



Title	GAP THEOREMS FOR COMPACT GRADIENT SASAKI-RICCI SOLITONS
Author(s)	只野, 誉
Citation	大阪大学, 2015, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/52288
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (只 野 誉)

論文題名

GAP THEOREMS For COMPACT GRADIENT SASAKI-RICCI SOLITONS
(コンパクトなグラディエント佐々木-RICCI ソリトンに対する間隙定理)

論文内容の要旨

奇数次元の Riemann 多様体 (S, g) が **佐々木多様体** であるとは, その Riemann 錐 $(C(S), g) := (\mathbb{R}_+ \times S, dr^2 + r^2 g)$ が Kähler 多様体であるときにいう。ここで $\mathbb{R}_+ := \{r > 0\}$ は正の実数全体の集合を表す。佐々木多様体は佐々木-畠山 [7] によって接触多様体の一種として導入され, Kähler 多様体の奇数次元類似として1960年から1970年にかけて盛んに研究された。佐々木多様体 (S, g) が与えられると, その上に非退化なベクトル場

$$\xi := \left(J \frac{\partial}{\partial r} \right) \Big|_{r=1}$$

が定まる。ここで J は Kähler 錐 $(C(S), g)$ の複素構造であり (S, g) を部分多様体 $\{r=1\} \subset C(S)$ と同一視した。 ξ が生成する葉層 $\mathcal{F}_\xi$ は, ξ の軌道が閉じるとき **quasi-regular** であるといい, そうでないとき **irregular** であるという。最近まで 佐々木-Einstein 多様体は quasi-regular なものに限ると予想され, その存在問題は Kähler-Einstein 計量の存在問題に帰着されると考えられていた。しかしながら, Gauntlett ら [4] によって irregular な佐々木-Einstein 多様体が構成され, 正の Kähler-Einstein 計量に帰着されない佐々木-Einstein 多様体が無限個発見された。さらに, 近年物理学の AdS/CFT 対応で佐々木-Einstein 多様体が重要な役割を演じることが指摘されたこと [6] を契機に多くの具体例が構成され [1], Kähler-Einstein 幾何学に対応する理論が整備されている [3]。本論文では佐々木-Einstein 多様体の一般化であるグラディエント佐々木-Ricci ソリトンを扱う。 $(2n+1)$ -次元の佐々木多様体 (S, g) が **グラディエント佐々木-Ricci ソリトン** であるとは $\xi f = 0$ なる (S, g) 上の basic 関数 $f \in C^\infty(S)$ が存在して

$$(1) \quad \text{Ric}^T + \text{Hess}^T f - (2n+2)g^T$$

を満たすときにいう。ここで $\text{Ric}^T, \text{Hess}^T f$ はそれぞれ横断 Ricci テンソル, 横断ヘッシアンである。本論文では Kähler 多様体及び Riemann 多様体上の Ricci ソリトン [5, 2] で行われた議論を横断的に解釈し, 佐々木-Ricci ソリトンに対する間隙定理を幾つか与えた。特にこれらの結果は irregular な葉層構造 $\mathcal{F}_\xi$ を持つソリトンに対しても成り立つ: **Main Theorem** ([8]) Let (S, g) be a $(2n+1)$ -dimensional compact gradient Sasaki-Ricci soliton satisfying (1). Then (S, g) is Sasaki-Einstein if and only if

$$\|\text{Ric}^T - (2n+2)g^T\| \leq \frac{-n\mathcal{F} + \sqrt{n^2\mathcal{F}^2 + 4n(2n-1)(2n+2)\mathcal{F}}}{2(2n-1)},$$

where $\mathcal{F} = \frac{1}{\text{Vol}(S, g)} \int_S |\nabla^T f|^2$ is the Sasaki-Futaki invariant defined by (1).

参考文献

- [1] C. P. Boyer, K. Galicki and J. Kollár, Einstein metrics on spheres, Ann. of Math. 162 (2005), 557-580.
- [2] M. Fernández-López and E. García-Río, Some gap theorems for gradient Ricci solitons, Internat. J. Math. 23 (2012), 1250072, 9pages.
- [3] A. Futaki, H. Ono and G. Wang, Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, J. Differential Geom. 83 (2009), 585-635.
- [4] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, Sasaki-Einstein metrics on $S^2 \times S^3$, Adv. Theor. Math. Phys. 8 (2004), 711-734.
- [5] H. Li, Gap theorems for Kähler-Ricci solitons, Arch. Math. (Basel) 91 (2008), 187-192.
- [6] D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau, The geometric dual of a-maximisation for toric Sasaki-Einstein manifolds, Comm. Math. Phys. 268 (2006), 39-65.
- [7] S. Sasaki and Y. Hatakeyama, On differentiable manifolds with contact metric structure, J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 249-271.
- [8] H. Tadano, Gap theorems for compact gradient Sasaki-Ricci solitons, to appear in Internat. J. Math.

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (只 野 誉)		
	(職)	氏 名
論文審査担当者	主 査 教授	満 洲 俊 樹
	副 査 教授	小 林 治
	副 査 教授	後 藤 竜 司
	副 査 准教授	榎 一 郎
	副 査 准教授	石 田 政 司

論文審査の結果の要旨

本論文では、コンパクト佐々木多様体における勾配 Sasaki-Ricci ソリトンが Sasaki-Einstein 計量になるための条件について詳細な議論をした。特に横断リッチ曲率と横断リーマン計量の差を評価して、勾配 Sasaki-Ricci ソリトンと Sasaki-Einstein 計量に関するある種の間隙定理を証明している。

論文の構成は次の通りである。まず第2節で佐々木多様体とその接触構造および横断ケーラー構造について述べ、それからこの論文のメインテーマとなる Sasaki-Ricci ソリトンについて述べられている。第3節では2つの主定理の主張とその証明が与えられている。片一方の定理では、横断リッチ曲率が横断ケーラー計量に十分近い勾配 Sasaki-Ricci ソリトンが実は Sasaki-Einstein 計量であることが示されている。ここで、その差は多様体の次元と Sasaki-Futaki 不変量のみ依存する量で評価されている。もう一方の定理では、横断リッチ曲率が十分大きな勾配 Sasaki-Ricci ソリトンが Sasaki-Einstein 計量であることが示されている。ここでも多様体の次元と Sasaki-Futaki 不変量のみ依存した量で横断リッチ曲率の評価が与えられている。

この結果は Fernandez-Lopez と Garcia-Rio の結果や Li の結果を佐々木多様体における横断リーマン幾何の観点から一般化したものであり、新しく興味深い結果を含んでいる。また海外学術雑誌に掲載されることも既に決まっている。よって本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値のあるものと認める。