様式3

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　白石　勇貴　）	
論文題名	On Frobenius Manifolds from Gromov-Witten Theory of Orbifold Projective Lines with r orbifold points (r個の軌道体点を持つ軌道体射影直線に対するグロモフー ウィッテン理論から構成されるフロベニウス多様体について)

(論文内容の要旨)

フロベニウス多様体とは(形式的)複素多様体であり，その接層が結合的で可換なフロベニウス代数の平坦族を与えるものである．この構造は，齋藤恭司氏による超局面孤立特異点の変形理論と，原始形式の周期積分の研究において，変形族の底空間に定まる構造として初めて発見された．後にドブロヴィン氏により，2次元位相的場の理論における WDVV方程式の解の幾何学的定式化として得られた．

シンプレックティック幾何学においては，曲線(軌道体曲線)から多様体(軌道体)への安定写像の数え上げ理論である(軌道体)グロモフ-ウィッテン理論から，フロベニウス多様体が得られる．これは種数0のグロモフ-ウィッテン不変量の母函数を用いて，コホモロジー環(軌道体コホモロジー群)を変形する事で得られる．この形式的フロベニウス多様体は(軌道体)量子コホモロジー環と呼ばれる．

複素幾何学においては，複素多様体の複素構造の変形や特異点や正則関数の変形理論から，フロベニウス多様体が構成される．特に後者については上述の通り，変形族の底空間がフロベニウス多様体の底空間となる．ここで小平-スペンサー理論から，その接層は，特異点(や正則関数)に対するヤコビ環と同一視される．非退化対称双線型形式は，グロタンディエック留数形式から得られる．このとき，齋藤構造と呼ばれる半無限ホッジ理論の一種から定まる特別な微分形式(原始形式)を用いる事で，この非退化対称双線型形式を平坦にする事ができる．

さらに表現論からも，フロベニウス多様体は構成される．このフロベニウス多様体の系統的な構成方法は未だ発展途上であるが，大雑把に述べると，（一般化ルート系に付随する）ワイル群の不変式論を用いる事で構成されると予想されている．実際，齋藤氏，ドブロヴィン-ツァン両氏，佐竹氏によりそれぞれ，有限型ワイル群，拡大アファイン・ワイル群，楕円ワイル群について，不変式論を通して，フロベニウス多様体が構成されている．

古典的ミラー対称性予想は，シンプレックティック幾何学，複素幾何学，表現論における各対象から，上述の通り構成されるフロベニウス多様体が同型になるという形で定式化されている．

本論文の主対象である軌道体射影直線とは，ガイグル-レンチング両氏によって定義された軌道体である．これは粗モジュライが射影直線であり，巡回群がイソトロピー群である軌道体点を一般の位置に持つものである．これまでに，ミラノフ-ツェン両氏，ロッシ氏，ドブロヴィン-ツァン両氏，佐竹-高橋両氏，そして高橋氏，石橋氏および申請者により，この対象についての古典的ミラー対称性予想，つまり，

(a)軌道体オイラー数が非負である軌道体射影直線の軌道体グロモフ-ウィッテン理論，

(b)対応するカスプ多項式の齋藤氏による原始形式の理論，

(c)拡大アファイン・ワイル群，楕円ワイル群による不変式論

から構成される三種のフロベニウス構造の同型が示されている．

本論文の主結果は高々r個の軌道体点を持つ軌道体射影直線の軌道体量子コホモロジー環が次の初期条件から決定できることを示した事である；

(1)軌道体コホモロジー群の自然な次数付け，

(2)軌道体ポアンカレ形式の値，

(3)因子公理からの帰結

(4)次数0のグロモフ-ウィッテン不変量の性質，

(5)巨大体積極限での環構造,

(6)次数Iのr点グロモフ--ウィッテン不変量の値.

ここで，フロベニウス多様体は，その接層に定まるフロベニウス代数の結合性条件であるWDVV方程式の解(フロベニウス・ポテンシャル)と一対一に対応している．このため，上述の条件はフロベニウス・ポテンシャルについて，確認する事が非常に簡単な条件として表される．上述の結果を換言すれば，これらの条件を満たすフロベニウス・ポテンシャルから定まるフロベニウス多様体は軌道体射影直線の軌道体量子コホモロジー環と同型となる事が示される．この結果は上述の古典的ミラー対称性予想を示す際に鍵となる再構築定理の最も強い一般化である.

本論文の結果の応用について述べる．高橋篤史氏と共に，拡大カスピダル・ワイル群の不変式論から得られるフロベニウス多様体の構成を現在研究中である．このフロベニウス多様体は軌道体射影直線の軌道体量子コホモロジー環と同型になる事が予想されている．このときフロベニウス多様体の間の射を構成し，その射が同型であることが非常に困難である事が知られている．このため本論文の主結果である再構築定理の初期条件を，拡大カスピダル・ワイル群の不変式論から得られるフロベニウス多様体について確認する事で，所望の同型を示す事ができると期待される.

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（白石　勇貴　　　　　　　　　　）	
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	小木曽　啓示
	副 査　教授	臼井　三平
	副 査　教授	今野　一宏
	副 査　准教授	髙橋　篤史
	副 査　准教授	安田　健彦

論文審査の結果の要旨

階数 m，次元 d の Frobenius 構造と呼ばれる，5 個の条件からなるある種の公理系をみたす積構造、単元，非退化双線形形式及び Euler ベクトル場を許容する正則接ベクトル層をもった（形式的）複素多様体のことを Frobenius 多様体という．ここで，階数が m であるとは，接ベクトル束の階数すなわち多様体の複素次元が m であることであり，次元が d であるとは，Euler ベクトル場に付随する Lie 微分に対し，非退化双線形形式が固有値 2-d の固有ベクトルであることをいう．

Frobenius 多様体の概念は，超曲面孤立特異点の半普遍変形族の原始形式と周期写像の研究において齋藤恭司氏により発見されたものであるが，その後，Dubrovin 氏により，2 次元共形場理論における WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde) 方程式の座標によらない解表示の考察から再発見され現在の形に公理化された．従って，Frobenius 多様体は，超曲面孤立特異点の変形理論はもとより，多様体あるいは orbifold(Deligne-Mumford stack) に対する曲線の現代的数え上げ理論である Gromov-Witten 理論からも生ずることになる．このように，Frobenius 多様体の概念は，代数幾何学，弦理論における中心的な問題の一つである Mirror 対称性においても本質的な役割を担う基本的かつ重要なものである．

申請者白石勇貴氏は，氏の先行共同研究「Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi, A uniqueness theorem for Frobenius manifolds and Gromov-Witten theory for orbifold projective lines」(J. reine angew Math. 2013)，「Y. Shiraishi, A. Takahashi, On Frobenius Manifolds for Cusp Singularities」(to appear in Advances in Mathematics) 等もふまえ，学位申請論文「On Frobenius manifolds from Gromov-Witten Theory of Orbifold Projective Lines with r orbifold points」において，もっとも基本的(fundamental)な orbifold である高々 r 個の orbifold 点を許容する orbifold 射影直線に対する Gromov-Witten 理論から生ずる Frobenius 多様体について考察し，著しい結果を得た．より詳しく，与えられた階数をもつ次元 1 の Frobenius 多様体構造がみたす 6 つの自然な条件を発見し，逆に，Frobenius 多様体構造はその 6 つの条件から一意に定まることを示した．その帰結として，高々 r 個の orbifold 点を許容する orbifold 射影直線に対する Gromov-Witten 理論から得られる Frobenius 多様体構造，より正確にはそれを決める Frobenius potential と呼ばれる関数が，自然な初期値条件のもとで WDVV 方程式から一意に定まることを示した．この結果は当該分野において基本的な役割をはたす重要な結果である．

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．