# 論　文　内　容　の　要　旨

| 氏　名　（　只野　誉　） | |
|---|---|
| 論文題名 | GAP THEOREMS For COMPACT GRADIENT SASAKI-RICCI SOLITONS<br>（コンパクトなグラディエント佐々木-RICCI ソリトンに対する間隙定理） |

## 論文内容の要旨


奇数次元の Riemann 多様体 $(S,g)$ が **佐々木多様体** であるとは，その Riemann 錘 $(C(S),\bar{g}):=(\mathbb{R}_+\times S, dr^2+r^2g)$ が Kähler 多様体であるときにいう。ここで $\mathbb{R}_+:=\{r>0\}$ は正の実数全体の集合を表す。佐々木多様体は佐々木-畠山 [7] によって接触多様体の一種として導入され，Kähler 多様体の奇数次元類似として1960年から1970年にかけて盛んに研究された。佐々木多様体 $(S,g)$ が与えられると，その上に非退化なベクトル場

$$\xi:=\left(J\frac{\partial}{\partial r}\right)\Big|_{r=1}$$

が定まる。ここで $J$ は Kähler 錐 $(C(S),\bar{g})$ の複素構造であり $(S,g)$ を部分多様体 $\{r=1\}\subset C(S)$ と同一視した。$\xi$ が生成する葉層 $\mathcal{F}_\xi$ は，$\xi$ の軌道が閉じるとき **quasi-regular** であるといい，そうでないとき **irregular** であるという。最近まで 佐々木-Einstein 多様体は quasi-regular なものに限ると予想され，その存在問題は Kähler-Einstein 計量の存在問題に帰着されると考えられていた。しかしながら，Gauntlett ら [4] によって irregular な佐々木-Einstein 多様体が構成され，正の Kähler-Einstein 計量に帰着されない佐々木-Einstein 多様体が無限個発見された。さらに，近年物理学の AdS/CFT 対応で佐々木-Einstein 多様体が重要な役割を演じることが指摘されたこと [6] を契機に多くの具体例が構成され [1]，Kähler-Einstein 幾何学に対応する理論が整備されている [3]。本論文では佐々木-Einstein 多様体の一般化であるグラディエント佐々木-Ricci ソリトンを扱う。$(2n+1)$-次元の佐々木多様体 $(S,g)$ が *グラディエント佐々木-Ricci ソリトン* であるとは $\xi f=0$ なる $(S,g)$ 上の basic 関数 $f\in C^\infty(S)$ が存在して

(1)
$$\mathrm{Ric}^T+\mathrm{Hess}^T f=(2n+2)g^T$$

を満たすときにいう。ここで $\mathrm{Ric}^T$, $\mathrm{Hess}^T f$ はそれぞれ横断 Ricci テンソル，横断ヘッシアンである。本論文では Kähler 多様体及び Riemann 多様体上の Ricci ソリトン [5, 2] で行われた議論を横断的に解釈し，佐々木-Ricci ソリトンに対する間隙定理を幾つか与えた。特にこれらの結果は irregular な葉層構造 $\mathcal{F}_\xi$ を持つソリトンに対しても成り立つ：

**Main Theorem** ([8]) Let $(S,g)$ be a $(2n+1)$-dimensional compact gradient Sasaki-Ricci soliton satisfying (1). Then $(S,g)$ is Sasaki-Einstein if and only if

$$\|\mathrm{Ric}^T-(2n+2)g^T\|\leqslant\frac{-n\mathcal{F}+\sqrt{n^2\mathcal{F}^2+4n(2n-1)(2n+2)\mathcal{F}}}{2(2n-1)},$$

where $\mathcal{F}=\frac{1}{\mathrm{Vol}(S,g)}\int_S|\nabla^T f|^2$ is the Sasaki-Futaki invariant defined by (1).


## 参考文献


[1] C. P. Boyer, K. Galicki and J. Kollár, Einstein metrics on spheres, Ann. of Math. 162 (2005), 557-580.

[2] M. Fernández-López and E. García-Río, Some gap theorems for gradient Ricci solitons, Internat. J. Math. 23 (2012), 1250072, 9pages.

[3] A. Futaki, H. Ono and G. Wang, Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, J. Differential Geom. 83 (2009), 585-635.

[4] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, Sasaki-Einstein metrics on $S^2\times S^3$, Adv. Theor. Math. Phys. 8 (2004), 711-734.

[5] H. Li, Gap theorems for Kähler-Ricci solitons, Arch. Math. (Basel) 91 (2008), 187-192.

[6] D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau, The geometric dual of a-maximisation for toric Sasaki-Einstein manifolds, Comm. Math. Phys. 268 (2006), 39-65.

[7] S. Sasaki and Y. Hatakeyama, On differentiable manifolds with contact metric structure, J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 249-271.

[8] H. Tadano, Gap theorems for compact gradient Sasaki-Ricci solitons, to appear in Internat. J. Math.

# 論文審査の結果の要旨及び担当者

| | | |
|---|---|---|
| 氏　名　（　只野　誉　） | | |
| 論文審査担当者 | （職） | 氏　名 |
| | 主 査　教授 | 満渕　俊樹 |
| | 副 査　教授 | 小林　治 |
| | 副 査　教授 | 後藤　竜司 |
| | 副 査　准教授 | 榎　一郎 |
| | 副 査　准教授 | 石田　政司 |

## 論文審査の結果の要旨

本論文では，コンパクト佐々木多様体における勾配 Sasaki-Ricci ソリトンが Sasaki-Einstein 計量になるための条件について詳細な議論をした．特に横断リッチ曲率と横断リーマン計量の差を評価して，勾配 Sasaki-Ricci ソリトンと Sasaki-Einstein 計量に関するある種の間隙定理を証明している．

論文の構成は次の通りである．まず第2節で佐々木多様体とその接触構造および横断ケーラー構造について述べ，それからこの論文のメインテーマとなる Sasaki-Ricci ソリトンについて述べられている．第3節では2つの主定理の主張とその証明が与えられている．片一方の定理では，横断リッチ曲率が横断ケーラー計量に十分近い勾配 Sasaki-Ricci ソリトンが実は Sasaki-Einstein 計量であることが示されている．ここで，その差は多様体の次元と Sasaki-Futaki 不変量のみに依存する量で評価されている．もう一方の定理では，横断リッチ曲率が十分大きな勾配 Sasaki-Ricci ソリトンが Sasaki-Einstein 計量であることが示されている．ここでも多様体の次元と Sasaki-Futaki 不変量のみに依存した量で横断リッチ曲率の評価が与えられている．

この結果は Fernandez-Lopez と Garcia-Rio の結果や Li の結果を佐々木多様体における横断リーマン幾何の観点から一般化したものであり，新しく興味深い結果を含んでいる．また海外学術雑誌に掲載されることも既に決まっている．よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認める．