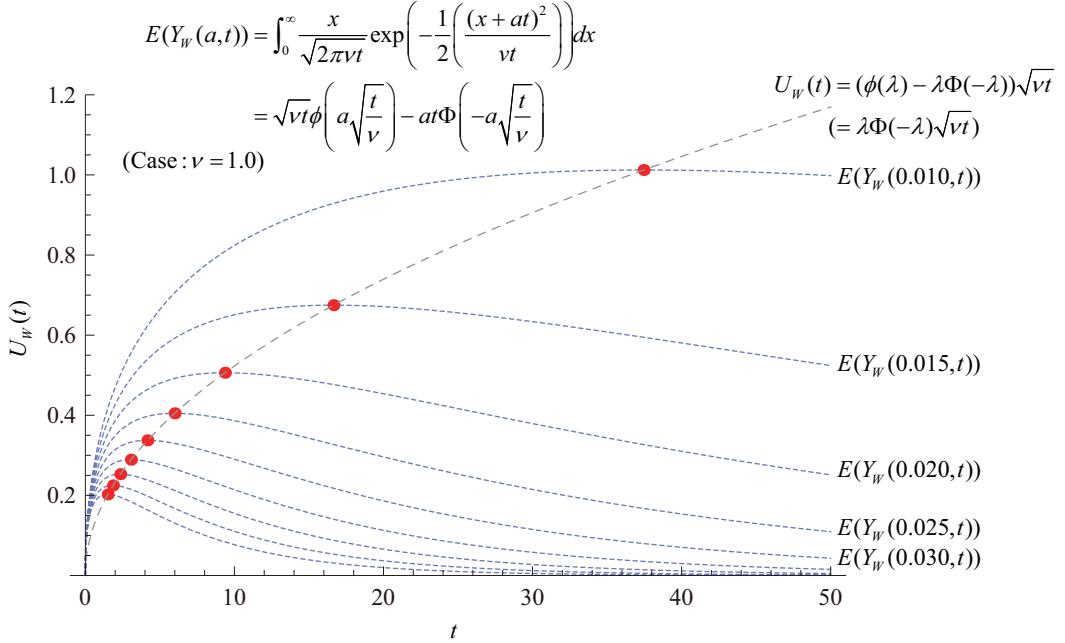


図 4.2  $E(Y_W(a, t))$  と  $U_W(t)$  の関係

また、3章の式(3.33)についても同様に

$$E(Y_L(a, t)) = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{2\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x+at)^2}{\nu t}\right)\right) dx \quad (4.33)$$

なので、式(4.24)および式(4.25)を用いて

$$\begin{aligned} E(Y_L(a, t)) &= E(Z_L) \\ &= \int_{-\infty}^{a\sqrt{\frac{t}{\nu}}} \frac{z\sqrt{\nu t} - at}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \sqrt{\nu t} \int_{-\infty}^{a\sqrt{\frac{t}{\nu}}} z\phi(z) dz - at \int_{-\infty}^{a\sqrt{\frac{t}{\nu}}} \phi(z) dz \\ &= -\sqrt{\nu t} \phi\left(a\sqrt{\frac{t}{\nu}}\right) - at\Phi\left(a\sqrt{\frac{t}{\nu}}\right) \\ &= -\sqrt{\nu t} \phi\left(a\sqrt{\frac{t}{\nu}}\right) - at \left(1 - \Phi\left(-a\sqrt{\frac{t}{\nu}}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

と展開できる。ここで、式(4.29)が成立するときに式(4.34)を  $\sqrt{vt}$  で整理すると

$$\begin{aligned}
 U_L(t) &= \sqrt{vt} \int_{-\infty}^{a\sqrt{\frac{t}{v}}} z\phi(z)dz - at \int_{-\infty}^{a\sqrt{\frac{t}{v}}} \phi(z)dz \\
 &= \sqrt{vt} \int_{-\infty}^{\lambda} z\phi(z)dz - at \int_{-\infty}^{\lambda} \phi(z)dz \\
 &= \sqrt{vt} \int_{-\infty}^{\lambda} z\phi(z)dz - \lambda\sqrt{vt} \int_{-\infty}^{\lambda} \phi(z)dz \\
 &= -(\phi(\lambda) + \lambda(1 - \Phi(-\lambda)))\sqrt{vt}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

と表せる。もしくは、 $v/a$  で整理すると

$$\begin{aligned}
 U_L(t) &= \sqrt{vt} \int_{-\infty}^{a\sqrt{\frac{t}{v}}} z\phi(z)dz - at \int_{-\infty}^{a\sqrt{\frac{t}{v}}} \phi(z)dz \\
 &= \sqrt{vt} \int_{-\infty}^{\lambda} z\phi(z)dz - at \int_{-\infty}^{\lambda} \phi(z)dz \\
 &= \lambda \frac{v}{a} \int_{-\infty}^{\lambda} z\phi(z)dz - \lambda^2 \frac{v}{a} \int_{-\infty}^{\lambda} \phi(z)dz \\
 &= -(\lambda\phi(\lambda) + \lambda^2(1 - \Phi(-\lambda))) \frac{v}{a}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

と表せる。ここに、 $U_L(t)$  はベンチマーク運用とアクティブ運用の差を表しており、以下では後者が前者に比べてどの程度劣るかを測るための目的で用いることとする。さらに、3章の式(3.57)の係数の値  $k_L = 0.7774$  にもとづいて

$$\begin{aligned}
 U_L(t) &= -k_L \sqrt{vt} \\
 &= -(\phi(\lambda) + \lambda(1 - \Phi(-\lambda))) \sqrt{vt}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

と表記し直す。もしくは、3章の式(3.53)の係数の値  $l_L = 0.475776$  にもとづいて

$$\begin{aligned}
 U_L(t) &= -k_L \lambda \frac{v}{a} \\
 &= -l_L \frac{v}{a} \\
 &= -(\lambda\phi(\lambda) + \lambda^2(1 - \Phi(-\lambda))) \frac{v}{a}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

と表記し直す。これより、 $U_W$  と  $U_L$  の和で表される  $U_G$  は

$$\begin{aligned}
 U_G &= U_L + U_W \\
 &= -l_L \frac{\nu}{a} + l_W \frac{\nu}{a} \\
 &= -\lambda^2 \frac{\nu}{a} \\
 &= -at \\
 U_G &= U_L + U_W \\
 &= -k_L \sqrt{\nu t} + k_W \sqrt{\nu t} \\
 &= -\lambda \sqrt{\nu t} \\
 \because -l_L + l_W &= \lambda^2 \\
 \because -k_L + k_W &= \lambda \\
 \because t &= \lambda^2 \frac{\nu}{a^2}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

となる関係式として導出できる。ここに、 $U_G$  は手数料を得る金融機関の利得を意味する。このとき、常に3章の均衡関係を保証するためには、式(4.39)の  $at = \lambda \sqrt{\nu t}$  の関係より

$$t = \lambda^2 \frac{\nu}{a^2} \tag{4.40}$$

が成立していかなければならない。ここで、式(4.32)より

$$l_W = \lambda \phi(\lambda) - \lambda^2 \Phi(-\lambda) \tag{4.41}$$

とおくとき、 $\lambda$ について1階微分して  $l_W$  の極大値を求めるためには

$$\frac{dl_W}{d\lambda} = \phi(\lambda) - 2\lambda \Phi(-\lambda) = 0 \tag{4.42}$$

となる関係式を満たさなくてはならない。式(4.42)を満たす  $\lambda$  は、Mathematica における Newton 法<sup>[131]</sup>により探索できる。式(4.42)から  $\lambda$  は

$$\frac{\int_{\lambda}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz}{\lambda \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz} = 2 \quad (4.43)$$

(∵  $\lambda = 0.612003$ )

または

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\right)}{\lambda \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz} = 2 \quad (4.44)$$

(∵  $\lambda = 0.612003$ )

となる関係式が成立する。すなわち、式(4.43)および式(4.44)を満たす  $\lambda = 0.612003$  が探索できる<sup>[64]</sup>。式(4.24)と式(4.25)を用いて、式(4.44)をより簡略表記すると

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\lambda)}{\lambda \Phi(-\lambda)} &= \frac{\phi(\lambda)}{\lambda \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z) dz} = \frac{\int_{\lambda}^{\infty} z \phi(z) dz}{\lambda \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z) dz} = 2 \\ &\therefore \begin{cases} \phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\right), \\ \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z) dz = \int_{-\infty}^{-\lambda} \phi(z) dz = \Phi(-\lambda) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.45)$$

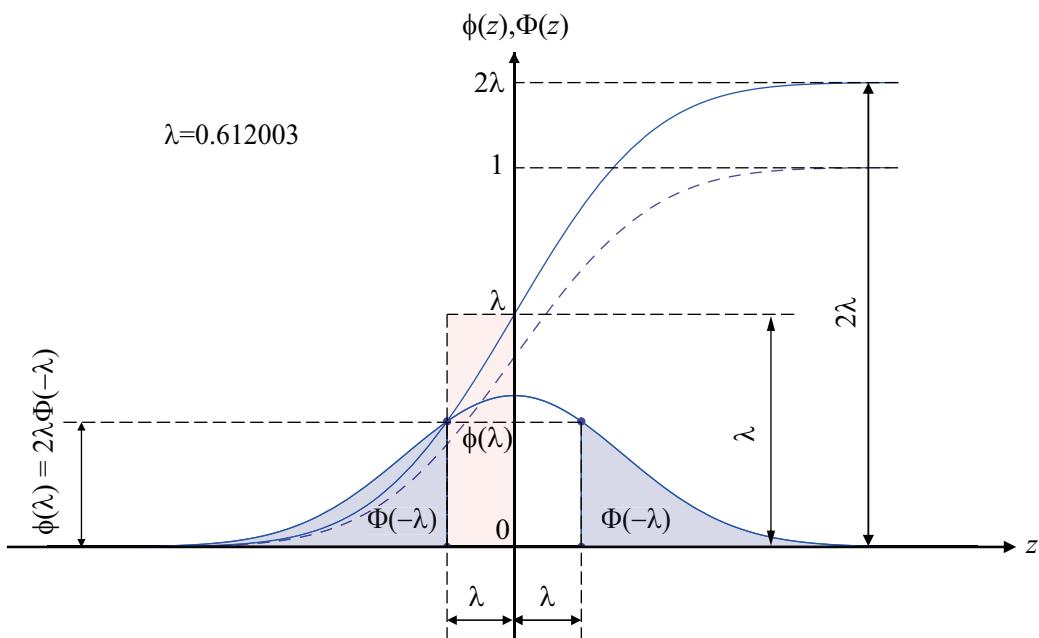
が成立する。同様に別の表記では

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\infty} z \phi(z) dz &= 2\lambda \int_{\lambda}^{\infty} \phi(z) dz \\ \phi(\lambda) &= 2\lambda \Phi(-\lambda) \end{aligned} \quad (4.46)$$

とも記述できる<sup>[64]</sup>。このときの  $\lambda$  の特性は、図 4.3 に示す傾向として正規分布上に視覚化できる。

特記すべき点として、 $\lambda$  の正規分布における数理的意義は、図 4.3 で示す累積分布関数  $\Phi(-\lambda)$ 、確率密度関数  $\phi(\lambda)$ 、片側確率点  $\lambda$  の幾何学的なバランス式である。すなわち、図 4.3 と式(4.46)が示すように、片側確率点の値  $-\lambda$  における確率密度関数の値  $\phi(\lambda)(=$

$\phi(-\lambda)$  は、累積分布関数の値  $\Phi(-\lambda)$  の 2 倍に等しい。このことは、図 4.3 に累積分布関数を  $2\lambda$  倍に変化させた  $2\lambda\Phi(-\lambda)$  を青色実線として描く曲線上に、片側確率点が  $-\lambda$  のとき、確率密度関数の値  $\phi(\lambda)$  が等しくなる交点として示されている。さらに、 $z = 0$  のとき青色実線上に  $2\lambda\Phi(0) = \lambda$  が成立するため、片側確率点  $-\lambda$  を考慮すると、図 4.3 に薄桃色で塗っている部分は、縮尺の都合上長方形に見えるが、実際には縦軸の長さと横軸の長さが  $\lambda$  となる正方形である。したがって、統計学的特性を示す正規分布に幾何学的特性が示されていることがわかる。

図 4.3  $\lambda$  の幾何学的特性と統計学的特性の視覚化

一方、別な視点で  $\lambda = 0.612$  は、Mosteller<sup>[136]</sup> や Cox<sup>[137]</sup>により下式の最大値を求める際に探索されている。中でも、Cox は図 4.3 の正規分布の  $z$  軸に対する積分区間を次のように、”Poor”, ”Average”, ”Good”として  $(-\infty, -\lambda)$ ,  $(-\lambda, \lambda)$ ,  $(\lambda, \infty)$  の 3 つの級に分けて  $\lambda$  の活用を提案している。本章では、異なるアプローチにより最大化のモデルを定義した結果、Mosteller や Cox の最大値について下式の条件を満たしていることが確認できた。すなわち、Cox が示す 3 つの級に該当する確率と条件付き期待値の 2 乗の積の総和が最大<sup>[137]</sup>となる

$$\begin{aligned}
& \max_z \left( \int_{-\infty}^{-z} \phi(u) du \left( \frac{\int_{-\infty}^{-z} u \phi(u) du}{\int_{-\infty}^{-z} \phi(u) du} \right)^2 \right. \\
& + \int_{-z}^z \phi(u) du \left( \frac{\int_{-z}^z u \phi(u) du}{\int_{-z}^z \phi(u) du} \right)^2 \\
& \left. + \int_z^{\infty} \phi(u) du \left( \frac{\int_z^{\infty} u \phi(u) du}{\int_z^{\infty} \phi(u) du} \right)^2 \right) \\
& = \max_z \frac{2\phi(z)^2}{\Phi(-z)} \\
& = 2 \times 2^2 \lambda^2 \Phi(-\lambda) \quad (\cong 0.8098)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

である。したがって、本章で導出した式(4.41)の最大化による  $\lambda$  は、Mosteller<sup>[136]</sup>や Cox<sup>[137]</sup>による式(4.47)の  $\lambda$  と同じ値であることがわかる。

ところで、本節で明らかになったバランス式(4.46)をもとに  $l_W$  と  $k_W$  の数値を再検証すると

$$\begin{aligned}
l_W &= \frac{1}{2} \lambda \phi(\lambda) \\
&= \lambda^2 \Phi(-\lambda) \\
&= 0.612^2 \times 0.270268 \\
&= 0.101228
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
k_W &= \frac{1}{2} \phi(\lambda) \\
&= \lambda \Phi(-\lambda) \\
&= 0.612 \times 0.270268 \\
&= 0.1654
\end{aligned} \tag{4.49}$$

と 3 章で導出した数値と一致する。同様に、 $l_L$  と  $k_L$  の数値も再検証して

$$\begin{aligned}
l_L &= l_W + \lambda^2 \\
&= \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{1 + \Phi(-\lambda)}{\Phi(-\lambda)} \right) \phi(\lambda) \\
&= \lambda^2 (1 + \Phi(-\lambda)) \\
&= 0.612^2 \times (1 + 0.270268) \\
&= 0.475776
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
k_L &= k_W + \lambda \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \Phi(-\lambda)}{\Phi(-\lambda)} \right) \phi(\lambda) \\
&= \lambda (1 + \Phi(-\lambda)) \\
&= 0.612 \times (1 + 0.270268) \\
&= 0.7774
\end{aligned} \tag{4.51}$$

と同様に一致することが確認できる。したがって、3章ではべき乗回帰分析により導出を試みたが、本節で数値の根拠を数理的に保証することができた。この関係を用いて、アクティブ運用における手数料を考慮した IR を用いた付加価値について数理的現象を解明することが本章の目的である。

#### 4.4 正規分布の累積分布関数の導関数と $\lambda$ の数理的関係

4.3 の図 4.3 に示すように  $\lambda$  には幾何学的特性と統計学的特性があることがわかった。本節では、 $\lambda = 0.612$  について別な視点で正規分布との特徴を考察するため、累積分布関数の導関数を用いる。

まず、式(4.24)と式(4.25)を用いて

$$\begin{aligned}
h_1(z) &= \Phi(-z) \\
&= \int_z^\infty \phi(\xi) d\xi \\
&= \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \\
\phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

と見積もる。式(4.52)から次のように導関数を求める。すなわち

$$\begin{aligned}
 h_1'(z) &= \frac{\partial h_1(z)}{\partial z} = -\phi(z) \\
 h_1''(z) &= \frac{\partial^2 h_1(z)}{\partial z^2} = z\phi(z) \\
 h_1'''(z) &= \frac{\partial^3 h_1(z)}{\partial z^3} = (1-z^2)\phi(z)
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

が求まる。このとき、式(4.52)と式(4.53)の関係から次のような関係式

$$\begin{aligned}
 h_1(z) &= \int_z^\infty \phi(\xi) d\xi \\
 &= \Phi(-z) \\
 h_2(z) &= \int_z^\infty \xi \phi(\xi) d\xi - z \int_z^\infty \phi(\xi) d\xi \\
 &= \phi(z) - z\Phi(-z) \\
 h_3(z) &= z \int_z^\infty \xi \phi(\xi) d\xi - z^2 \int_z^\infty \phi(\xi) d\xi \\
 &= z\phi(z) - z^2\Phi(-z) \\
 h_4(z) &= \frac{1}{2} \int_z^\infty \xi \phi(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \phi(z) \\
 h_5(z) &= \frac{z}{2} \int_z^\infty \xi \phi(\xi) d\xi \\
 &= \frac{z}{2} \phi(z) \\
 h_6(z) &= z \int_z^\infty \phi(\xi) d\xi \\
 &= z\Phi(-z)
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

を見積もることができる。すなわち

$$\begin{aligned}
 h_2(z) &= -h_1'(z) - zh_1(z) \\
 h_3(z) &= -zh_1'(z) - z^2h_1(z) = h_1''(z) - z^2h_1(z) \\
 h_4(z) &= -\frac{1}{2}h_1'(z) \\
 h_5(z) &= -\frac{z}{2}h_1'(z) = \frac{1}{2}h_1''(z) \\
 h_6(z) &= zh_1(z)
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

である。ここで、式(4.55)に  $z = \lambda$  を代入するとき

$$\begin{aligned}
h_2(\lambda) &= \lambda\Phi(-\lambda) \\
&= -h'_1(\lambda) - \lambda h_1(\lambda) \\
h_3(\lambda) &= \lambda^2\Phi(-\lambda) \\
&= -\lambda h'_1(\lambda) - \lambda^2 h_1(\lambda) \\
&= h''_1(\lambda) - \lambda^2 h_1(\lambda) \\
h_4(\lambda) &= \lambda\Phi(-\lambda) \\
&= -\frac{1}{2}h'_1(\lambda) \\
h_5(\lambda) &= \lambda^2\Phi(-\lambda) \\
&= -\frac{\lambda}{2}h'_1(\lambda) \\
&= \frac{1}{2}h''_1(\lambda) \\
h_6(\lambda) &= \lambda\Phi(-\lambda) \\
&= \lambda h_1(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

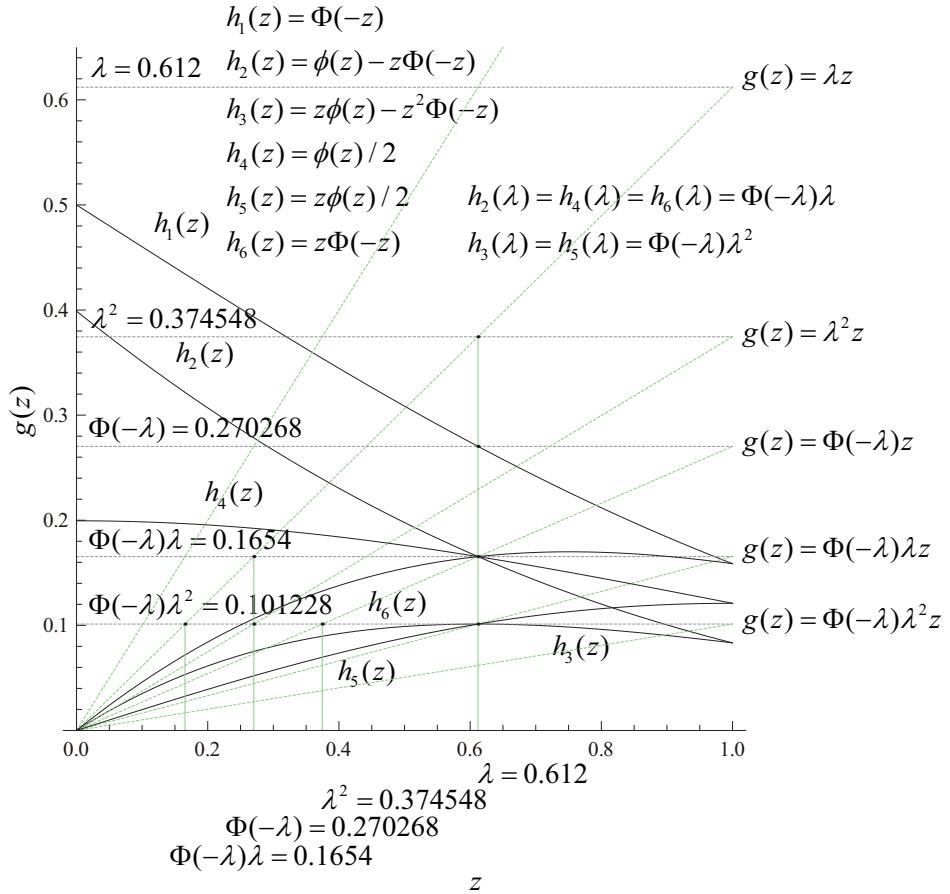
となる関係式が得られる。すなわち

$$\begin{aligned}
h_2(\lambda) &= h_4(\lambda) = h_6(\lambda) = \lambda\Phi(-\lambda) \\
h_3(\lambda) &= h_5(\lambda) = \lambda^2\Phi(-\lambda)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

である。同様に、式(4.55)に  $z = 1$  を代入するとき

$$\begin{aligned}
h_1(1) &= h_6(1) \\
h_2(1) &= h_3(1) \\
h_4(1) &= h_5(1)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

となる関係式が得られる。この関係を明確にするために、式(4.54)の  $h_1(z)$  から  $h_6(z)$  までの特徴を図 4.4 に図示している。図示した結果、 $\lambda = 0.612$  と  $\lambda = 1$  において式(4.57)と式(4.58)の交点による釣合関係が視覚化されている。

図 4.4  $\lambda$  の幾何学的イメージ図

したがって、あらためて  $\lambda = 0.612$  が意義ある数値であることが再確認できる。また、 $h_3(z) = z\phi(z) - z^2\Phi(-z)$  の極大値、すなわち、 $l_W$  の極大値が  $\lambda = 0.612$  であることも視覚化されている。以上から、 $h_1(z)$  から  $h_6(z)$  の数理的関係がより明確になれば、式(4.46)の関係式  $\phi(\lambda) = 2\lambda\Phi(-\lambda)$  について更なる情報が得られることが期待できる。

次節では、式(4.46)の関係式  $\phi(\lambda) = 2\lambda\Phi(-\lambda)$  を IR と  $U_W$  に適用して考察を進める。

## 4.5 インフォメーション・レシオと $\lambda$ および手数料の数理的関係

本節では、式(4.31)と式(4.32)で示した  $U_W(t)$  の関係式を再度考察する。すなわち

$$\begin{aligned}
 U_W(t) &= k_W \frac{at}{\lambda} \\
 &= k_W \sqrt{vt} \\
 &= k_W \lambda \frac{v}{a}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

である。この式(4.59)に IR を適用して考察する。まず、式(4.22)と式(4.23)により定量的尺度が明らかとなつた IR は、1章でも記述したとおり

$$\begin{aligned} \text{IR} &= \frac{E[g(\tilde{\mathbf{R}})]}{\sqrt{V[g(\tilde{\mathbf{R}})]}} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{v}} \\ &= \frac{\alpha}{\text{TE}} \end{aligned} \tag{4.60}$$

である。ここに、トラッキング・エラーの期待収益率  $\alpha = \alpha$  とトラッキング・エラーの標準偏差  $\text{TE} = \sqrt{v}$  である。式(4.59)に式(4.60)を用いると

$$\begin{aligned} U_W(t) &= k_W \frac{\alpha t}{\lambda} \\ &= k_W \text{TE} \sqrt{t} \\ &= k_W \lambda \frac{\text{TE}^2}{\alpha} \\ &= k_W \lambda \frac{\text{TE}}{\text{IR}} \end{aligned} \tag{4.61}$$

と表せる<sup>[63]</sup>。式(4.61)に、 $k_W = \lambda \Phi(-\lambda)$  を用いて

$$\begin{aligned} U_W(t) &= \Phi(-\lambda) \alpha t \\ &= \lambda \Phi(-\lambda) \text{TE} \sqrt{t} \\ &= \lambda^2 \Phi(-\lambda) \frac{\text{TE}^2}{\alpha} \\ &= \lambda^2 \Phi(-\lambda) \frac{\text{TE}}{\text{IR}} \end{aligned} \tag{4.62}$$

と定義しなおすことができる<sup>[64]</sup>。これより

$$\begin{aligned}
 \alpha t &= \lambda \text{TE} \sqrt{t} \\
 &= \lambda^2 \frac{\text{TE}^2}{\alpha} \\
 &= \lambda^2 \frac{\text{TE}}{\text{IR}} \\
 \text{IR} &= \frac{\lambda}{\sqrt{t}}
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

が得られる。このとき、式(4.63)の  $\lambda$  は正規分布の片側確率点でもあるので、仮にヒストリカル・データを用いた場合には、IR の定義として  $t$  分布の片側確率点に代用可能である<sup>[16][17][49]</sup>。このことは、Grinold と Kahn が示す考え方<sup>[16][17]</sup>とも整合する。すなわち、IR を統計量として扱うことができるため、アクティブ運用成果を定量的に評価できることが保証される。

そこで、1章の式(1.35)の関係をもとに付加価値を

$$\text{VA} = \text{IR} \cdot \text{TE} - \gamma \text{TE}^2 \tag{4.64}$$

とおくことができる<sup>[16][17][82]</sup>。ここに、 $\gamma$  はリスク回避度である。

一方、4.2 で示した手数料  $\delta$  を含むインフォメーション・レシオは

$$\text{IR}_{\text{TC}} = \frac{(\mu_A - \mu_B) - \delta}{\text{TE}} = \text{IR} - \frac{\delta}{\text{TE}} \tag{4.65}$$

である。ここに、 $\mu_A$  はアクティブ運用の期待収益率、 $\mu_B$  はベンチマーク運用の期待収益率、 $\delta$  は手数料である。Grinold と Kahn は取引コストを含む場合の VA を 1 章の式(1.35)のとおり

$$\text{VA} = \text{IR} \cdot \text{TE} - \frac{\gamma}{2} \text{TE}^2 - \text{TC} \tag{4.66}$$

と示しているが<sup>[16][17]</sup>、式(4.65)の  $\text{IR}_{\text{TC}}$  を  $\text{IR}$  の代わりに式(4.64)に代入するとき

$$\begin{aligned}
 IR_{TC} \cdot TE - \frac{\gamma}{2} TE^2 &= \left( IR - \frac{\delta}{TE} \right) TE - \frac{\gamma}{2} TE^2 \\
 &= IR \cdot TE - \frac{\gamma}{2} TE^2 - \delta \\
 &= IR \cdot TE - \frac{\gamma}{2} TE^2 - TC
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

が成立する。したがって、本章では手数料を取引コストと同義として取扱う意義

$$\delta = TC \tag{4.68}$$

が成立する<sup>[64]</sup>。ここで、式(4.62)の  $U_W(t)$  から3章で示した  $V_W(t)$  に変換すると

$$\begin{aligned}
 V_W(t) &= \frac{U_W(t)}{\Phi(-\lambda)} \\
 &= \alpha t \\
 &= \lambda TE \sqrt{t} \\
 &= \lambda^2 \frac{TE^2}{\alpha} \\
 &= \lambda^2 \frac{TE}{IR}
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

と表現できる。

ところで、3章では図4.5の赤色破線で描くパフォーマンス上に青色破線のように手数料が影響する傾向として  $V_W(t)$  を導出した。この考え方は、 $t$  に応じて手数料が線形関数として増加するため、全体のパフォーマンスが悪化していくことを想定したモデルであった。しかし、実際には手数料を含めてもベンチマーク運用よりも良好な成果を有するアクティブ運用も存在する。これを図4.5では緑色破線で描いて示している。すなわち、3章では  $-\alpha t$  で全体が下がる傾向を導出したが、手数料を減算した期待収益率が  $\alpha - \delta (> 0)$  の運用成果を収めるアクティブ運用は、3章とは  $t$  軸を対称軸として反転する。このため、下がる傾向として考えてきたモデルを上がる傾向としてもモデルを考えれば同じ考え方が適用できる。また、図4.5の黒色破線は手数料を考慮したアクティブ運用とベンチマーク運用の運用成果が等しい場合の特徴を図示したものである。したがって、図4.5には

- (1) アクティブ運用がベンチマーク運用を上回る成果のとき(図 4.5 の緑色破線)
- (2) アクティブ運用がベンチマーク運用と同じ成果のとき(図 4.5 の黒色破線)
- (3) アクティブ運用がベンチマーク運用を下回る成果のとき(図 4.5 の赤色破線)

の 3 つの場合の運用成果に対応するモデルを示すことができる。

そこで、図 4.5 に示す 3 つの場合について  $t = 1$  に限定したとき、式(4.69)に手数料  $\delta (= \text{TC})$  を考慮してモデルを考察する。このとき、3 章の手数料  $\alpha$  を 4 章のトラッキング・エラーの期待収益率から手数料を減算した  $\alpha - \delta$  に置き換えると、(1)(2)(3)の条件を想定した  $V_W(1)$  は

$$\begin{aligned}
 V_W(1) &= (\mu_A - \mu_B) - \delta \\
 &= \alpha - \delta \\
 &= \text{IR} \cdot \text{TE} - \text{TC} \\
 &= \begin{cases} -\lambda \text{TE} & (\alpha - \delta < 0) \\ 0 & (\alpha - \delta = 0) \\ \lambda \text{TE} & (\alpha - \delta > 0) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

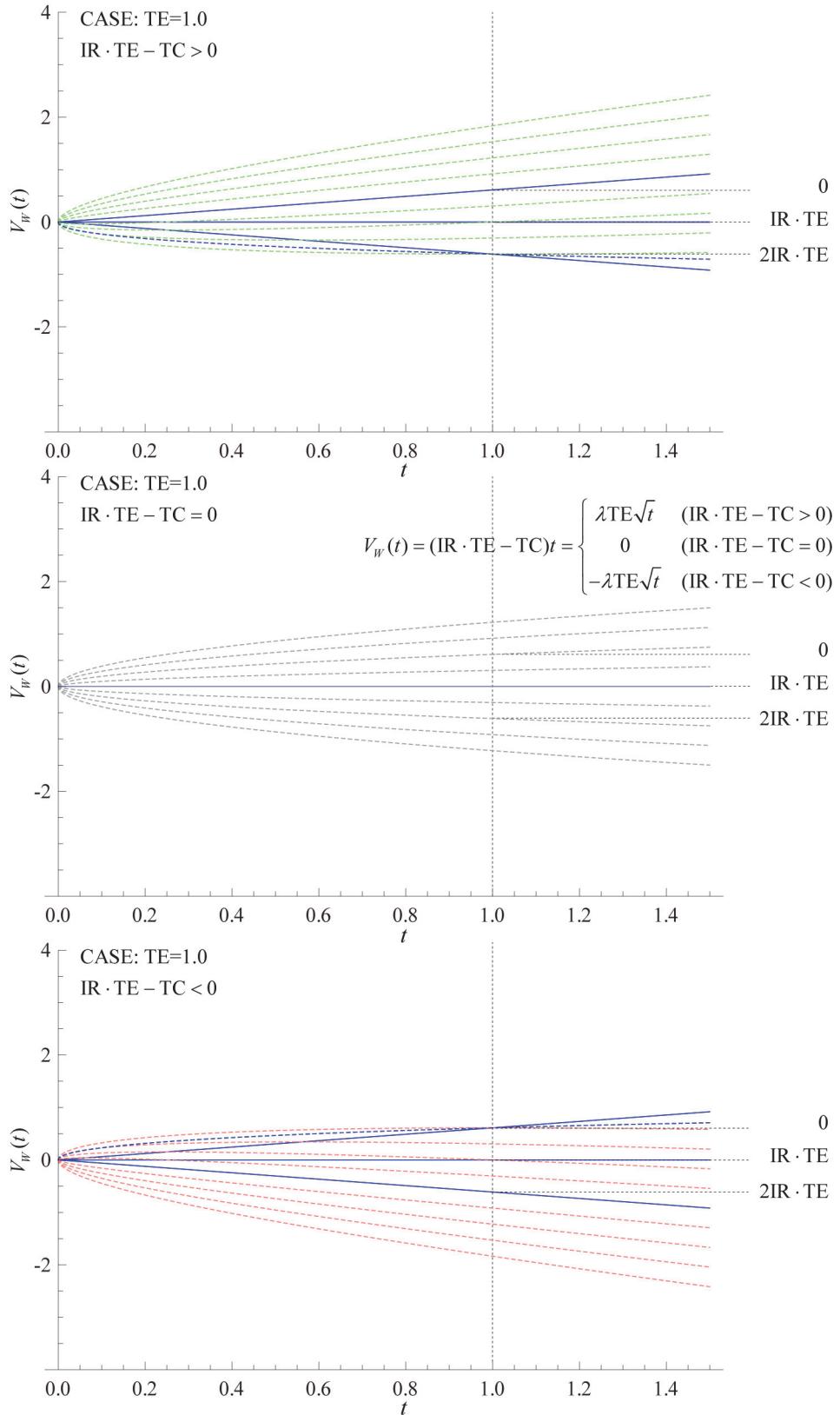
と表せる。したがって、式(4.70)について式(4.63)の IR と TE により、TC を表すと

$$\text{TC} = \begin{cases} 2\text{IR} \cdot \text{TE} & (\alpha - \delta < 0) \\ \text{IR} \cdot \text{TE} & (\alpha - \delta = 0) \\ 0 & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \tag{4.71}$$

が成立する。また、式(4.70)について式(4.63)の  $\lambda$  と TE により、TC を表すと

$$\text{TC} = \begin{cases} 2\lambda \text{TE} & (\alpha - \delta < 0) \\ \lambda \text{TE} & (\alpha - \delta = 0) \\ 0 & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \tag{4.72}$$

が成立する。この関係式を図示すると、TE を固定して図 4.5 のように 3 つの場合における IR と TC の関係式を視覚化することができる。

図 4.5  $V_w(t)$  の傾向

この3つの場合を手数料で考えると、図4.5に青実線として手数料の負担の関係を描くことができる。すなわち、TCはIRがTEの倍数を負担する状態で均衡している。たとえば、 $IR \cdot TE - TC = 0$ のとき、既にTCを負担しており均衡している。したがって、実質負担は $IR \cdot TE$ である。 $IR \cdot TE - TC > 0$ のとき、既にTCを負担しているが、逆にIR・TEだけパフォーマンスは優れた成果として均衡している。したがって、実質負担は0である。また、 $IR \cdot TE - TC < 0$ のとき、既にTCを負担しているが、IR・TEだけパフォーマンスは劣る成果として均衡している。したがって、実質負担は $2IR \cdot TE$ である。

$\lambda$ に基づいて考えると、青破線は $\lambda = 0.612$ のもとで、 $IR \cdot TE - TC > 0$ のとき、好調な運用成果を予測するときの下振れリスクを $V_W(t) = -\lambda TE\sqrt{t}$ として描ける。 $IR \cdot TE - TC < 0$ のとき、不調な運用成果を予測するときに逆に勝つ場合のリターンを $V_W(t) = +\lambda TE\sqrt{t}$ として描くことができる。特に、 $t = 1$ の場合には、 $TE = 1.0$ ならば、 $IR = \lambda$ となる均衡関係が導出できる。

以上をまとめると、図4.5から3つの場合について次の関係が明らかである。まず、 $IR \cdot TE - TC = 0$ のとき、 $TC = IE \cdot TE = \alpha$ が成立する。次に、 $IR \cdot TE - TC > 0$ のとき、実質手数料負担が $TC = 0$ となり、リターンは下振れリスクを解消できている。一方、 $IR \cdot TE - TC < 0$ のとき、実質手数料は $TC = 2IE \cdot TE$ と追加的に2倍の費用となるリスクを負担していることと同じ結果を得る。

ところで、式(4.70)は式(4.69)より、(1)(2)(3)の条件を想定して

$$\begin{aligned}
 V_W(1) &= (\mu_A - \mu_B) - \delta \\
 &= \alpha - \delta \\
 &= IR \cdot TE - TC \\
 &= \begin{cases} -\lambda^2 \frac{TE}{IR} & (\alpha - \delta < 0) \\ 0 & (\alpha - \delta = 0) \\ \lambda^2 \frac{TE}{IR} & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \tag{4.73}
 \end{aligned}$$

のように展開することもできる。したがって、TCは

$$TC = \begin{cases} IR \cdot TE + \lambda^2 \frac{TE}{IR} & (\alpha - \delta < 0) \\ IR \cdot TE & (\alpha - \delta = 0) \\ IR \cdot TE - \lambda^2 \frac{TE}{IR} & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \quad (4.74)$$

とも見積もることができる。そこで、 $t$  が 1 以外の場合も含めて  $V_W(t)$  は

$$\begin{aligned} V_W(t) &= ((\mu_A - \mu_B) - \delta)t \\ &= (\alpha - \delta)t \\ &= (IR \cdot TE - \delta)t \\ &= \begin{cases} -\lambda TE \sqrt{t} & (\alpha - \delta < 0) \\ 0 & (\alpha - \delta = 0) \\ \lambda TE \sqrt{t} & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.75)$$

と示すことができる。この結果、TC について

$$TC = \begin{cases} 2IR \cdot TE & (\alpha - \delta < 0) \\ IR \cdot TE & (\alpha - \delta = 0) \\ 0 & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \quad (4.76)$$

もしくは

$$TC = \begin{cases} \frac{2\lambda TE}{\sqrt{t}} & (\alpha - \delta < 0) \\ \frac{\lambda TE}{\sqrt{t}} & (\alpha - \delta = 0) \\ 0 & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \quad (4.77)$$

が得られる。すなわち、TC は統計量  $TE/\sqrt{t}$  と  $\lambda$  の積による関係式により示すことができる。同様に式(4.74)について、 $t$  が 1 以外の場合も含めて  $V_W(t)$  は

$$\begin{aligned}
V_W(t) &= ((\mu_A - \mu_B) - \delta)t \\
&= (\alpha - \delta)t \\
&= (IR \cdot TE - \delta)t \\
&= \begin{cases} -\lambda^2 \frac{TE}{IR} & (\alpha - \delta < 0) \\ 0 & (\alpha - \delta = 0) \\ \lambda^2 \frac{TE}{IR} & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \tag{4.78}
\end{aligned}$$

と見積もれる。したがって、TCは

$$TC = \begin{cases} IR \cdot TE + \frac{\lambda^2 TE}{t IR} & (\alpha - \delta < 0) \\ IR \cdot TE & (\alpha - \delta = 0) \\ IR \cdot TE - \frac{\lambda^2 TE}{t IR} & (\alpha - \delta > 0) \end{cases} \tag{4.79}$$

が得られる。式(4.79)と式(4.76)の傾向は、図4.6に示す傾向として描くことができる。

すなわち、図4.5の関係として考察したとおり、図4.6においても同じ関係が成立する。まず、 $IR \cdot TE - TC = 0$  のとき、 $TC = IE \cdot TE = \alpha$  が等しいことを意味する。また、 $IR \cdot TE - TC > 0$  のとき、 $TC = 0$  となり、リターンは下振れリスクを解消できたことを意味する。一方、 $IR \cdot TE - TC < 0$  のとき、 $TC = 2IE \cdot TE$  が追加的に2倍の費用を負担していることと同じ結果を得る。

また、 $IR \cdot TE - TC < 0$  のとき、 $TC = 2IE \cdot TE$  は各条件に応じたIRの値は、費用負担の極小値であることが読み取れる。このとき、同じIRの値の条件下で、 $IR \cdot TE - TC > 0$  ならば、 $TC = 0$  が成立していることがわかる。

したがって、IRとTEの関係を明らかにすることができた。すなわち、手数料を含む $IR_{TC}$ を考慮したとき、市場よりも優れている場合、市場と等価で均衡している場合、市場よりも劣っている場合の3つの状態について、手数料TC、トラッキング・エラーの標準偏差TE、数理的根拠により導出された正規分布の片側確率点 $\lambda$ により定量的な関係式を導出することができた。

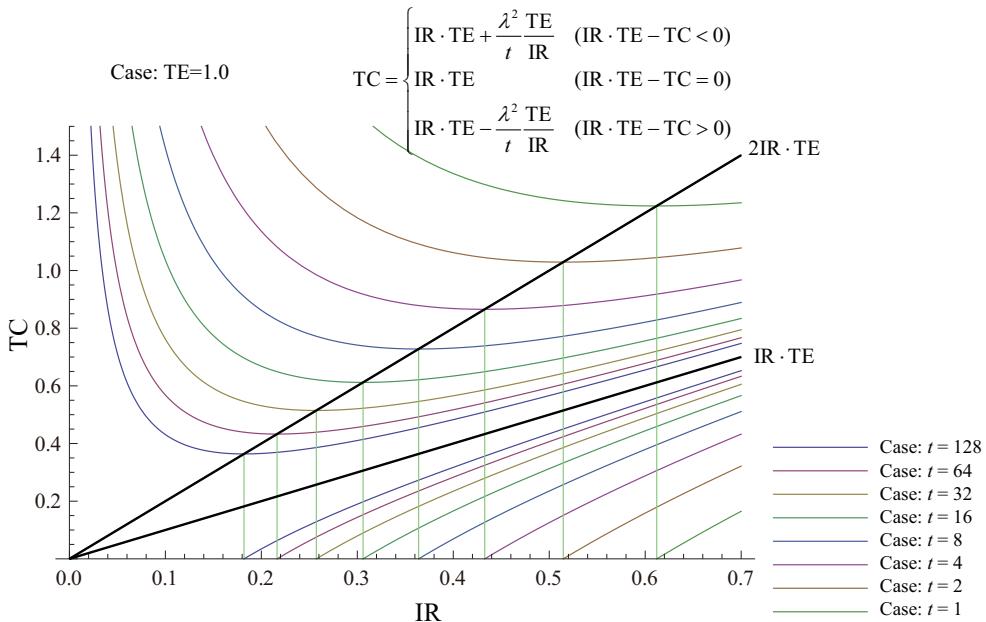


図 4.6 TC と IR の関係図

ところで、3章と4章を通じて、3章の手数料  $\alpha$  や4章の手数料  $\delta (= TC)$  と、4章のトラッキング・エラーの期待収益率  $\alpha$  はモデルの表記の仕方によっては分母として示した。この関係は、ファイナンスにおける配当割引モデルによる株式価値や永久債の債券価格を見積もるときの金利の効果と同様に考えることができる<sup>[138]</sup>。したがって、価値を示す尺度としての共通の意味を有している。しかしながら、債券価格と金利の説明がつかなくなる流動性の罠<sup>[139]</sup>のように、 $\alpha \approx 0$  に近い値では本章で示した提案モデルでは説明がつかなくなる側面もある。したがって、4章の緒言で明記した3つの場合が明確に示すことができるときのみ、本章の成果は保障されることになる。

## 4.6 結 言

本章では、アクティブ運用のパフォーマンス評価に活用されるインフォメーション・レシオ IR の数理的傾向について、ヒストリカル・データによる実証ではなく、正規分布に基づいた場合の傾向として導出を行った。特に、 $\lambda = 0.612$  は正規分布における片側確率点、確率密度関数、累積分布関数の統計学的特性と幾何学的特性を有するバランス式であることが導出できた。また、手数料 TC を含む場合についても IR とトラッキング・エラーの標準偏差 TE の傾向が数理的に明らかになり、アクティブ運用評価の中で手数料 TC は重要な意義を有することも改めて確認できた。

以上より、3章で記述した手数料にもとづくコイン投げとして分析した勝者の賞金総和最大化のための定量評価が、本章ではアクティブ運用に応用するための方法の基礎理論として成立し、手数料と運用成果の3つの場合の均衡関係にも適用することができた。

## 5章 結論

本論文は、「手数料を考慮した株式ポートフォリオにおけるアクティブ運用の不確実性」についてまとめたものである。項目別にその成果をまとめると以下のとおりとなる。

2章では、平均分散モデルに関する現代ポートフォリオ理論の再考を実施した。Big Data などデータ分析の注目度とその活用目的について重要度が増していることから、インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発を行い、その活用として平均分散モデルと資本資産評価モデルへの応用を行った。具体的には、Yahoo!ファイナンスからデータをダウンロードしてデータベースを構築し、ケース・スタディとして平均分散モデルのデータ分析を行った。その結果、本研究で確認したケース・スタディでは手数料がない場合として実施した数値実験を通じて、アクティブ運用がベンチマーク運用を継続的には上回らないことがある事例を示した。また、この他に計量期間中のパフォーマンス評価について、算術平均と対数平均モデルの対比、計量期間の統計量や時系列の分析、同時分布の特徴を通じて不確実性を示した。

3章では、アクティブ運用に適応する前にゲーミング(賭けやギャンブリングと同意)を市場と想定しながらコイン投げによるモデル化を行って手数料の影響を調べた。すなわち、独立試行によるコイン投げの繰返しゲームに、手数料を得るゲーミング企業の収益と、多数のプレイヤーのうち、勝者の獲得賞金や敗者の損失の傾向をモデル化し、勝者の獲得賞金総額の最大化の特性を、試行回数との関係として取扱った。その結果、勝者の満足を考慮したゲームの停止試行回数を決定するために、べき関数による意思決定基準モデルを提案した。また、べき関数により勝者のリスク回避と敗者のリスク愛好的傾向について視覚化した鏡映効果のモデルを示すことができた。

4章では、3章で導出した数値の数理的根拠を調べて、アクティブ運用へ適用した。すなわち、アクティブ運用のパフォーマンス評価において重要なインフォメーション・レシオにその数理的根拠を適用して手数料を考慮したモデル化を行った。このとき、アクティブ運用の評価のために、インフォメーション・レシオがどの程度高いかを判断する場合に構築するベンチマークに関する超過収益率の説明式をいくつか考案し比較した。これらの不变性の欠如の問題に対してそれぞれの確率変数が正規分布に従う場合は、相関関係を無相関化した標準正規分布に従う空間で評価を実施できるならば、統計学的特性を幾何学的特性として定量化できて役立つ。加えて、3章で勝者とゲーミング企業の均衡関係において

求まった係数値  $\lambda = 0.612$  の数理的根拠として正規分布の片側確率点と確率密度関数、累積分布関数を用いて関係式を明らかにすることができた。この結果をインフォメーション・レシオの付加価値に適用し、手数料を含む場合のインフォメーション・レシオがどのように定量化できるかをべき関数を用いてモデル化した。モデル化されたインフォメーション・レシオと手数料の関係より、手数料を考慮したアクティブ運用の成果は、手数料の大きさに応じて、インフォメーション・レシオが市場よりも優れた成果を示す場合、市場と等価な成果を示す場合、市場よりも劣る成果を示す場合の3つの状態の均衡関係としてそれぞれを表現することができた。

以上、本論文は1章の目的で示したように、3つの視点

- (1) 評価のための効用関数を考慮したべき関数、
- (2) アクティブ運用の評価指標であるインフォメーション・レシオ、
- (3) アクティブ運用における手数料

と、2つの着眼点

- (A) アクティブ運用に対する現代ポートフォリオ理論の再考
- (B) 効率的な市場におけるアクティブ運用の手数料の役割とその特徴

の解決と発展に寄与する目的で、著者の独自の発想で進めてきた一連の研究成果をまとめたものである。今後のアクティブ運用の新たな分析や評価において大切な概念を提示したものである。本論文中で著者が提示した新しい関係式や図により明確となった方法論は、いずれも一般性を失わず現実の経済学とファイナンスの応用や実践に役立つものと期待される。

## 参考文献

- [1] 小林孝雄, 芹田敏夫, 日本証券アナリスト協会編, 「新・証券投資論 I」, 日本経済新聞出版社, 2009.
- [2] 伊藤敬介, 諏訪部貴嗣, 萩島誠治, 日本証券アナリスト協会編, 「新・証券投資論 II」, 日本経済新聞出版社, 2009.
- [3] Von Neumann, John, and Oskar Morgenstern, "Theory of games and economic behavior 2d rev." 1947.
- [4] Von Neumann, John, and Oskar Morgenstern, (銀林浩, 橋本和美, 宮本敏雄, 阿部修一 訳), 「ゲームの理論と経済行動 I」ちくま学芸文庫, 2009.
- [5] W. F. Sharpe, "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of Finance*, No.3, pp.425-442, 1964.
- [6] H. M. Markowitz, "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", John Wiley and Sons, Inc., 1959.
- [7] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, Archie Craig Mackinlay, "The Econometrics of Financial Markets", Princeton University Press, 1996.
- [8] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, Archie Craig Mackinlay (祝迫得夫, 大橋和彦, 中村信弘, 本多俊毅, 和田賢治 訳), 「ファイナンスのための計量分析」, 共立出版, 2003.
- [9] 小林孝雄, 本多俊毅, 「4. 現代ポートフォリオ理論」, 日本証券アナリスト協会 1 次試験通信テキスト, 2008.
- [10] 田畠吉雄, 「リスク測度とポートフォリオ管理」, 朝倉書店, 2004.
- [11] Fama, Eugene F., "Efficient capital markets: A review of theory and empirical work", *The journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, pp. 383-417, 1970.
- [12] 竹原均, "ベンチマークに対する理論的考察--効率的市場仮説との関係を中心に (特集資産運用とベンチマーク--第 15 回 SAAJ-AIMR/JSIP 共同セミナーより)", 証券アナリストジャーナル, 日本証券アナリスト協会, Vol. 41, No. 6, pp. 4-18, 2003.
- [13] Jensen, Michael C. "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios." *Journal of business*, PP. 167-247, 1969.
- [14] Charles D. Ellis, "Winning The Loser's Game: Timeless Strategies for Successful Investing", McGraw-Hill; 3rd Edition , 1998.

- [15] Charles D. Ellis (鹿毛雄二 訳), 「敗者のゲーム」, 日本経済新聞社, 2003.
- [16] Grinold, Richard C., and Ronald N. Kahn, “*Active Portfolio Management: Quantitative Theory and Applications*”, Irwin Professional Publishing, 1995.
- [17] Grinold, Richard C., and Ronald N. Kahn, (明治生命特別勘定運用部,日興証券アセットマネジメント本部 訳)「アクティブ・ポートフォリオ・マネジメント—運用戦略の計量的理論と実践」, 東洋経済新報社, 1999.
- [18] バークレイズ・グローバル・インベスターーズ株式会社, 「計量アクティブ運用のすべて—その理論と実際—」, 金融財政事情研究会, 2009.
- [19] Kahneman, Daniel, and Amos Tversky, “Prospect theory: An analysis of decision under risk” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 263-291, 1979.
- [20] Amon Tversky, Daniel Kahneman, “Advances in Prospect Theory -Cumulative Representation of Uncertainty-”, *Journal of Risk and Uncertainty*, pp. 297-323, 1992.
- [21] Joachim Goldberg, Rüdiger von Nitzsch, (行動ファイナンス研究会, 眞壁昭夫 訳), 「行動ファイナンス -市場の非合理性を解き明かす新しい金融理論-」, ダイヤモンド社, 2002.
- [22] Peter P. Wakker, “*Prospect Theory: For Risk and Ambiguity*”, Cambridge University Press, 2010.
- [23] 竹原均, ” 行動ファイナンスへのパラダイムシフトはなぜ困難か (特集 行動ファイナンスとアセットプライシング)”, 証券アナリストジャーナル, 日本証券アナリスト協会, Vol. 44, No. 2, pp. 34-46, 2006.
- [24] Peter L. Bernstein, (青山譲訳), 「リスク(上)」, 日本経済新聞社, 2001.
- [25] Bernoulli, Daniel, “Exposition of a new theory on the measurement of risk”, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp.23-36, 1954 (Original in 1738).
- [26] Stevens, Stanley Smith, “On the psychophysical law”, *Psychological review* Vol. 64, No. 3, pp. 153-181, 1957.
- [27] Stevens, Stanley Smith, “*Psychophysics*”, Transaction Publishers, 1975.
- [28] 批々木規雄, 「金融工学と最適化」, 朝倉書店, 2001.
- [29] 武村和久, 「行動意思決定論 -経済行動の心理学-」, 日本評論社, 2009.
- [30] Luce, R. Duncan, “On the possible psychophysical laws”, *Psychological review*, Vol. 66, No. 2, pp. 81-95, 1959.
- [31] Luce, R. Duncan, “On the possible psychophysical laws revisited: Remarks on cross-modal

- matching” *Psychological Review*, Vol. 97, No. 1, pp. 66-77, 1990.
- [32] Luce, R. Duncan, “*Utility of gains and losses: Measurement-theoretical and experimental approaches*”, Psychology Press, 2014.
- [33] Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, “*Fundamental Methods of Mathematical Economics*”, McGraw-Hill; 4th Revised Edition, 2005.
- [34] Blavatskyy, Pavlo R., “Back to the St. Petersburg paradox?”, *Management Science*, Vol. 51, No. 4, pp. 677-678, 2005.
- [35] Rieger, Marc Oliver, Mei Wang., “Cumulative prospect theory and the St. Petersburg paradox”, *Economic Theory*, Vol. 28, No. 3, pp. 665-679, 2006.
- [36] Peters, Ole, “The time resolution of the St Petersburg paradox”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 369, No. 1956, pp. 4913-4931, 2011.
- [37] Samuelson, Paul A., “The St. Petersburg paradox as a divergent double limit”, *International Economic Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 31-37, 1960.
- [38] 桐谷維, ”<論説>セント・ペテルスブルグ・パラドックス”, 商経論叢, 神奈川大学, Vo. 35, No. 1, pp. 141-174, 1999.
- [39] Markowitz, Harry, “The utility of wealth”, *The Journal of Political Economy*, pp. 151-158, 1952.
- [40] 宮脇卓, 日本証券アナリスト協会編, 「特集2 運用制約とインフォメーション・レシオ」, 証券アナリストジャーナル, 日本証券アナリスト協会, 証券アナリストジャーナル, Vol. 41, No. 11, pp. 69-132, 2003.
- [41] 竹原均, “トレイナー・ブラック・モデル再考--インフォメーション・レシオによる評価の問題点”, 証券アナリストジャーナル, Vol. 49, No. 5, pp. 48-54, 2011.
- [42] Treynor, Jack L., and Black, Fischer, “How to use security analysis to improve portfolio selection”, *Journal of Business*, pp. 66-86, 1973.
- [43] Black, Fischer, “Capital market equilibrium with restricted borrowing”, *Journal of business*, pp. 444-455, 1972.
- [44] Chi-fu Huang, Robert H. Litzenberger, “*Foundations for Financial Economics*”, Elsevier Science Ltd, 1988.
- [45] Sharpe, William F., “Mutual fund performance”, *Journal of business*, pp. 119-138, 1966.

- [46] Sharpe, William F., “The Sharpe ratio”, *Streetwise—the Best of the Journal of Portfolio Management*, pp. 169-185, 1998.
- [47] Goodwin, Thomas H., “The information ratio”, *Financial Analysts Journal*, pp. 34-43, 1998.
- [48] Roll, Richard, “A mean/variance analysis of tracking error”, *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 18, No. 4, pp. 13-22, 1992.
- [49] Bertrand, Philippe, Costin Protopopescu, “The Statistics of the Information Ratio”, *International Journal of Business*, Vol. 15, No. 1, pp. 71-86, 2010.
- [50] A. M. Hasofer, N. C. Lind, “Exact and Invariant Second-Moment Code Format”, *Journal of Engineering Mechanics Division*, American Society of Civil Engineers, Vol. 100, No. EM1, pp.111-121, 1974.
- [51] 中西真悟・中易秀敏: 確率変数の標準化変換法と構造信頼性理論への応用, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 61, No. 583, pp. 674-681, 1995.
- [52] Demsetz, Harold, “The cost of transacting”, *The quarterly journal of economics*, pp. 33-53, 1968.
- [53] Collins, Bruce M., and Frank J. Fabozzi, “A methodology for measuring transaction costs”, *Financial Analysts Journal*, pp. 27-44, 1991.
- [54] 投資信託協会, 「投資信託のコスト」,  
<https://www.toushin.or.jp/investmenttrust/costtax/cost/> , 2014.
- [55] Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, Petter N. Kolm, “*Quantitative Equity Investing*”, John Wiley & Sons, 2010.
- [56] Frank J. Fabozzi, Harry M. Markowitz, “*Equity Valuation and Portfolio Management*”, John Wiley & Sons, 2011.
- [57] 仲川勇二, “社会・企業・個人のリスク分散と持続可能性—最適化研究の立場から—”, セミナ一年報, 関西大学経済・政治研究所, pp. 59-68, 2013.
- [58] 河本薰, 「会社を変える分析の力」, 講談社, 2013.
- [59] 中西真悟, ”インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発とその活用 — 平均分散モデルと資本資産価格モデルへの応用 —”, 大阪工業大学紀要, 理工篇, Vol. 55, pp. 11-24, 2010.
- [60] 中西真悟, ”平均分散モデルの特徴と不確実性に関する考察 — 数理モデルと Microsoft Excel 活用によるデータ分析 —”, 大阪工業大学紀要, Vol. 59, No. 2, pp.17-46, (2015 年 1

月 10 日発行予定, 掲載決定).

- [61] 中西真悟, ”手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの賭けにおけるすべての勝者の獲得賞金の総和最大化とその試行回数の関係.” 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌 55 (2012): 1-26.
- [62] 中西真悟, 仲川勇二, 大西匡光, ”拡張一次近似二次モーメント法を適用したインフォメーションレシオの考察”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, No. 28, pp. 110-111, 2011.
- [63] Shingo Nakanishi and Masamitsu Ohnishi, “Equilibrium relationship between the profit of the market and its transaction cost by financial institution”, *26th European Conference on Operational Research* (the EURO XXVI), アブストラクト集, p. 233, 2013.
- [64] Shingo Nakanishi and Masamitsu Ohnishi, “Equilibrium relationship between the performance and the information ratio with transaction costs”, *the 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies* (IFORS2014), アブストラクト集, p. 51, 2014.
- [65] Yahoo!ファイナンス, <http://finance.Yahoo.co.jp/>, 2010.
- [66] 新聞記事, “バブル高値を抜く 95 社, 地方めだつ”, 日経ヴェリタス, 2010 年 1 月 10 日号, 日本経済新聞社, p.11, 2010.
- [67] 日本銀行統計時系列データ, <http://www.boj.or.jp/type/stat/dlong/index.htm>, 2010.
- [68] Richard A. McGowan, (佐々木一彰訳), 「ゲーミング企業のマネジメント」, 2005.
- [69] 谷岡一郎, 「ツキの法則—「賭け方」と「勝敗」の科学」, PHP 研究所, 1997.
- [70] 渡辺隆裕, 「賭けの科学」, <http://www.nabenavi.net/>, 2010.
- [71] D. G. Luenberger, “*Investment Science*”, Oxford University Press, 1998.
- [72] D. G. Luenberger (今野浩, 鈴木賢一, 批々木規雄 訳), 「金融工学入門」, 日本経済新聞社, 2002.
- [73] 田畠吉雄, 「金融工学入門」, エコノミスト社, 2001.
- [74] 竹原均, 「ポートフォリオの最適化」, 朝倉書店, 1997.
- [75] 批々木規雄, 田辺隆人, 「ポートフォリオ最適化と数理計画法」, 朝倉書店, 2005.
- [76] 小暮厚之, 照井伸彦, 「計量ファイナンス分析の基礎」, 朝倉書店, 2001.
- [77] Simon Benninga, “*Financial Modeling*”, The MIT Press, 3rd Edition, 2008.
- [78] Simon Benninga, (ファイナンシャル・モデリング研究会 訳), 「ファイナンシャル・モデリング」, 清文社, 2005.

- [79] Mary Jackson, Mike Staunton, “*Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*”, The Wiley Finance Series, 2001.
- [80] Mary Jackson, Mike Staunton, (山下恵美子, 近藤正拡, 西麻布俊介 訳), 「EXCEL と VBA で学ぶ先端ファイナンスの世界」, パンローリング, 2004.
- [81] Gunter Loeffler, Peter N. Posch, “*Credit Risk Modeling using Excel and VBA*”, The Wiley Finance Series, 2nd Edition, 2010.
- [82] Ludwig B. Chincarini, Daehwan Kim, “*Quantitative Equity Portfolio Management*”, McGraw-Hill, 2006.
- [83] Svetlozer T. Rachev, Stoyan V. Stoyanov, Frank J. Fabozzi, “*Advanced Stochastic models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization*”, John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- [84] Jean Luc Prigent, “*Portfolio Optimization and Performance Analysis*”, Chapman & Hall/ CRC, 2007.
- [85] 中西真悟, 大西匡光, “同時分布の信頼橙円体を考慮した平均・分散モデルの考察”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp. 184-185, 2013.
- [86] 石井博昭, 斎藤誠慈, 森田浩, 「不確実・不確定性の数理」, 大阪大学出版会, 2004.
- [87] 石島博, 内田正樹, “相互相関を考慮した最適なポートフォリオ選択に関する一考察”, 京都大学数理解析研究所, 数理解析研究所講究録, 1736, pp. 147-160, 2011.
- [88] 仲川勇二, 井垣伸子, 伊佐田百合子, 正田光伯, ”離散最適化解法の金融工学への応用：年金等の長期運用に役立つ最適化技術の開発を目指して”, オペレーションズ・リサーチ：経営の科学, Vol. 56, No. 5, 280-285, 2011.
- [89] 吉田あつし, 福地純一郎, ”平均分散モデルにおける最適ポートフォリオのリスク推定”, ジャフィー・ジャーナル, 東洋経済新聞社, 2003.
- [90] 今野浩, 鈴木賢一, ”平均・分散・歪度モデルについて”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp. 242-243, 1993.
- [91] 大川勉, 「コンピュータ金融工学入門 一エクセルとマセマティカによる実践的ポートフォリオの構築ー」, 阿吽社, 2002.
- [92] 藤林宏, 岡村孝, 矢野学, 「EXCEL で学ぶ証券投資分析 一改訂版一」, 金融財政事情研究会, 2001.
- [93] 石野雄一, 「道具としてのファイナンス」, 日本実業出版社, 2005.
- [94] 菅原周一, 「資産運用の理論と実践」, 朝倉書店, 2007.

- [95] A. D. Roy, "Safety-first and the Holding Assets", *Econometrica*, Vol. 20, pp. 431-449, 1952.
- [96] Ulrich Faigle, W. Kern, Georg Still, "Algorithmic Principles of Mathematical Programming", Springer, 2002.
- [97] 矢野健太郎, 「図形と式」, 講談社, 1979.
- [98] Richard A. Johnson, Dean W. Wichern, "Applied Multivariate Statistical Analysis", Longman Higher Education, 2nd Revised Edition, 1987.
- [99] Richard A. Johnson, Dean W. Wichern, (西田俊夫 訳), 「多変量解析の徹底研究」, 現代数学社, 1992.
- [100] 今野浩, "OR モデルと経済学モデル", オペレーションズ・リサーチ, Vol.50, No.8, 2005.
- [101] Agnew, N. H., Agnew, R. A., Rasmussen, J., and Smith, K. R., "An application of chance constrained programming to portfolio selection in a casualty insurance firm", *Management Science*, Vol. 15, No.10, pp. B-512-520, 1969
- [102] Aaron Abrams, Skip Garibaldi, "Finding good bets in the lottery, and why you shouldn't take them", *The American mathematical monthly*, Mathematical Association of America, -1 (2010), 3-26.
- [103] Ford, J., "How Random is a Coin Toss?", Physics Today", *American Institute of Physics*, , (1983), 40-47.
- [104] Itzhak Gilboa, "Theory of Decision under Uncertainty", Cambridge University Press, (New York, 2009).
- [105] Itzhak Gilboa, (川越敏司訳), 「不確実性下の意思決定理論」, 効率書房, 2014.
- [106] 堀田武彦, "数理工学への誘い -カオスとコイン投げ-", 数学セミナー, 日本評論社, -8, (2001), 44-48.
- [107] 兼田敏之, 「社会デザインのシミュレーション&ゲーミング」, 共立出版, 2005.
- [108] 金谷健一, 「これなら分かる最適化数学」, 共立出版, 2005.
- [109] Keller, J. B., "The Probability of Heads", *The American Mathematics Monthly*, Mathematical Association of America, , (1986), 191-197.
- [110] 益田昭彦, 五味等, 木村松夫, "QC ゲームの効用とノウハウ(5)コインゲームによる国際化 QC 教育の実際", 品質管理, 日本科学技術連盟, -5 (1996), 54-60.
- [111] 松原望, 「統計学入門」, 東京大学出版会, 1991.
- [112] 松原望, 「意思決定の基礎」, 朝倉書店, 2001.
- [113] 松原望, 「入門確率過程」, 東京図書, 2003.

- [114] 松本眞, ”コイン投げで一儲けする方法－擬似乱数研究の現状－”, 情報処理, No. 11, pp. 1166-1170, 1998.
- [115] 松本眞, ”コイン投げで儲ける－擬似乱数と符号理論－”, 数理科学, サイエンス社, No. 12, pp. 8-13, 2002.
- [116] 宮崎修次, ”数理工学のすすめ 神が采を投げずとも -コイン投げ・カオス・大きな揺らぎ-”, 理系への数学, Vol. 32, No. 15, pp. 77-80, 1999.
- [117] 森真訳, 「確率問題ゼミ -コイン投げからランダム・ウォークまで-」, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.
- [118] Shingo Nakanishi, “Reliability Evaluation for Gaming Simulation”, *Proceedings of the 37th Computers and Industrial Engineering*, pp. 2359-2366, 2007.
- [119] 日本オペレーションズ・リサーチ学会編, 「オペレーションズ・リサーチ(特集: ゲーミング・シミュレーション)」, No. 2, 1984.
- [120] 大槻正伸, ”有限回のコイン投げによる連続一様分布の最適な近似”, 福島工業高等専門学校研究紀要, Vol. 47, pp. 15-21, 2006.
- [121] R. Tyrrell Rockfellar, Stanislav Uryasev, “Optimization of conditional value-at risk”, *Journal of Risk*, No. 3, pp. 21-41, 2000.
- [122] 佐々真一, ”巨大数コイン投げ問題”, 数理科学, No. 561, pp. 26-31, 2010.
- [123] 佐藤文広, ”数理で読み解く石取りゲーム(第8回)ポセット上のコイン裏返しゲームとその積”, 数学セミナー, 日本評論社, No. 11, pp. 74-80, 2009.
- [124] Spencer, J., “Combinatorics by Coin Flipping”, *The College Mathematics Journal*, Mathematical Association of America, pp. 407-412, 1986.
- [125] 須崎政文, 尾崎俊治, ”BajBaj の一人勝ち残り公平なコイン投げ問題の平均回数の漸近解”, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J92-A, No. 5, pp. 373-379, 2009.
- [126] 高橋一, ”コインの確率”, 数セミ, 日本評論社, No. 12, pp. 60-64, 1990.
- [127] 田村坦之, 中村豊, 藤田眞一, 「効用分析の数理と応用」, コロナ社, 1997.
- [128] Vulovic, Vladimir Z., “Prange, Richard E.: Randomness of a true coin toss”, *Physical Review*, The American Physical Society, Vol. A33, No. 1, pp. 576-582, 1986.
- [129] 和達三樹, 十河清, 「キーポイント確率・統計」, 岩波書店, 1993.
- [130] 渡辺隆裕, 「ゲーム理論入門」, 日本経済新聞社, 2008.
- [131] Stephen Wolfram, 「Mathematica ブック(第4版)」, 凸版印刷, 2000.

- [132] Jorion, Philippe, "Portfolio optimization with tracking-error constraints", *Financial Analysts Journal*, pp. 70-82, 2003.
- [133] Rosenblatt, Murray, "Remarks on a multivariate transformation", *The annals of mathematical statistics*, pp. 470-472, 1952.
- [134] 永田靖, 棟近雅彦, 「多変量解析法入門」, サイエンス社, 2001.
- [135] Fishburn, Peter C., and Gary A. Kochenberger, "Two - piece Von Neumann - Morgenstern utility functions", *Decision Sciences*, Vol. 10, No. 4, pp. 503-518, 1979.
- [136] Mosteller, Frederick, "On Some Useful "Inefficient" Statistics", *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 17, pp. 377-408, 1946.
- [137] Cox, Douglas R., "Note on grouping", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 52, No. 280, pp. 543-547, 1957.
- [138] 菅原周一, 桂眞一, 「基礎から学ぶ資本市場論 I」, 創成社, 2010.
- [139] 西村和雄, 八木尚志, 「経済学ベーシックゼミナール」, 実務教育出版社, 2008.
- [140] 井領邦弘, 「新・Excel VBA で極めるシステムトレード～最強パワーアップ編」, 技術評論社, 2009.
- [141] 細井真人, 「インターネット経済統計学」, オーム社, 2002.

## 発表論文および会議報告

### 査読付き論文

1. 中西真悟, ”手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの賭けにおけるすべての勝者の獲得賞金の総和最大化とその試行回数の関係”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, Vol.55, pp.1-26 (2012年12月), (3章).

### 閲読付き論文

2. 中西真悟, ”インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発とその活用 —平均分散モデルと資本資産価格モデルへの応用—”, 大阪工業大学紀要, Vol. 55, No. 1, pp.11-24 (2010年10月), (2章).
3. 中西真悟, ”平均分散モデルの特徴と不確実性に関する考察 — 数理モデルと Microsoft Excel 活用によるデータ分析 —”, 大阪工業大学紀要, Vol. 59, No. 2, pp.17-46, (2015年1月10日発行予定, 掲載決定), (2章).

### 国際会議報告

1. S. Nakanishi and M. Ohnishi, “Equilibrium relationship between the performance and the information ratio with transaction costs”, 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS2014) (2014年7月), Barcelona, Spain, アブストラクト集, p.51, (4章).
2. S. Nakanishi and M. Ohnishi, “Equilibrium relationship between the profit of the market and its transaction cost by financial institution”, 26th European Conference on Operational Research (the EURO XXVI ) (2013年7月), Rome, Italy, アブストラクト集, p.233, (4章).

### 学会報告

1. 中西真悟・大西匡光, "同時分布の信頼橿円体を考慮した平均・分散モデルの考察", 日本オペレーションズ・リサーチ学会2013年春季研究発表会, アブストラクト集, pp. 184-185, (2013年3月), 東京大学, 東京都文京区, (2章).

2. 中西真悟・仲川勇二・大西匡光, "拡張一次近似二次モーメント法を適用したインフォメーション・レシオの考察", 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2011 年秋季研究発表会, アブストラクト集, pp. 110-111, (2011 年 9 月), 甲南大学, 神戸市東灘区, (4 章).
3. 中西真悟, "手数料を考慮したゲーミングにおける勝者の獲得賞金の総和最大化のための簡便計算法", 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2011 年春季研究発表会, アブストラクト集, pp. 200-201, (2011 年 3 月), 電気通信大学, 東京都調布市, (3 章).
4. 中西真悟, "Yahoo ファイナンスの株価情報に基づくデータベースの開発", 日本経営工学会平成 22 年度春季大会, 講演予稿集, pp. 118-119, (2010 年 5 月), 日本大学, 東京都千代田区, (2 章).
5. 中西真悟, "パリミューチュアルによるゲーミングの勝者総獲得額の最大化", 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2010 年春季研究発表会, アブストラクト集, pp. 188-189, (2010 年 3 月), 首都大学東京, 東京都八王子市, (3 章).

### 研究会報告

1. 中西真悟・大西匡光, "取引コストによるインフォメーション・レシオの均衡関係", 日本オペレーションズ・リサーチ学会・不確実性システムにおける意思決定研究部会・第 7 回研究会 (2014 年 5 月), 西宮市大学交流センター, 西宮市, (4 章).
2. 中西真悟, "手数料を考慮した繰返しコイン投げの賭けにおける勝者の総獲得賞金と試行回数の関係", 日本オペレーションズ・リサーチ学会・不確実性環境での意思決定科学研究部会・第 9 回研究会, 国際数理科学協会 2012 年度確率モデルと最適化分科会研究集会, (2012 年 8 月), 西宮市大学交流センター, 西宮市, (3 章).

## 謝 辞

本研究には多くの方よりご指導、ご支援、ご協力を賜りました。

まず、本研究を遂行するにあたり大西匡光先生(大阪大学大学院教授)、三道弘明先生(大阪大学大学院教授)、大屋幸輔先生(大阪大学大学院教授)からご指導を賜りました。

各章を構成する論文執筆においては、仲川勇二先生(関西大学教授)、寺岡義伸先生(大阪府立大学名誉教授)、田畠吉雄先生(大阪大学名誉教授)、渡辺隆裕先生(首都大学東京教授)、石島博先生(中央大学教授)、穴太克則先生(芝浦工業大学教授)、林芳男先生(近畿大学教授)、西原理先生(大阪大学)、蓮池隆先生(大阪大学)を始め、多くの先生よりご助言を賜りました。

中でも、日本オペレーションズ・リサーチ学会・不確実性システムにおける意思決定研究部会と、日本オペレーションズ・リサーチ学会・不確実性環境での意思決定科学部会の先生方より、意思決定における不確実性について深く学ぶ機会をいただきました。

また、日本アナリスト協会・関西地区交流会に参加する皆様より、実務の観点からも洞察する有益な視点を学ぶ機会をいただきました。

さらに、本務校の大工を退職された中易秀敏先生には経済学研究科への大学院進学にご賛同を賜り、栗山仙之助先生には大学院入学後も激励を賜りました。同様に本務校を退職された亀島鉱二先生、志垣一郎先生には数理的思考の立場からファイナンスに興味を持つ機会を賜りました。

在学期間中、大阪大学大学院経済学研究科の事務職員の皆様には快くご支援いただきました。同時に本務校である大工の教職員の皆様からも多大なご支援とご協力を賜りました。

以上のことについて、心から感謝を申し上げます。

そして、最後に学位論文審査までの長い道のりを応援してくれた家族にも感謝します。