I 3 8121

時間的推移と複数プレイヤーを考慮した資源配分に関する数理的研究

平成 12 年 9 月

行方 常幸

時間的推移と複数プレイヤーを考慮した
資源配分に関する数理的研究

平成 12 年 9 月

行方 常幸

目次

第1章 序論

社会生活を営む上でわれわれは自ら意思決定を行わなければならない状況に往々にして遭遇する。この状況の多くは数理的手法を直接適用できるほど単純ではなくかなり複雑である。しかしその状況を数理的理論が適用できる程度にまで適切に簡略化したモデルを作り、そのモデルに数理的手法を適用し、その社会状況が望む解を求めることは、モデル化のもととなった複雑な状況に有効に対処するための基本的な指針を提供する。このように、さまざまな社会状況のモデルに適切な数理的理論を適用し分析することは社会生活を円滑に営む上での貴重な行動指針を与えることになる。

さて、本研究が分析する主な社会状況を

有限な資源を、(A) ある期間内に効率的に配分しなければならない、(B) 複数の参加者の間で公平に配分しなければならない、という状況に限定する。

実際の多くの社会状況は (A) と (B) の両方の要素を含んでいるが、両方を同時に分析するのは現時点において困難であるので、別々に考察を行う。

(A) においては期間の最初の方に多くの資源を使い過ぎたために、期間の最後の方の有利なチャンスを有効に利用できないこと等を避ける必要があり、(B) においては参加者がどれくらい全体に寄与したかを考慮し、さらにどのような意味での公平性を追求するかを明確にする必要がある。(A) のような意思決定過程は動的計画法で、(B) はゲーム理論の分野でこれまで研究が行われている。この両分野はオペレーションズ・リサーチ (OR) なる学問領域に含まれている最適化手法としてだけではなく、時々刻々変動する事象を追うものとしての自然科学、社会科学、経済学などにも影響を与えている。

動的計画法は Bellman[1]によって導入され、時間的な多段階決定過程を扱うための数学的理論である。動的計画法の適用範囲は広く、例えば、最短経路問題、最適停止、逐次資源配分、在庫管理、取替え問題、スケジューリング、等[2][8]が扱われている。ゲーム理論は von Neumann と Morgenstern によって研究が始められ、多人数の意思決定を扱い、拘束力のある取り決めが不可能な非協力ゲーム理論、拘束力のある取り決めが可能な協力ゲームに分類されている[10][11]。非協力ゲーム理論では自分だけが行動を変えても得にはならないという意味で安定なナッシュ均衡、その精緻化である部分ゲーム完全ナッシュ均衡、不完備情報ゲームにおけるベイジアン均衡等の解概念を用い、さまざまなゲームおける行為者の合理的な行動を説明している。また、協力ゲーム理論では譲渡可能効用が存在する場合、公平性の種々の表現である多数の解概念が提唱され、公理的特徴付けや一貫性という概念を利用して、それらの解の関係が議論されている。

本研究の前半では動的計画法を利用して時間的に多段階の資源配分に関する数理的研究を、後半部分ではゲーム理論を利用して複数プレイヤーの間での資源配分に関する数理的研究を行っている。本研究の前半で扱う逐次資源配分は最適停止（「停止」と呼ばれる行為を有限期間内に 1 回だけ行うことができるとき、いつ行うべきか？）→逐次割当て（n 人の人を次々に現れる n 個の仕事に逐次割当てるとき、いかに割当てるべきか？）→逐次資源配分（期待報酬を最大にするには、有限の手持ち資源を逐次到来する資源利用機会にいかに配分すればよいか？）という系譜で考察されてきた。従来扱われている逐次資源配分においては、資源が連続量であり、利用機会が離散時点に発生し、報酬が利用機会のタイプに依存しない場合[3]、または、資源が離散量であり、利用機会の発生がポアソン過程の場合[9]が既に扱われているが、資源が離散量であり、離散時点に発生し、報酬が利用機会のタイプに依存する次のような例の場合は研究されていない。例えば、10 日後に海外旅行に出発するために手持ちの資金 50 万円を円から外貨に換えたいとする。明日以降に両替をするが、今日の為替レートより有利でなければその日には外貨に換えないとする。毎日の為替レートを参考にしてなるべく多くの外貨に換えるには、為替レートに応じていくらずつ両替すべきであろうか？この状況において、資源は離散量であり、報酬は利用機会（その日の為替レート）に依存する。また、利用機会は離散的な時点（毎日）に発生する。この例には従来のモデルの結果を適用できない。また、この例のような離散時点に利用機会が発生し、報酬が利用機会に依存する離散資源の逐次資源配分は現実にもよく発生し、このモデルを数理的に解析する必要がある。そこで、本研究では、資源が離散量であり、報酬が利用機会のタイプに依存する、離散時間の逐次資源配分を扱い、そのいくつかのモデルにおいて最適な決定過程の定性的な性質に関して数理的な考察を行う。

本研究で次に扱う複数プレイヤー間での資源配分の例は次のようである：A,B,C の 3 人が（全体提携を形成し）共同である事業を行いその利益を配分しようとしている。この事業を（部分的な提携を形成し）別々に行った場合に得られる利益（提携値）を基準にして、3 人の全体提携による利益を公平に配分するとすれば、いかにすべきであろうか？

このような利益配分は譲渡可能効用ゲームとして考察され、従来、さまざまな解（仁、τ-値、コア、シャープレイ値）が提唱されてきたが、これらの解はそれぞれ固有の公平性に関する考察により定義されており、解の違いが明瞭に理解できるようには、必ずしも定義されていない。例えば、仁は最大不満の最小化を目指した解である。一方、τ-値は、まず、各プレイヤーに全体提携への寄与分を配分し、それによる不足分を各プレイヤーに譲歩させることによって調整する。コアは各提携内のメンバーにおける配分の合計がその提携値を下回ら

ないような配分の集合である。シャープレイ値は、提携を形成するためにプレイヤーが無作為に順列を作り、各プレイヤーが既存の提携に新たに加わることによる利益の増分を得るとした場合の期待値である。このように、それぞれの解はそれに特有の公平性の考えにより定義されている。また、破産問題や他の若干の特別なゲームにおいて仁が一対交渉一貫性という性質を満たすことは知られていたが[4][5]、この結果がどれくらい広いゲームのクラスで成立するかは不明であった。さらに、τ-値が一対交渉一貫性という性質を持つことは知られていなかった。ここである解が一対交渉一貫性を満たすとは、任意の一対のプレイヤー間において、彼らのその解による配分額を彼らの中で再配分する動機を持つかどうかチェックしたとき、再配分する動機がないことをいう。そこで本研究では、空でないコアが 1 人と n–1 人提携によって決定されるゲームのある部分集合における、仁と τ-値の関係を考察する。
従来、「全体の利益を各プレイヤーに配分するために、まず、各プレイヤーが自分の寄与分を受け取り、次に、残りを各プレイヤーに等分する」という均等配分値の例として CIS-値と ENSC-値が考察されていた[6]。この最初に受け取る自分の寄与分が 1 人からなる提携値で与えられる場合が CIS-値であり、n–1 人からなる提携値から計算される場合が ENSC-値である。そこで本研究ではこの寄与分が k 人からなる提携値から計算される、k 人平均寄与の残余均等配分値という新しい解を提出し、k 人平均寄与の残余均等配分値とシャープレイ値の縮小ゲームによる一貫性を考察する。

本研究で最後に扱う複数プレイヤー間における動的意思決定に関しては、まず、繰返し囚人のジレンマゲームを題材に協調行動の説明を行う。従来、トリガー戦略、しっぺ返し戦略はこの繰返しゲームにおいてナッシュ均衡を構成することが知られていた[7]。トリガー戦略はさらに部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成するが、相手の失敗を 1 回しか許さないので厳しすぎる、また、しっぺ返し戦略は厳しくないが部分ゲーム完全ナッシュ均衡ではない、という欠点があった。そこで本研究で両者の欠点を補う新たな戦略 K-有界 Getting-even を導入する。また、従来、1 回限りの囚人のジレンマゲームでは協調行動を正当化することができなかった。これは、プレイヤーが過度に他のプレイヤーと分離していると想定されていたためである。そこで本研究では、このプレイヤーに想定されていた従来の合理性を明示的に修正することにより、1 回限りのゲームにおいても協調行動の説明を試みる。

以下で、本論文の構成を述べる。

まず、第 2 章で本研究に関連する動的計画法およびゲーム理論の基礎概念を紹介する。

第 3 章では前述の例のようなモデルを扱う：

10 日後に海外旅行に出発するために手持ちの資金 50 万円を円から外貨に換えたいとする。明日以降に両替をするが、今日の為替レートより有利でなければその日には外貨に換えないとする。毎日の為替レートを参考にしてなるべく多くの外貨に換えるには、為替レートに応じていくらずつ両替すべきであろうか？

今日の為替レートよりも有利でない日には配分（両替）しないのであるから配分機会の生起は不確実である。期待報酬（両替できる外貨の額の期待値）を最大にするにはどのように手持ち資源を配分していくべきであろうか？

最適な資源の利用量に関して以下のような単調性が成立すると期待できる。しかし、これらの性質は本当に成立するのであろうか？

生起が不確実であるから残り期間が少ない場合には出会った機会に手持ち資源をなるべく多く利用すべきである。しかしながら、残り期間が長い場合は、今後もっと有利な機会が訪れることも期待して手持ち資源を残しておくべきであると思われる。すなわち、最適な資源の利用量は残り期間の長さの非増加関数になるのではないだろうか（A：期間に関する単調性）？

また、手持ち資源が多い時と少ない時を比較すると、手持ち資源が多い時の方が出会っている機会により多くの資源を利用すべきではないか？すなわち、最適な資源の利用量は手持ち資源の量の非減少関数ではないであろうか（B：資源に関する単調性）？

さらに、大きな報酬を生む機会に出会っている場合とそうではない場合とを比較すると前者の場合により多くの資源を利用すべきではないか？すなわち、最適な資源の利用量は出会っている機会の価値の増加関数ではないであろうか（C：価値に関する単調性）？

本論文では必要に応じて配分機会を目標物（または客、など）と呼ぶことにしている。

幾つかのモデルに対してこのような問に答えようとするのが（最適な資源の利用量の定性的な性質、構造を調べることが）本研究の前半（逐次資源配分）の目的である。すなわち、モデルのパラメータ（報酬関数等）の構造に適切な仮定をし、そのもとで最適政策（最適な資源の利用量）の定性的性質を解析的に導出することが目的である。そうすることによりモデル化の元の状況に有効に対処するための基本的な行動指針を得ることができる。

まず、第 3-2 節で本研究の基本となるモデルを設定する。有限計画期間を通じて各期毎に高々1 個ずつ目標物が出現する。目標物は複数タイプからなり、確率 r_i でタイプ i の目標物が現れ、確率 r_0 で何も現れない。この状況を数理的に解析して得られる主な結果は次の通りである：

報酬関数の形によっては前述の最適政策の性質“A：期間に関する単調性”、

"B：資源に関する単調性" は成り立たないが、報酬関数がある一般的な条件を満たす時、"A：期間に関する単調性"、"B：資源に関する単調性"、"C：価値に関する単調性" が成立する。

第 3-3 節は第 3-2 節の基本モデルにおいて手持ち資源を利用せずに次の期に持ち越すと、ある確率（劣化率）で利用不可能になるモデルを考察している。このモデルは資源が生鮮食料品や最新式の電子装置のような劣化する製品をその客に販売する場合に適用できる。得られる主な結果は次のとおりである：

報酬関数が第 3-2 節と同様な条件を満たす時、"B：資源に関する単調性" が成立する。劣化率が増加すれば製品の最適販売量が増加するのではないか？と推測されるが、これが必ずしも真ではない数値例を示す。一方、報酬関数と劣化率がある妥当な条件を満たせば、製品の最適販売量の劣化率に関する単調性が成立することを証明する。さらに、製品の最適販売量が残り期間の長さの単調関数ではない数値例を与える。一方で、報酬関数が販売個数の線形関数の場合には最適政策を陽に求める事ができ、妥当な仮定のもとで製品の最適販売量の残り期間の長さに関する単調性が成り立つ事を示す。

第 3-4 節では第 3-2 節のモデルの拡張として各期の始めにその期を犠牲にして最大レベルまで資源の補給が可能な場合を考察する。得られる主な結果は：

手持ち資源の個数がある臨界値以下であれば資源を補給するのが最適である。この臨界値は残り期間が長くなるにつれて 0 に近づく、という事である。

第 4 章では未知パラメータを含む逐次資源配分を扱う。第 4-2 節では第 3-2 節のモデルの拡張として目標物の出現確率 $(r_0,\ldots,r_I)$ が既知ではなく未知であるモデルを扱っている。意思決定者は目標物の出現確率の値を正確には知らず、その値が事前分布（主観確率）によって決定されると思っている。得られる主な結果は：

報酬関数が第 3-2 節と同様な条件を満たす時、"B：資源に関する単調性" が成立する。"A：期間数に関する単調性" は部分的にのみ成立する、という事である。

第 4-3 節では第 3-2 節のモデルの拡張として計画期間の長さが未知であるモデルを扱う。ある妥当な仮定のもとで "A：期間数に関する単調性" と "B：資源に関する単調性" が成り立つ、という結果が得られる。

第 5 章では前 2 章とは異なったタイプの逐次資源配分を扱う。取替え用に有限個の手持ちユニットがある並列冗長システムにおける逐次部品取替えを利用して、連続する 2 つの決定時点間の経過時間の分布が直前の決定に依存する連続時間逐次資源配分を扱う。特に、2-ユニットシステムの場合の最適政策の性質を調べる。さらに、ユニットの寿命分布が指数分布に従う時、手持ちユニットが 2 個の場合と無限個の場合の最適政策を求める。

第 6 章では前述の例のような複数プレイヤー間での公平な資源配分を扱う譲渡可能効用ゲームを考察する。この章の目的は、均等解をより一般的な枠組みから眺め統一的に扱うこと、種々の解を共通の土俵で比較可能となるように再解釈することである。こうすることにより、現実場面において、たくさんある解からどの解を採用するのが適切であるかを決定する際の助けとなる。
複数プレイヤー間での資源配分における公平性の表現としてさまざまな解(仁、τ-値、シャープレイ値、等）が提唱されている。第 2 章で述べるように、これらの解はそれぞれ固有の公平性に関する考察により定義されており、解の違いが明瞭に理解できるようには、必ずしも定義されていない。しかし、第 6-2 節で証明されるように、あるゲームのクラスにおいては、一対交渉一貫性という性質を用いれば、仁とτ-値の違いはある行列ゲームから計算される基準点の違いであることが分かる。ここである解が一対交渉一貫性を満たすとは、任意の一対のプレイヤー間において、彼らのその解による配分額を彼らの中でその基準点をもとに再配分する動機を持つかどうかチェックしたとき、再配分する動機がないことをいう。

第 6-3 節においては CIS-値、ENSC-値として知られている均等解の一般化を行う。CIS-値と ENSC-値は次のように定義されている：
全体の利益を各プレイヤーに配分するために、まず、各プレイヤーが自分の寄与分を受け取り、次に、残りを各プレイヤーに等分する、というものである。この自分の寄与分が 1 人からなる提携値の場合が CIS-値で、n–1 人からなる提携値から計算される場合が ENSC-値である。この第 6-3 節で、われわれはこの寄与分が k 人（$1 \le k \le n-1$）からなる提携値から計算される、新しい k 人平均寄与の残余均等配分値と呼ばれる解を導入し、この値の性質を考察する。もちろん、k=1 のときは CIS-値と一致し、k=n–1 のときは ENSC-値と一致する。

第 6-4 節では前節で新しく導入された k 人平均寄与の残余均等配分値を縮小ゲームによる一貫性で特徴付ける。第 6-2 節で扱った一対交渉一貫性により、異なる解を比較する事ができるように、この節の一貫性も縮小ゲームの違いで解の違いを表現する。得られる主要な結果は：

k 人平均寄与の残余均等配分値が縮小ゲームによる一貫性を満たす一意の値となるような縮小ゲームを導出できること、また副産物として、シャープレイ値に対して、従来知られている縮小ゲームとは異なる縮小ゲームを導出できることである。

第 7 章は、非協力ゲームの範疇であり、複数プレイヤー間における動的意思決定を扱う。この章の目的は協調行動の新たな説明方法を探究することである。協調行動を説明できる方法が多くあることは、複雑な現実社会において、協調を誘発させるために自分の行動を工夫する際の助けになる。

第 7-2 節では、繰返し囚人のジレンマゲームにおいて、K-有界 Getting-even という新しい戦略を導入し、それが協調行動を実現する部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成することを示す。さらに、プレイヤーに想定される合理性を修正することにより、1 回限りのゲームでも協調行動を説明できる新たな安定性を考察する。第 7-3 節では、前節の安定性を一般化した、2 人有限戦略形ゲームの純粋戦略におけるナッシュ均衡より緩い安定性を提案する。

最後の章では結論として、本研究の成果、意義、今後の課題と発展性について述べる。

参考文献

[1] Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.

[2] Bertsekas, D.P., Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice-Hall, N.J., 1987.

[3] Derman, C. G., Lieberman, G. J., and Ross, S. M. : A Stochastic Sequential Allocation Model. Operations Research, Vol. 23 (1975), 1120-1130.

[4] Driessen, T. S. H.: An Alternative Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy problem from the Talmud: the case of the greedy bankruptcy game. Memorandum No. 1286, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (1995).

[5] Driessen, T. S. H.: Pairwise-bargained consistency and cooperative Game Theory: the case of a two-sided economic model. Memorandum No. 1322, Department of Applied Mathematics, Univerisy of Twente (1996).

[6] Driessen, T.S.H., and Y. Funaki.: The Egalitarian Non-Pairwise-Averaged Contribution (ENPAC-) value for TU-games. in T. Parthasarathy, B. Dutta, J.A.M. Potters, T.E.S. Raghavan, D. Ray and A. Sen (eds.), Game Theoretical Applications to Economics and Operations Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1997), 51-66.

[7] Gibbons, R.: Game Theory for Applied Economists. Princeton, Princeton University Press, 1992.

[8] Puterman, M.L., Markov Decision Processes, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[9] Sakaguchi, M.: A Sequential Allocation Problem for Randomly Appearing Targets. Mathematica Japonica, Vol. 21 (1976), 89-103.

[10] 岡田章、ゲーム理論、有斐閣、1996.

[11] 鈴木光男、新ゲーム理論、勁草書房、1994.

第2章 資源配分の基礎

この章では本研究で扱う資源配分の基礎として、動的計画法およびゲーム理論について簡単に説明する。

2-1 動的計画法

動的計画法は最適化問題を再帰関係式を利用して解く数学的方法であり、時間的な多段決定過程を解析する場合に適している。第 1 章の序論の 10 日間で 50 万円をなるべく多くの外貨に両替する例を用いて説明する。外貨を米ドルとし、今日の為替レートは 1 ドル=105 円と仮定する。従って、為替レートが 1 ドル=105 円以上ならば両替しない。また、残りが t 日（t=1,...,10）の時の為替レートは独立な確率変数 T_t で与えられるとし、さらに簡単のため、為替レートの変動幅は 100 円以上で 1 円刻みである仮定する。また、為替レートが 105 円以上の場合は T_t=105 であるとみなす。確率変数 $T_1,\ldots,T_{10}$ が独立であるので、残りが t 日の時に、両替する額 x_t は、その日の為替レート T_t に依存して、その日に両替可能な額 50,000−$(x_{t+1}+\cdots+x_{10})$以下の非負の値として決定される。従って、この意思決定者が直面する問題は

$$\max\left[\sum_{t=1}^{10}\sum_{z=100}^{105}\Pr(T_t=z)\frac{x_t\left(z,500000-(x_{t+1}+\cdots+x_{10})\right)}{z}\right]$$
$$\text{s.t. } 0\le x_t(z,a)\le a,\ x_t(105,a)=0\left(z=100,\ldots,104,t=1,\ldots,10\right)$$

となる。この問題を次のように一般化する：

$$\max_{\substack{x_1,\cdots,x_N\\ 0\le x_t(\cdot,a)\le a\\ x_t(0,a)=0}}\left[\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=0}^{I}\Pr(T_t=i)g_t\left(T_t,x_t(T_t,X-(x_{t+1}+\cdots+x_N))\right)\right]$$

ここで、X は初期に利用可能な資源の総量、N は有限な計画期間の長さであり、T_t（t=1,...,N）は有限個の整数値（0,1,...,I）を取り目標物のタイプを表す確率変数である。タイプ 0 は目標物が現れなかったことを意味する。$x_t(z_t,a)$（t=1,...,N）はその期の目標物のタイプ z_t に依存して配分する資源の量（0 以上 a 以下）を表す。$g_t(z_t,x_t)$ は目標物のタイプ z_t と資源の使用量 x_t の関数で、残りが t 期間の時の利得を表し、$g_t(z_t,0)=0$ とする。

この最大化問題は次のような意味を持っている。今、X 個の資源を所持しており、今後の N 期間を通じて目標物が 1 個ずつ到着する。到着する目標物には

有限個のタイプがあり、配分された資源の量とそのタイプに応じて利得を生む。このとき、初期の保有資源 X をいかに配分すれば最大の期待利得を得ることができるか？

この問題を動的計画法で解くために次のように関数を定義する：

$$v_n(u)=\max_{\substack{x_1,\cdots,x_n \\ 0\le x_t(\cdot,a)\le a \\ x_t(0,a)=0}}\left[\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=0}^{I}\Pr(T_t=i)g_t\left(T_t,x_t(T_t,u-(x_{t+1}+\cdots+x_n))\right)\right]$$

すなわち、$v_n(u)$を「残りが n 期間でその時の手持ち資源が u である時の最大期待利得」とする。

この関数を利用すれば、次のような再帰関係式が成立する：

$$v_1(u)=\max_{\substack{0\le x_1(\cdot,a)\le a \\ x_1(0,a)=0}}\left[\sum_{i=0}^{I}\Pr(T_1=i)g_1\left(T_1,x_1(T_t,u)\right)\right]=\sum_{i=1}^{I}r_i(1)g_1\left(i,u\right)$$

$$v_n(u)=\max_{\substack{0\le x_n(\cdot,a)\le a \\ x_n(0,a)=0}}\left[\sum_{i=0}^{I}\Pr(T_t=i)\left\{g_n\left(T_n,x_n(T_n,u)\right)+v_{n-1}(u-x_n(T_n,u))\right\}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}r_i(n)\max_{0\le y_i(n)\le u}\left\{g_n\left(i,y_i(n)\right)+v_{n-1}(u-y_i(n))\right\}+r_0(n)v_{n-1}(u)$$

$$\left(n=2,\ldots,N\right)$$

ここで、$\Pr\left\{T_n=i\right\}=r_i(n)\ \ (i=0,\cdots,I)$ とおき、$g_1(\bullet,u)$ は u の単調非減少関数であると仮定する。

上記の再帰関係式において、関数 v_n は一意に存在し、最大値を与える $y_i(n)$ の値が残りが n 期間の時にタイプ i の目標物に利用すべき最適な資源の量である[1][2][4][5][6]。

本研究におけるわれわれの主な目的は上記の再帰関係式を利用して最適政策$\{y_i(n)\}$の定性的性質を導出することである。

2-2 ゲーム理論

2-2-1 協力ゲーム

第 1 章の序論で述べた A,B,C の 3 人の利益配分問題の例を用いて譲渡可能効用を持つ提携形ゲームを説明する。この 3 人がある事業を行うことを計画している。もし仮にこの事業を別々に行った場合の利益は表 2-1のように与えられている。全体提携による利益 400 万円いかに配分すべきであろうか？譲渡可能

表 2-1. 各提携 S に対する提携値 $v(S)$

S	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
$v(S)$	0	0	100	100	200	300	400

効用を持つ提携形ゲームでは全体提携による利益 v(ABC)=400 をそれ以外の提携値 $v(S)$（$S\subset$\{A,B,C\}）を考慮して A,B,C の 3 人に配分しようとする。

一般的に、譲渡可能効用を持つ提携形ゲーム（transferable utility game, TU-game）はプレイヤーの集合 $N:=\{1,2,\dots,n\}$ と $v(\emptyset)=0$ を満たす**特性関数** $v:2^N\to\mathbb{R}$ の順序対(N,v)で与えられる[3][7]。N の部分集合 S は**提携**と呼ばれ、その**提携値** $v(S)$は S のメンバーが協力して得られる利益を表している。ゲーム(N,v)の解は全体提携 N の提携値 $v(N)$を各プレイヤーにいかに分けるかという問題に関係している。この節では本研究で扱う解概念（コア、準カーネル、準仁、交渉集合、カーネル、仁、シャープレイ値、τ-値、均等配分値）を概観する。これらは以下に述べるようにそれぞれ固有の公平性の考察により定義されている[7]。

$\mathbb{R}^N$ の要素を**利得ベクトル**と呼ぶ。全体提携 N の提携値 $v(N)$を分けるので、利得ベクトルの集合 $A^*(N,v):=\left\{x\in\mathbb{R}^N \middle| \sum_{i\in N}x_i=v(N)\right\}$ が解の候補となる。利得ベクトル $x\in A^*(N,v)$ を**配分**と呼ぶ。さて、配分 x が与えられた時、$v(S)$が提携 S のメンバーによって得られる利得であるので、もし、$\sum_{j\in S}x_j\ge v(S)$ が成立すれば、提携 S はこの利得ベクトルに反対する根拠を持たない。この不等式がすべての提携 S に対して成り立つ配分の集合を**コア**と呼ぶ。すなわち、

$$Core(N,v):=\left\{x\in\mathbb{R}^N \middle| \sum_{j\in N}x_j=v(N),\sum_{j\in S}x_j\ge v(S)\left(\forall S\subset N\right)\right\}$$

である。上記の**表** 2-1のコアは$\{(x_A,x_B,x_C)|x_A+x_B+x_C=400,\ 0\le x_A\le 100,\ 0\le x_B\le 200,\ 100\le x_C\le 300\}$である（命題6-1を参照）。この例のコアは空集合ではなかったが、コアの定義により全体提携でないある提携 S の提携値 $v(S)$が大きくなり過ぎるとコアは空集合となる。

さて、コアは空集合である可能性があるので、どのゲームにおいても空集合

ではない解が必要である。利得ベクトル $x \in A^*(N,v)$ に対する提携 S の**不満**を $e^v(S,x) := v(S) - \sum_{j \in S} x_j$ で定義する。この値が大きいほど提携 S は利得ベクトル x に不満を持つ。どの提携 S に対しても不満が 0 以下であるものがコアに属する利得ベクトルである。不満が大きい提携はその利得ベクトルの成立を望まない。利得ベクトル $x \in A^*(N,v)$ におけるプレイヤー j に対するプレイヤー i の**最大不満**は $s_{ij}^v(x) := \max\left[e^v(S,x) \middle| S \subset N, i \in S, j \notin S\right]$ で定義される。どの 2 人のプレイヤー i,j をとってもこの最大不満 $s_{ij}^v(x)$ と $s_{ji}^v(x)$ が等しい利得ベクトル $x \in A^*(N,v)$ の集合を**準カーネル**と呼ぶ。すなわち、

$$K^*(N,v) := \left\{ x \in A^*(N,v) \middle| s_{ij}^v(x) = s_{ji}^v(x) \left(\forall i, j \in N, i \neq j \right) \right\}$$

$s_{ij}^v(x) > s_{ji}^v(x)$ であればプレイヤー i はプレイヤー j に対してより多くの不満をもっているために、利得ベクトル $x \in A^*(N,v)$ は安定ではないというのが準カーネルの考えである。準カーネルは空集合ではないが、複数個の点を含む可能性がある。そこで、さらに条件をきつくして解となるべき要素を少なくしていく。2^n 個の不満 $e^v(S,x)\left(S \in 2^N\right)$ を非増加の順に並べた、**不満ベクトル** $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ を定義する。$\theta(x)$ と $\theta(y)$ の辞書的順序 $\leq_L$ を、$\theta(x)$ と $\theta(y)$ を左の要素から順に比較していって最初に異なる要素の大小で定義する。すなわち、

$\theta_i(x) = \theta_i(y)(1 \leq i < k), \theta_k(x) < \theta_k(y)$ を満たす整数 $k(1 \leq k \leq 2^n)$ が存在するならば

$$\theta(x) <_L \theta(y);$$

$\theta(x) = \theta(y)$ または $\theta(x) <_L \theta(y)$ ならば、

$$\theta(x) \leq_L \theta(y) \text{ である。}$$

そして、**準仁** $N^*(N,v)$ をこの辞書的順序 $\leq_L$ における最小値を与える利得ベクトル $x \in A^*(N,v)$ と定義する。すなわち、

$$N^*(N,v) := \left\{ x \in A^*(N,v) \middle| \theta(x) \leq_L \theta(y) \left(\forall y \in A^*(N,v) \right) \right\}$$

準仁は必ず存在しそれは 1 点からなることが知られている。この 1 点を改めて準仁と呼び $\eta^*(N,v)$ で表す。また、この準仁 $\eta^*(N,v)$ は準カーネルの要素である。準仁は最大不満の最小化を目指して得られた解である。

準カーネルと準仁を紹介したが、これらはコアとは異なり個人合理性を満足するとは限らない。ここで利得ベクトル $x \in A^*(N,v)$ が**個人合理的**であるとは $x_i \geq v(\{i\})\left(\forall i \in N\right)$ であることをいう。個人合理的でなければ、各プレイヤーは単独で行動する方が全体提携に参加するより利得が大きいので、全体提携は形成されないことが予想される。個人合理的な配分の集合を $A(N,v)$で表し、その要素を**分配**と呼ぶ。すなわち、

$A(N,v) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \middle| \sum_{i\in N} x_i = v(N), x_i \geq v(\{i\})\left(\forall i \in N\right)\right\}$。

まず、個人合理性を満たすコア以外の解として交渉集合を紹介する。利得ベクトル $x \in A(N,v)$ に関するプレイヤー i のプレイヤー j に対する**異議** は$(y;S)$で表される。ここで、$i \in S \subset N, j \notin S$、$y := \left(y_k\right)_{k\in S}$ は $\sum_{k\in S} y_k = v(S), y_k > x_k\left(k \in S\right)$ を満たす。この$(y;S)$への**逆異議** は次のような$(z;T)$である：

$i \notin T \subset N, j \in T$ かつ $z := \left(z_k\right)_{k\in T}$ は $\sum_{k\in T} z_k = v(T), z_k \geq x_k\left(k \in T\right), z_k \geq y_k\left(k \in T \cap S\right)$

を満たす。**交渉集合** $M(v)$は次のように定義される：

「利得ベクトル $x \in A(N,v)$ は、x に関するどのプレイヤーの他のプレイヤーに対するどの異議に対しても、逆異議が存在するならば、交渉集合 $M(v)$に属する。」

上記の**表** 2-1のゲームの交渉集合はコアと一致する（命題6-2を参照）。

次に、準カーネルと準仁に個人合理性の条件を付け加えて次のように**カーネル** $K(N,v)$と**仁** $N(N,v)$を定義する。

$$K(N,v) := \left\{x \in A(N,v) \middle| \begin{array}{l} \left[s_{ij}^v(x) - s_{ji}^v(s)\right]\left[x_j - v\left(\{j\}\right)\right] \leq 0 \\ \&\left[s_{ji}^v(x) - s_{ij}^v(s)\right]\left[x_i - v\left(\{i\}\right)\right] \leq 0 \end{array} \left(\forall i, j \in N, i \neq j\right)\right\}$$

$$N(N,v) := \left\{x \in A(N,v) \middle| \theta(x) \leq_L \theta(y)\left(\forall y \in A(N,v)\right)\right\}$$

準仁と同様に仁も 1 点からなる集合であり、その点を $\eta(N,v)$ で表し、これも仁と呼ぶ。上記の**表** 2-1のゲームの仁は(50,125,225)である。

さて、以上の解（コア、交渉集合、準カーネル、カーネル、準仁、仁）はすべて不満 $e^v(S,x) := v(S) - \sum_{j\in S} x_j$ に関係している。

1 点解である**シャープレイ値** $Sh(N,v) = \left(Sh_i(N,v)\right)_{i\in N}$ は次のように定義される。

$$Sh_i(N,v) := \sum_{S \subset N-\{i\}} \gamma_n(S)\left[v\left(S \cup \{i\}\right) - v(S)\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{R}\left[v\left(S_i \cup \{i\}\right) - v(S_i)\right]$$

ここで、$\gamma_n(S) := \dfrac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}$ ($|S|$は集合 S の要素の個数) であり、2 番目の等号の右側にあるシグマ記号の下の R は N の $n!$個の順列を動き、S_i は順列 R において i の左側にいるプレイヤーの集合を表す。2 番目の定義式により、シャープレイ値は次のような意味を持つ。プレイヤーが順列 R に従って順番にある場所へ到着する。プレイヤーi が得る利得はそれまでに形成されていた提携に自分が新たに加わることによる増分 $v\left(S_i \cup \{i\}\right) - v(S_i)$ である。$n!$個の順列が等確率に発生すると仮定する時の各プレイヤーの得る期待利得がシャープレイ値である。**表** 2-1のゲームのシャープレイ値は(66+2/3,116+2/3,216+2/3)である。

次にもう 1 つの 1 点解である τ-値を説明する。全体提携 N が形成されるので、それへのプレイヤーi の寄与分は $b_i^v := v(N) - v\left(N-\{i\}\right)$ とみなせる。ベクトル $b^v := \left(b_i^v\right)_{i \in N}$ を **upper ベクトル**と呼び、**ギャップ関数**を $g^v(S) := \sum_{j \in S} b_j^v - v(S)$ $= -e^v(S,x)$ と定義する。各プレイヤーがこの寄与分を要求するとし、$\sum_{j \in N} b_j^v > v(N)$ と仮定する。プレイヤーの要求額の総和が分けるべき $v(N)$を超えているので、不足 $g^v(N)(>0)$ が生じる。そこで、各プレイヤーは譲歩を余儀なくされるが、なるべく譲歩したくない。プレイヤーi は自分の最小譲歩額を次のように見積もる。提携 S を形成すれば $v(S)$を得る、S 内のプレイヤーj に対して b_j^v を保証すると、自分には $v(S) - \sum_{j \in S-\{i\}} b_j^v$ だけ残る。この値を最大にする提携 S を探し、次の λ_i^v だけ譲歩する。

$$\lambda_i^v := b_i^v - \max\left\{v(S) - \sum_{j \in S-\{i\}} b_j^v \,\middle|\, i \in S \subset N\right\}$$

$$= \min\left\{g^v(S) \,\middle|\, i \in S \subset N\right\}$$

ここで、$\lambda_i^v \geq 0\left(\forall i \in N\right)$ かつ $\sum_{j \in N} \lambda_j^v \geq g^v(N)$ と仮定し、$\lambda^v := \left(\lambda_1^v, \ldots, \lambda_n^v\right)$ を**譲歩**

ベクトルと呼ぶ。すなわち、どのプレイヤーも譲歩し、すべてのプレイヤーによる譲歩の総和が不足額を補うと仮定する。この状況を図示したのが図 2-1である。点 b^v とそれから λ^v だけ譲歩した点を結んだ線分上にあり、配分である点が τ-値 $\tau(v)$ である。すなわち、$\lambda_i^v \geq 0\,(i \in N), \sum_{j\in N}\left(b_j^v - \lambda_j^v\right) \leq v(N) \leq \sum_{j\in N} b_j^v$ を満たすゲーム (N,v) を**準平衡ゲーム**と呼び、準平衡ゲームの **τ-値**を図 2-1のように定義する。式で書けば

$$\tau_i(v) := b_i^v - g^v(N)\left(\sum_{j\in N}\lambda_j^v\right)^{-1}\lambda_i^v \quad \left(i \in N\right)$$

である。**表** 2-1のゲームは準平衡ゲームであり、τ-値は(60,120,220)である。

最後に均等配分値として分類される 2 つの値を紹介する。各プレイヤー i は、まず、τ-値と同様に、全体提携への個人の寄与分として $SC_i(N,v) := v(N) - v(N-\{i\})$ を要求する。次に、残り $v(N) - \sum_{j\in N} SC_j(N,v)$ を各プレイヤーに等分する、すなわち、

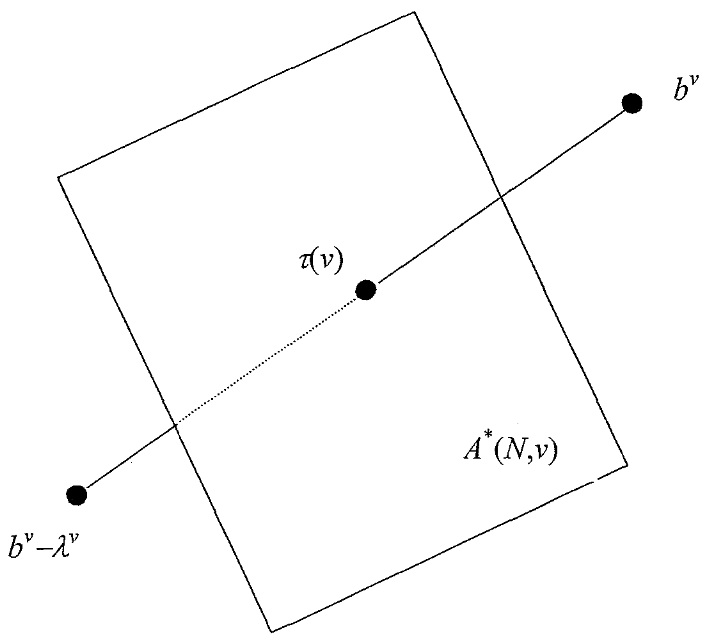


図 2-1. 準平衡ゲームの τ-値

$$ENSC_i(N,v) := SC_i(N,v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j \in N} SC_j(N,v) \right] \quad (i \in N)$$

これが**残余均等配分値（Egalitarian Non-Separable Contribution value；ENSC-値）**と呼ばれる値である。また、各プレイヤーが最初に要求する個人の寄与分が $v(\{i\})$であるとき、**配分集合の重心（Center of Imputation Set；CIS-値）**

$$CIS_i(N,v) := v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\}) \right] \quad (i \in N)$$

が得られる。表 2-1のゲームの CIS-値と ENSC-値は各々(100,100,200)と(33+1/3,133+1/3,233+1/3)である。

2-2-2 非協力ゲーム

N:={1,2,…,n}をプレイヤーの集合、S_iをプレイヤーi の**戦略**の集合、$h_i : S \to \mathbb{R}$をプレイヤーi の**利得関数**とするとき、組(N,S,h)をゲームの**戦略形**と呼ぶ[3]。ただし、$S := S_1 \times \cdots \times S_n$、$h := (h_1, \ldots, h_n)$である。2 人ゲームの戦略形ゲームは、行をプレイヤー1 の戦略、列をプレイヤー2 の戦略とすれば、表2-2のように行列の形式で表すことができる。戦略の組$s^* := (s_1^*, \ldots, s_n^*)$は、次の条件を満たす時、**ナッシュ均衡**と呼ばれる。

表 2-2. 2 人ゲームの戦略形

		プレイヤー2			
		…	j	…
	…	…	…	…
プレイヤー1	i	…	$h_1(i,j),h_2(i,j)$	…
	…	…	…	…

すべての$i \in N$に対して $h_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq h_i(t_i, s_{-i}^*)$ $(\forall t_i \in S_i)$

ただし、$s := (s_1, \ldots, s_n)$、$s_{-i} := (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$、$(t_i, s_{-i}) := (s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ である。

戦略形ゲーム $G := (N, S, h)$ が与えられたとき、G を繰り返して行うゲーム G^T（T は繰返しの回数）を**繰返しゲーム**と呼ぶ。繰返しゲーム G^T における各プレイヤーの戦略は、各期においてその期までの履歴に依存して自分の取る手を指定することである。繰返しゲーム G^T において、ある t 期まで経過した状態を考えると、その期以降もまた G の繰返しゲーム $G^{T-t}(a^1, \ldots, a^t)$ (a^x は x 期の履歴) と考えられる。これを元の繰返しゲーム G^T の**部分ゲーム**という。さて、元の繰返しゲーム G^T のナッシュ均衡でかつ、任意の t の任意の履歴に対する部分ゲーム $G^{T-t}(a^1, \ldots, a^t)$ においてもナッシュ均衡であるものを**部分ゲーム完全ナッシュ均衡**と呼ぶ。

以上の準備のもと、次章以降で動的及び複数プレイヤー間の資源配分を考察する。

参考文献

[1] Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.

[2] Bertsekas, D.P., Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice-Hall, N.J., 1987.

[3] 岡田章、ゲーム理論、有斐閣、1996.

[4] 尾形克彦、ダイナミック・プログラミング、培風館、1973.

[5] Puterman, M.L., Markov Decision Processes, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[6] 坂口実、経済分析と動的計画、東洋経済新報社、1970.

[7] 鈴木光男、新ゲーム理論、勁草書房、1994.

第3章 離散時間逐次資源配分

3-1 緒言

この章では次のような離散時間逐次資源配分を扱う。捕鯨船が鯨を捕獲するためにある有限期間を通じ有限個の銛を持って航行する。鯨は大きさにより複数のタイプからなる；大きなタイプを捕獲するためには小さなタイプを捕獲するよりも多くの銛が命中する必要がある。鯨は各期に高々1 頭ずつしか出現しない。鯨に遭遇した時、捕鯨船は手持ちの銛の中から何本かを同時に利用できる。この有限期間を通じて初期に保有していた銛を配分することによって得られる総期待報酬を最大にするにはいかに銛を利用すればよいだろうか？

このような逐次資源配分は多くの人に研究されている。例えば、Derman, Lieberman, and Ross [2]は資源が連続量であり、得られる期待報酬が使用した資源の量に依存するが目標物には依存しない場合を扱っている。これは目標物が 1 種類だけであり資源を連続量とみなした場合である。彼らは資源の最適使用量が手元にある資源の量の非減少関数であり、残り期間の長さの非増加関数であることを示した。Mastran and Thomas [3]は目標物の種類が無限の場合を扱っている。しかし彼らは最適政策の構造には言及していない。Sakaguchi [5]は Mastran and Thomas のモデルの連続時間版を扱っている。すなわち、資源が離散量であり、期待報酬が使用された資源の量だけでなく現れている目標物にも依存し、目標物がポアソン過程で出現するとして、彼は使用すべき資源の量の単調性を示した。彼らのモデルは目標物を捕獲するために 1 個の資源が命中するだけでよい場合に帰着される。

この章では、上述の既存のモデルとは異なる新しいタイプの逐次資源配分を考察する。第3-2節では捕鯨船が銛で鯨を捕獲する場合を扱う。鯨は 2 種類、タイプ 1 とタイプ 2 からなる；タイプ 1 を捕獲するためには L 本の銛が命中する必要があり、一方、タイプ 2 は 1 本だけでよい。ここで、L は正の整数である。また、これをさらに一般的なモデルに拡張する。第3-3節では劣化する製品を客に販売する逐次資源配分を扱う。第3-4節では各期の始めに資源の補給が可能な逐次資源配分を扱う。

この章の基本的な解析方法は以下の如くである。意思決定時点が多期間にわたる上述の報酬最大化のような意思決定過程の分析に動的計画法を適切に用いて、期待報酬の最大値が満たすべき再帰関係式を求める。この章の目的は再起関係式を分析することにより、最適政策（最適な資源の使用量）の性質、例えば、より多くの銛を持っていればより多く利用せよ、残り期間が短ければより

多くの銛を利用せよ、等を解析的に導出することである。以後の各節においては、まず問題を動的計画法を用いて定式化し、最適政策の構造を調べ、数値例を考察する。

3-2 目標物が 2 種類の逐次資源配分

3-2-1 定式化

捕鯨船が鯨を捕獲するために N 期間を通じ M 本の銛を持って航行すると仮定する。ここで、M と N は正の整数である。鯨は 2 種類、タイプ 1 とタイプ 2 からなる；タイプ 1 を捕獲するためには L 本の銛が命中する必要があるが、タイプ 2 は 1 本でよい。L は正の整数である。タイプ i（i=1,2）の鯨は各期に確率 r_i（$0<r_i<1$）で出現し、x_i の報酬を生み、確率 $r_0\left(0\le r_0, r_0+r_1+r_2=1\right)$ で何も出現しない。鯨に遭遇した時、捕鯨船は手持ちの銛の中から何本かを同時に利用できる。各銛の命中確率は同一で p（$0<p<1$）である。目的は N 期間を通じて与えられた M 本の銛を配分することによって得られる総期待報酬を最大にする最適政策を見つけることである。

$V_n(m;i)=$ 残りが n 期間で、m 本の銛が手元にあり、捕鯨船がタイプ i の鯨に出会っており、最適政策を利用している時の総期待報酬

$\bar{V}_n(m)$ = 残りが n 期間で、m 本の銛が手元にあり、最適政策を利用している時の総期待報酬

と定義する。

最適性の原理[1]より、次の再帰関係式を得る：

$$V_n(m;1)=\max_{j=0,\ldots,m}\left\{A(j,L)x_1+\bar{V}_{n-1}(m-j)\right\} \tag{3-1}$$

$$V_n(m;2)=\max_{j=0,\ldots,m}\left\{(1-q^j)x_2+\bar{V}_{n-1}(m-j)\right\} \tag{3-2}$$

$$\bar{V}_n(m)=r_0\bar{V}_{n-1}(m)+r_1V_n(m;1)+r_2V_n(m;2) \tag{3-3}$$

$$\left(n=1,\ldots,N, m=0,\ldots,M\right)$$

$$V_0(\cdot;\cdot)=V_\cdot(0;\cdot)=\bar{V}_0(\cdot)=\bar{V}_\cdot(0)=0$$

ここで、$r_0+r_1+r_2=1$、$p+q=1$、$A(j,L)=\begin{cases}\sum_{i=L}^{j}\binom{j}{i}p^i q^{j-i} & (j\geq L)\\ 0 & (j<L)\end{cases}$ である。

式(3-1)は次のようにして得られる：
残りが n 期間で、手元に m 本の銛があり、タイプ 1 の鯨に出会っており、j 本の銛を使用した時、この鯨の期待報酬は $A(j,L)x_1$ であり、残り期間は $n-1$ となり、手元に $m-j$ 本の銛が残る。この残りが $n-1$ 期間で銛が手元に $m-j$ 本ある時の最大期待報酬は $\bar{V}_{n-1}(m-j)$ であるので式(3-1)が得られる。式(3-2)も同様に得られる。式(3-3)は各期にタイプ i（i=1,2）の鯨が確率 r_i で現れ、確率 r_0 で何も現れないという仮定に基づいている。

3-2-2 最適政策

再帰関係式(3-1)、(3-2)、(3-3) を解けば、最適政策を求めることができる。しかし、残念なことにこれらを陽に解くことができない。そこで、最適政策の構造を調べる。

次の補題3-1で述べられる $V_n(m;i)$ (i=1,2) と $\bar{V}_n(m)$ の性質は容易に証明できる。

補題 3-1.
$V_n(m;i)$（i=1,2）と $\bar{V}_n(m)$ は m と n の非減少関数である。

式(3-1)または(3-2)の右辺の最大値を与える j の値は各々、タイプ 1 またはタイプ 2 の鯨に出会った時、使用すべき最適な銛の本数である。最適政策を明確に決定するために $k(n,m;i)$を右辺の最大値を与える j の最小値と定義する。すなわち、

$$k(n,m;1)=\min\left\{t \mid \max_{j=0,\ldots,m}\left\{A(j,L)x_1+\bar{V}_{n-1}(m-j)\right\}=A(t,L)x_1+\bar{V}_{n-1}(m-t)\right\}$$

$$k(n,m;2)=\min\left\{t \mid \max_{j=0,\ldots,m}\left\{(1-q^j)x_2+\bar{V}_{n-1}(m-j)\right\}=(1-q^t)x_2+\bar{V}_{n-1}(m-t)\right\}$$

この表記法を利用すれば、残りが n 期間で、m 本の銛が手元にあり、捕鯨船がタイプ i の鯨に出会っている時、$k(n,m;i)$本の銛をその鯨に配分するのは最適政策

である。

手元にある銛の本数によって次の 3 つ（a）$m<L$、（b）$m=L$、（c）$m>L$、に場合を分け最適政策の構造を考察する。しかし、その前に $m>0$ の時に成立する次の定理を示す。

捕鯨船が手元にまだ銛を持っている時に、どちらのタイプの鯨にも 1 本も銛を配分しないのは、直感的に、最適ではないと思われる。この推測が正しいことが次の定理で証明される。

定理 3-1.
$m>0$ ならば、$k(n,m;1)$ と $k(n,m;2)$のうち少なくとも一方は正である。

証明： $m>0$ であるので、次の関係が成立する。

$$V_n(m;1) = \max\left\{\bar{V}_{n-1}(m), a_{n-1}\right\}, a_{n-1} = \max_{j=1,\dots,m}\left\{A(j,L)x_1 + \bar{V}_{n-1}(m-j)\right\}$$

$$V_n(m;2) = \max\left\{\bar{V}_{n-1}(m), b_{n-1}\right\}, b_{n-1} = \max_{j=1,\dots,m}\left\{(1-q^j)x_2 + \bar{V}_{n-1}(m-j)\right\}$$

ここで、$c_{n-1} = \max\left\{a_{n-1}, b_{n-1}\right\}$ とおく。補題3-1より $\bar{V}_n(\cdot)$ は n の非減少関数であるので、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ も非減少な数列であり、従って、$\{c_n\}$ もそのようになる。もし、$n\geq 0$ に対して $\bar{V}_n(m)<c_n$ であることを証明すれば、$\bar{V}_n(m)<a_n$ または $\bar{V}_n(m)<b_n$ となり、$k(n+1,m;1)$ と $k(n+1,m;2)$の少なくとも一方は正となる。
証明は残り期間の長さ n に関する帰納法による。$n=0$ の時、明らかに $\bar{V}_0(m)<c_0$ である。$n=k$ の時、$\bar{V}_k(m)<c_k$ と仮定すると

$$\begin{aligned}\bar{V}_{k+1}(m) &= r_0\bar{V}_k(m) + r_1V_{k+1}(m;1) + r_2V_{k+1}(m;2)\\ &= r_0\bar{V}_k(m) + r_1\max\left\{\bar{V}_k(m), a_k\right\} + r_2\max\left\{\bar{V}_k(m), b_k\right\}\\ &< \left(r_0 + r_1 + r_2\right)c_k \leq c_{k+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。これは $n=k+1$ の時、主張が成立することを示している。

（証明終わり）

(a) $m<L$ の場合

ここでは $m<L$ の場合、すなわち、捕鯨船が L 本より少ない銛を持っている場合を考察する。タイプ 1 の鯨を捕獲するためには L 本の銛が命中する必要があ

るので、捕鯨船はタイプ 2 の鯨のみを捕獲しようと試みる。次の補題は後の定理の証明で利用される。

補題 3-2.
$m<L$ の時、$V_n(m;2)$は m の凹関数である。

この補題は再帰関係式(3-2)と$(1-q^j)x_2$ の j に関する凹性に注意すれば、n に関する帰納法で証明することができる。

次の定理は捕鯨船が L 本未満の銛を持っている時の最適政策の構造を表している。

定理 3-2.
$m<L$ の時、次の事が成立する。
(i) $k(n,m;1)=0$。
(ii) $k(n,m;2)$は m の非減少関数であり、n の非増加関数である。

(i)は明らかである。(ii)の証明は[2]の定理 3(ii)と(iii)と同様に証明できる。従って、省略する。

定理3-2は次のことを示唆している：
捕鯨船が手元に L 本未満の銛を持っていると仮定する。その時、残り期間が短くなればなるほど多くの銛を使用すべきであり、より多くの銛を持っていればいるほどより多くの銛を使用すべきである。この結果はわれわれの直感と一致する。

(b) $m=L$ の場合

(a)項の定理3-2で $m<L$ の時の最適政策の構造を示した。ここでは $m=L$ の場合、すなわち、捕鯨船がちょうど L 本の銛を持っている場合を考察する。この時はタイプ 1 の鯨を捕獲しようとするのは合理的かもしれない。
次の定理は捕鯨船がタイプ 2 の鯨に出会っている時の最適政策の構造を述べている。

定理 3-3.
もし、$k(n,L;2)>0$ ならば、$k(n,L;2)\geq k(n+1,L;2)$が成立する。

証明： $j_0=k(n,L;2)>0$ とおく。この時、$V_n(L;2)=(1-q^{j_0})x_2+\bar{V}_{n-1}(L-j_0)$ が成立する。もし、$j_0=L$ ならば、定理は明らかに成立する。そこで、$0<j_0<L$ と仮定する。もし、$0\leq c\leq L-j_0$ を満たす任意の整数 c に対して次のことを示せば定理は証明され

たことになる。

$$(1-q^{j_0+c})x_2+\overline{V}_n(L-j_0-c)\le(1-q^{j_0})x_2+\overline{V}_n(L-j_0)$$

次のことに注意する。

$$\begin{aligned}&(1-q^{j_0})x_2+\overline{V}_n(L-j_0)-(1-q^{j_0+c})x_2-\overline{V}_n(L-j_0-c)\\&=(1-r_2)\left[\left\{(1-q^{j_0})x_2+\overline{V}_{n-1}(L-j_0)\right\}-\left\{(1-q^{j_0+c})x_2+\overline{V}_{n-1}(L-j_0-c)\right\}\right]\\&+r_2\left[\left\{(1-q^{j_0})x_2+V_n(L-j_0;2)\right\}-\left\{(1-q^{j_0+c})x_2+V_n(L-j_0-c;2)\right\}\right]\end{aligned}\tag{3-4}$$

まず、右辺の最初の大括弧の項は j_0 の定義から非負である。次に、2 番目の大括弧の項が非負であることを証明する。$j_1=k(n,L-j_0-c;2)$とおくと、

$$V_n(L-j_0-c;2)=(1-q^{j_1})x_2+\overline{V}_{n-1}(L-j_0-c-j_1)$$

が成立する。後に証明するように $j_1\le j_0$ が成立するので、

$$\begin{aligned}&(1-q^{j_0+c})x_2+V_n(L-j_0-c;2)\\&=(1-q^{j_0+c})x_2+(1-q^{j_1})x_2+\overline{V}_{n-1}(L-j_0-c-j_1)\\&\le(1-q^{j_0})x_2+(1-q^{j_1+c})x_2+\overline{V}_{n-1}(L-j_0-c-j_1)\\&\le(1-q^{j_0})x_2+V_n(L-j_0;2)\end{aligned}$$

となり、2 番目の大括弧の項が非負であることが示されるので、(3-4)の右辺は非負である。

「$j_1\le j_0$ の証明」:

$m_1=L-j_0-c$ とおくと、j_0 と c の定義より、$0\le m_1<L$ である。もし、$j_1=0$ または 1 ならば、$j_0>0$ であるから、$j_1\le j_0$ が成立する。従って、$j_1\ge 2$ と仮定すると、$0<d<j_1$ を満たす整数 d に対して次の不等式を示せば十分である。

$$(1-q^{j_1})x_2+\overline{V}_{n-1}(L-j_1)>(1-q^{j_1-d})x_2+\overline{V}_{n-1}(L-j_1+d)$$

まず、j_1 の定義より

$$(1-q^{j_1})x_2+\overline{V}_{n-1}(m_1-j_1)>(1-q^{j_1-d})x_2+\overline{V}_{n-1}(m_1-j_1+d)$$

である。項を並べ替えて、$m_1-j_1+d<L-j_1+d<L$ であることおよび $\bar{V}_{n-1}(t)$ が $t<L$ の範囲で t の凹関数であることを用いると、

$$\begin{aligned}(1-q^{j_1})x_2-(1-q^{j_1-d})x_2 &> \bar{V}_{n-1}(m_1-j_1+d)-\bar{V}_{n-1}(m_1-j_1)\\ &\geq \bar{V}_{n-1}(L-j_1+d)-\bar{V}_{n-1}(L-j_1)\end{aligned}$$

となる。（証明終わり）

この定理により、捕鯨船がちょうど L 本の銛を持ち、タイプ 2 の鯨に会っている時、残り期間が短くなればなるほど多くの銛を使用すべきであるということが成立する期間があることが分かる。$k(n,L;2)$ が必ずしも n の非増加関数ではない反例は次の(c)項で与えられる。

次に捕鯨船がタイプ 1 の鯨と出会う場合を考える。$m=L$ の時には再帰関係式(3-1)は $V_n(L;1)=\max\left\{p^L x_1,\bar{V}_{n-1}(L)\right\}$ となる。$\bar{V}_n(L)$ は n の非減少関数で $\bar{V}_0(L)=0$ であるので、次の 2 つの場合が可能である：

(i) すべての $n\geq 1$ に対して、$k(n,L;1)=L$ である。

(ii) ある正の整数 n_0 が存在して、$\begin{cases}k(n,L;1)=L & (n<n_0)\\ k(n,L;1)=0 & (n\geq n_0)\end{cases}$ である。

定理3-4はこのような n_0 が存在する条件に関係している。その前に $m\leq L$ の場合の $\bar{V}_n(m)$ の漸近的性質を述べる次のいくつかの補題が必要であり、これらは定理3-4の証明で利用される。

補題 3-3.

$m<L$ の時、$\bar{V}_n(m)\to mpx_2\ (n\to\infty)$ である。また、$n\geq 1$、$0<m<L$ の時、$\bar{V}_{n-1}(m)<\bar{V}_n(m)$ である。

証明： $m<L$ の時、捕鯨船はタイプ 2 の鯨だけ捕獲しようとする。捕鯨船は、タイプ 2 の鯨に出会った時に銛を 1 本ずつ使用するという政策を使うとする。この政策による総期待報酬は $\mathrm{E}[\{\min(X,m)\}px_2]$ である。ここで、X は出会う鯨の総数であり、パラメータが (n,r_2) の二項分布に従う確率変数である。この政策は n 期間問題の 1 つの政策であり、また、$(1-q^j)x_2$ は j の凹関数なので、

$$\mathrm{E}\left[\left\{\min(X,m)\right\}px_2\right]\leq\bar{V}_n(m)\leq mpx_2$$

が成立する。$\{\min(X,m)\}px_2 \le mpx_2$ であるので、大数の法則とルベーグの有界収束定理より、

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[\{\min(X,m)\}\,px_2\right]=\mathrm{E}\left[\lim_{n\to\infty}\{\min(X,m)\}\,px_2\right]=mpx_2$$

となる。従って、$n\to\infty$ の時、$\bar{V}_n(m)\to mpx_2$ となる。

次に、$\bar{V}_{n-1}(m)<\bar{V}_n(m)$ を証明する。まず、補題3-1より $\bar{V}_{n-1}(m)\le\bar{V}_n(m)$ であることに注意する。ある n に対して $\bar{V}_n(m)=\bar{V}_{n-1}(m)$ と仮定すると、$V_n(m;2)=\bar{V}_{n-1}(m)$ かつ $k(n,m;2)=0$ となり、定理3-1と3-2に矛盾する。　　　　（証明終わり）

補題 3-4.

$A_{n-1}=\max_{j=1,\dots,L}\left\{(1-q^j)x_2+\bar{V}_{n-1}(L-j)\right\}$ とおくと、$n\to\infty$ の時 $A_n\to A=Lpx_2$ であり、

$n\ge 0$ の時 $A_n<A$ である。

証明：　上記の補題3-3より $m<L$ ならば、$n\to\infty$ の時 $\bar{V}_n(m)\to mpx_2$ となるので、

$A=x_2\max_{j=1,\dots,L}\left\{1+Lp-(q^j+jp)\right\}$ を得る。

さて、$-1=-(q^1+p)>-(q^2+2p)>\cdots>-(q^L+Lp)$ に注意すると、$j=1$ で max をとり $A=Lpx_2$ となる。

次に、ある n_0 で、$A_{n_0}=A$ となったと仮定する。補題3-3を利用して

$$\begin{cases}(1-q^j)x_2+\bar{V}_{n-1}(L-j)<(1-q^j)x_2+\bar{V}_n(L-j) & (1\le j<L)\\(1-q^j)x_2+\bar{V}_{n-1}(L-j)=(1-q^j)x_2+\bar{V}_n(L-j) & (j=L)\end{cases}$$

を得る。従って、$\{A_n\}$ が n の非減少数列であることに注意すると、$n\ge n_0$ の時 $j=L$ の時に max で、$A_n=(1-q^L)x_2<Lpx_2$ となり、$A_n\to A\ (n\to\infty)$ に矛盾する。

（証明終わり）

補題 3-5.

$\bar{V}_n(L)\to\max\left\{A,p^Lx_1\right\}=\max\left\{Lpx_2,p^Lx_1\right\}\ (n\to\infty)$ である。また、

$n\ge 0$ の時、$\bar{V}_n(L)<\max\left\{A,p^Lx_1\right\}$ が成立する。

証明：　再帰関係式より

$$\bar{V}_n(L) = r_0\bar{V}_{n-1}(L) + r_1 \max\left\{p^L x_1, \bar{V}_{n-1}(L)\right\} + r_2 \max\left\{A_{n-1}, \bar{V}_{n-1}(L)\right\} \tag{3-5}$$

を得る。また、定理3-1と補題3-4から

$$\bar{V}_{n-1}(L) \le \max\left\{A_{n-1}, p^L x_1\right\} < \max\left\{A, p^L x_1\right\}$$

である。$\left\{\bar{V}_n(L)\right\}$ は有界な非減少数列なので、極限値が $\bar{V}_\infty$ 存在する。(3-5)で $n \to \infty$ とすれば、

$$\left(r_1 + r_2\right)\bar{V}_\infty = r_1 \max\left\{p^L x_1, \bar{V}_\infty\right\} + r_2 \max\left\{A, \bar{V}_\infty\right\}$$

を得る。これは $\bar{V}_\infty = \max\left\{A, p^L x_1\right\}$ を意味する。　　　　　　（証明終わり）

さて、次の定理は n がある整数以上の時に $k(n,L;1)=0$ となる必要かつ十分条件を与える。

定理 3-4.

次の(i)、(ii)、(iii)が成立する。

(i)　$p^L x_1 > Lpx_2$ ならば、$n \ge 1$ の時 $k(n,L;1)=L$ であり、$n \ge n_0$ の時 $k(n,L;2)=0$ となるような正の整数 n_0 が存在する。

(ii)　$p^L x_1 < Lpx_2$ ならば、$n \ge n_1$ の時 $k(n,L;1)=0$ であり、$n \ge n_2$ の時 $k(n,L;2)=1$ となるような正の整数 n_1 と n_2 が存在する。

(iii)　$p^L x_1 = Lpx_2$ ならば、$n \ge 1$ の時 $k(n,L;1)=L$ である。

証明：　(i) 補題3-4と3-5より、$n \ge 1$ の時 $\bar{V}_{n-1}(L) < p^L x_1$ であり十分大きな n に対して $A_{n-1} < Lpx_2 < \bar{V}_{n-1}(L)$ である。従って、(i)が証明された。

(ii) 最初の部分の証明は(i)と同様である。後半部分を証明するために、定理3-1より、十分大きな n に対して $k(n,L;2)>0$ であることに注意する。無限個の n の値に対して $k(n,L;2)=j_1 \ge 2$ であると仮定する。その時、この無限個の n の値に対して

$$\bar{V}_n(L) = r_0\bar{V}_{n-1}(L) + r_1\bar{V}_{n-1}(L) + r_2\left[(1-q^{j_1})x_2 + \bar{V}_{n-1}(L-j_1)\right]$$

が成立する。この事は、$m \le L$ の時 $\bar{V}_n(m) \to mpx_2\ (n \to \infty)$ であることに矛盾する。

それゆえ(ii)が証明された。
(iii)は(i)と同様に証明できる。　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

上記の定理より、捕鯨船がちょうど L 本の銛を持っている時、最適政策は次のように表現される：

(i) $p^L x_1 > Lpx_2$ ならば、タイプ 1 の鯨に出会っている時は L 本の銛全部を使用せよ。残り期間が十分に長くタイプ 2 の鯨に出会っている時は銛を使用してはいけない。

(ii) $p^L x_1 < Lpx_2$ ならば、残り期間が十分に長くタイプ 1 の鯨に出会っている時は銛を使用するな。残り期間が十分に長くタイプ 2 の鯨に出会っている時はちょうど 1 本の銛を使用せよ。

(iii) $p^L x_1 = Lpx_2$ ならば、タイプ 1 の鯨に出会っている時は L 本の銛全部を使用せよ。

(c) $m>L$ の場合

定理3-2と3-3の証明は $\bar{V}_n(\cdot)$ の凹性に強く依存している。そしてこれは $(1-q^j)x_2$ の凹性による。$A(j,L)x_1$ は最も簡単な L=1 の時を除いて j の凹関数ではないので、$m>L$ の場合には $m \le L$ と同じ方法で議論を行うことができない。すなわち、$m>L$ の時には最適政策の簡単な構造は期待できない。

この第3-2節の結果は $A(j,L)x_1$ と $(1-q^j)x_2$ を各々次のような $R_1(j)$ と $R_2(j)$ に拡張しても成立する。ただし、$R_1(j)$ は $0 \le j < L$ の時 $R_1(j)=0$ を満たす j の非減少関数であり、$R_2(j)$ は $R_2(0)=0$ を満たす j の単調増加狭義凹関数である。この場合 mpx_2 と $p^L x_1$ は各々 $mR_2(1)$ と $R_1(L)$ に置き換わる。

次の数値例は $k(n,L;2)$ が必ずしも n の非増加関数ではないこと、また、$k(n,m;i)$

表 3-1. 最適使用量 $k(n,m;1)$

	n	残り期間の長さ					
m		1	2	3	4	5	6
銛の本数	5	5	5	5	0	0	0
	4	4	4	4	4	4	4
	3	3	3	3	3	3	3
	2	2	2	2	2	0	0
	1	0	0	0	0	0	0

表 3-2. 最適使用量 $k(n,m;2)$

	n	残り期間の長さ					
m		1	2	3	4	5	6
銛の本数	5	5	1	1	1	1	1
	4	4	1	0	0	0	0
	3	3	0	0	0	0	0
	2	2	0	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1

が必ずしも m の非減少関数ではないことを示している。L=2、M=5、N=6、r_1=0.666、r_2=0.333、r_3=0.001、x_1=3.125、x_2=1、p=0.5 とする。最適政策は表3-1と表3-2のようになる。例えば、$k(4,m;1)$と $k(2,m;2)$は m の非減少関数ではない、$k(n,2;2)$は n の非増加関数ではない。この例により $k(n,m;i)$の単調性は $L\geq 2$ の時には必ずしも成立しないことがわかる。次の(d)項で示されるように、L=1 の時には単調性が成立する。

(d) L=1 の場合

ここでは最も簡単な L=1 の場合を扱い、$k(n,m;i)$の構造をさらに調べる。これらの結果は鯨が有限種類からなる場合にも拡張できることが示される。これは Mastran and Thomas [3]によって議論されたモデルと類似している。

次のいくつかの補題は定理3-5の証明で用いられる。補題3-6は補題3-2と同様に得られる。

補題 3-6.

$V_n(m;i)$　(i=1,2) と $\bar{V}_n(m)$ は m の凹関数である。

補題 3-7.

$n\geq 0$、$m\geq 0$ に対して、次の不等式が成立する：

$$\bar{V}_{n+1}(m)-\bar{V}_n(m)\leq \bar{V}_{n+1}(m+1)-\bar{V}_n(m+1)$$

証明：　再帰関係式より

$$\bar{V}_{n+1}(m)=r_0\bar{V}_n(m)+r_1V_{n+1}(m;1)+r_2V_{n+1}(m;2)$$

$$\bar{V}_{n+1}(m+1)=r_0\bar{V}_n(m+1)+r_1V_{n+1}(m+1;1)+r_2V_{n+1}(m+1;2)$$

である。従って、

$$\bar{V}_{n+1}(m)-\bar{V}_n(m)=r_1\left[V_{n+1}(m;1)-\bar{V}_n(m)\right]+r_2\left[V_{n+1}(m;2)-\bar{V}_n(m)\right]$$

$$\bar{V}_{n+1}(m+1)-\bar{V}_n(m+1)=r_1\left[V_{n+1}(m+1;1)-\bar{V}_n(m+1)\right]+r_2\left[V_{n+1}(m+1;2)-\bar{V}_n(m+1)\right]$$

が成り立つ。すなわち、次の不等式が示されれば補題は証明されたことになる：

$$V_{n+1}(m+1;i)-\bar{V}_n(m+1)\geq V_{n+1}(m;i)-\bar{V}_n(m)\ (i=1,2)$$

または、

$$V_{n+1}(m+1;i)-V_{n+1}(m;i)\ge \overline{V}_n(m+1)-\overline{V}_n(m)\ (i=1,2)$$

この事を示すために $j_0=k(n+1,m;i)$ とおくと、$0\le j_0\le m$ かつ

$$V_{n+1}(m;i)=(1-q^{j_0})x_i+\overline{V}_n(m-j_0)$$

である。一方、$V_{n+1}(m+1;i)\ge(1-q^{j_0})x_i+\overline{V}_n(m+1-j_0)$ である。故に、$\overline{V}_n(\cdot)$ の凹性を利用して、

$$V_{n+1}(m+1;i)-V_{n+1}(m;i)\ge \overline{V}_n(m+1-j_0)-\overline{V}_n(m-j_0)\ge \overline{V}_n(m+1)-\overline{V}_n(m)$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

次の定理3-5、3-6、3-7で最適政策の構造を示す。定理3-5と3-6は $k(n,m;i)$ の n、m、i に関する単調性に関係している。定理3-7は残り期間が十分に長い時の最適政策を述べている。

定理 3-5.
次の(i)と(ii)が成立する。
(i) $k(n,m;i)\le k(n,m+1;i)\le k(n,m;i)+1$ （i=1,2） が成り立つ。
(ii) $k(n,m;i)$ （i=1,2） は n の非増加関数である。

証明： (i)は[2]の命題 2 と定理 3 (ii)と同様に証明できる。
(ii)を証明するために、$j_0=k(n,m;i)$ とおくと

$$(1-q^{j_0})x_i+\overline{V}_{n-1}(m-j_0)\ge(1-q^{j})x_i+\overline{V}_{n-1}(m-j) \tag{3-6}$$

が成立する。$j_0\le j\le m$ を満たす整数 j に対して、補題3-7より

$$\overline{V}_n(m-j_0)-\overline{V}_{n-1}(m-j_0)\ge \overline{V}_n(m-j)-\overline{V}_{n-1}(m-j) \tag{3-7}$$

である。(3-6)と(3-7)より $j_0\le j\le m$ を満たす整数 j に対して、

$$(1-q^{j_0})x_i+\overline{V}_n(m-j_0)\ge(1-q^{j})x_i+\overline{V}_n(m-j)$$

この事は $k(n+1,m;i) \le j_0 = k(n,m;i)$ である事を意味している。　　　（証明終わり）

この定理は、より多くの銛が手元にあればより多くの銛を使用せよ、残り期間が少なくなればより多くの銛を使用せよ、と主張している。これらの主張は、前項(c)に示したように、$L \ge 2$ の場合には必ずしも真ではない。

より大きな価値を生む鯨にはより多くの銛を使用すべきである、と直感的に推測できる。次の定理はこの推測を証明している。

定理 3-6. $x_1 > x_2$ ならば、$k(n,m;1) \ge k(n,m;2)$ である。

証明：　$j_0 = k(n,m;2)$ とおく。$j_0 = 0$ ならば、定理は明らかに成立する。$j_0 \ge 1$ と仮定する。$0 \le j < j_0$ を満たす整数 j に対して、

$$
\begin{aligned}
&\left\{(1-q^{j_0})x_1 + \bar{V}_{n-1}(m-j_0)\right\} - \left\{(1-q^{j})x_1 + \bar{V}_{n-1}(m-j)\right\} \\
&= \left[\left\{(1-q^{j_0})x_2 + \bar{V}_{n-1}(m-j_0)\right\} - \left\{(1-q^{j})x_2 + \bar{V}_{n-1}(m-j)\right\}\right] \qquad (3\text{-}8) \\
&+ \left[\left\{(1-q^{j_0})x_1 - (1-q^{j_0})x_2\right\} - \left\{(1-q^{j})x_1 - (1-q^{j})x_2\right\}\right]
\end{aligned}
$$

(3-8)の右辺の最初の大括弧は j_0 の定義により正であり、2 つ目は $x_1 > x_2$ より正である。この事は $k(n,m;1) \ge j_0 = k(n,m;2)$ を意味している。　　　（証明終わり）

次の補題は定理3-7の証明で利用され、補題3-3と同様に証明される。

補題 3-8.

$x_1 > x_2$ ならば、$\bar{V}_n(m) \to mpx_1 \left(n \to \infty\right)$ である。

定理 3-7.

$x_1 > x_2$ ならば、$n \ge n_0$ の時 $k(n,m;1) = 1$ で $n \ge n_1$ の時 $k(n,m;2) = 0$ であるような正の整数 n_0 と n_1 が存在する。

証明：　このような n_1 が存在しないと仮定する。$k(n,m;2)$ が取り得る値は有限であるので無限個の n の値に対して $k(n,m;2) = j_0$ となる $j_0 > 0$ が存在する。すなわち、この無限個の n の値に対して

$$(1-q^{j_0})x_2 + \bar{V}_{n-1}(m-j_0) > (1-q^{0})x_2 + \bar{V}_{n-1}(m) = \bar{V}_{n-1}(m)$$

となる。この事は $n \to \infty$ の時に $\bar{V}_n(m) \to mpx_1$ となることに矛盾する。n_0 の存在も

同様に証明できる。　(証明終わり)

定理3-7は、残り期間が十分に長い時は最も価値のある鯨に 1 本ずつ銛を使用せよ、という事を意味している。

この(d)項での結果は、目標物が有限種類からなり、期待報酬関数が次に述べるもっと一般的な場合でも、成立する。その拡張された問題は次のように表現される：

目標物はタイプ 1、タイプ 2、…、タイプ I の I 個のタイプからなる。タイプ i の目標物は各期に確率 r_i $(0< r_i <1)$ で現れ、確率 $r_0\left(r_0 \geq 0, r_0+\cdots+r_I=1\right)$ で何も現れない。意思決定者がタイプ i の目標物に j 本の資源を使用すると、$R_i(j)$ $(R_i(0)=0)$ の期待報酬を得る。この一般化された設定の下で同じ表記法を用いて次のような最適政策の構造を得る：

(1) $R_i(j)$ $(1\leq i\leq I)$ が j の増加凹関数ならば、$k(n,m;i)$ $(1\leq i\leq I)$ は m の非減少関数であり、n の非増加関数である。

(2) $R_i(j)$ $(1\leq i\leq I)$ が $R_i(j)-R_{i+1}(j)<R_i(j+1)-R_{i+1}(j+1)\left(1 \leq i \leq I-1, j \geq 0\right)$ を満たすなら、$k(n,m;i)$は i の非増加関数である。

(3) 仮定(1)と(2)を満たし、$R_1(j)$が厳密に凹関数ならば、$n\geq n_0$ の時 $k(n,m;1)=1$ で $n\geq n_1$ の時 $k(n,m;i)=0$ $(2\leq i\leq I)$ であるような正の整数 n_0 と n_1 が存在する。

3-3 劣化する製品の逐次資源配分

3-3-1 定式化

意思決定者は N 期間を通じて現れる客に M 個の製品を販売する。客は I 種類からなる。客は各期の始めに高々1 人ずつ現れる。確率 $r_i(n)$ ($i=1,\ldots,I$, $n=1,\ldots,N$)（n は残り期間の長さを表す）でタイプ i の客が現れ、$r_0(n)$の確率で誰も現れない ($r_0(n)+\cdots+r_I(n)=1$)。意思決定者が j 個の製品をタイプ i の客に売ると $R_i(n,j)$ の利得を生む。$R_i(n,j)$は j の非減少凹関数で $R_i(n,0)=0$ とする。各期の終わりに売れ残った製品は次の期の始めにおいて、ある与えられた確率で劣化する。目的は N 期間を通じて現れる客に M 個の製品を販売することによって得られる総期待報酬を最大にする最適な逐次販売政策を求めることである。

例えば、新鮮野菜、生魚、等の劣化する製品や最新式の電子装置を扱っている会社にその劣化する製品を注文する客を考えよう。各期に多くても 1 つの注文が来るように、単位期間の長さを適当に決定する。各期の終わりに売れ残った製品は、それが劣化するという性質により、次の期の始めにある割合で製品としての価値がなくなる。この割合を劣化確率とみなす。しかし、前段落で述べたモデルはまだこの例に適用できない。なぜなら、モデルにおける $R_i(n,\cdot)$は客の注文量に依存していないからである。もし、客の注文量が有限の場合に分類できるなら、報酬関数と出現確率を適切に決定することによって、j 番目の注文量を持つ i 番目の客を(i,j)タイプの客と解釈できる。この解釈によって前段落のモデルがこの例に適用できるようになる。また、電子装置を扱う会社の場合も、技術の速い進歩により売れ残った製品のある割合が無価値になるとみなせば、このモデルが適用できる。

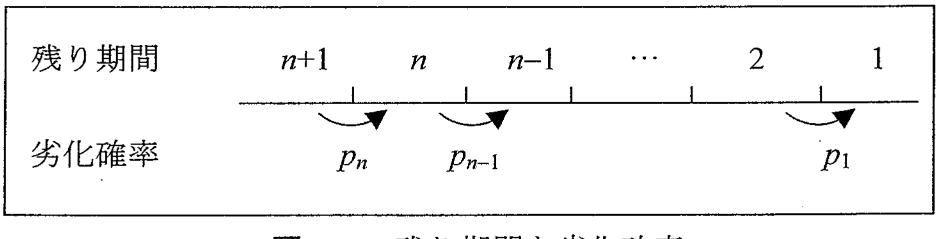


図 3-1. 残り期間と劣化確率

次のように記号を定義する：

$\mathbf{p}^n = (p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1)$ ：劣化確率ベクトル（図3-1参照）

$V_n(m;i,\mathbf{p}^{n-1}) =$ 残りが n 期間で、m 個の製品が手元にあり、タイプ i の客が現れており、劣化確率ベクトルが $\mathbf{p}^{n-1}$ で、最適政策を利用している時の最大総期待報酬

$\overline{V}_n(m,\mathbf{p}^n)$ = m 個の製品が手元にあり、最後の期からさかのぼって$(n+1)$番目の期の終わりにおいて、劣化確率ベクトルが $\mathbf{p}^n$ で、最適政策を利用している時の最大総期待報酬

これらの記号を利用して、最適性の原理より、次の再帰関係式が得られる。すなわち、残りが n 期間で、m 個の製品が手元にあり、タイプ i の客が現れており、劣化確率ベクトルが $\mathbf{p}^{n-1}$ で、j 個の製品をその客に売るならば、その期の報酬は $R_i(n,j)$であり、その結果の状態から得られる最大期待報酬は$\overline{V}_{n-1}(m-j,\mathbf{p}^{n-1})$である。ゆえに、再帰関係式(3-9)が得られる。最後の期から n 番目の期の始めに販売に利用可能な商品の個数はパラメータ m と $1-p_n$ を持つ二項分布に従うので、再帰関係式(3-10)が得られる：
$i=1,\ldots,I$、$n=1,\ldots,N$、$m=0,\ldots,M$ に対して、

$$V_n(m;i,\mathbf{p}^{n-1}) = \max_{j=0,\ldots,m} \left\{ R_i(n,j) + \overline{V}_{n-1}(m-j,\mathbf{p}^{n-1}) \right\} \tag{3-9}$$

$$\overline{V}_n(m,\mathbf{p}^n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p_n^{m-k} (1-p_n)^k \left\{ r_0(n)\overline{V}_{n-1}(k,\mathbf{p}^{n-1}) + \sum_{i=1}^{I} r_i(n) V_n(k;i,\mathbf{p}^{n-1}) \right\} \tag{3-10}$$

ただし、$\overline{V}_0(\cdot,\cdot) = \overline{V}(0,\cdot) = 0$ とする。

再帰関係式(3-9)と(3-10) を解けば、最適政策を求めることができる。

3-3-2 最適政策

再帰関係式(3-9)と(3-10) を繰返し解けば、最適政策を見つけることができるが、残念なことに、一般的にはこれらを陽に解くことができない。そこで最適政策のいくつかの性質を考察する。

第3-2節で示したように、再帰関係式(3-9)の右辺の中括弧の中を最大にする j の値はタイプ i の客に販売すべき最適な製品の個数である。最適政策を明確に決

定するために $k(n,m;i,\mathbf{p}^{n-1})$を(3-9)の右辺の中括弧の中を最大にする j の最小値と定義する。すなわち、

$$k(n,m;i,\mathbf{p}^{n-1}) = \min\left[t \mid \max_{j=0,\dots,m}\left\{R_i(n,j)+\overline{V}_{n-1}(m-j,\mathbf{p}^{n-1})\right\} = R_i(n,t)+\overline{V}_{n-1}(m-t,\mathbf{p}^{n-1})\right]$$

とすると、残りが n 期間で、m 個の製品が手元にあり、タイプ i の客が現れており、劣化確率ベクトルが $\mathbf{p}^{n-1}$ の時、$k(n,m;i,\mathbf{p}^{n-1})$個の製品を販売するのが最適である。

$\mathbf{p}^n=(0,\dots,0)$ ならば、このモデルは第3-2節で考察されたものとまったく同様である。まず、$\overline{V}_n(\cdot,\mathbf{p}^n)$ と $V_n(\cdot;i,\mathbf{p}^{n-1})$ の凹性を示す次の補題を示す。

補題 3-9.

$\overline{V}_n(m,\mathbf{p}^n)$ と $V_n(m;i,\mathbf{p}^{n-1})$ は m の凹関数である。

証明： 簡単な計算により次式を得る

$$\left(\overline{V}_n(m+1,\mathbf{p}^n)-\overline{V}_n(m,\mathbf{p}^n)\right)-\left(\overline{V}_n(m+2,\mathbf{p}^n)-\overline{V}_n(m+1,\mathbf{p}^n)\right)$$

$$=(1-p_n)^2\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}p_n^{m-k}(1-p_n)^k\left[\begin{array}{l} r_0(n)\left\{\begin{array}{l}\left(\overline{V}_{n-1}(k+1,\mathbf{p}^{n-1})-\overline{V}_{n-1}(k,\mathbf{p}^{n-1})\right)\\ -\left(\overline{V}_{n-1}(k+2,\mathbf{p}^{n-1})-\overline{V}_{n-1}(k+1,\mathbf{p}^{n-1})\right)\end{array}\right\}\\ +\sum_{i=1}^{I}r_i(n)\left\{\begin{array}{l}\left(V_n(k+1;i,\mathbf{p}^{n-1})-V_n(k;i,\mathbf{p}^{n-1})\right)\\ -\left(V_n(k+2;i,\mathbf{p}^{n-1})-V_n(k+1;i,\mathbf{p}^{n-1})\right)\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

$R_i(n,\cdot)$は非減少凹関数であるので、もし、$\overline{V}_{n-1}(\cdot,\mathbf{p}^n)$ が凹関数ならば、

$$V_n(m;i,\mathbf{p}^{n-1}) = \max_{j=0,\dots,m}\left\{R_i(n,j)+\overline{V}_{n-1}(m-j,\mathbf{p}^{n-1})\right\}$$

は m の凹関数となることに注意する。これらの事柄と $V_1(m;i)=R_i(1,m)$ の凹性に注意すれば、帰納法により、補題が成立する。 （証明終わり）

次の定理は客に販売すべき最適な製品の個数が手持ちの製品の個数の非減少関数であることを示している。この結果は多くの製品が手元にあればより多く売るべきである、というわれわれの直感と一致している。

定理 3-8.
n=1,…,N、m=0,…,M、i=1,…,I と任意の $\mathbf{p}^{n-1}$ に対して

$$k(n,m;i,\mathbf{p}^{n-1}) \le k(n,m+1;i,\mathbf{p}^{n-1}) \le k(n,m;i,\mathbf{p}^{n-1})+1$$

である。

$R_i(n,\cdot)$ と $\bar{V}_{n-1}(\cdot,\mathbf{p}^n)$ の凹性より、この定理は[2]の補題 2 と定理 3 と同様に証明される。

販売すべき最適な製品の個数は劣化確率が増加すれば減少しない、すなわち、

$$\mathbf{p}^{n-1} = (p_{n-1},\dots,p_1) \ge \mathbf{q}^{n-1} = (q_{n-1},\dots,q_1) \text{ ならば } k(n,m;i,\mathbf{p}^{n-1}) \ge k(n,m;i,\mathbf{q}^{n-1})$$

と推測するかもしれない。しかしこの推測は以下の(b)項の数値例で示されるように必ずしも真ではない。われわれはこの推測が成り立つための 1 つの十分条件を提出する。そのためにはまず、次の補題が必要である。

補題 3-10.
i=1,…,I とある A_n≥0 に対して、

$$\bar{V}_{n-1}(m,\mathbf{q}^{n-1}) - \bar{V}_{n-1}(m-1,\mathbf{q}^{n-1}) \ge \frac{1-p_n}{1-q_n} A_n \bar{V}_{n-1}(1,\mathbf{p}^{n-1}) \quad \text{かつ}$$

$$R_i(n,m) - R_i(n,m-1) \ge \frac{1-p_n}{1-q_n} A_n R_i(n,1) \quad \text{ならば、}$$

$$\bar{V}_n(m,\mathbf{q}^n) - \bar{V}_n(m-1,\mathbf{q}^n) \ge A_n \bar{V}_n(1,\mathbf{p}^n) \quad \text{である。}$$

ただし、$\mathbf{p}^n = (p_n,\dots,p_1), \mathbf{q}^n = (q_n,\dots,q_1), \mathbf{p}^{n-1} = (p_{n-1},\dots,p_1), \mathbf{q}^{n-1} = (q_{n-1},\dots,q_1)$ である。

証明： この補題の仮定と $\bar{V}_{n-1}(\cdot,\mathbf{q}^{n-1})$ の凹性より、k=0,…,m−1 に対して、

$\bar{V}_{n-1}(k+1,\mathbf{q}^{n-1}) - \bar{V}_{n-1}(k,\mathbf{q}^{n-1}) \ge \dfrac{1-p_n}{1-q_n} A_n \bar{V}_{n-1}(1,\mathbf{p}^{n-1})$ であることに注意する。また、

j_0=$k(n,m-1;i,\mathbf{q}^{n-1})$ とおけば、k=0,…,m−1 に対して、

$$
\begin{aligned}
&V_n(k+1;i,\mathbf{q}^{n-1})-V_n(k;i,\mathbf{q}^{n-1}) \ge V_n(m;i,\mathbf{q}^{n-1})-V_n(m-1;i,\mathbf{q}^{n-1})\\
&=\max\left\{R_i(n,j_0+1)-R_i(n,j_0),\overline{V}_{n-1}(m-j_0,\mathbf{q}^{n-1})-\overline{V}_{n-1}(m-1-j_0,\mathbf{q}^{n-1})\right\}\\
&\ge \frac{1-p_n}{1-q_n}A_n\max\left\{R_i(n,1),\overline{V}_{n-1}(1,\mathbf{p}^{n-1})\right\}
\end{aligned}
$$

となる。ただし、等号は定理3-8による。ゆえに、

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_n(m,\mathbf{q}^n)-\overline{V}_n(m-1,\mathbf{q}^n) &= (1-q_n)\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}q_n^{m-1-k}(1-q_n)^k \times\\
&\qquad \left[\begin{aligned}&r_0(n)\left(\overline{V}_{n-1}(k+1,\mathbf{q}^{n-1})-\overline{V}_{n-1}(k,\mathbf{q}^{n-1})\right)\\ &+\sum_{i=1}^{I}r_i(n)\left(V_n(k+1;i,\mathbf{q}^{n-1})-V_n(k;i,\mathbf{q}^{n-1})\right)\end{aligned}\right]\\
&\ge (1-p_n)A_n\left[\begin{aligned}&r_0(n)\overline{V}_{n-1}(1,\mathbf{p}^{n-1})\\ &+\sum_{i=1}^{I}r_i(n)\max\left\{R_i(n,1),\overline{V}_{n-1}(1,\mathbf{p}^{n-1})\right\}\end{aligned}\right]\\
&\ge A_n\overline{V}_n(1,\mathbf{p}^n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

補題3-10を用いると、次の定理が証明される。

定理 3-9.

i=1,…,I と s=1,…,n−1 に対して、$\dfrac{R_i(s,m)-R_i(s,m-1)}{R_i(s,1)} \ge \prod_{t=s}^{n-1}\dfrac{1-p_t}{1-q_t}$ ならば、j=1,…,m と i=1,…,I に対して、$k(n,j:i,\mathbf{p}^{n-1}) \ge k(n,j:i,\mathbf{q}^{n-1})$ である。ただし、$\mathbf{p}^{n-1}=\left(p_{n-1},\ldots,p_1\right),\mathbf{q}^{n-1}=\left(q_{n-1},\ldots,q_1\right)$ である。

証明：　次の不等式(3-11)を示せば、

$$k(n,j:i,\mathbf{p}^{n-1}) \ge k(n,j:i,\mathbf{q}^{n-1})$$

を証明したことになる。k=0,…,j−1 に対して、

$$\overline{V}_{n-1}(k+1,\mathbf{q}^{n-1})-\overline{V}_{n-1}(k,\mathbf{q}^{n-1}) \ge \overline{V}_{n-1}(k+1,\mathbf{p}^{n-1})-\overline{V}_{n-1}(k,\mathbf{p}^{n-1}) \tag{3-11}$$

が成立する。何故ならば、(3-11)により、$j_0 = k(n, j; i, \mathbf{q}^{n-1})$ とおくと、$k = 0, \ldots, j_0 - 1$ に対して、

$$\left(R_i(n, j_0) + \bar{V}_{n-1}(j - j_0, \mathbf{p}^{n-1})\right) - \left(R_i(n, k) + \bar{V}_{n-1}(j - k, \mathbf{p}^{n-1})\right)$$
$$\geq \left(R_i(n, j_0) + \bar{V}_{n-1}(j - j_0, \mathbf{q}^{n-1})\right) - \left(R_i(n, k) + \bar{V}_{n-1}(j - k, \mathbf{q}^{n-1})\right) > 0$$

となるからである。さて、$\bar{V}_{n-1}(\cdot, \mathbf{p}^{n-1})$ と $\bar{V}_{n-1}(\cdot, \mathbf{q}^{n-1})$ の凹性により

$$\bar{V}_{n-1}(j, \mathbf{q}^{n-1}) - \bar{V}_{n-1}(j-1, \mathbf{q}^{n-1}) \geq \bar{V}_{n-1}(1, \mathbf{p}^{n-1}) \tag{3-12}$$

は(3-11)を意味する。従って、$j=m$ に対する不等式(3-12)を証明すればよい。しかし、この不等式は定理の仮定、$i=1,\ldots,I$ と $s=1,\ldots,n-1$ に対して、$\dfrac{R_i(s, m) - R_i(s, m-1)}{R_i(s,1)} \geq \prod_{t=s}^{n-1} \dfrac{1-p_t}{1-q_t}$ に注意すれば、補題3-10より得られる。

(証明終わり)

$R_i(n,\cdot)$は凹関数であるので、$\dfrac{R_i(n, m) - R_i(n, m-1)}{R_i(n,1)}$ は 1 以下であり、m の非増加関数である。

定理3-9の仮定が満たされる場合としては、$i=1,\ldots,I$、$s=1,\ldots,n$ に対して、$R_i(s,\cdot)$ が線形で、$\mathbf{p}^{n-1} \geq \mathbf{q}^{n-1}$ が考えられる。

系

$n=1,\ldots,N$、$m=0,\ldots,M$、$i=1,\ldots,I$ に対して、$R_i(n,m)=R_i(m)f(n)$ となるような、$R_i(m)$ と $f(n)>0$ が存在し、$\dfrac{R_i(m) - R_i(m-1)}{R_i(1)} \geq \dfrac{1-p_{n-1}}{1-q_{n-1}}$ であるならば、$j=1,\ldots,m$ と $i=1,\ldots,I$ に対して、$k(n, j : i, \mathbf{p}^{n-1}) \geq k(n, j : i, \mathbf{q}^{n-1})$ となる。

ただし、$\mathbf{p}^{n-1} = \left(p_{n-1}, \ldots, p_1\right), \mathbf{q}^{n-1} = \left(q_{n-1}, \ldots, q_1\right), \mathbf{p}^{n-1} \geq \mathbf{q}^{n-1}$ である。

上の系において $R_i(m)-R_i(m-1)$は限界報酬、$1-p_{n-1}$ は劣化しない割合とみなせるので、限界報酬の減少率が劣化しない割合の減少率以上ならば販売すべき最適な製品の個数の劣化率に関する単調性が成り立つことが分かる。

第3-3-1項で述べた例において、$n=1,\ldots,N-1$、$m=0,\ldots,M$、$i=1,\ldots,I$ に対して、$R_i(n,m)=\alpha_n R_i(n+1,m)$ ($0<\alpha_n\leq 1$) であれば、この系の最初の仮定は満たされる。

以下では 3 つの簡単な例をあげる。最初の例は $R_i(n,\cdot)$が線形の場合で、他は

数値例である。

(a) $R_i(n,\cdot)$が線形の場合

$i=1,\ldots,I, n=1,\ldots,N$ に対して、$R_i(n,j)=a(i,n)j, 0<a(1,n)\le\cdots\le a(I,n)$ と仮定する。この場合には最適政策が陽に導出され、しかも、簡単な形となる事を以下に示す。

$n=1,\ldots,N-1$ に対して、$g^{(n)}(z)=r_0(n)z+\sum_{i=1}^{I}r_i(n)\max\{z,a(i,n)\}$、$g_0=0$、

$g_n(\mathbf{p}^n)=(1-p_n)g^{(n)}\left(g_{n-1}(\mathbf{p}^{n-1})\right)$、$i^*(n,\mathbf{p}^{n-1})=\min\left\{i\mid a(i,n)>g_{n-1}(\mathbf{p}^{n-1})\right\}$ と定義する。

ただし、$\mathbf{p}^n=\left(p_n,\ldots,p_1\right)$ である。この時、総期待報酬と最適政策は次のようになる：

$$\bar{V}_n(m,\mathbf{p}^n)=g_n(\mathbf{p}^n)m$$

$$k(n,m;i,\mathbf{p}^{n-1})=\begin{cases} m & \left(i\ge i^*(n,\mathbf{p}^{n-1})\right) \\ 0 & \left(i<i^*(n,\mathbf{p}^{n-1})\right) \end{cases}$$

次に、最適政策のいくつかの性質を調べてみる。定理3-9から $\mathbf{p}^{n-1}\ge\mathbf{q}^{n-1}$ ならば、$k(n,m:i,\mathbf{p}^{n-1})\ge k(n,m:i,\mathbf{q}^{n-1})$ である。ただし、$\mathbf{p}^{n-1}=\left(p_{n-1},\ldots,p_1\right),\mathbf{q}^{n-1}=\left(q_{n-1},\ldots,q_1\right)$ である。

さらに、$a(i,n)=a(i)f(n)\left(0<f(1)\le\cdots\le f(N)\right)$、$\dfrac{1-p_1}{f(2)}\le\dfrac{1-p_2}{f(3)}\le\cdots\le\dfrac{1-p_{N-1}}{f(N)}$、かつ、$k$=1,…,$I$ に対して、$\sum_{i=k}^{I}r_i(1)\le\sum_{i=k}^{I}r_i(2)\le\cdots\le\sum_{i=k}^{I}r_i(N-1)$ ならば、次の段落で示すように $i^*(1)\le i^*(2,\mathbf{p}^1)\le\cdots\le i^*(N,\mathbf{p}^{N-1})$ である。製品の価値は時間の経過と共に変化する。値$(1-p_{n-1})/f(n)$は次の期の始めにおける、個数ではなく価値で測った利用可能な製品の割合とみなすことができる。それゆえ上記の仮定は次のことを意味する：

残り期間の長さが短くなるにつれて、次の期の始めにおける個数ではなく価値で測った利用可能な製品の割合が小さくなり、意思決定者がより望ましい客に会うことが確率的に困難になる。この仮定のもとで、残り期間の長さに関する、客への最適販売個数の単調性が成り立つ。しかし、この単調性は以下の(c)項の

数値例で示されるようにいつも成り立つわけではない。

さて、前段落で利用した次の事を証明する：

$a(i,n)=a(i)f(n)$ $(0<f(1)\le\cdots\le f(N))$、$\dfrac{1-p_1}{f(2)}\le\dfrac{1-p_2}{f(3)}\le\cdots\le\dfrac{1-p_{N-1}}{f(N)}$、かつ、$k=1,\dots,I$ に対して、$\sum_{i=k}^{I} r_i(1)\le\sum_{i=k}^{I} r_i(2)\le\cdots\le\sum_{i=k}^{I} r_i(N-1)$ ならば、$i^*(1)\le i^*(2,\mathbf{p}^1)\le\cdots\le i^*(N,\mathbf{p}^{N-1})$である。

証明：　次の不等式を示せばよい。

$$0=\frac{g_0}{f(1)}\le\frac{g_1(\mathbf{p}^1)}{f(2)}\le\cdots\le\frac{g_{N-1}(\mathbf{p}^{N-1})}{f(N)} \tag{3-13}$$

(3-13)を示すために次の補題が必要である。

補題 3-11.

$0<a(1)\le\cdots\le a(N)$、$0<f(1)\le\cdots\le f(N)$、かつ、$k=1,\dots,I$ に対して、$\sum_{i=k}^{I} r_i(1)\le\sum_{i=k}^{I} r_i(2)\le\cdots\le\sum_{i=k}^{I} r_i(N-1)$ ならば、任意の z に対して、$g^{(1)}(z)\le g^{(2)}(z)\le\cdots\le g^{(N-1)}(z)$である。

補題 **3-11** の証明：　$b(1,n)=\max\{0,a(1)f(n)-z\}\ge 0$、$j=2,\dots,I$ に対して、$b(j,n)=\max\{0,a(j)f(n)-z\}-\max\{0,a(j-1)f(n)-z\}\ge 0$ とおく。従って、

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(z)&=r_0(n)z+\sum_{i=1}^{I} r_i(n)\max\{z,a(i)f(n)\}\\
&=z+\sum_{i=1}^{I} r_i(n)\max\{0,a(i)f(n)-z\}\\
&\ge z+\sum_{i=1}^{I} r_i(n)\max\{0,a(i)f(n-1)-z\}\\
&=z+\sum_{i=1}^{I} r_i(n)\sum_{j=1}^{i} b(j,n-1)\\
&=z+\sum_{j=1}^{I} b(j,n-1)\sum_{i=j}^{I} r_i(n)\\
&\ge z+\sum_{j=1}^{I} b(j,n-1)\sum_{i=j}^{I} r_i(n-1)\\
&=z+\sum_{i=1}^{I} r_i(n-1)\max\{0,a(i)f(n-1)-z\}=g^{(n-1)}(z)
\end{aligned}$$

である。 （補題3-11の証明終わり）

(3-13)を帰納法で証明する。 $0=\dfrac{g_0}{f(1)}\le\dfrac{g_1(\mathbf{p}^1)}{f(2)}$ は明らかに成立する。

$$\frac{g_{n-1}(\mathbf{p}^{n-1})}{f(n)}\le\frac{g_n(\mathbf{p}^n)}{f(n+1)} \tag{3-14}$$

と仮定する。この時、

$$\begin{aligned}\frac{g_{n+1}(\mathbf{p}^{n+1})}{f(n+2)}&=(1-p_{n+1})\frac{g^{(n+1)}\left(g_n(\mathbf{p}^n)\right)}{f(n+2)}\\&\ge(1-p_n)\frac{g^{(n+1)}\left(g_n(\mathbf{p}^n)\right)}{f(n+1)}\qquad\left(\because\frac{1-p_{n+1}}{f(n+2)}\ge\frac{1-p_n}{f(n+1)}\right)\\&\ge(1-p_n)\frac{g^{(n+1)}\left(g_{n-1}(\mathbf{p}^{n-1})\right)}{f(n+1)}\\&\ge(1-p_n)\frac{g^{(n)}\left(g_{n-1}(\mathbf{p}^{n-1})\right)}{f(n+1)}=\frac{g_n(\mathbf{p}^n)}{f(n+1)}\end{aligned}$$

となる。ここで、2 番目の不等式は帰納法の仮定(3-14)より $g_{n-1}(\mathbf{p}^{n-1})\le\dfrac{f(n)}{f(n+1)}g_n(\mathbf{p}^n)\le g_n(\mathbf{p}^n)$ と $g^{(n+1)}(\cdot)$の単調性から得られ、3 番目の不等式は補題3-11により得られる。 （証明終わり）

(b) 数値例 I

I=3、(r_0,r_1,r_2,r_3)=(0.01,0.49,0.3,0.2)と仮定する。また、$R_i(n,j)$を（n には依存しない）表3-3のように定義する。この時、$k(2,4:2,(0.2))=2>k(2,4;2,(0.35))=1$ であり、$k(2,4;3,(0.2))=2>$ $k(2,4;3,(0.35))=1$ となることが示される。これは最適販売個数が

表 3-3. 期待報酬関数 $R_i(n,j)$

i \ j	0	1	2	3	4
1	0	100	100.4	100.7	100.9
2	0	120	128	128.4	128.6
3	0	150	160	165	165.3

必ずしも劣化率の単調関数ではないことを示している。

(c) 数値例 II

I=3、(r_0,r_1,r_2,r_3)=(0.2,0.3,0.3,0.2)、$R_1(n,j)=j$、$R_2(n,j)=2j$、$R_3(n,j)=4j$ と仮定する。この時、$i^*(1)=1$、$i^*(2,(0.2))=2$、$i^*(3,(0.2,0.2))=2$、$i^*(4,(0.99,0.2,0.2))=1$、$i^*(5,(0.2,0.99,0.2,0.2))=2$、すなわち、
$k(5,m;1,(0.2,0.99,0.2,0.2))=0<k(4,m;1,(0.99,0.2,0.2))=m>k(3,m;1,(0.2,0.2))=0$
$=k(2,m;1,(0.2))<k(1,m;1)=m$ となる。これは最適販売個数が必ずしも残り期間の長さの単調関数ではないことを示している。

3-4 資源の補給が可能な逐次資源配分

3-4-1 定式化

意思決定者は最大で M 個の資源を持ち運ぶことができるとする。各期の始めに彼はまず資源を補給するか否かを決定しなければならない。もし、補給するならば、次の期の始めに M 個（最大レベル）の資源を保持することになる。もし、補給しないならば、その期の中頃に目標物の出現を待ち、出現した場合は手持ちの資源の中から何個かを利用する(図3-2参照)。目標物はI種類からなる。各期の中頃に、確率 $r_i(>0)$ $(i=1,\ldots,I)$ でタイプ i の目標物が現れ、確率 r_0 でどの目標物も現れない $(r_0+\cdots+r_I=1)$。タイプ i の目標物に j 個の資源を配分すると、その期に $R_i(j)$の報酬を得る。ここで、$R_i(j)$は j の非減少凹関数で $\max_{i=1,\ldots,I} R_i(1)>0$ かつ $R_i(0)=0$ と仮定する。目的は、意思決定者が計画期間を通じて高々S 回だけ最大レベル M まで資源を供給できる時、N 期間を通じて出現する目標物に手持ち資源を配分することによって得られる総期待報酬を最大にする最適政策を求めることである。

例えば、第3-2節のように捕鯨船が何本かの銛を持って鯨を捕獲するために航海すると仮定する。鯨は毎日高々1 頭ずつある確率で現れ、その大きさ等によって有限個のタイプに分類される。捕鯨船はその日に捕鯨できないというコストを払って母船から銛を最大レベルまで補給できる。前段落で述べたモデルはこ

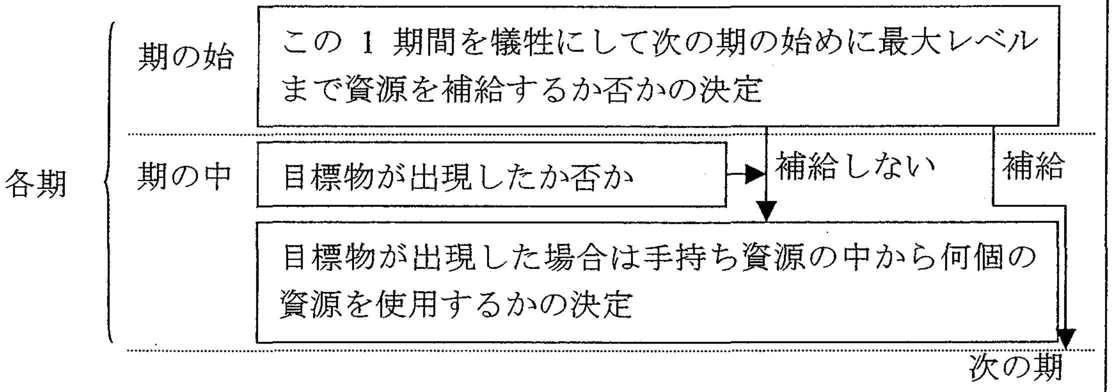


図 3-2. 各期における意思決定の方法

の状況に適用できる。

われわれのモデルを解析するために、次のような記号を導入する：

$V_n^{(s)}(m;i)$ = 残りが n 期間で、この期の中頃に m 個の資源が手元にあり、タイプ i の目標物が現れており、意思決定者が高々 s 回資源を補給することができ、最適政策を利用している時の最大総期待報酬（n=1,…,N、m=0,…,M、i=1,…,I、s=0,…,S）

$\overline{V}_n^{(s)}(m)$ = 残りが n 期間で、この期の初めに m 個の資源が手元にあり、意思決定者が高々 s 回資源を補給することができ、最適政策を利用している時の最大総期待報酬（n=1,…,N、m=0,…,M、s=0,…,S）

最適性の原理より次の再帰関係式を得る：
n=1,…,N、m=0,…,M、i=1,…,I、s=0,…,S に対して、

$$V_n^{(s)}(m;i) = \max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j) + \overline{V}_{n-1}^{(s)}(m-j)\right\} \tag{3-15}$$

$$\overline{V}_n^{(0)}(m) = r_0\overline{V}_{n-1}^{(0)}(m) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_n^{(0)}(m;i) \tag{3-16}$$

$$\overline{V}_n^{(s)}(m) = \max\left\{\overline{V}_{n-1}^{(s-1)}(M), r_0\overline{V}_{n-1}^{(s)}(m) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_n^{(s)}(m;i)\right\} \quad (s>0) \tag{3-17}$$

ただし、$\overline{V}_0^{(\cdot)}(\cdot) = 0$ である。

残りが n 期間で、その期の中頃に m 個の資源が手元にあり、タイプ i の目標物に出会っており、意思決定者は高々 s 回資源を補給することができ、j 個の資源を利用すると、この期の期待報酬は $R_i(j)$で、結果として起こる状態からの最大期待報酬が $\overline{V}_{n-1}^{(s)}(m-j)$ となる。ゆえに、再帰関係式(3-15)が得られる。再帰関係式(3-17)は次のようにして得られる：
意思決定者がその期を犠牲にして最大レベルまで資源を補給すれば、以降の最大総期待報酬は $\overline{V}_{n-1}^{(s-1)}(M)$ となり、一方、資源を補給しなければ、タイプ i の目標物が確率 r_i（i=1,…,I）で現れ、確率 r_0 で何も現れない。従って、再帰関係式(3-17)が得られる。s=0 の時は資源を供給することができないので、再帰関係式(3-16)のようになる。

3-4-2 最適政策

再帰関係式(3-15)、(3-16)、(3-17)を繰返し解けば最適政策を得ることができるが、残念なことにこれらを陽に解くことは困難である。そこで最適政策のいくつかの性質を考察する。

再帰関係式(3-15)と(3-17)の右辺の最大値を与える項に対応する決定は（複数個あればそのどれもが）期待報酬を最大にする最適な決定である。最適政策を一意に決めるために、$m_n^{(s)}$ と $k^{(s)}(n,m;i)$ を次のように定義する：

$$m_n^{(s)} = \max\left\{ m \mid m = 0,\ldots,M, \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M) > r_0 \bar{V}_{n-1}^{(s)}(m) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_n^{(s)}(m;i) \right\} \tag{3-18}$$

$$\left(n = 2,\ldots,N, s = 1,\ldots,S\right)$$

$$k^{(s)}(n,m;i) = \min\left\{ t \mid R_i(t) + \bar{V}_{n-1}^{(s)}(m-t) = V_n^{(s)}(m;i) \right\} \tag{3-19}$$

$$\left(n = 1,\ldots,N, m = 0,\ldots,M, i = 1,\ldots,I, s = 0,\ldots,S\right)$$

まず、意思決定者が何時資源を補給すべきかを考察する。そのために次の補題が必要である。

補題 3-12.

$V_n^{(s)}(m;i)$ と $\bar{V}_n^{(s)}(m)$ は、各 n、s、i に対して非負な m の非減少凹関数であり、各 n、m、i に対して s の非減少関数であり、各 m、s、i に対して n の有界な非減少関数である。

$R_i(\cdot)$を非負な非減少凹関数と仮定しているので、この補題は n に関する帰納法で簡単に証明される。この補題を利用して次の $m_n^{(s)}$ の性質が得られる。

性質 3-1.

次の(i)、(ii)、(iii)が成立する：

(i)
$$\bar{V}_n^{(s)}(m) = \begin{cases} \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M) & \left(m \le m_n^{(s)}\right) \\ r_0 \bar{V}_{n-1}^{(s)}(m) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_n^{(s)}(m;i) & \left(m > m_n^{(s)}\right) \end{cases}$$

$$\left(n = 2,\ldots,N, m = 0,\ldots,M, s = 1,\ldots,S\right)$$

(ii) $\quad 0 \le m_n^{(s)} < M\left(n = 2,\ldots,N, s = 1,\ldots,S\right)$

(iii) $m_n^{(s)} \to 0 \ (n \to \infty) \ (s = 1, \ldots, S)$

証明： (i) 再帰関係式(3-17)、補題3-12、$m_n^{(s)}$ の定義より明らかである。

(ii) 次の不等式(3-20)と(3-21)を証明すれば十分である：

$$\left(r_0 \bar{V}_{n-1}^{(s)}(0) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_n^{(s)}(0;i) = \right) \bar{V}_{n-1}^{(s)}(0) < \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M) \ (s = 1, \ldots, S, n = 2, \ldots, N) \quad (3\text{-}20)$$

$$r_0 \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_n^{(s)}(M;i) \geq \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M) \ (s = 1, \ldots, S, n = 2, \ldots, N) \quad (3\text{-}21)$$

最初に(3-21)を示す。再帰関係式(3-15)により $V_n^{(s)}(M;i) \geq \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M)$ であり、補題3-12により $\bar{V}_{n-1}^{(s)}(M) \geq \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M)$ であるので、(3-21)が成立する。すなわち、$m_n^{(s)} < M$ を証明した。

次に(3-20)を n に関する帰納法で示す前に、まず、n=1,…,N、s=0,…,S に対して $\bar{V}_{n-1}^{(s)}(M) < \bar{V}_n^{(s)}(M)$ であることを示す。補題3-12より $\bar{V}_n^{(s)}(M)$ の n に関する非減少性は明らかであるが、厳密な増加性はそれほど自明ではない。まず、s>0 なら（前段落で証明したように）$m_n^{(s)} < M$ より、s=0 なら定義より

$$\bar{V}_n^{(s)}(M) = r_0 \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i \max \left[\bar{V}_{n-1}^{(s)}(M), \max_{j=1,\ldots,M} \left\{ R_i(j) + \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M-j) \right\} \right]$$

が成り立つ。従って、次の関係が成り立つ：

$$\bar{V}_n^{(s)}(M) - \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M) = \sum_{i=1}^{I} r_i \max \left[0, \max_{j=1,\ldots,M} \left\{ R_i(j) + \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M-j) \right\} - \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M) \right]$$

この関係に注意すると、次の不等式を証明すれば十分である：
n=1,…,N、s=0,…,S に対して

$$\max_{i=1,\ldots,I} \left\{ \max_{j=1,\ldots,M} \left\{ R_i(j) + \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M-j) \right\} \right\} > \bar{V}_{n-1}^{(s)}(M) \quad (3\text{-}22)$$

(3-22)を n に関する帰納法で証明する。n=1 の時(3-22)は仮定 $\max_{i=1,\ldots,I} R_i(1) > 0$ より成立する。n=k の時(3-22)が成立すると仮定する。その時、

$$\bar{V}_k^{(s)}(M) = r_0 \bar{V}_{k-1}^{(s)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i \max\left\{\bar{V}_{k-1}^{(s)}(M), \max_{j=1,\ldots,M}\left\{R_i(j) + \bar{V}_{k-1}^{(s)}(M-j)\right\}\right\}$$

$$< \max_{i=1,\ldots,I}\left\{\max_{j=1,\ldots,M}\left\{R_i(j) + \bar{V}_{k-1}^{(s)}(M-j)\right\}\right\}$$

$$\le \max_{i=1,\ldots,I}\left\{\max_{j=1,\ldots,M}\left\{R_i(j) + \bar{V}_k^{(s)}(M-j)\right\}\right\}$$

である。ここで、最後から 2 つ目の不等式は帰納法の仮定より成立する。最後の不等式は $\bar{V}^{(s)}(M-j)$ の非減少性より成り立つ。これは(3-22)が n=k+1 の時に成立することを示している。

さて、(3-20)を n に関する帰納法で示す。n=2 の時は、左辺 $=\bar{V}_1^{(s)}(0) = \max\left\{\bar{V}_0^{(s)}(0), \bar{V}_0^{(s-1)}(M)\right\} = 0$、右辺$=\bar{V}_1^{(s-1)}(M) > \bar{V}_0^{(s-1)}(M) = 0$ より、(3-20)は成立する。

n=k の時に(3-20)が成立すると仮定する。

$\bar{V}_k^{(s)}(0) = \max\left\{\bar{V}_{k-1}^{(s)}(0), \bar{V}_{k-1}^{(s-1)}(M)\right\} = \bar{V}_{k-1}^{(s-1)}(M) < \bar{V}_k^{(s-1)}(M)$ である事より (3-20) は n=k+1 の時も成立する。

(iii) 補題3-12により、$n \to \infty$ の時、s=1,…,S に対して、$\bar{V}_n^{(s)}(m), V_{n+1}^{(s)}(m;i), \bar{V}_n^{(s-1)}(M)$ はある有限な値に収束する。従って、m=1,…,M、s=1,…,S に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(r_0 \bar{V}_n^{(s)}(m) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_{n+1}^{(s)}(m;i)\right) - \bar{V}_n^{(s-1)}(M)\right]$$

$$\ge \lim_{n\to\infty}\left[\left(r_0 \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i\left(R_i(m) + \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M)\right)\right) - \bar{V}_n^{(s-1)}(M)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{I} r_i R_i(m) + \bar{V}_{n-1}^{(s-1)}(M) - \bar{V}_n^{(s-1)}(M)\right]$$

$$\ge \sum_{i=1}^{I} r_i R_i(1) > 0$$

となる。これは $m_n^{(s)} \to 0\,(n \to \infty)\ (s = 1,\ldots,S)$ を意味している。（証明終わり）

性質3-1は次のことを言っている：

残りが n 期間で、その期の初めに意思決定者が高々 s 回補給できる時、手持ち資源の個数が臨界値 $m_n^{(s)}$ 以下であるか否かによって補給するかしないかを決めるのが最適である。さらに手持ち資源が残っていない場合は補給すべきであり、最大レベルまで持っている場合は補給すべきではない。残り期間が十分あり、手持ち資源が少なくとも 1 個あれば補給すべきではない。これらのことはわれわれの直感と一致する。

次に $m_n^{(1)}$ の n に関する性質をさらに考察する。

性質 3-2.
ある m^* と k に対して、$m_{k-1}^{(1)} \geq m^* > m_k^{(1)}$ ならば、$h=k,\ldots,N$ に対して $m_h^{(1)} < m^*$ である。

証明： $\bar{V}^{(0)}(\cdot)$ と[4]の $\bar{V}(\cdot)$ が一致するので、[4]の補題 7 より、$j=0,\ldots,M$ に対して、

$$\bar{V}_{k-2}^{(0)}(M-j) - \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M-j) \geq \bar{V}_{k-2}^{(0)}(M) - \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M) \tag{3-23}$$

が成立する。$j_0=k^{(0)}(h-1,M;i)$ とおくと、不等式(3-23)より

$$\begin{aligned}
&\left(\bar{V}_{h-2}^{(0)}(M) - V_{h-1}^{(0)}(M:i)\right) - \left(\bar{V}_{k-2}^{(0)}(M) - V_{k-1}^{(0)}(M:i)\right) \\
&\geq \left(\bar{V}_{k-2}^{(0)}(M-j_0) - \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M-j_0)\right) - \left(\bar{V}_{k-2}^{(0)}(M) - \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M)\right) \geq 0
\end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned}
&\left(r_0 \bar{V}_{h-1}^{(1)}(m^*) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_h^{(1)}(m^*;i)\right) - \bar{V}_{h-1}^{(0)}(M) \\
&\geq r_0 \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i \left(R_i(m^*) + \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M)\right) - \bar{V}_{h-1}^{(0)}(M) \\
&= \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i R_i(m^*) - \left(r_0 \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_{h-1}^{(0)}(M;i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{I} r_i \left(R_i(m^*) + \bar{V}_{h-2}^{(0)}(M) - V_{h-1}^{(0)}(M;i)\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{I} r_i \left(R_i(m^*) + \bar{V}_{k-2}^{(0)}(M) - V_{k-1}^{(0)}(M;i)\right) \\
&= \left(r_0 \bar{V}_{k-1}^{(1)}(m^*) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_k^{(1)}(m^*;i)\right) - \bar{V}_{k-1}^{(0)}(M) > 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、最後の不等式は$m^* > m_k^{(1)}$である事より成り立ち、最後の等式は$m^* \le m_{k-1}^{(1)}$と$k^{(1)}(k,m^*;i)= m^*$（性質3-3を参照）と

$$\overline{V}_{k-1}^{(0)}(M) = r_0\overline{V}_{k-2}^{(0)}(M) + \sum_{i=1}^{I} r_i V_{k-1}^{(0)}(M;i)$$

$$V_k^{(1)}(m^*;i) = R_i(m^*) + \overline{V}_{k-2}^{(0)}(M)$$

$$\overline{V}_{k-1}^{(1)}(m^*) = \overline{V}_{k-2}^{(0)}(M)$$

により成立する。これは$m_n^{(1)} < m^*$を意味している。　　　　　　　（証明終わり）

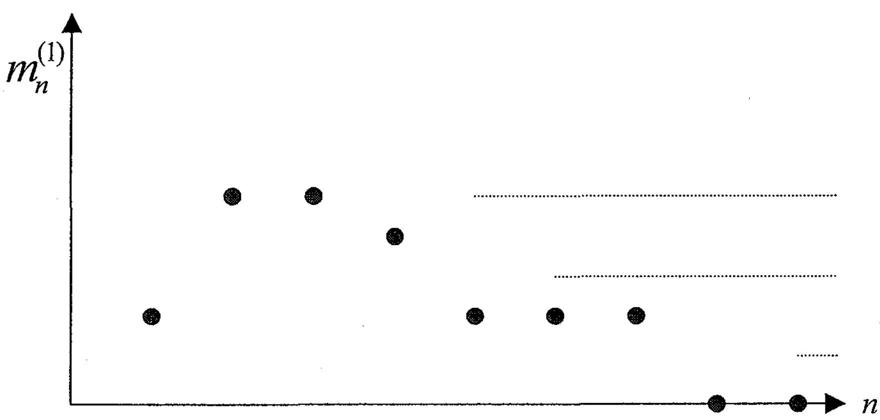


図 3-3. $m_n^{(1)}$のグラフの概略

$m^* = m_k^{(1)} + 1$とおくことにより、性質3-2は次のことを示している：
n の関数として、$m_n^{(1)}$が真に減少すれば、それ以後も減少する。$m_n^{(1)}$のグラフの概略を図3-3に例示する。

今から(3-19)で定義された $k^{(s)}(n,m;i)$のいくつかの性質について手短に述べる。この記号を使えば、残りが n 期間で、その期の中頃にタイプ i の目標物が現れていて、m 個の資源が手元にあり、意思決定者がまだ s 回資源の補給が可能な時、$k^{(s)}(n,m;i)$個の資源を利用するのは最適である。s=0 の場合は、第3-2節で述べたように、$k^{(0)}(n,m;i)\le k^{(0)}(n,m+1;i)\le k^{(0)}(n,m;i)+1$、　$k^{(0)}(n,m;i)\ge k^{(0)}(n+1,m;i)$が成立する。$s$>0 の場合にはこれらの関係は必ずしも成立しない（次項の数値例を参照)。しかしながら次の性質は成り立つ。

性質 3-3.
次の(i)、(ii)、(iii)が成立する：
(i)　　n=1,…,N、m=0,…,M−1、i=1,…,I、s=1,…,S に対して
　$k^{(s)}(n,m+1;i) \le k^{(s)}(n,m;i)+1$ である。
(ii)　　n=1,2、m=0,…,M−1、i=1,…,I、s=1,…,S に対して
　$k^{(s)}(n,m;i) \le k^{(s)}(n,m+1;i)$ である。
(iii)　　n=3,…,N、m=0,…,M−1、i=1,…,I、s=1,…,S に対して

$$k^{(s)}(n,m;i)\begin{cases} = m & \left(m < m_n^{(s)*}(i)\right) \\ < m & \left(m \ge m_n^{(s)*}(i)\right) \end{cases}$$ である。

　ここで、$m_n^{(s)*}(i)$ は $m_{n-1}^{(s)}$ 以上のある整数である。

証明：　(i)と(ii)は $R_i(\cdot)$ と $\overline{V}_1^{(s)}(\cdot)$ が凹関数なので、[2]の命題 2、定理 3 (ii)と同様に証明できる。(iii)を証明する。$m \le m_{n-1}^{(s)}$ の時、$\overline{V}_{n-1}^{(s)}(m) = \overline{V}_{n-2}^{(s-1)}(M)$ であるので、

$$\begin{aligned} V_n^{(s)}(m;i) &= \max_{j=0,\dots,m}\left\{R_i(j) + \overline{V}_{n-1}^{(s)}(m-j)\right\} \\ &= \begin{cases} R_i(m) + \overline{V}_{n-2}^{(s-1)}(M) & \left(m \le m_{n-1}^{(s)}\right) \\ \max\begin{Bmatrix} R_i(m) + \overline{V}_{n-2}^{(s-1)}(M), \\ \displaystyle\max_{j=0,\dots,m_{n-1}^{(s)}-1}\left\{R_i(j) + \overline{V}_{n-1}^{(s)}(m-j)\right\} \end{Bmatrix} & \left(m > m_{n-1}^{(s)}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに、$m_n^{(s)*}(i)\left(\ge m_{n-1}^{(s)}\right)$ を適切に定めると、$k^{(s)}(n,m;i)$は与えられた形になる。

（証明終わり）

　この性質を言葉で表現すれば、(i)は手元により多くの資源があればより多くの資源を手元に残せ、を意味する。さらに、(ii)によって、残りが 1 期間または 2 期間の場合は手元により多くの資源があればより多くの資源を利用せよ、となる。

数値例

この項ではわれわれのモデルを例証するために簡単な数値例を提示する。N=M=9、S=2、I=3、$R_i(j)=1-q_i^{\,j}$（q_1=0.6、q_2=0.4、q_3=0.1）、r_0=0.2、r_1=0.5、r_2=0.2、r_3=0.1 と仮定する。最適政策（一部）は表3-4、3-5、3-6に与えられている。表3-4から $m_n^{(1)}$ は性質3-1と3-2で論じた性質を持っている。表3-5と3-6から $m_3^{(1)*}(1)=6$、$m_3^{(1)*}(2)=5$、$m_3^{(1)*}(3)=4$、$m_4^{(1)*}(1)=8$、$m_4^{(1)*}(2)=7$、$m_4^{(1)*}(3)=5$ である。さらに、以下のことに注意する：

$k^{(1)}(4,m;2)$は $m \geq m_4^{(1)*}(2)=7$ の時 m の非減少関数ではない。

$k^{(1)}(3,7;2)=2<k^{(1)}(4,7;2)=3$ であるから、$k^{(1)}(n,7;2)$は n の非増加関数ではない。

表 3-4. 臨界値 $m_n^{(s)}$

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$m_n^{(1)}$	1	2	2	1	0	0	0	0
$m_n^{(2)}$	1	2	2	1	1	1	1	1

表 3-5. 資源の最適使用量 $k^{(1)}(3,m;i)$

i \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	3	3	3	4
2	1	2	3	4	2	2	2	3	3
3	1	2	3	1	1	1	2	2	2

表 3-6. 資源の最適使用量 $k^{(1)}(4,m;i)$

i \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	3	3
2	1	2	3	4	5	6	3	2	2
3	1	2	3	4	1	2	1	1	2

3-5 結言

この章では、離散資源を持つ離散時間有限計画期間逐次資源配分の考察を行った。第3-2節では捕鯨船が 2 種類の鯨を捕獲する問題を扱い（タイプ 1 を捕獲するためには L 本の銛が命中する必要があり、一方、タイプ 2 は 1 本だけでよい)、捕鯨船が手元に L 本以下の銛を持っている時の最適政策の構造を調べた。得られた主な結果は：

- L 本未満の銛を持っている時、タイプ 2 の鯨に使用すべき最適な銛の本数は残り期間の長さの非増加関数であり、手元にある銛の本数の非減少関数である。
- ちょうど L 本の銛を持っている時、タイプ 1 の鯨に使用すべき最適な本数が 0 になる必要かつ十分条件を求めた。
- また、手元に銛があるにもかかわらず、タイプ 1 の鯨にもタイプ 2 の鯨にも銛を利用しないのは最適ではないことを示した。
- 最も簡単な L=1 の場合には、タイプ i（i=1,2）の鯨に使用すべき最適な銛の本数は残り期間の長さの非増加関数であり、手元にある銛の本数の非減少関数であること、さらに価値がある鯨にはより多くの銛を使用すべきであること、を証明した。

第3-3節では劣化する製品の離散時間有限計画期間逐次資源配分を考察した。得られた主な結果は：報酬関数が非減少凹関数であるという仮定のもとで、

- 最適製品販売個数が手元にある製品の個数の非減少関数である。
- 劣化確率が増加した時に最適販売個数が減少しないための十分条件も導出した。
- さらに、線形の報酬関数の場合の最適政策を陽に求め、最適販売個数が必ずしも残り期間の長さや劣化確率の単調関数ではないことを示す数値例を与えた。

第3-4節では意思決定者が資源を補給できる場合の離散時間有限期間逐次資源配分を考察し、次のような最適政策のいくつかの性質を導出した：

- 手持ち資源の個数がある臨界値以下であれば資源を補給するのが最適である。
- この臨界値は、残り期間の長さの関数であるが、残り期間が長くなるにつれて 0 に近づいていく。
- さらに、高々1 回だけ資源を補給できる場合は、臨界値は厳密に減少すればその時以降それは減少する。

以上、第3-2、3-3、3-4節で扱った 3 つのモデルにおいて最適政策の構造および性質を解析的に導出した。報酬が利用した手持ち資源の量の非減少凹関数で

あることが、（1）最適な資源の利用量が手持ち資源非減少関数であること、及び（2）残り期間の長さの非増加関数であること、と密接な関係があることが第3-2節の基本モデルにおいて分かった。第3-3節の資源が劣化するモデルにおいて、限界報酬の減少率と劣化しない割合の減少率の大小が資源の最適な利用量が劣化率の単調関数であることに関係する事が分かった。

参考文献

[1] Bellman, R. E. : Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

[2] Derman, C. G., Lieberman, G. J., and Ross, S. M. : A Stochastic Sequential Allocation Model. Operations Research, Vol. 23 (1975), 1120-1130.

[3] Mastran, D. V. and Thomas, C. J. : Decision Rules for Attacking Targets of Opportunity. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 20 (1973), 661-672.

[4] Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: A Sequential Allocation Problemwith Two Kinds of Targets. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 22 (1979), 16-28.

[5] Sakaguchi, M.: A Sequential Allocation Problem for Randomly Appearing Targets. Mathematica Japonica, Vol. 21 (1976), 89-103.

第4章 未知パラメータを含む離散時間逐次資源配分

4-1 緒言

前章では次のような離散時間逐次資源配分を考察した：
意思決定者は計画期間を通じて出現する目標物に自分の手持ち資源を配分する。目標物は各期の始めにある確率で高々1 個ずつ現れる。意思決定者は出現した目標物と利用した彼の手持ち資源の個数に依存した報酬を得る。総期待報酬を最大にするには彼の手持ち資源をいかに配分すればよいだろうか？

そこでは目標物の出現確率及び計画期間の長さは既知なパラメータであった。本章ではこれらのパラメータが未知な場合の離散時間逐次資源配分を考察する。第4-2節で出現確率が未知な場合、第4-3節で計画期間の長さがランダムな場合を扱う。

意思決定者が出現確率を正確に知っており、かつ、計画期間の長さが固定されている場合には、第3-2節の他多くの研究、例えば、Derman, Lieberman and Ross [5]（彼らは資源を連続量とみなしている）、Donis and Pollock [8]、Mastran and Thomas [9]、Sakaguchi [12]（Donis and Pollock と Sakaguchi は連続時間版を扱っている）がある。

Albright [1]は意思決定者が報酬情報を正確には知らない場合の最適停止を考察している。Albright に従って、第4-2節では、意思決定者は出現確率の値を知らないが、彼はその値は事前分布から乱数を発生させることによって決定されることを知っている、と仮定する。この事前分布はいわゆる主観確率である。

DeGroot [3（第 5 節と 6 節）]と Nachman [10]は計画期間がランダムな時の最適停止を考察している。Derman, Lieberman and Ross [6]は計画期間の長さが固定されている更新決定過程を論じており、Derman and Smith [7]はそれを計画期間がランダムな場合に拡張している。第4-3節では条件付き確率 q_n=Pr{計画期間の長さ≥n+1|計画期間の長さ≥n}が n の非増加関数であるという仮定のもとで、計画期間がランダムな場合にも、第3-2節と同様な最適政策の構造が成立することが示される。この仮定は次の場合に満たされる：

(i) ある L に対して、$q_1=\cdots=q_L=1$、$q_{L+1}=q_{L+2}=\cdots=0$ である第3-2節で考察された有限計画期間の場合

(ii) ある L に対して、$q_1=\cdots=q_L=\alpha$、$q_{L+1}=q_{L+2}=\cdots=0$ である割引率α（$0<\alpha<1$）を考慮した有限計画期間の場合

(iii) $q_1=q_2=\cdots=\alpha$ である割引率α（$0<\alpha<1$）を考慮した無限計画期間の場合

このように第4-3節で提出しているモデルは実際問題によく見うけられる。例えば、第3-2節のように鯨を捕獲するために何本かの銛を持って捕鯨船が航海すると仮定する。鯨は毎日高々1 頭ずつある確率で現れ、大きさ等によって有限個のタイプに分類される。銛発射台の故障のような出来事は捕鯨船にその任務の遂行を強制的に止めさせる。さらに、経過期間が長くなればなるほどこの強制的な停止の可能性は高くなると仮定する。この時、上述のモデルはこの例に適用できる。

この章においても前章と同様に動的計画法を適切に用いて定式化し、得られた再起関係式（関数方程式）を分析することにより、最適政策の性質を解析的に導出することが目的である。以後の各節において、まずわれわれの問題を動的計画法を利用して定式化し、最適政策の構造を考察し、数値例を紹介する。

4-2 出現確率が未知な逐次資源配分

4-2-1 定式化

意思決定者が M 個の資源を出現する目標物に配分しようとする。目標物は I 種類($I \geq 1$)からなる。目標物は各期の始めに高々1 個ずつ現れる；確率 r_i ($i=1,\ldots,I$) でタイプ i の目標物が現れ、確率 r_0 で何も現れない ($r_0+\cdots+r_I=1$)。意思決定者は出現確率 $(r_0,\ldots,r_I)$ の真の値を知らないが、これらの値はある主観確率分布か

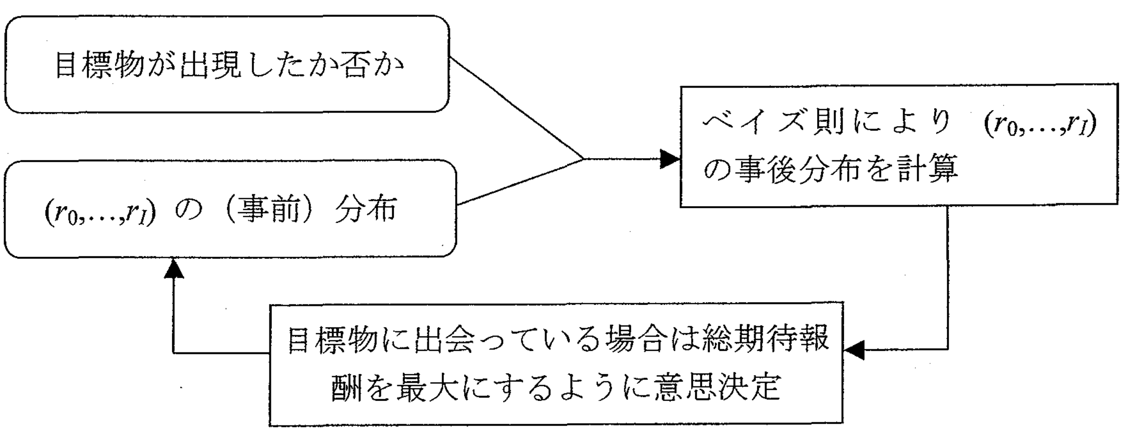


図 4-1. 意思決定の流れ

ら乱数を発生させることによって決定されることを知っている。彼がタイプ i の目標物に彼の手持ち資源の中から j 個を利用すると $R_i(j)$の期待報酬を得る。ただし、$R_i(j)$は $R_i(0)=0$ かつ j の増加関数である。意思決定の流れは次の通りである：

未知確率 $(r_0,\ldots,r_I)$ の分布（事前分布）と目標物が出現したか否かの情報を利用してベイズ則により $(r_0,\ldots,r_I)$ の事後分布を計算する。目標物が現れている時は総期待報酬を最大にするような決定を行う。このように計算された事後分布は次の期の事前分布とみなされる。以上の過程が計画期間が終わるまで繰り返される。（図4-1参照。）

目的は N 期間を通じて出現する目標物に M 個の資源を配分することによって得られる総期待報酬を最大にする最適な逐次配分政策を求めることである。

この問題を解析するために次の記号を定義する：

$V_n(m;i,\beta)$ = 残りが n 期間で、m 個の資源が手元にあり、タイプ i の目標物が現れていて、結果としての $(r_0,\ldots,r_I)$ の事後分布がβで、最適政策を利用している時の総期待報酬

$\bar{V}_n(m,\beta)$ = 残りが n 期間で、m 個の資源が手元にあり、$(r_0,\ldots,r_I)$ の事前分布がβで、最適政策を利用している時の総期待報酬

これらの記号を利用して、最適性の原理より次の再帰関係式を得る。

$$V_n(m;i,\beta)=\max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j)+\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta)\right\} \tag{4-1}$$

$$\bar{V}_n(m,\beta)=\alpha_0\bar{V}_{n-1}(m,\beta^0)+\sum_{i=1}^{I}\alpha_i V_n(m;i,\beta^i) \tag{4-2}$$

ここで、$V_0(\cdot;\cdot,\cdot)=V_\cdot(0;\cdot,\cdot)=\bar{V}_0(\cdot,\cdot)=\bar{V}_\cdot(0,\cdot)=0$ であり、α_i $(i=0,\ldots,I)$ は事前分布がβの時のタイプ i の目標物の出現確率であり（α_0はどのタイプの目標物も出現しない確率である）、β^i $(i=0,\ldots,I)$ は事前分布がβでタイプ i の目標物が現れた時の $(r_0,\ldots,r_I)$ の事後分布である（β^0はどの目標物も出現しなかった時の事後分布である）。

再帰関係式(4-1)は次のようにして得られる：

残りが n 期間で、m 個の資源が手元にあり、タイプ i の目標物が現れており、結果としての $(r_0,\ldots,r_I)$ の事後分布がβで、j 個の資源を利用するならば、この期の期待報酬が $R_i(j)$で、残りが $n-1$ 期間になり、手元に $m-j$ 個の資源が残り、βが次の期の事前分布となる。この状態の最大期待報酬は$\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta)$であるので再帰関係式(4-1)が得られる。再帰関係式(4-2)は $(r_0,\ldots,r_I)$ の事前分布がβの時、タイ

プ i の目標物が確率 α_i で現れ、確率 α_0 で何も現れないという仮定により得られる。

4-2-2 最適政策

最適政策は再帰関係式(4-1)と(4-2)を解けば求めることができるが、残念なことにこの再帰関係式を陽に解くことができない。

第3-2節で示したように、(4-1)の右辺の中括弧の中を最大にする j の値はタイプ i の目標物に利用すべき最適な資源の個数である。最適政策を明確に決定するために $k(n,m;i,\beta)$ をこのような j の最小値と定義する。すなわち

$$k(n,m;i,\beta)=\min\left[t \mid \max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j)+\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta)\right\}=R_i(t)+\bar{V}_{n-1}(m-t,\beta)\right]$$

とする。残りが n 期間で、m 個の資源が手元にあり、タイプ i の目標物が現れていて、結果としての $(r_0,\ldots,r_I)$ の事後分布が β の時、$k(n,m;i,\beta)$ 個の資源をこのタイプ i の目標物に配分するのは最適政策である。

もし、$(r_0,\ldots,r_I)$ の分布 β が1点に確率1で縮退していれば、この節のモデルは第3-2節と同一になる。

以下の性質4-1は $k(n,m;i,\beta)$ の手持ち資源の個数に関する単調性に、また性質4-2は残り期間の長さに関する単調性に関係している。

性質 4-1.
$R_i(j)$ が j の凹関数ならば、$n\geq1$、$m\geq1$、任意の β に対して

$$k(n,m;i,\beta)\leq k(n,m+1;i,\beta)\leq k(n,m;i,\beta)+1$$

が成立する。

証明： $R_i(j)$ が j の単調増加な凹関数なので、$\bar{V}_n(m,\beta)$ は m の凹関数である事を n に関する帰納法で容易に示す事ができる。今、$j_0=k(n,m;i,\beta)$ とおくと次の不等式が成立する。

$$R_i(j_0)+\bar{V}_{n-1}(m-j_0,\beta)>R_i(j)+\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta)\quad\left(0\leq j<j_0\right)\tag{4-3}$$

$$R_i(j_0)+\bar{V}_{n-1}(m-j_0,\beta)\geq R_i(j)+\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta)\quad\left(j_0\leq j<m\right)\tag{4-4}$$

最初に、$k(n,m+1;i,\beta)\leq k(n,m;i,\beta)+1$ を証明する。(4-4)を変形して $R_i(\cdot)$ の凹性を利用すると

$$\bar{V}_{n-1}(m-j_0,\beta)-\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta)\geq R_i(j)-R_i(j_0)\geq R_i(j+1)-R_i(j_0+1)$$

$J_0=j_0+1$、$J=j+1$ とおくと、上の不等式は

$$R_i(J_0)+\bar{V}_{n-1}(m+1-J_0,\beta)\geq R_i(J)+\bar{V}_{n-1}(m+1-J,\beta)\quad\left(J_0\leq J<m+1\right)$$

となる。これは $k(n,m+1;i,\beta)\leq J_0=k(n,m;i,\beta)+1$ を意味する。
次に、$k(n,m;i,\beta)\leq k(n,m+1;i,\beta)$を証明する。$j_0=0$ であればこれは成立する。$j_0>0$ と仮定する。(4-3)と $\bar{V}_n(\cdot,\beta)$ の凹性より、

$$\begin{aligned}R_i(j_0)-R_i(j)&>\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta)-\bar{V}_{n-1}(m-j_0,\beta)\\&\geq\bar{V}_{n-1}(m+1-j,\beta)-\bar{V}_{n-1}(m+1-j_0,\beta)\end{aligned}$$

すなわち、

$$R_i(j_0)+\bar{V}_{n-1}(m+1-j_0,\beta)>R_i(j)+\bar{V}_{n-1}(m+1-j,\beta)\quad\left(0\leq j\leq j_0\right)$$

これは $k(n,m+1;i,\beta)\geq j_0=k(n,m;i,\beta)$を意味している。　　　　　　（証明終わり）

性質4-1は、より多くの資源を手元に持っているならば、より多くの資源を利用せよ、といっている。これはいかなる分布βに対しても成立する。

次の性質4-2は $k(n,m;i,\beta)$が残り期間の長さに関して非増加であるための十分条件を示している。

性質 4-2.
$R_i(j)$ (i=1,…,I) が j の凹関数であると仮定する。その時、次の(i)、(ii)、(iii)が成立する：

(i) $\bar{V}_n(m+1,\beta)-\bar{V}_n(m,\beta)\geq\bar{V}_{n-1}(m+1,\beta)-\bar{V}_{n-1}(m,\beta)\quad\left(m\geq 0\right)$ ならば、

$k(n,m;i,\beta)\geq k(n+1,m;i,\beta)$である。

(ii) $\bar{V}_n(m+1,\beta^i)-\bar{V}_n(m,\beta^i)\geq\bar{V}_{n-1}(m+1,\beta^i)-\bar{V}_{n-1}(m,\beta^i)\quad\left(m\geq 0,0\leq i\leq I\right)$ かつ

$k(n,m;i,\beta)=k(n+1,m;i,\beta)\quad\left(1\leq i\leq I\right)$ならば、

$k(n+1,m;i,\beta)\geq k(n+2,m;i,\beta)$ である。

(iii) $m\geq 1$、$1\leq i\leq I$、任意のβに対して、$m=k(1,m;i,\beta)\geq k(2,m;i,\beta)\geq k(3,m;i,\beta)$である。

証明： (i) $j_0 = k(n,m;i,\beta)$とおくと、

$$R_i(j_0)+\bar{V}_{n-1}(m-j_0,\beta) \ge R_i(j)+\bar{V}_{n-1}(m-j,\beta) \quad (j_0 \le j < m)$$

が成り立つ。このとき仮定より、

$$\bar{V}_n(m-j_0,\beta)-\bar{V}_{n-1}(m-j_0,\beta) \ge \bar{V}_n(m-j,\beta)-\bar{V}_{n-1}(m-j_0,\beta) \quad (j_0 \le j \le m)$$

従って、

$$R_i(j_0)+\bar{V}_n(m-j_0,\beta) \ge R_i(j)+\bar{V}_n(m-j,\beta) \quad (j_0 \le j < m)$$

となる。これは$k(n+1,m;i,\beta) \le j_0 = k(n,m;i,\beta)$であることを意味する。

(ii) (i)より次の不等式を示せば十分である：

$$\bar{V}_{n+1}(m+1,\beta)-\bar{V}_{n+1}(m,\beta) \ge \bar{V}_n(m+1,\beta)-\bar{V}_n(m,\beta) \quad (m \ge 0)$$

次の関係に注意すると；

$$\bar{V}_{n+1}(m+1,\beta)=\alpha_0\bar{V}_n(m+1,\beta^0)+\sum_{i=1}^{I}\alpha_i V_{n+1}(m+1;i,\beta^i)$$

$$\bar{V}_{n+1}(m,\beta)=\alpha_0\bar{V}_n(m,\beta^0)+\sum_{i=1}^{I}\alpha_i V_{n+1}(m;i,\beta^i)$$

$$\bar{V}_n(m+1,\beta)=\alpha_0\bar{V}_{n-1}(m+1,\beta^0)+\sum_{i=1}^{I}\alpha_i V_n(m+1;i,\beta^i)$$

$$\bar{V}_n(m,\beta)=\alpha_0\bar{V}_{n-1}(m,\beta^0)+\sum_{i=1}^{I}\alpha_i V_n(m;i,\beta^i)$$

$m \ge 0$、$1 \le i \le I$の時、次の(4-5)と(4-6)を証明すれば十分である：

$$\bar{V}_n(m+1,\beta^0)-\bar{V}_n(m,\beta^0) \ge \bar{V}_{n-1}(m+1,\beta^0)-\bar{V}_{n-1}(m,\beta^0) \tag{4-5}$$

$$V_{n+1}(m+1;i,\beta^i)-V_{n+1}(m;i,\beta^i) \ge V_n(m+1;i,\beta^i)-V_n(m;i,\beta^i) \tag{4-6}$$

(4-5)は仮定より成立する。性質4-1より、$j_1 = k(n+1, m; i, \beta^i)$、$j_2 = k(n, m; i, \beta^i)$ とおくと

$$V_{n+1}(m+1; i, \beta^i) - V_{n+1}(m; i, \beta^i)$$
$$= \max\left\{\bar{V}_n(m+1-j_1, \beta^i) - \bar{V}_n(m-j_1, \beta^i), R_i(j_1+1) - R_i(j_1)\right\}$$
$$V_n(m+1; i, \beta^i) - V_n(m; i, \beta^i)$$
$$= \max\left\{\bar{V}_{n-1}(m+1-j_2, \beta^i) - \bar{V}_{n-1}(m-j_2, \beta^i), R_i(j_2+1) - R_i(j_2)\right\}$$

が成り立つ。仮定より $j_1 = j_2$ かつ

$$\bar{V}_n(m+1-j_1, \beta^i) - \bar{V}_n(m-j_1, \beta^i) \geq \bar{V}_{n-1}(m+1-j_2, \beta^i) - \bar{V}_{n-1}(m-j_2, \beta^i)$$

であるので、(4-6)が成り立つ。

(iii) $R_i(\cdot)$は増加関数なので、明らかに $k(1, m; i, \beta) = m$ は成立する。その他のことを示すためには、(i)から、次の不等式を証明すれば十分である：

$$\bar{V}_1(m+1, \beta) - \bar{V}_1(m, \beta) \geq \bar{V}_0(m+1, \beta) - \bar{V}_0(m, \beta) \quad (m \geq 0) \tag{4-7}$$

$$\bar{V}_2(m+1, \beta) - \bar{V}_2(m, \beta) \geq \bar{V}_1(m+1, \beta) - \bar{V}_1(m, \beta) \quad (m \geq 0) \tag{4-8}$$

$\bar{V}_0(m+1, \beta) - \bar{V}_0(m, \beta) = 0$, $\bar{V}_1(m+1, \beta) - \bar{V}_1(m, \beta) = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \left(R_i(m+1) - R_i(m)\right) \geq 0$ より、

(4-7)は成立する。(ii)と同様に(4-8)は、$m \geq 0$ の時、次の不等式が成り立てば成立する：

$$\bar{V}_1(m+1, \beta^0) - \bar{V}_1(m, \beta^0) \geq \bar{V}_0(m+1, \beta^0) - \bar{V}_0(m, \beta^0) = 0 \tag{4-9}$$

$$V_2(m+1; i, \beta^i) - V_2(m; i, \beta^i) \geq V_1(m+1; i, \beta^i) - V_1(m; i, \beta^i) \quad (1 \leq i \leq I) \tag{4-10}$$

$\bar{V}_1(t, \beta^0)$ の t についての単調性より(4-9)は成立する。$j_0 = k(2, m; i, \beta^i) \leq j_1 =$

$k(1, m; i, \beta^i) = m$ とおけば、$R_i(\cdot)$の凹性より

$$
\begin{aligned}
&V_2(m+1;i,\beta^i)-V_2(m;i,\beta^i)\\
&=\max\left\{\overline{V}_1(m+1-j_0,\beta^i)-\overline{V}_1(m-j_0,\beta^i),R_i(j_0+1)-R_i(j_0)\right\}\\
&\geq\max\left\{0,R_i(j_1+1)-R_i(j_1)\right\}\quad\left(R_i(\bullet)\text{の凹性}\right)\\
&=\max\left\{\overline{V}_0(m+1-j_1,\beta^i)-\overline{V}_0(m-j_1,\beta^i),R_i(j_1+1)-R_i(j_1)\right\}\\
&=V_1(m+1;i,\beta^i)-V_1(m;i,\beta^i)
\end{aligned}
$$

が成立するので、(4-10)は成り立つ。　　　　　　　　　　（証明終わり）

性質4-2(i)は $k(n,m;i,\beta^i)$ が残り期間の長さの非増加関数であるための十分条件を与えている。この十分条件は限界期待報酬が残り期間の長さの非減少関数であることを表している。性質4-2(ii)は(i)よりも強い十分条件である。性質4-2(iii)は $k(n,m;i,\beta^i)$ の n に関する単調性は n=1,2,3 では成り立つことを示している。$n\geq4$ の場合に成立するかどうかは不明である。
ここから、I=1、すなわち、目標物が 1 種類だけからなる特別な場合を扱う。次の(a)項では $R_1(j)=1-q^j\left(0<q<1\right)$ の場合を、(b)項ではβがベータ分布である場合を考察する。

(a) $R_1(j)=1-q^j$ （$0<q<1$） の場合

この項で扱うモデルは次のように解釈される：
目標物に資源が命中する確率が $p(=1-q)$ で、利用した資源のうち少なくとも 1 個が命中すれば、目標物を獲得でき、獲得した目標物の個数が報酬である。

明らかに、残りが 1 期間で、目標物に出会っている時には、手持ちの資源すべてを利用すべきである。次の性質4-3は残りが 2 期間の時の最適政策について述べている。α_1 は(r_0,r_1)の事前分布がβの時の目標物が現れる確率を、$[x]$は x の整数部分を表す。このとき、次のことが成立する：

性質 4-3.

次の(i)、(ii)、(iii)が成り立つ。

(i)　$0\leq\alpha_1<q$ ならば、$k(2,m;1,\beta)\geq[(m+1)/2]$である。

(ii)　$q\leq\alpha_1<1$ ならば、$k(2,m;1,\beta)=[(m+1)/2]$である。

(iii)　$\alpha_1=1$ ならば、$k(2,m;1,\beta)=[m/2]$である。

証明：　再帰関係式(4-1)と(4-2)より

$$V_2(m;1,\beta)=\max_{j=0,\dots,m}\left\{1-q^j+\alpha_1(1-q^{m-j})\right\}$$

であり

$$1-q^j+\alpha_1(1-q^{m-j})\ge 1-q^{j+1}+\alpha_1(1-q^{m-j-1})$$

は整理すると $\alpha_1 q^{m-1}\ge q^{2j}$ となる。それゆえ、$k(2,m;1,\beta)$は $q^{2j-2}>\alpha_1 q^{m-1}\ge q^{2j}$ を満たす整数である。すなわち(i)が成り立つ。(ii)と(iii)も同様に示す事ができる。

（証明終わり）

(b) ベータ分布の場合

各期において確率 r_1 で目標物が現れ、確率 r_0 で目標物が現れない（$r_0+r_1=1$）。この項では(r_0,r_1)の分布を、ベルヌイ分布の共役族であるベータ分布と仮定する[4]。ベータ分布はそのパラメータによって一意に決定されるので、βを(β_0,β_1)と書く。再帰関係式(4-1)と(4-2)は次のようになる。$m=1,\dots,M$、$n=1,\dots,N$、$\beta_0>0$、$\beta_1>0$の時、

$$V_n\left(m;1,(\beta_0,\beta_1)\right)=\max_{j=0,\dots,m}\left\{R_1(j)+\bar{V}_{n-1}\left(m-j,(\beta_0,\beta_1)\right)\right\}$$

$$\bar{V}_n\left(m,(\beta_0,\beta_1)\right)=\frac{\beta_0}{\beta_0+\beta_1}\bar{V}_{n-1}\left(m,(\beta_0+1,\beta_1)\right)+\frac{\beta_1}{\beta_0+\beta_1}V_n\left(m;1,(\beta_0,\beta_1+1)\right)$$

確率変数(r_0,r_1)（$r_0+r_1=1$）はパラメータ(β_0,β_1)を持つベータ分布に従っているので、比 $E(r_0)/E(r_1)$は β_0/β_1 である。意思決定者が目標物に出会う可能性は、β_0/β_1 が増加すれば、減るであろう。従って、$k(n,m;1,(\beta_0,\beta_1))$は$\beta_0$の非減少関数であり、$\beta_1$の非増加関数であると予想される。次の性質4-4と4-5はこの性質に関係している。

性質 4-4.

次の(i)と(ii)が成立する：

(i)
$$\begin{aligned}&\bar{V}_{n-1}\left(m+1,(\beta_0,\beta_1)\right)-\bar{V}_{n-1}\left(m,(\beta_0,\beta_1)\right)\\&\ge\bar{V}_{n-1}\left(m+1,(\beta_0',\beta_1)\right)-\bar{V}_{n-1}\left(m,(\beta_0',\beta_1)\right)\quad(m\ge 0)\end{aligned}$$

ならば、$k\left(n,m;1,(\beta_0,\beta_1)\right)\le k\left(n,m;1,(\beta_0',\beta_1)\right)$である。

(ii) $0<\beta_0\le\beta_0'$ ならば、$k\left(2,m;1,(\beta_0,\beta_1)\right)\le k\left(2,m;1,(\beta_0',\beta_1)\right)$である。

証明： (i) $j_0 = k(n,m;1,(\beta_0,\beta_1))$とおく。$j_0=0$ ならば、(i)は明らかに成立する。$j_0>0$ と仮定すると、

$$R_1(j_0)+\bar{V}_{n-1}\left(m-j_0,(\beta_0,\beta_1)\right)>R_1(j)+\bar{V}_{n-1}\left(m-j,(\beta_0,\beta_1)\right)\quad\left(0\le j<j_0\right)$$

が成立する。一方、$m-j_0<m-j$ であるので、

$$\bar{V}_{n-1}\left(m-j_0,(\beta_0',\beta_1)\right)-\bar{V}_{n-1}\left(m-j_0,(\beta_0,\beta_1)\right)$$
$$\ge\bar{V}_{n-1}\left(m-j,(\beta_0',\beta_1)\right)-\bar{V}_{n-1}\left(m-j,(\beta_0,\beta_1)\right)$$

すなわち、

$$R_1(j_0)+\bar{V}_{n-1}\left(m-j_0,(\beta_0',\beta_1)\right)>R_1(j)+\bar{V}_{n-1}\left(m-j,(\beta_0',\beta_1)\right)\quad\left(0\le j<j_0\right)$$

が成り立ち、これは$k\left(n,m;1,(\beta_0',\beta_1)\right)\ge j_0=k\left(n,m;1,(\beta_0,\beta_1)\right)$であることを意味している。

(ii) (i)より次の不等式を示せば十分である。

$$\left[\bar{V}_1\left(m+1,(\beta_0,\beta_1)\right)-\bar{V}_1\left(m,(\beta_0,\beta_1)\right)\right]$$
$$-\left[\bar{V}_1\left(m+1,(\beta_0',\beta_1)\right)-\bar{V}_1\left(m,(\beta_0',\beta_1)\right)\right]\ge 0\quad\left(m\ge 0\right)$$

この左辺は次の式の左辺と等しく

$$\left[\frac{\beta_1(\beta_0'-\beta_0)}{(\beta_0+\beta_1)(\beta_0'+\beta_1)}\right]\left[R_1(m+1)-R_1(m)\right]\ge 0$$

が成り立つので、(ii)が成り立つ。　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

性質4-4 (i)は $k(n,m;1,(\beta_0,\beta_1))$が$\beta_0$ の非減少関数であるための十分条件を与えている。この単調性は、(ii)より、$n=2$ の時には成立している。

性質 4-5.

次の(i)と(ii)が成立する：

(i)
$$\bar{V}_{n-1}\left(m+1,(\beta_0,\beta_1')\right)-\bar{V}_{n-1}\left(m,(\beta_0,\beta_1')\right)$$
$$\ge\bar{V}_{n-1}\left(m+1,(\beta_0,\beta_1)\right)-\bar{V}_{n-1}\left(m,(\beta_0,\beta_1)\right)\quad\left(m\ge 0\right)$$

ならば、$k\left(n,m;1,(\beta_0,\beta_1)\right) \geq k\left(n,m;1,(\beta_0,\beta_1^{'})\right)$ である。

(ii)　$0<\beta_1 \leq \beta_1^{'}$ ならば、$k(2,m;1,(\beta_0,\beta_1)) \geq k(2,m;1,(\beta_0,\beta_1^{'}))$ である。

証明：　性質4-4と同様に示す事ができる。　　（証明終わり）

性質4-5は $k(n,m;1,(\beta_0,\beta_1))$ が β_1 の非増加関数であるための十分条件を与えている。この単調性は、(ii)より、n=2 の時には成立している。

(c) 数値例

N=3、M=3、I=1、$R_1(j)=1-0.5^j$ とする。意思決定者は目標物について事前に何の知識もなく、それゆえ、(r_0,r_1)の分布はパラメータ(1,1)のベータ分布（すなわち、一様分布）と仮定する。この時、最適政策は次の通りである：
目標物が最初の期に現れたならば、2 個の資源を利用せよ。残りの 1 個の資源は目標物が残りの期に現れたら利用せよ。

目標物が最初の期（n=3）に現れず次の期（n=2）に現れたならば、2 個の資源を利用せよ。残りの 1 個の資源は目標物が残りの期に現れたら利用せよ。目標物が最初の期と次の期に現れず最後の期（n=1）に現れたならば、3 個の資源全部を利用せよ。(図4-1を参照。)

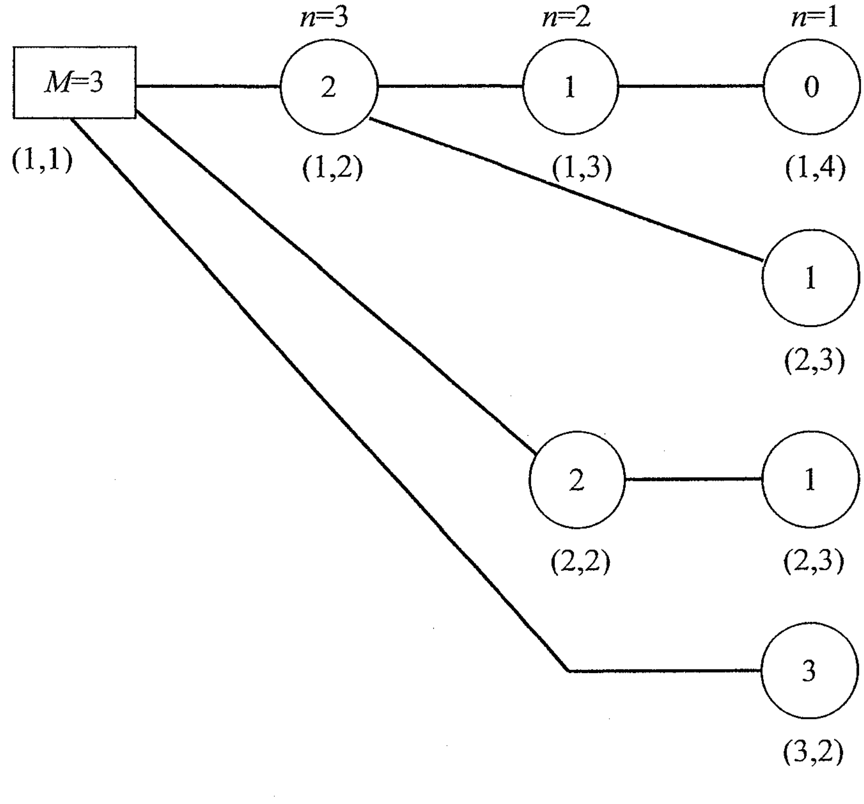


図 4-1. 最適政策

括弧の中の数値はその期のベータ分布のパラメータである。

4-3 計画期間がランダムな逐次資源配分

4-3-1 定式化

意思決定者は長さが確率変数 N で与えられる計画期間を通じて現れる目標物に M 個の手持ち資源を配分する。目標物は I 個のタイプからなる。目標物は各期の始めに高々1 個ずつ現れる；確率 r_i (i=1,…,I) でタイプ i の目標物が現れ、確率 r_0 (=1−(r_1+⋯+r_I)) で目標物は現れない。タイプ i の目標物に手持ち資源の中から j 個を利用すると $R_i(j)$の期待報酬を得る。$R_i(j)$は j の非減少凹関数で、$R_i(0)=0$ とする。計画期間の長さ N の確率分布は $\Pr\{N=n\}=p_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ で与えられる。$q_n=\Pr\{N\geq n+1|N\geq n\}$ (n=1,2,…) は n に関して非増加と仮定する。この仮定は[6]にある計画期間の分布が IFR (Increasing Failure Rate) であるという仮定に対応する。また、便宜的に $\Pr\{N\geq n\}=0$ ならば、$q_n=0$ としておく。長さが N の計画期間を通じて現れる目標物に対して M 個の資源を配分することによって得られる総期待報酬を最大にする最適政策の構造を考察する。

この問題を動的計画法で定式化するために次のように S と C を定義する[2]：

$$S=\{(n,m;i);\ n=1,2,\ldots,\ m=0,\ldots,M,\ i=0,\ldots,I\}\cup\{\delta\}$$

$$C=\{0,\ldots,M\}$$

ここで、$(n,m;i)$は $N\geq n$ という条件のもとで、第 n 番目の期に、意思決定者が手元に m 個の資源を持っており、タイプ i の目標物が現れている状態を表す（タイプ 0 の出現は目標物が現れていないことを意味する)。記号δ は計画期間が終了したことを表す。$j\in C$ は j 個の資源の利用を意味する。報酬関数 g（状態が u で j 個の資源を利用した時の報酬が $g(u,j;\cdot)$ であり、この節において報酬は第 3 変数、ノイズに依存しない）と推移確率 P は次のようになる（$P_{uv}(j)$ は状態 u で j 個の資源を利用した時状態 v へ推移する確率である)：

$$g(u,j,\cdot)=\begin{cases}0 & (u=(n,m;0)\text{ または }\delta)\\ R_i(\min(j,m)) & (u=(n,m;i)(i\neq 0))\end{cases}$$

$$P_{uv}(j)=\begin{cases}1 & (u=v=\delta)\\ 1-q_n & (u\neq\delta, v=\delta)\\ r_i q_n & (u=(n,m;0), v=(n+1,m;i))\\ r_i q_n & (u=(n,m;i)(i\neq 0), v=(n+1,(m-j)^+;i))\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

ただし、$(x)^+=\begin{cases}x & (x>0)\\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$ である。

また、$V(s)$ ($s\in S$) を総期待報酬の上限と定義する。$g(\cdot,\cdot,\cdot)\geq 0$ であるので[2]の結果より V が次の最適方程式を満足する：
n=1,2,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して、

$$V(n,m;i)=\max_{j=0,\dots,M}\left\{R_i\left(\min(j,m)\right)+(1-q_n)V(\delta)+q_n\sum_{i=0}^{I}r_iV(n+1,(m-j)^+;i)\right\} \tag{4-11}$$

$$V(n,m;0)=(1-q_n)V(\delta)+q_n\sum_{i=0}^{I}r_iV(n+1,m;i) \tag{4-12}$$

$V(\delta)$=0 であるので最適方程式(4-11)と(4-12)は次のように書き直される：
n=1,2,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して、

$$V(n,m;i)=\max_{j=0,\dots,m}\left\{R_i(j)+q_n\sum_{i=0}^{I}r_iV(n+1,m-j;i)\right\} \tag{4-13}$$

$$V(n,m;0)=q_n\sum_{i=0}^{I}r_iV(n+1,m;i) \tag{4-14}$$

われわれの割引のない報酬問題には最適政策が存在しないかもしれない。しかし、$\{q_n\}$が非増加数列であるという仮定のもとでは割引のある報酬問題へ変換できる。

$\{q_n\}$が非増加数列なので、$n\geq n_0$ ならば $q_n\leq\alpha<1$ となる n_0 と α ($0<\alpha<1$) が存在する。そこで、$S'=\{(n,m;i)\mid n=n_0,n_0+1,\dots,m=0,\dots,M,i=0,\dots,I\}\cup\{\delta\}$、

$C'=C, g'=g$ さらに、$q'_n=\dfrac{q_n}{\alpha}\leq 1$ とおいて、

$$P'_{uv}(j)=\begin{cases}1 & (u=v=\delta)\\ 1-q'_n & (u\neq\delta, v=\delta)\\ r_i q'_n & (u=(n,m;0), v=(n+1,m;i))\\ r_i q'_n & (u=(n,m;i)(i\neq 0), v=(n+1,(m-j)^+;i))\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

を持つ関連問題を考えよう。$V'(s)(s\in S')$をこの関連問題の総期待報酬の上限と定義する。その時、V'は次の最適方程式を満足し、$V(s)=V'(s)(s\in S')$である：$n=n_0, n_0+1,\ldots$、$m=0,\ldots,M$、$i=1,\ldots,I$に対して、

$$V'(n,m;i)=\max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j)+\alpha q'_n\sum_{i=0}^{I} r_i V'(n+1,m-j;i)\right\} \tag{4-15}$$

$$V'(n,m;0)=\alpha q'_n\sum_{i=0}^{I} r_i V'(n+1,m;i) \tag{4-16}$$

割引率$\alpha q'_n$の存在により、上記の最適方程式を解くために、任意の有界な初期報酬から始める逐次近似法が適用できる。

$L=1,2,\ldots$、$n=n_0, n_0+1,\ldots$、$m=0,\ldots,M$、$i=1,\ldots,I$に対して、$V^L(n,m;i)$を次のように定義する：

$$V^1(n,m:i)=\text{任意の有界関数} \tag{4-17}$$

$$V^{L+1}(n,m;i)=\max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j)+q_n\sum_{i=0}^{I} r_i V^L(n+1,m-j;i)\right\} \tag{4-18}$$

$$V^{L+1}(n,m;0)=q_n\sum_{i=0}^{I} r_i V^L(n+1,m;i) \tag{4-19}$$

便宜上、$\bar{V}(n,m)=\sum_{i=0}^{I} r_i V(n,m;i)$、$\bar{V}^L(n,m)=\sum_{i=0}^{I} r_i V^L(n,m;i)$とおくと、最適方程式(4-13)と(4-14)は次のように書きかえられる：

$n=1,2,\ldots$、$m=0,\ldots,M$、$i=1,\ldots,I$に対して、

$$V(n,m;i)=\max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j)+q_n\bar{V}(n+1,m-j)\right\} \tag{4-13'}$$

$$\bar{V}(n,m) = r_0 q_n \bar{V}(n+1,m) + \sum_{i=1}^{I} r_i V(n,m;i) \tag{4-14'}$$

また、再帰関係式(4-17)、(4-18)、(4-19)は次のように書きかえられる：
L=1,2,…、$n= n_0, n_0+1$,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して、

$$\bar{V}^1(n,m) = \text{任意の有界関数} \tag{4-17'}$$

$$V^{L+1}(n,m;i) = \max_{j=0,\ldots,m} \left\{ R_i(j) + q_n \bar{V}^L(n+1,m-j) \right\} \tag{4-18'}$$

$$\bar{V}^{L+1}(n,m) = r_0 q_n \bar{V}^L(n+1,m) + \sum_{i=1}^{I} r_i V^{L+1}(n,m;i) \tag{4-19'}$$

補題 4-1.

$n= n_0, n_0+1$,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して、$V(n,m;i) = \lim_{L\to\infty} V^L(n,m;i)$、

$\bar{V}(n,m) = \lim_{L\to\infty} \bar{V}^L(n,m)$ である。さらに、V、$\bar{V}$ は n=1,2,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して各々最適方程式(4-13')と(4-14')の一意の有界な解である。

証明： $n= n_0, n_0+1$,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して、V、$\bar{V}$ は各々最適方程式(4-13')と(4-14')の一意の有界な解である（例えば、[2]の第 5.1 節の命題 2 を参照）。n=1,2,…, n_0−1、m=0,…,M、i=1,…,I に対する V、$\bar{V}$ は $\bar{V}(n_0,\cdot)$ を利用して、各々最適方程式(4-13')と(4-14')から一意に計算される。（証明終わり）

V、$\bar{V}$ は各々最適方程式(4-13')と(4-14')の一意の有界な解であるので、[2]の第 5.4 節の命題 11 により、(4-13')の右辺の中括弧の中の最大値を与える j を選ぶのは最適である。

4-3-2 最適政策

この節では最適政策の構造を調べる。(4-13')の右辺の中括弧の中の最大値を与える j の値はタイプ i の目標物に利用すべき最適な個数である。最適政策を明確に決定するために、$k(n,m;i)$を(4-13')の右辺の中括弧の中の最大値を与える j の値の最小値と定義する。すなわち、n=1,2,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して、

$$k(n,m;i)=\min\left\{t \mid \max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j)+q_n\bar{V}(n+1,m-j)\right\}=R_i(t)+q_n\bar{V}(n+1,m-t)\right\}$$

とする。このとき、$N \geq n$ という条件のもとで、第 n 期目にタイプ i の目標物が現れていて、m 個の資源が手元にある時、$k(n,m;i)$個の資源を利用するのは最適である。

最初に $k(n,m;i)$の m に関する単調性を示す。次の補題が必要である。

補題 4-2.
n=1,2,…、i=1,…,I に対して、$V(n,m;i)$と $\bar{V}(n,m)$ は m の非減少凹関数である。

証明： (4-17')、(4-18')、(4-19')において$\bar{V}^1(n,m)=0$ と設定する。帰納法より、L=1,2,…、$n=n_0,n_0+1,\ldots$、i=1,…,I に対して $V^L(n,m;i)$と $\bar{V}^L(n,m)$ は m の非減少凹関数である。従って、補題4-1により、n=1,2,…に対して、$V(n,m{:}i)$と $\bar{V}(n,m)$ は m の非減少凹関数である。 （証明終わり）

次の定理は $k(n,m;i)$の m に関する単調性を示す（証明は[5]の命題 2 と定理 3 (ii) を参照）。

定理 4-1.
n=1,2,…,m=0,…,M−1、i=1,…,I に対して、$k(n,m;i) \leq k(n,m+1;i) \leq k(n,m;i)+1$ である。

次に $k(n,m;i)$の n に関する単調性を示す。このために$\{q_n\}$を変数と見なせば便利である。$\mathbf{q}_n=(q_n,q_{n+1},\ldots)$とおけば、最適方程式(4-13')と(4-14')は次のように書き直される：

$$V(n,m;i,\mathbf{q}_n)=\max_{j=0,\ldots,m}\left\{R_i(j)+q_n\bar{V}(n+1,m-j,\mathbf{q}_{n+1})\right\} \qquad (4\text{-}13'')$$

$$\bar{V}(n,m,\mathbf{q}_n)=r_0q_n\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1})+\sum_{i=1}^{I}r_iV(n,m;i,\mathbf{q}_n) \qquad (4\text{-}14'')$$

定理 4-2.
n=1,2,…、m=0,…,M、i=1,…,I に対して、$k(n,m;i,\mathbf{q}_n)\geq k(n,m;i,\mathbf{q}'_n)$ である。ただし、$\mathbf{q}_n=(q_n,q_{n+1},\ldots)$、$\mathbf{q}'_n=(q_n+\Delta_n,q_{n+1}+\Delta_{n+1},\ldots)$、$\Delta_j \geq 0$ ($j=n,n+1,\ldots$) である。

定理4-2を証明するためには次の 2 つの補題が必要である。

補題 4-3.
n=1,2,…、m=0,…,M−1 に対して、$\bar{V}(n+1,m+1,\mathbf{q}_{n+1})-\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1})$ は q_i の($i \geq n+1$)非減少関数である。

証明：

$$
\begin{aligned}
&\bar{V}(n+1,m+1,\mathbf{q}_{n+1})-\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1}) \\
&=r_0 q_{n+1}\left\{\bar{V}(n+2,m+1,\mathbf{q}_{n+2})-\bar{V}(n+2,m,\mathbf{q}_{n+2})\right\} \\
&+\sum_{i=1}^{I} r_i\left\{V(n+1,m+1;i,\mathbf{q}_{n+1})-V(n+1,m;i,\mathbf{q}_{n+1})\right\}
\end{aligned}
$$

$j_0=k(n+1,m;i,\mathbf{q}_{n+1})$とおくと、定理4-1より、$k(n+1,m+1;i,\mathbf{q}_{n+1})=j_0$ またはj_0+1 である。従って、

$$
\begin{aligned}
&V(n+1,m+1;i,\mathbf{q}_{n+1})-V(n+1,m;i,\mathbf{q}_{n+1}) \\
&=\max\left\{\begin{array}{l} R_i(j_0+1)-R_i(j_0), \\ q_{n+1}\left\{\bar{V}(n+2,m+1-j_0,\mathbf{q}_{n+2})-\bar{V}(n+2,m-j_0,\mathbf{q}_{n+2})\right\}\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

補題4-2より$\bar{V}(\cdot,m,\cdot)$は m の非減少関数であることに注意すると、帰納法を使って、$\bar{V}(n+1,m+1,\mathbf{q}_{n+1})-\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1})$が q_j $(j\geq n+1)$ の非減少関数であることが証明できる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

$\mathbf{q}_{n+1}^{(0)}=\mathbf{q}_{n+1}=(q_{n+1},q_{n+2},\ldots)$、$\mathbf{q}_{n+1}^{(1)}=(q_{n+1}+\Delta_{n+1},q_{n+2},\ldots)$、$\cdots$、
$\mathbf{q}_{n+1}^{(s)}=(q_{n+1}+\Delta_{n+1},q_{n+2}+\Delta_{n+2},\ldots,q_{n+s}+\Delta_{n+s},q_{n+s+1},\ldots)$とおく。

補題 4-4.
n=1,2,…、m=0,…,Mに対して、$\lim_{s\to\infty}\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)})=\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}'_{n+1})$である。

証明：　まず、$n\geq n_0-1$ の時(n_0は第4-3-1項で、$n\geq n_0$ならば$q_n\leq\alpha<1$ となる$\alpha(0<\alpha<1)$が存在するような整数、と定義している)を考察する。再帰関係式(4-17')、(4-18')、(4-19')において、

$\bar{V}^1(n+s+1,m)=\bar{V}(n+s+1,m,\mathbf{q}_{n+s+1})\left(\leq M\max_{i=1,\ldots,I}R_i(1)\right)$とおけば、

$\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)})=\bar{V}^{s+1}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)})=\bar{V}^{s+1}(n+1,m,\mathbf{q}'_{n+1})$となる。ゆえに、補題4-1より、

$$
\lim_{s\to\infty}\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)})=\lim_{s\to\infty}\bar{V}^{s+1}(n+1,m,\mathbf{q}'_{n+1})=\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}'_{n+1})
$$

次に、$1\leq n\leq n_0-1$ の時を考察する。

$$\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)}) = r_0(q_{n+1}+\Delta_{n+1})\bar{V}(n+2,m,\mathbf{q}_{n+2}^{(s-1)}) + \sum_{i=1}^{I} r_i V(n+1,m;i,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)})$$

$$V(n+1,m;i,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)}) = \max_{j=0,\dots,m}\left\{R_i(j)+(q_{n+1}+\Delta_{n+1})\bar{V}(n+2,m-j,\mathbf{q}_{n+2}^{(s-1)})\right\}$$

であり、また

$$\bar{V}(n_0-1,m,\mathbf{q}_{n_0-1}^{(s+n-n_0+2)}) = r_0(q_{n_0-1}+\Delta_{n_0-1})\bar{V}(n_0,m,\mathbf{q}_{n_0}^{(s+n-n_0+1)}) + \sum_{i=1}^{I} r_i V(n_0-1,m;i,\mathbf{q}_{n_0-1}^{(s+n-n_0+2)})$$

$$V(n_0-1,m;i,\mathbf{q}_{n_0-1}^{(s+n-n_0+2)}) = \max_{j=0,\dots,m}\left\{R_i(j)+(q_{n_0-1}+\Delta_{n_0-1})\bar{V}(n_0,m-j,\mathbf{q}_{n_0}^{(s+n-n_0+1)})\right\}$$

と $\lim_{s\to\infty}\bar{V}(n_0,m,\mathbf{q}_{n_0}^{(s+n-n_0+1)}) = \bar{V}(n_0,m,\mathbf{q}'_{n_0})$ から、 $\lim_{s\to\infty}\bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)}) = \bar{V}(n+1,m,\mathbf{q}'_{n+1})$ となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

定理**4-2**の証明： $j_0=k(n,m;i,\mathbf{q}_n)$とおくと、$j_0\le j\le m$ に対して、

$$R_i(j_0)+q_n\bar{V}(n+1,m-j_0,\mathbf{q}_{n+1}) \ge R_i(j)+q_n\bar{V}(n+1,m-j,\mathbf{q}_{n+1})$$

となる。この不等式と、$\bar{V}(n+1,\cdot,\mathbf{q}_{n+1})$ の単調性と補題4-3より、

$$\begin{aligned}
R_i(j)-R_i(j_0) &\le q_n\left(\bar{V}(n+1,m-j_0,\mathbf{q}_{n+1})-\bar{V}(n+1,m-j,\mathbf{q}_{n+1})\right)\\
&\le (q_n+\Delta_n)\left(\bar{V}(n+1,m-j_0,\mathbf{q}_{n+1})-\bar{V}(n+1,m-j,\mathbf{q}_{n+1})\right)\\
&\le (q_n+\Delta_n)\left(\bar{V}(n+1,m-j_0,\mathbf{q}_{n+1}^{(1)})-\bar{V}(n+1,m-j,\mathbf{q}_{n+1}^{(1)})\right)\\
&\cdots\\
&\le (q_n+\Delta_n)\left(\bar{V}(n+1,m-j_0,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)})-\bar{V}(n+1,m-j,\mathbf{q}_{n+1}^{(s)})\right)
\end{aligned}$$

$s\to\infty$とすれば、補題4-4より、$j_0\le j\le m$ の時

$$R_i(j)-R_i(j_0) \le (q_n+\Delta_n)\left(\bar{V}(n+1,m-j_0,\mathbf{q}'_{n+1})-\bar{V}(n+1,m-j,\mathbf{q}'_{n+1})\right)$$

これは $j_0=k(n,m;i,\mathbf{q}_n)\ge k(n,m;i,\mathbf{q}'_n)$ を意味している。　　　　　（証明終わり）

系

$q_1 \geq q_2 \geq \cdots$ ならば、$n=1,2,\ldots$、$m=0,\ldots,M$、$i=1,\ldots,I$ に対して $k(n,m;i) \leq k(n+1,m;i)$ である。

証明： $\mathbf{q}_{n+1}=(q_{n+1},q_{n+2},\ldots)$、$\mathbf{q}_n=(q_n,q_{n+1},\ldots)$ とおけば、$k(n+1,m;i)=k(n+1,m;i,\mathbf{q}_{n+1})=k(n,m;i,\mathbf{q}_{n+1})$、$k(n,m;i)=k(n,m;i,\mathbf{q}_n)$ であり、$q_1 \geq q_2 \geq \cdots$ に注意すれば、この系は定理4-2から得られる。 （証明終わり）

数値例

以下では 2 つの簡単な数値例を紹介する。1 つ目は $q_1=q_2=\cdots=\alpha$ （$0<\alpha<1$） の場合で、2 つ目は $\Pr\{N \leq n_1\}=1$ となるような n_1 が存在する場合である。

(a) $q_1=q_2=\cdots=\alpha$ （$0<\alpha<1$） の場合

$q_1=q_2=\cdots=\alpha=0.8$、$I=2$、$M=5$、$(r_0,r_1,r_2)=(0.4,0.5,0.1)$ とし、$R_i(j)$ を表4-1のように定義する。q_n が n に依存しないので、経過期間数を記憶する必要がない。従って、最適方程式は次のようになる：

$$V(m;i) = \max_{j=0,\ldots,m} \left\{ R_i(j) + \alpha \bar{V}(m-j) \right\}$$

$$\bar{V}(m) = r_0 \alpha \bar{V}(m) + \sum_{i=1}^{2} r_i V(m;i)$$

簡単な計算により表4-2のような最適政策が得られる。例えば、手元に 4 個の資

表 4-1. 期待報酬関数 $R_i(j)$

j	0	1	2	3	4	5
$R_1(j)$	0	1	1.8	2.4	2.8	3.0
$R_2(j)$	0	2	3.5	4.9	5.2	5.4

表 4-2. 資源の最適使用量 $k(m;1)$ と $k(m;2)$

m	1	2	3	4	5
$k(m;1)$	1	1	2	2	2
$k(m;2)$	1	2	3	3	3

源があり、タイプ 2 の目標物が現れている時には 3 個の資源を利用するのが最適である。定理4-1の主張に一致して、$k(m;i)$（i=1,2）は m に関して非減少であることに注意する。

(b) $\Pr\{N\leq n_1\}=1$ となるような n_1 が存在する場合

$q_1=q_2=\cdots=\alpha$の代わりに q_1=0.9、q_2=0.8、q_3=0.5、q_4=0.2、q_5=0.1、q_6=0 として、例(a)を考える。簡単な計算により最適政策が表4-3と4-4のように求められる。定理4-1と系で証明されたように $k(n,m;i)$（i=1,2）は m と n に関して非減少である。

表 4-3. 資源の最適使用量 $k(n,m;1)$

n \ m	1	2	3	4	5
1	1	1	2	2	3
2	1	2	2	3	3
3	1	2	3	4	4
4	1	2	3	4	5
5	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5

表 4-4. 資源の最適使用量 $k(n,m;2)$

n \ m	1	2	3	4	5
1	1	1	3	3	3
2	1	2	3	3	3
3	1	2	3	3	4
4	1	2	3	4	5
5	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5

4-4 結言

この章では意思決定者が目標物の出現確率を正確には知らない場合（第4-2節）と計画期間の長さが未知な場合（第4-3節）の離散時間逐次資源配分を考察した。得られた主な結果は次のとおりである：

- 第4-2節では出現確率の分布が何であれ、利用すべき最適な資源の個数は手持ち資源の個数の非減少関数である。
- また、利用すべき最適な資源の個数が残り期間の長さの非増加関数であるための十分条件も導出した。
- 第4-3節では目標物に利用すべき最適な資源の利用個数は手持ち資源の個数の非減少関数で経過期間の長さの非減少関数であることを示した。

これらの結果は、目標物の出現確率が既知で計画期間が固定されている、前章で扱われているモデルに関するものの一般化である。特に、経過期間が長くなればなるほどその期で計画期間終了する可能性が増加することが、利用すべき最適な資源の個数が期間の経過と共に増加することと関係があることが分かった。

参考文献

[1] Albright, S. C.: A Bayesian Approach to a Generalized House Selling Problem. Management Science, Vol. 24 (1977), 432-440.

[2] Bertsekas, D. P.: Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice-Hall, New Jersey (1987).

[3] DeGroot, M. H.: Some Problems of Optimal Stopping. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 30 (1968), 108-122.

[4] DeGroot, M. H.: Optimal Statistical Decisions. McGraw-Hill, New York (1970).

[5] Derman, C. G., Lieberman, G. J., and Ross, S. M. : A Stochastic Sequential Allocation Model. Operations Research, Vol. 23 (1975), 1120-1130.

[6] Derman, C., G. J. Lieberman and S. M. Ross: A Renewal Decision Problem. Management Science, Vol. 24 (1978), 554-561.

[7] Derman, C. and D. R. Smith: Renewal Decison Problem - Random Horizon, Mathematics of Operation Research, Vol.4 (1979), 225-232.

[8] Donis, J. M. and S. M. Pollock: Allocation of Resources to Randomly Occuring Opportunities. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 14 (1967), 513-527.

[9] Mastran, D. V. and Thomas, C. J. : Decision Rules for Attacking Targets of Opportunity. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 20 (1973), 661-672.

[10] Nachman, D. C.: Optimal Stopping with a Horizon Constraint. Mathematics of Operations Reseach, Vol.5 (1980), 126-134.

[11] Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: A Sequential Allocation Problemwith Two Kinds of Targets. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 22 (1979), 16-28.

[12] Sakaguchi, M.: A Sequential Allocation Problem for Randomly Appearing Targets. Mathematica Japonica, Vol. 21 (1976), 89-103.

第5章 連続時間逐次資源配分

5-1 緒言

第 3 章と第 4 章では離散時間逐次資源配分を考察した。この章では次のような取替え問題において連続時間逐次資源配分を考察する：
並列冗長システムの保全･取替え問題においては、手持ちユニットが無限にあると仮定し、システム故障に際してユニット全部を取替えるモデルが従来考察されてきた。手持ちユニットが有限ならば、システム故障に際して、取替えユニットがないために、そのまま放置しておかなければならない場合が生じる。そこでこの章では、システム故障に際して、計画期間と残り手持ちユニット数に依存した政策を考察する。計画期間中の総期待費用を最小にするためには、遊休損失費用を覚悟の上でシステムを放置すべきか、または故障ユニットのうち何個取替えるのが最適かについて論じる。

[3,5,6]では、連続する 2 つの決定時点間の経過時間の分布が直前の決定に依存しない、連続時間逐次資源配分が考察されている。[4]では、その分布が直前の決定に依存するが無限個のユニットが利用可能である場合が考察されている。

この章では 2 つの決定時点間の経過時間の分布が直前の決定に依存する次のような連続時間逐次資源配分を考察する。

取替え用に有限個のユニットが利用可能であるという条件のもとで、m-ユニット並列システムを与えられた計画期間の間運転しなければならない。手元にある取替え用ユニットが有限であるのでシステムが故障状態で放置される可能性があることに注意する。従って、遊休期間が生じ機会損失費用がこの遊休期間の間にかかる。Crookes [1]は、（1-ユニット）システム故障時に取替えがなされるか否かが、その故障時点から測ってあらかじめ計画されている次の取替えまでの残り時間が、与えられた値よりも大きいか小さいかによって決まるような、取替え政策を考察している。これをわれわれの m-ユニット並列システム用に修正し、考察する政策を次のような政策に限定する：
システムが故障した時に、故障したユニットのすべてかまたはいくつかを新しいものと取替えるか、または、壊れたシステムを計画期間が終了するまでそのまま放置する。システムが故障した直後にだけ意思決定が可能であることに注意する。従って、もし、「放置する」という決定がなされた場合は計画期間が終了するまでシステムは休んでいる。取替え用に有限個のユニットが利用可能である時に、与えられた計画期間中にかかる総期待費用を最小にするにはどのような逐次ユニット配分政策に従えばよいだろうか？

この章においても前の 2 章と同様に動的計画法を適切に用いて定式化し、得られた再起関係式（関数方程式）を分析することにより、最適政策の性質を解析的に導出することが目的である。第5-2節でこの問題を動的計画法を利用して定式化する。第5-3節で m=2 の時の最適政策のいくつかの性質を導出し、簡単な例を紹介する。

5-2 定式化

各ユニットが年令とともに確率的に劣化する m-ユニット並列システムを考える。システムが故障するのは m 個のユニットすべてが故障する時であることに注意する。システムが故障した時、故障した i 個（$1 \le i \le m$）のユニットを新しいものと取替えるか、または、故障したシステムをそのまま計画期間終了まで放置するか、の決定が可能であると仮定する。システムが故障した直後にのみ意思決定がなされることに注意する。結果として、「放置する」決定がなされると、計画期間が終了するまでシステムは休み、機会損失費用がこの遊休期間にかかる。目的は、計画期間が X で、計画期間の最初に N 個の取替え用ユニットが利用可能である時に、総期待費用を最小にする逐次ユニット配分政策を見つけることである。

このモデルを解析するために、次の記号を定義する：

$f(t)$　= 各ユニットの寿命 T の確率密度関数（*p.d.f.*）、

$F(t)$　= 有限な平均を持つ寿命 T の分布関数（*c.d.f.*）、

C　= 単位時間あたりの遊休損失費用（C>0）、

L　= 取替え時の固定費用（$L \ge 0$）、

K　= ユニット当たりの取替え費用（K>0）、

$V_n(x)$　= 取替え用のユニットがまだ手元に n 個残っており、システムが故障した直後の計画期間終了までの残り時間が x で、最適政策を利用している時の総期待費用。

最適性の原理より、$0 \le x \le X$、n=1,…,N の時、次の再帰関係式を得る：

$$V_n(x) = \min\left\{Cx, \min_{j=1,\ldots\min\{m,n\}}\left\{L + jK + \int_0^x V_{n-j}(x-t)\,j\left(F(t)\right)^{j-1} f(t)dt\right\}\right\} \qquad (5\text{-}1)$$

$$V_0(x)=Cx \tag{5-2}$$

再帰関係式(5-1)は次のようにして得られる：
もし、システムが放置されると、われわれのモデルでは計画期間の終了時点まで意思決定をする機会がないので、機会損失費用 Cx がかかる。もし、j 個（$j=1,\ldots,\min\{m,n\}$）のユニットを取替えるなら、まず、取替え費用として $L+jK$ の費用がかかり、以後の最小費用としては（j-ユニットの並列システムの寿命の $p.d.f.$ は $j(F(t))^{j-1}f(t)$ であるので）$\int_0^x V_{n-j}(x-t)j\left(F(t)\right)^{j-1}f(t)dt$ がかかる。従って、再帰関係式(5-1)が得られる。取替え用のユニットが手元にない場合はシステムを放置しておく以外に方法がないので再帰関係式(5-2)が得られる。

残念なことにこの再帰関係式を陽に解くことは困難である。しかし、$m=2$（2-ユニットシステム）の場合は以下の節で示すように、最適政策のいくつかの性質が導出される

5-3 最適政策

再帰関係式(5-1)と(5-2)から最適政策が得られるが、この関係式を陽に解くことは困難である。そこで、この節では最適政策のいくつかの性質を考察する。

最初に、システムを放置しておくのが最適である領域を決定する。

定理 5-1.
$CE(T)>L+K$、$CE(\max\{T_1,T_2\})>L+2K$、かつ、
$L+K-CE(T)+CT_F(x_1^*)=0$ と $L+2K-CE\left(\max\{T_1,T_2\}\right)+CT_{F_2}(x_2^*)=0$ を満たす x_1^* と x_2^* が存在するならば、

$$V_1(x)=\begin{cases} Cx & \left(x\le x_1^*\right) \\ L+K+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt & \left(x>x_1^*\right) \end{cases}$$

$$V_n(x)\begin{cases} =Cx & \left(x\le \min\{x_1^*,x_2^*\}\right) \\ <Cx & \left(x> \min\{x_1^*,x_2^*\}\right) \end{cases} \quad \left(n=2,\ldots,N\right)$$

である。ここで、$E(T)=\int_0^\infty tdF(t)$、$T_F(x)=\int_x^\infty (t-x)dF(t)$、$F_2(t)=\left(F(t)\right)^2$ であり、T_1 と T_2 は独立で、同じ分布関数 F に従っている確率変数である。

証明： 再帰関係式(5-1)で m=2、n=1 とおいて、

$$V_1(x) = \min\left\{Cx, L + K + \int_0^x C(x-t)f(t)dt\right\}$$

$$= Cx + \min\left\{0, L + K - CE(T) + CT_F(x)\right\}$$

DeGroot [2]が示したように、変換 $T_F(x)$は非負で、x の凸狭義単調減少関数である。ゆえに $V_1(x)$の形は定理に示したようになる。

次に、 $x \le \min\left\{x_1^*, x_2^*\right\}$ 、k=n−1,n の時、$V_k(x)$=Cx と仮定する。

$$V_{n+1}(x) = \min\left\{Cx, L + K + \int_0^x V_n(x-t)f(t)dt, L + 2K + \int_0^x V_{n-1}(x-t)2F(t)f(t)dt\right\}$$

$x \le \min\left\{x_1^*, x_2^*\right\}$ の時、中括弧の第 2 項と第 3 項は、各々、次のように計算される：

$$L + K + \int_0^x V_n(x-t)f(t)dt = L + K + \int_0^x C(x-t)f(t)dt$$

$$= Cx + L + K - CE(T) + CT_F(x)$$

$$\ge Cx$$

ここで等号は $x = x_1^*$ の時のみ成立する。

$$L + 2K + \int_0^x V_{n-1}(x-t)2F(t)f(t)dt = L + 2K + \int_0^x C(x-t)2F(t)f(t)dt$$

$$= Cx + L + 2K - CE\left(\max\{T_1, T_2\}\right) + CT_{F_2}(x)$$

$$\ge Cx$$

ここで等号は $x = x_2^*$ の時のみ成立する。これらより $x \le \min\left\{x_1^*, x_2^*\right\}$ の時、$V_{n+1}(x)$=Cx であることが示された。明らかに、$x \le x_1^*$ の時、$V_0(x)$=$V_1(x)$=Cx であるので、帰納法より、$x \le \min\left\{x_1^*, x_2^*\right\}$ かつ n=2,…,N の時、$V_n(x)$=Cx であることが証明された。

次に $x > \min\left\{x_1^*, x_2^*\right\}$ かつ n=2,…,N の時に、$V_n(x)$<Cx であることを示す。上述の結果より次が成立する：

$$Cx = \begin{cases} L+K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt & \left(x = x_1^*\right) \\ L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt & \left(x = x_2^*\right) \end{cases}$$

n=2,…,N の時に次の不等式を示せば証明は終わる。

$$\frac{d}{dx}\left(L+K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt\right) < (\leq) C \qquad \left(x = (>) x_1^*\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt\right) < (\leq) C \quad \left(x = (>) x_2^*\right)$$

これは、$V_{n-1}(0)=V_{n-2}(0)=0$ であるので、次のことに注意すれば、帰納法により、容易に証明できる。

$$\frac{d}{dx}\left(L+K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt\right) = \int_0^x \frac{d}{dx} V_{n-1}(x-t)f(t)dt$$

$$\frac{d}{dx}\left(L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt\right) = \int_0^x \frac{d}{dx} V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt$$

（証明終わり）

m>2 の時も同様の結果を容易に示す事ができるが煩雑なため省略する。

この定理より、手元に 1 個のユニットしかない時、残り時間が x_1^* より短かいか等しければ、システムを放置するのが最適であり、残り時間が x_1^* より長ければ、1 個のユニットを取替えるのが最適である。手元に 2 個以上のユニットがある時、残り時間が $\min\left\{x_1^*, x_2^*\right\}$ より短いか等しければ、システムを放置するのが最適であり、$\min\left\{x_1^*, x_2^*\right\}$ より長ければ、1 個か 2 個のユニットを取替えるのが最適である。

しばらくの間、L=0 の特別な場合を考察する。2 個のユニットを取替えることが不利であることは直感的に明らかである。これが次の定理で示される。

定理 5-2.
$CE(T) > K$ 、かつ、 $K - CE(T) + CT_F(x_1^*) = 0$ を満たす x_1^* が存在するならば、

$$V_n(x) = \begin{cases} Cx & \left(x \leq x_1^*\right) \\ K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt & \left(x > x_1^*\right) \end{cases} \quad \left(n = 1, \ldots, N\right)$$

となる。

証明： 定理5-1より、 $x_1^* < x_2^*$ と

$K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt < 2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt\ \left(x > x_1^*\right)$を示せば十分である。

$T_{F_2}(x)=T_F(x)+F(x)T_F(x)+\int_x^\infty T_F(t)f(t)dt$ と $E\left(\max\{T_1,T_2\}\right)=E(T)+\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt$ より、

$$
\begin{aligned}
&2K-CE\left(\max\{T_1,T_2\}\right)+CT_{F_2}(x_1^*)\\
&=K-CE(T)+CT_F(x_1^*)+K-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt+CF(x_1^*)T_F(x_1^*)+C\int_{x_1^*}^\infty T_F(t)f(t)dt\\
&=K\left(1-F(x_1^*)\right)+C\left(T_F(0)F(x_1^*)-\int_0^{x_1^*}T_F(t)f(t)dt\right)>0
\end{aligned}
$$

となる。ゆえに、$x_1^* < x_2^*$である。

$x > x_1^*$の時に 2 個のユニットを取替えるのが最適でないことを証明するために、2 個のユニットを取替えてその後最適政策を利用する時にかかる期待費用（A とおく）と 2 個のユニットを 1 個ずつ取替えてその後最適政策を利用する時にかかる期待費用（B とおく）を比較する。すなわち、

$$A=2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt$$

$$B=K+\int_0^x\left(K+\int_0^{x-t}V_{n-2}(x-t-u)f(u)du\right)f(t)dt$$

$D1=\left\{(t,u)\mid 0<t<x, 0<u<x\right\}, D2=\left\{(t,u)\mid 0<t<x, 0<u<x, 0<t+u<x\right\}$ とおく。

$(t,u)\in D2$ のとき、$\max\{t,u\}\le t+u$ であり、$V_{n-2}(\cdot)$は非減少であるので、

$$
\begin{aligned}
&A-B=2K+\iint_{D1}V_{n-2}\left(x-\max\{t,u\}\right)f(t)f(u)dtdu\\
&-\left\{K\left(1+F(x)\right)+\iint_{D2}V_{n-2}\left(x-t-u\right)f(t)f(u)dtdu\right\}\\
&\ge K\left(1-F(x)\right)+\iint_{D2}\left(V_{n-2}\left(x-\max\{t,u\}\right)-V_{n-2}\left(x-t-u\right)\right)f(t)f(u)dtdu\ge 0
\end{aligned}
$$

となる。（証明終わり）

$m>2$ の時も同様の結果を容易に示す事ができるが煩雑なので省略する。

定理5-2は $L=0$ の特別な場合の最適政策の構造を示している。同じ証明方法で

L>0 の場合に 1 個のユニットを取替えるのが最適であるための十分条件が得られる。

定理 5-3.

$x > x_1^*$ かつ $K/(L+K) \geq F(x)$ ならば、残り時間が x で 2 個以上の取替え用ユニットが手元にある時、1 個のユニットを取替えるのが最適である。

m>2 の時は、次のことが示される：

$x > x_1^*$ かつ $\dfrac{K}{L+K} \geq \left(F(x)+\cdots+F^{(\min\{m,n\}-1)}(x)\right)$ ならば、残り時間が x で 2 個以上の取替え用ユニットが手元にある時、1 個のユニットを取替えるのが最適である。ただし、$F^{(i)}$ は F の i-重の畳込みである。

次の定理5-4と5-5は残り時間が少し増えても同じ決定が最適であるための十分条件に関している。

定理 5-4.

$n \geq 2$ に対して、$V_n(y) = L + K + \int_0^y V_{n-1}(y-t)f(t)dt$ であり、

$$0 < x - y \leq \begin{cases} \infty & (n=2) \\ x_1^* & (n=3) \\ \min\{x_1^*, x_2^*\} & (n=4,\ldots) \end{cases} \quad 、$$

$xF(x) - yF(y) - \int_y^x tf(t)dt - x\left((F(x))^2 - (F(y))^2\right) + \int_y^x t2F(t)f(t)dt \leq -\dfrac{d(y)}{C}$ ならば、

$V_n(x) = L + K + \int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt$ である。ただし、

$d(y) = \left(L + K + \int_0^y V_{n-1}(y-t)f(t)dt\right) - \left(L + 2K + \int_0^y V_{n-2}(y-t)2F(t)f(t)dt\right)$ である。

証明： $d(x) \leq 0$ を示せば十分である。次のことが成立することに注意する：

$$\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt \leq \int_0^y \left(V_{n-1}(y-t) + C(x-y)\right) f(t)dt + \int_y^x C(x-t)f(t)dt$$

が成り立ち

$$L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt+d(x)\le L+2K+\int_0^y V_{n-2}(y-t)2F(t)f(t)dt+d(y)$$
$$+\int_0^y C(x-y)f(t)dt+\int_y^x C(x-t)f(t)dt$$

が示される。仮定より $\int_y^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt=\int_y^x C(x-t)2F(t)f(t)dt$ かつ

$V_{n-2}(y-t)-V_{n-2}(x-t)\le 0$ であるので、

$$\begin{aligned}&d(x)\le d(y)\\&+C\left\{xF(x)-yF(y)-\int_y^x tf(t)dt-x\left((F(x))^2-(F(y))^2\right)+\int_y^x t2F(t)f(t)dt\right\}\\&\le d(y)-d(y)\le 0\end{aligned}$$

である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

定理 5-5.
$n\ge 2$ に対して、$V_n(y)=L+2K+\int_0^y V_{n-2}(y-t)2F(t)f(t)dt$ であり、

$$0<x-y\le\begin{cases}x_1^* & (n=2)\\ \min\{x_1^*,x_2^*\} & (n=3,\dots)\end{cases}、$$

$x\left(F(x)\right)^2-y\left(F(y)\right)^2-\int_y^x t2F(t)f(t)dt-x\left(F(x)-F(y)\right)+\int_y^x tf(t)dt<\dfrac{d(y)}{C}$ ならば、

$V_n(x)=L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt$ である。

証明：　次の関係式を利用して定理5-4と同様に $d(x)>0$ を示すことができる。

$$\begin{aligned}&\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt\\&\le\int_0^y \left(V_{n-2}(y-t)+C(x-y)\right)2F(t)f(t)dt+\int_y^x C(x-t)2F(t)f(t)dt\end{aligned}$$

（証明終わり）

定理5-1や定理5-3、5-4、5-5で残り時間が短い時や短くない時の最適政策を論じてきた。定理5-6は残り時間が十分に長い場合を扱う。定理5-6を述べる前に次の補助定理が必要である。

補助定理

$$\begin{cases} V_0(x) = Cx \\ V_1(x) = \min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt\right\} \\ V_n(x) = \min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt, L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt\right\} \\ \qquad (n=2,3,\ldots,N) \end{cases}$$

ならば、$\lim_{x\to\infty}\left(V_n(x)-Cx\right)=v_n$ は存在し、次の関係を満たす。

$$\begin{cases} v_0 = 0, \\ v_1 = \min\{0, L+K-CE(T)\}, \\ v_n = \min\left\{0, L+K-CE(T)+v_{n-1}, L+2K-CE(T)-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt+v_{n-2}\right\} \\ \qquad (n=2,3,\ldots,N) \end{cases}$$

証明： $V_0(x)-Cx=Cx-Cx=0$ より、$v_0=0$ である。
$V_1(x)-Cx=\min\{0,L+K-CE(T)+CT_F(x)\}$ であるので、$v_1=\min\{0,L+K-CE(T)\}$ となる。

$k\leq n$（$n\geq 2$）の時、$\lim_{x\to\infty}\left(V_k(x)-Cx\right)=v_k$ が存在すると仮定する。

$$V_{n+1}(x)-Cx = \min\left\{\begin{array}{l} 0, L+K+\int_0^x\left(V_n(x-t)-C(x-t)\right)f(t)dt - C\int_0^\infty \min\{x,t\}f(t)dt, \\ L+2K+\int_0^x\left(V_{n-1}(x-t)-C(x-t)\right)2F(t)f(t)dt \\ -C\int_0^\infty \min\{x,t\}2F(t)f(t)dt \end{array}\right\}$$

$\min\{x,t\}\leq t$、$\int_0^\infty tf(t)dt = E(T) < \infty$ より、

$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty \min\{x,t\}f(t)dt = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty}\min\{x,t\}f(t)dt = E(T)$。さらに、

$\lim_{x\to\infty}\int_0^x\left(V_n(x-t)-C(x-t)\right)f(t)dt = v_n$, $\lim_{x\to\infty}\int_0^x\left(V_{n-1}(x-t)-C(x-t)\right)2F(t)f(t)dt = v_{n-1}$ である。ゆえに、

$$v_{n+1} = \min\left\{0, L+K-CE(T)+v_n, L+2K-CE(T)-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt+v_{n-1}\right\}$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

定理 5-6.

$CE(T)>L+K$ と仮定する。x が十分大きい時に次の(i)、(ii)が成立する：

(i)　　$L<C\int_0^\infty \left(1-F(t)\right)^2 dt$ ならば、

$$V_n(x) = L+K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt \quad (n=2,3,\ldots,N)$$ である。

(ii)　　$L>C\int_0^\infty \left(1-F(t)\right)^2 dt$ ならば、

$$V_n(x) = L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt \quad (n=2,4,6,\ldots)$$ である。

証明：　$\lim_{x\to\infty} V_n(x)$ は存在しないが、上述の補助定理より、$\lim_{x\to\infty}\left(V_n(x)-Cx\right)=v_n$ は存在し、次の関係を満たす。

$$\begin{cases} v_0 = 0, \\ v_1 = \min\{0, L+K-CE(T)\}, \\ v_n = \min\left\{0, L+K-CE(T)+v_{n-1}, L+2K-CE(T)-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt+v_{n-2}\right\} \\ \qquad (n=2,3,\ldots,N) \end{cases}$$

$L+C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt-CE(T) = L-C\int_0^\infty \left(1-F(t)\right)^2 dt<0$ ならば、

$v_1-v_0<K-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt$ であり、

$L+K-CE(T)+v_{n-1}<L+2K-CE(T)-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt+v_{n-2} \quad (n=2,3,\ldots,N)$ となることが帰納法で証明できる。また、$L-C\int_0^\infty \left(1-F(t)\right)^2 dt>0$ ならば、

$L+K-CE(T)+v_{n-1}>L+2K-CE(T)-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt+v_{n-2} \quad (n=2,4,\ldots)$ であることが帰納法で示される。$\lim_{x\to\infty}\left(L+K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt-Cx\right)=L+K-CE(T)+v_{n-1}$

かつ

$$\lim_{x\to\infty}\left(L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt-Cx\right)=L+2K-CE(T)-C\int_0^\infty T_F(t)f(t)dt+v_{n-2}$$

に注意すれば、証明は完了する。　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

定理5-6によれば、残り時間が十分に長い時、$L<C\int_0^\infty(1-F(t))^2\,dt$ ならば 1 個のユニットを取替えることが最適であり、$L>C\int_0^\infty(1-F(t))^2\,dt$ で偶数個の取替え用ユニットが手元にあるならば 2 個のユニットを取替えることが最適である。この結果は次の等式を参考にすれば直感と一致する：

n が偶数であるとき、

$$\begin{aligned}&\{n(L+K)+C(x-nE(T))\}-\left\{\frac{n}{2}L+nK+C\left(x-\frac{n}{2}E(\max\{T_1,T_2\})\right)\right\}\\&=\frac{n}{2}\{L-C(2E(T)-E(\max\{T_1,T_2\}))\}\\&=\frac{n}{2}\left\{L-C\int_0^\infty(1-F(t))^2\,dt\right\}\end{aligned}$$

であり、n が奇数であるとき、

$$\begin{aligned}&\{n(L+K)+C(x-nE(T))\}\\&-\left\{\left(\frac{n-1}{2}+1\right)L+nK+C\left(x-\left(\frac{n-1}{2}\right)E(\max\{T_1,T_2\})-E(T)\right)\right\}\\&=\frac{n-1}{2}\left\{L-C\int_0^\infty(1-F(t))^2\,dt\right\}\end{aligned}$$

である。

指数寿命の例

前項で最適政策のいくつかの性質を議論した。ここでは $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ で n=2 の時の最適政策を求める。

$CE(T)>L+K$、$CE(\max\{T_1,T_2\})>L+2K$ と仮定する。定理5-1より、

$$V_2(x)=\begin{cases} Cx & \left(x\le \min\left\{x_1^*,x_2^*\right\}\right) \\ \min\left\{\begin{array}{l} L+K+\int_0^x V_1(x-t)f(t)dt, \\ L+2K+\int_0^x V_0(x-t)2F(t)f(t)dt \end{array}\right\} & \left(x> \min\left\{x_1^*,x_2^*\right\}\right) \end{cases}$$

$$V_1(x)=\begin{cases} Cx & \left(x\le x_1^*\right) \\ Cx+CT_F(x)+L+K-CE(T) & \left(x> x_1^*\right) \end{cases}$$

である。$h(x)$を次のように定義する：

$$h(x)=\left\{L+K+\int_0^x V_1(x-t)f(t)dt\right\}-\left\{L+2K+\int_0^x V_0(x-t)2F(t)f(t)dt\right\}\left(x\ge x_1^*\right)$$

簡単な計算により次式を得る：

$$h(x)=C\left\{\int_0^x\left(1-F(t)\right)F(t)dt-\int_0^{x-x_1^*}\left(1-F(x-t)\right)F(t)dt-\frac{K}{C}\right\}$$

$$\lim_{x\to x_1^*+0} h'(x)=CF(x_1^*)\left(1-F(x_1^*)\right)>0,\ \lim_{x\to\infty}h(x)=C\left\{\frac{L}{C}-\int_0^\infty\left(1-F(t)\right)^2 dt\right\}$$

システムを放置しておくのが最適である領域 D_0、1 個のユニットを取替えるのが最適な領域 D_1、2 個のユニットを取替えるのが最適な領域 D_2 は次のように表される：

$x_1^*>x_2^*$ ならば、 $D_0=\left\{x\mid x\le x_2^*\right\},D_1=\left\{x\mid h(x)\le 0\right\},D_2=\left\{x\mid x_2^*<x<x_1^* \text{ or } h(x)>0\right\}$。

$x_1^*<x_2^*$ ならば、 $D_0=\left\{x\mid x\le x_1^*\right\},D_1=\left\{x\mid h(x)\le 0 \text{ and } x>x_1^*\right\},D_2=\left\{x\mid h(x)>0\right\}$。

$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ を $h(x)$に代入して、

$$x_1^*=\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\left(1-\frac{\lambda(L+K)}{C}\right)^{-1}\right\}$$

$$h(x)=C\left\{\frac{L}{C}+e^{-\lambda x}(x-x_1^*)-\frac{1-e^{-2\lambda x}}{2\lambda}\right\}$$

となる。$L+K<C/\lambda$、$L+2K<3C/(2\lambda)$と仮定したことに注意する。煩雑な計算であるので詳細は省略するが、次の結果を得る。

$(L+K)^2 < \dfrac{2CK}{\lambda}\left(x_1^* < x_2^*\right)$ ならば、$x > x_1^*$ の時 $h(x) \le 0$ である。

$(L+K)^2 > \dfrac{2CK}{\lambda}\left(x_1^* > x_2^*\right)$ かつ $L > \dfrac{C}{2\lambda}$ ならば、$x > x_1^*$ の時 $h(x) > 0$ である。

また、$(L+K)^2 > \dfrac{2CK}{\lambda}$ かつ $L < \dfrac{C}{2\lambda}$ ならば、$x_1^* < x < x_{12}^*$ の時 $h(x) > 0$ で $x > x_{12}^*$ の時 $h(x) < 0$ である。

ここで、$x_2^* = \dfrac{1}{\lambda}\ln\left\{\left(2-\sqrt{1+\dfrac{2\lambda(L+2K)}{C}}\right)^{-1}\right\}$ であり、

x_{12}^* は $\dfrac{C\left(1-e^{-2\lambda x_{12}^*}\right)}{2\lambda} - L - Ce^{-\lambda x_{12}^*}\left(x_{12}^* - x_1^*\right) = 0$ を満たすものとする。

従って、取替え用ユニットが手元に 2 個ある時の最適政策は次のようになる（図 5-1参照）：

領域 1 では

$x \le x_1^*$	の時	システムを放置する	のが最適である。
$x > x_1^*$		1 個のユニットを取替える	

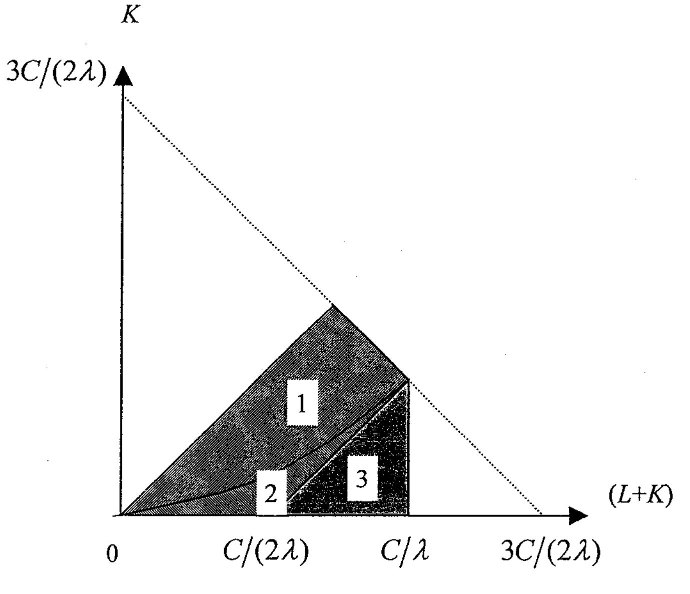


図 5-1. 2-ユニットシステムの最適政策
手元に 2 個のユニットがある場合

領域 2 では

$x \le x_2^*$	の時	システムを放置する	のが最適である。
$x_2^* < x < x_{12}^*$		2 個のユニットを取替える	
$x \ge x_{12}^*$		1 個のユニットを取替える	

領域 3 では

$x \le x_2^*$	の時	システムを放置する	のが最適である。
$x > x_2^*$		1 個のユニットを取替える	

今、導出した n=2 の時の最適政策の構造から、n>2 の時も、残り時間が長ければより少ないユニットを取替えるのが最適と予測されるが、この推測は必ずしも正しくない事が示される。

補題 5-1.
非負の列$\{V_n(x)\}$は任意の x に対して n の非増加数列である。

証明： $$V_1(x) = \min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt\right\} \le Cx = V_0(x)$$

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V_1(x-t)f(t)dt, L+2K+\int_0^x V_0(x-t)2F(t)f(t)dt\right\} \\ &\le \min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt\right\} = V_1(x) \end{aligned}$$

k=n−1、n の時に $V_{k-1}(x) \ge V_k(x)$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x) &= \min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V_n(x-t)f(t)dt, L+2K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)2F(t)f(t)dt\right\} \\ &\le \min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V_{n-1}(x-t)f(t)dt, L+2K+\int_0^x V_{n-2}(x-t)2F(t)f(t)dt\right\} \\ &= V_n(x) \end{aligned}$$

となる。 （証明終わり）

補題5-1より、$V(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x)$ を定義することができる。

$\int_0^x V_n(x-t)f(t)dt \le \int_0^x C(x-t)f(t)dt < \infty$ から

$\lim_{n\to\infty}\int_0^x V_n(x-t)f(t)dt=\int_0^x \lim_{n\to\infty}V_n(x-t)f(t)dt$ であるので、この $V(x)$は次の関数方程式を満たす：

$$V(x)=\min\left\{Cx, L+K+\int_0^x V(x-t)f(t)dt, L+2K+\int_0^x V(x-t)2F(t)f(t)dt\right\}$$

定理5-1と x_1^* と x_2^* の定義から

$$V(x)\begin{cases}=Cx & \left(x\le\min\left\{x_1^*,x_2^*\right\}\right)\\ <Cx & \left(x>\min\left\{x_1^*,x_2^*\right\}\right)\end{cases}$$

となる。$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ の場合には上記の関数方程式を解くことができる。以前と同様に $L+K<C/\lambda$、$L+2K<3C/(2\lambda)$と仮定する。

$K\ge L$ ならば、

$$V(x)=\begin{cases}Cx & \left(x\le x_1^*=\left\{\ln\left(1-\lambda(L+K)/C\right)^{-1}\right\}/\lambda\right)\\ \lambda(L+K)\left(x-x_1^*\right)+Cx_1^* & \left(x>x_1^*\right)\end{cases}$$

$K<L$ かつ $(L+K)^2<2CK/\lambda$ならば、

$$V(x)=\begin{cases}Cx & \left(x\le x_1^*\right)\\ \lambda(L+K)\left(x-x_1^*\right)+Cx_1^* & \left(x_1^*<x\le x_{12}^{**}\right)\\ 2\lambda(L+2K)x/3+a_1e^{-3\lambda x}+a_2 & \left(x>x_{12}^{**}\right)\end{cases}$$

ここで、

$$x_{12}^{**}=\frac{1}{2\lambda}\ln\left\{\frac{L+K}{(L-K)\left(1-\lambda(L+K)/C\right)}\right\}、\quad a_1=\frac{2(L-K)}{9}e^{3\lambda x_{12}^{**}}、$$

$$a_2=C\left(1-\frac{\lambda(L+K)}{C}\right)x_1^*+\frac{\lambda(L-K)}{3}x_{12}^{**}-\frac{2}{9}(L-K)\quad \text{である。}$$

$(L+K)^2>2CK/\lambda$ならば、

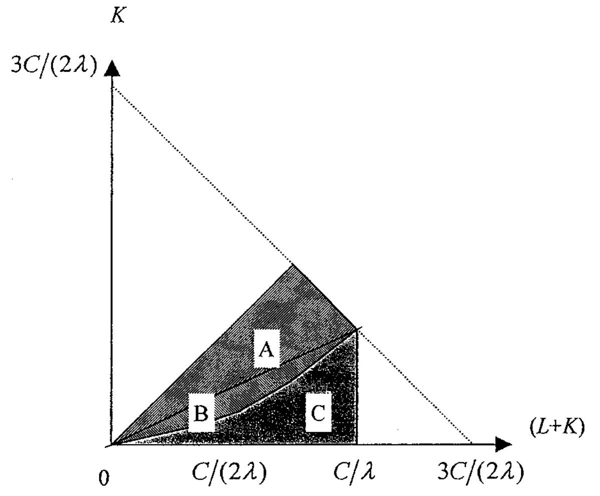


図 5-2. 2-ユニットシステムの最適政策
手元に無限個のユニットがある場合

$$V(x)=\begin{cases} Cx & \left(x \le x_2^*\right) \\ \dfrac{2}{3}\lambda(L+2K)x+a_3e^{-3\lambda x}+a_4 & \left(x > x_2^*\right) \end{cases}$$

ここで、

$$x_2^*=\frac{1}{\lambda}\ln\left(2-\sqrt{1+\frac{2C(L+2K)}{\lambda}}\right)^{-1}$$

$$a_3=\frac{1}{9}\left(\frac{3C}{2\lambda}-(L+2K)\right)e^{3\lambda x_2^*}-\frac{C}{6\lambda}e^{\lambda x_2^*}$$

$$a_4=\frac{2\lambda}{3}\left(\frac{3C}{2\lambda}-(L+2K)\right)x_2^*-\frac{1}{9}\left(\frac{3C}{2\lambda}-(L+2K)\right)+\frac{C}{6\lambda}e^{-2\lambda x_2^*}$$

である。

ゆえに、手元に無限個の取替え用ユニットがある場合の最適政策は次のようになる（図5-2参照）：

領域 A では

$x \le x_1^*$	の時	システムを放置する	のが最適である。
$x > x_1^*$		1 個のユニットを取替える	

領域 B では

$x \le x_1^*$	の時	システムを放置する	のが最適である。
$x_1^* < x \le x_{12}^{**}$		1 個のユニットを取替える	
$x > x_{12}^{**}$		2 個のユニットを取替える	

領域 C では

$x \le x_2^*$	の時	システムを放置する	のが最適である。
$x > x_2^*$		2 個のユニットを取替える	

$V(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x)$ であるので、残り時間が長ければより少ないユニットを取替えるのが最適という推測は正しくない。

L と K の様々な値に対して $x_1^*, x_2^*, x_{12}^*, x_{12}^{**}$ の値が表5-1に与えられている。ただし、λ=C=1 とした。

表 5-1. さまざまな $x_1^*, x_2^*, x_{12}^*, x_{12}^{**}$ の値

K	L	領域	x_1^*	x_2^*	x_{12}^*	x_{12}^{**}
0.01563	0.2344	2,C	——	0.2711	1.782	——
0.0625	0.1875	1,B	0.2877	——	——	0.4904
0.1875	0.0625	1,A	0.2877	——	——	——
0.0625	0.4375	2,C	——	0.6120	3.959	——
0.1875	0.3125	1,B	0.6931	——	——	1.0397
0.3750	0.1250	1,A	0.6931	——	——	——
0.1250	0.6250	3,C	——	1.0739	——	——
0.2656	0.4844	2,C	——	1.3511	5.597	——
0.3125	0.4375	1,B	1.3863	——	——	1.5890
0.5000	0.2500	1,A	1.3863	——	——	——

5-4 結言

この章では連続時間逐次資源配分である並列冗長システムの逐次部品取替え問題を考察した。2-ユニット系の場合に総期待費用を最小にする最適な部品配分政策の次のような性質を導出した：

- システムが故障した時に放置しておく方が有利な領域が生じる。この領域は残り時間がある臨界値よりも小さい所である。
- 次に、残り時間が少し増えても同じ決定が有利であるための十分条件が得られた。
- また、残り時間が十分長い時に、何個取替えるのが有利かを与える十分条件も導かれた。
- 最後に、寿命分布が指数分布に従う時、手持ちユニットが 2 個の場合と無限の場合の最適政策が陽に求められた。

参考文献

[1] Crookes, P. C. I.: Replacement Strategies. Operational Research Quarterly, Vol. 14 (1963), 167-184.

[2] DeGroot, M. H.: Optimal Statistical Decisions. McGraw-Hill, New York (1970).

[3] Derman, C. G., Lieberman, G. J., and Ross, S. M. : A Stochastic Sequential Allocation Model. Operations Research, Vol. 23 (1975), 1120-1130.

[4] Derman, C., G. J. Lieberman and S. M. Ross: A Renewal Decision Problem. Management Science, Vol. 24 (1978), 554-561.

[5] Donis, J. M. and S. M. Pollock: Allocation of Resources to Randomly Occuring Opportunities. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 14 (1967), 513-527.

[6] Sakaguchi, M.: A Sequential Allocation Problem for Randomly Appearing Targets. Mathematica Japonica, Vol. 21 (1976), 89-103.

第6章 譲渡可能効用ゲームにおける配分とその一貫性

6-1 緒言

複数の参加者（プレイヤー）が全員集まって協力し合いある利益を得た、この参加者たちはその利益を彼らの間でどのように配分するべきであろうか？この章では譲渡可能効用ゲームを利用して、このような複数プレイヤー間の資源配分を考察する。譲渡可能効用ゲームでは全員で協力して得た利益をいかに配分するかを考察する際に、参加者が仮想的に部分的に集まって協力して得られる利益を基準にする。一般的に、譲渡可能効用ゲーム(N,v)はプレイヤーの集合$N:=\{1,\ldots,n\}$と特性関数$v:2^N\rightarrow\mathbb{R}$（ただし、$v(\varnothing)=0$）で与えられる。$N$ の部分集合である提携Sの提携値$v(S)$は提携Sのメンバーが協力して得られる利益を表している。全体提携 N が形成されその提携値 $v(N)$を n 人のプレイヤーに配分しなければならない。第 2 章で紹介したように、このような資源配分には、従来、種々の配分方法（解）が提案されている。しかし、これらの配分方法はそれ自身の公平性の考えから定義されており、それらの違いが明瞭に分かるようにはなっていない。そこでこれらの解を比較可能にするために共通の枠組みで再解釈する試みがなされている。一対交渉一貫性と縮小ゲームによる一貫性がその共通の枠組みである。ある配分方法が一対交渉一貫性を満たすとは任意の一対のプレイヤーが彼らの間で受け取ったものを再配分する動機を持たないことを言う。ある配分方法が縮小ゲームによる一貫性を持つとはプレイヤーがその配分方法により縮小ゲームにおいても元のゲームと同じ値を受け取ることを言う。ここで縮小ゲームとは元のゲームから 1 人のプレイヤーがある利得を得て退場することによって形成されるゲームである。この章の目的は、まず、仁とτ-値を一対交渉一貫性で比較可能なように特徴付け、次に新しい解である EN^{k}AC-値（k人平均寄与の残余均等配分値）を導入し、最後に EN^{k}AC-値とシャープレイ値を縮小ゲームによる一貫性によって特徴付けることである。

破産ゲームと呼ばれるゲームの仁はある基準点に関して一対交渉一貫性を満たす一意な配分であることが知られている（例えば、[1][6]参照)。また、経営者を含む提携に関して擬凹なゲームと呼ばれる別のゲームの仁も同じ基準点に関して一対交渉一貫性を満たす一意な配分であることも知られている（例えば、[7]参照)。すなわち、あるクラスのゲームにおいて、仁は一対交渉一貫性で特徴付けられる。どの程度広いクラスのゲームまでこのことは成立するのであろう

か？第6-2節でこの問いに答える。さらに、準平衡ゲームのτ-値は上記の仁とは異なる基準点に関して一対交渉一貫性を満たす一意の配分であることも考察し、仁とτ-値の違いは基準点の違いであることを示す。

第6-3節では、配分集合の重心（CIS-値）、残余均等配分値（ENSC-値）として従来知られている、譲渡可能効用ゲームの解概念を統一的な方法で扱っている。これらの解は、各参加者がそれぞれの解で定められている個人寄与分を受け取った後でまだ未配分の利益を均等に分ける、というものである。われわれは$k\left(\in\{1,\ldots,n-1\}\right)$人提携にもとづく 2 つの個人寄与（上-、下-$k$ 人平均寄与）を提出し、k 人平均寄与の残余均等配分値（EN^{k}AC-値）と呼ばれる新しい解概念を導入し、その性質を考察する。CIS-値、ENSC-値は各々EN^{1}AC-値、EN^{n-1}AC-値と一致する。

第6-4節では縮小ゲームによる一貫性を利用して EN^{k}AC-値とシャープレイ値の公理的特徴付けを扱う。この縮小ゲームという概念は他の多くのゲーム論的解の公理化に利用されている（Driessen [4]、Driessen *et al.* [9]、Hart *et al.* [11]、Peleg [17][18]、Sobolev [25][26]を参照）。

6-2 一対交渉一貫性による仁とτ-値の関係

6-2-1 一対交渉一貫性

次のような状況を考える：

状況 1：

プレイヤーi とj は総量Xを分けなければならない。プレイヤーi (j) はプレイヤーj (i) に対して $r_{ij}(X)$ ($r_{ji}(X)$) を要求することができる。ただし、

$X\in\mathbb{R}, r^{\{i,j\}}(X):=\left(r_{ij}(X),r_{ji}(X)\right), r_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, r_{ji}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ である。

この場合次のようなルールで分割するのはきわめて自然である。

プレイヤーi とj 間の基準点 r に関する総量 X の自然な分割：

1. プレイヤーi とj は各々まず $r_{ij}(X)$と $r_{ji}(X)$を受け取る。
2. 次に余剰（または、不足）を均等に分ける。

すなわち、自然な分割$ND^{r^{\{i,j\}}}(X):=\left(ND_i^{r^{\{i,j\}}}(X),ND_j^{r^{\{i,j\}}}(X)\right)$はプレイヤー$i$ とj に各々 $ND_i^{r^{\{i,j\}}}(X)$ と $ND_j^{r^{\{i,j\}}}(X)$ を分割する。ただし、

$$ND_i^{r^{\{i,j\}}}(X):=r_{ij}(X)+\frac{X-r_{ij}(X)-r_{ji}(X)}{2}$$

$$ND_j^{r^{\{i,j\}}}(X) := r_{ji}(X) + \frac{X - r_{ij}(X) - r_{ji}(X)}{2}$$

である。
もし、$ND^{r^{\{i,j\}}}(x_i + x_j) = x^{\{i,j\}}$ が成り立てば、プレイヤー i と j の間で総量 $x_i + x_j$ を再配分する動機を持たないので、$x^{\{i,j\}} := (x_i, x_j) \in \mathbb{R}^2$ は基準点 r に関して*交渉一貫性*を満たすという。
　次に少し異なった状況を考える：

状況 2：

プレイヤー i (j) は自分が得られる最小値を $f(i)\left(f(j)\right)$、最大値を $\Delta_i\left(\Delta_j\right)$ と見積もっている。また、彼らに $x_i(x_j)$ が提示されている。ただし、$f(i) \le x_i \le \Delta_i, f(j) \le x_j \le \Delta_j$ とする。彼らは (x_i, x_j) を受け入れるべきであろうか？または、総量 X=x_i+x_j を再配分する動機を持つだろうか？

状況 2 を状況 1 へ変換するために関連する双行列を利用していくつかの基準点を提案する。もし、両方のプレイヤーが慎重に振舞えば、彼らは最小の $f(\cdot)$ を要求する。もし、彼らが大胆に振舞えば、最大の $\Delta_.$ を要求する。しかし、$\left(f(i), f(j)\right)$ と $\left(\Delta_i, \Delta_j\right)$ はパレート最適ではない、すなわち、$f(i) + f(j) < X$、$\Delta_i + \Delta_j > X$ である。結果をパレート最適にするために次のように想定する：プレイヤー i の戦略は行為を「慎重（C)」または「大胆（B)」のどちらかに決め

表 6-1．双行列

		プレイヤー j	
		Y(ou)	I
プレイヤー i	C	$f(i), X - f(i)$	$X - f(j), f(j)$
	B	$\Delta_i, X - \Delta_i$	$X - \Delta_j, \Delta_j$

$$f(i) + f(j) \le X = x_i + x_j \le \Delta_i + \Delta_j$$

る。プレイヤーjの戦略はプレイヤーを「あなた（Y)」または「私（I)」に選ぶ。プレイヤーjが選んだプレイヤーはプレイヤーiが選んだように行為を行い、プレイヤーjに選ばれなかったプレイヤーは総量Xからの残りを受け取る、と仮定する。例えば、プレイヤーiが「C」を選び、プレイヤーjが「I」を選ぶと、プレイヤーjは$f(j)$を得、プレイヤーiは残り$X-f(j)$を得る。従って、表6-1の双行列で与えられた非協力定和ゲームが得られる。

ゲームが定和であるので、どのナッシュ均衡も各プレイヤーに一意の期待利得を与える。また、この期待利得（ゲームの値）は次の$\left(e_{ij}(x), e_{ji}(x)\right)$[1]で与えられる。

$$e_{ij}(x) := f(i) + \frac{\left(x_i + x_j - f(i) - f(j)\right)\left(\Delta_i - f(i)\right)}{\Delta_i - f(i) + \Delta_j - f(j)}$$

$$e_{ji}(x) := f(j) + \frac{\left(x_i + x_j - f(i) - f(j)\right)\left(\Delta_j - f(j)\right)}{\Delta_i - f(i) + \Delta_j - f(j)}$$

（次の表現において分母が 0 であれば、$\frac{Aa_k}{\sum_{i=1}^{m} a_i}\left(a_i \geq 0, i=1,\ldots,m\right)$は 0 とみなす。）

$c_{ij}(x)$と$d_{ij}(x)$を上記の双行列の純粋戦略におけるプレイヤーiのマックスミニ値とミニマックス値とする。同様に、プレイヤーjに対しても定義する。すなわち、

$$c_{ij}(x) := \max\left[f(i), x_i + x_j - \Delta_j\right], \quad d_{ij}(x) := \min\left[\Delta_i, x_i + x_j - f(j)\right]$$

$$c_{ji}(x) := \max\left[f(j), x_i + x_j - \Delta_i\right], \quad d_{ji}(x) := \min\left[\Delta_j, x_i + x_j - f(i)\right]$$

この双行列はx_iやx_jではなく、$X=x_i+x_j$に依存しているので、$c_{\cdot}(x), d_{\cdot}(x), e_{\cdot}(x)$も同様である。次の補題にこれらの値の有用な性質をまとめる。

補題 6-1.
次の関係が成り立つ。

$$e_{ij}(x) + e_{ji}(x) = x_i + x_j \tag{6-1}$$

[1] 正確な表現$e_{ij}(x^{\{i,j\}}), c_{ij}(x^{\{i,j\}}), d_{ij}(x^{\{i,j\}})$の代わりに略記法$e_{ij}(x), c_{ij}(x), d_{ij}(x)$を利用する。ただし、$x^{\{i,j\}} := (x_i, x_j)$である。

$$c_{ij}(x)+d_{ji}(x)=x_i+x_j,\quad c_{ji}(x)+d_{ij}(x)=x_i+x_j \tag{6-2}$$

$$c_{ij}(x)\le e_{ij}(x)\le d_{ij}(x),\quad c_{ji}(x)\le e_{ji}(x)\le d_{ji}(x) \tag{6-3}$$

証明：　この双行列ゲームは定和なので(6-1)が成り立つ。(6-2)は簡単な計算より得られる。(6-3)はゲームの値がマックスミニ値とミニマックス値の中間にあるという行列ゲームの性質である。　（証明終わり）

基準点 r が c,d,e である場合の自然な分割を次の補題で与える。ただし、$c^{\{i,j\}}=(c_{ij},c_{ji}), d^{\{i,j\}}=(d_{ij},d_{ji}), e^{\{i,j\}}=(e_{ij},e_{ji})$ である。

補題 6-2.
r=c,d,e の時の自然な分割は次のように与えられる。

$$ND_i^{c^{\{i,j\}}}(x_i+x_j)=ND_i^{d^{\{i,j\}}}(x_i+x_j)=\frac{c_{ij}(x)+d_{ij}(x)}{2}$$

$$ND_j^{c^{\{i,j\}}}(x_i+x_j)=ND_j^{d^{\{i,j\}}}(x_i+x_j)=\frac{c_{ji}(x)+d_{ji}(x)}{2}$$

$$ND^{e^{\{i,j\}}}(x_i+x_j)=e^{\{i,j\}}(x^{\{i,j\}})$$

証明：　$ND^{c^{\{i,j\}}}$ の定義と $x_i+x_j-c_{ji}(x)=d_{ij}(x)$ （補題6-1）より

$$ND_i^{c^{\{i,j\}}}(x_i+x_j)=c_{ij}(x)+\frac{x_i+x_j-c_{ij}(x)-c_{ji}(x)}{2}$$
$$=\frac{c_{ij}(x)+d_{ij}(x)}{2}$$

また、$x_i+x_j-d_{ji}(x)=c_{ij}(x)$ より

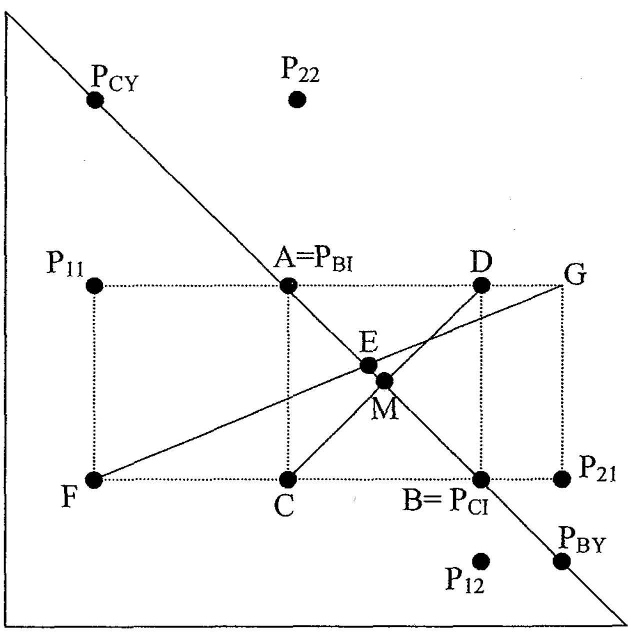
$$ND_i^{d^{\{i,j\}}}(x_i + x_j) = d_{ij}(x) + \frac{x_i + x_j - d_{ij}(x) - d_{ji}(x)}{2}$$
$$= \frac{c_{ij}(x) + d_{ij}(x)}{2}$$

最後に、$e_{ij}(x) + e_{ji}(x) = x_i + x_j$（補題6-1）より、$ND^{e^{\{i,j\}}}(x_i + x_j) = e^{\{i,j\}}(x^{\{i,j\}})$となる。

（証明終わり）

この補題により状況 2 における基準点が c である自然な分割は基準点が d であるものと一致し、A$:=\left(c_{ij}(x), d_{ji}(x)\right)$、B$:=\left(d_{ij}(x), c_{ji}(x)\right)$とおけば、線分 AB の中点で与えられる（図6-1参照）。また、基準点が e である自然な分割は、F$:=\left(f(i), f(j)\right)$、G$:=\left(\Delta_i, \Delta_j\right)$とおけば、線分 AB と線分 FG の交点 E で与えられる（図6-1参照）。

$x \in \mathbb{R}^N$ は $f(i) \le x_i \le \Delta_i \left(i \in N\right)$ を満たし、$r = \left(r_{ij}\right)_{(i,j)\in N\times N, i\ne j}, r_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。ただし、N はプレイヤーの集合である。もし、任意の $i, j \in N\left(i \ne j\right)$ に対して、$x^{\{i,j\}} = (x_i, x_j)$ が基準点 r に関して交渉一貫性を満たすならば、すなわち、$ND^{r^{\{i,j\}}}(x_i + x_j) = x^{\{i,j\}}$ ならば、x は基準点 r に関して*一対交渉一貫性*を満たすという。補題6-1の(6-3)より、c,d,e を基準点とする一対交渉一貫性を、各々、*一対一穏健（貪欲、中間）一交渉一貫性*と呼ぶことにする。



$$A := \left(c_{ij}(x), d_{ji}(x)\right), B := \left(d_{ij}(x), c_{ji}(x)\right), C := \left(c_{ij}(x), c_{ji}(x)\right), D := \left(d_{ij}(x), d_{ji}(x)\right)$$

$$E := ND^{e^{\{i,j\}}}(x_i + x_j) = e^{\{i,j\}}(x^{\{i,j\}}), F := \left(f(i), f(j)\right), G := (\Delta_i, \Delta_j)$$

$$M := ND^{c^{\{i,j\}}}(x_i + x_j) = ND^{d^{\{i,j\}}}(x_i + x_j)$$

$$P_{CY} := \left(f(i), X - f(i)\right), P_{CI} := \left(X - f(j), f(j)\right), P_{BY} := \left(\Delta_i, X - \Delta_i\right)$$

$$P_{BI} := \left(X - \Delta_j, \Delta_j\right)$$

$$P_{11} := \left(f(i), \Delta_j\right), P_{12} := \left(X - f(j), X - \Delta_i\right), P_{21} := \left(\Delta_i, f(j)\right)$$

$$P_{22} := \left(X - \Delta_j, X - f(i)\right)$$

図 6-1. A=P_{BI}、B=P_{CI} の時のプレイヤーへの利得

6-2-2 本質的な提携に関する擬凹ゲーム

(N,v)を譲渡可能効用を持つ提携形ゲームとする。ただし、N はプレイヤーの集合、v は$v(\varnothing)=0$ である*特性関数* $v:2^N \to \mathbb{R}$ である。この項ではコア $Core(N,v)$ が 1 人提携と $n-1$ 人提携のみから決定される必要かつ十分条件を与え、次に交渉集合 $M(v)$がコア $Core(N,v)$に一致する十分条件を提出する。その後、破産問題を例として取り扱う。

命題 6-1.

$f(i):=v(\{i\}), \Delta_i := v(N)-v(N-\{i\})\ (i\in N)$ とする。このとき次の(i)、(ii)、(iii)は同値である。

(i) $$v(S)\le \max\left[\sum_{i\in S} f(i), v(N)-\sum_{i\in N-S}\Delta_i\right]\quad \left(S\subset N, S\neq\varnothing\right) \tag{6-4}$$

$$f(i)\le\Delta_i\ \left(i\in N\right)\quad \sum_{i\in N} f(i)\le v(N)\le\sum_{i\in N}\Delta_i \tag{6-5}$$

(ii) $h(S):=\sum_{j\in S}\Delta_j+\sum_{j\in N-S}f(j)\ (S\subset N)$ とし、

$MC(v):=\left\{S\subset N \mid h(S)\le v(N)<h(S\cup\{i\})\ (\forall i\in N-S)\right\}$[2]とする。

$MC(v)\neq\varnothing$ であり、$R\in MC(v)$ と $i\in N-R$ に対して次のような（R と i に依存する） $x\in Core(N,v)$ が存在する：

$$x_j:=\begin{cases}\Delta_j & \left(j\in R\right)\\ f(j) & \left(j\in N-R-\{i\}\right)\end{cases} \tag{6-6}$$

(iii) コア $Core(N,v)$は非空であり次のように表される：

$$Core(N,v)=\left\{x\in\mathbb{R}^N \mid \sum_{j\in N}x_j=v(N), f(i)\le x_i\le\Delta_i\left(i\in N\right)\right\}$$

証明： （1）：(i)$\Rightarrow$(iii)、（2）：(iii)$\Rightarrow$(ii)、（3）：(ii)$\Rightarrow$(i)の順で証明する。

（1）：(i)$\Rightarrow$(iii)：

[2] $h(N)=v(N)$ならば、$MC(v):=\{N\}$と定義する。

$\sum_{j\in N} x_j = v(N), f(i) \le x_i \le \Delta_i \left(i \in N\right)$ を満たす $x \in \mathbb{R}^N$ が $\sum_{j\in S} x_j \ge v(S)\left(S \subset N\right)$ を満足することを示せばよい。$S \subset N, S \ne \varnothing$ とする。x が満たす条件より、一方で $\sum_{j\in S} x_j \ge \sum_{j\in S} f(j)$ であり、他方で $\sum_{j\in S} x_j = v(N) - \sum_{j\in N-S} x_j \ge v(N) - \sum_{j\in N-S} \Delta_j$ である。従って、(6-4)より

$$\sum_{j\in S} x_j \ge \max\left[\sum_{j\in S} f(j), v(N) - \sum_{j\in N-S} \Delta_j\right] \ge v(S)$$

となる。コアの非空性は(6-5)による。

(2)：(iii) $\Rightarrow$ (ii)：

$H(v) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{j\in N} x_j = v(N), f(i) \le x_i \le \Delta_i \left(i \in N\right)\right\}$ とおく。$H(v) \supset Core(N,v)$ であるので、「$Core(N,v)=H(v)$」$\Leftrightarrow$「$H(v) \subset Core(N,v)$」$\Leftrightarrow$「$H(v)$のすべての端点が $Core(N,v)$の要素である。」が成り立つ。コアの非空性により(6-5)が成り立ち、h は次の性質を持つ：

$$h(S - \{k_1\}) \le h(S) \le h(S \cup \{k_2\}) \quad (k_1 \in S, k_2 \in N - S) \tag{6-7}$$

$$h(\varnothing) \le v(N) \le h(N) \tag{6-8}$$

$h(T) \le v(N) \le h(T \cup \{\iota\}), T \subset N - \{\iota\}$ ならば、次のような $H(v)$の端点 x がある：

$$x_j := \begin{cases} \Delta_j & \left(j \in T\right) \\ f(j) & \left(j \in N - T - \{\iota\}\right) \\ v(N) - \sum_{j\in T} \Delta_j - \sum_{j\in N-T-\{\iota\}} f(j) & \left(j = \iota\right) \end{cases} \tag{6-9}$$

さて、(iii) $\Rightarrow$ (ii) を証明する。(6-7)と(6-8)より $MC(v) \ne \varnothing$ である。$S \in MC(v)$、$i \in N - S$ に対して、(6-9)で T=S、$\iota = i$ とおけば望むコアの要素が得られる。

(3)：(ii) $\Rightarrow$ (i)：

まず、(ii)よりコアは非空であり(6-5)が成立することに注意する。(6-4)は S=N の時、明らかに成り立つ。S は $S \subset N, S \ne \varnothing, S \ne N$ で $v(N) - \sum_{j\in N-S} \Delta_j \ge \sum_{j\in S} f(j)$、すなわち、$h(N-S) \le v(N)$ を満たすと仮定する。(6-7)と(6-8)より $T \supset N - S$ と $T \in MC(v)$ を満たす T が存在する。従って、(6-6)で $R = T \supset N - S$ とおいたコアの

要素 x が存在し

$$v(N)-\sum_{j\in N-S}\Delta_j = v(N)-\sum_{j\in N-S}x_j=\sum_{j\in S}x_j \geq v(S)$$

となる。これより(6-4)が成立する。他方、S は $S\subset N, S\neq\varnothing, S\neq N$ で $\sum_{j\in S}f(j)>v(N)-\sum_{j\in N-S}\Delta_j$、すなわち、$h(N-S)>v(N)$ を満たすと仮定する。(6-7)と(6-8)より $T\subset N-S, T\neq N-S$ と $T\in MC(v)$ を満たす T が存在する。従って、(6-6)で $R=T\subset N-S\ (S\subset N-R)$ かつ $i\in N-S-T$ とおいたコアの要素 x が存在し

$$\sum_{j\in S}f(j)=\sum_{j\in S}x_j\geq v(S)$$

となり、(6-4)が成立する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終わり)

提携 S が $v(S)>\sum_{i\in S}v(\{i\})$ を満たす時、S を*本質的*と呼ぶ。条件(6-4)と(6-5)を満たす時、(N,v)を*本質的な提携に関して擬凹* であるという。もし、S が本質的でなければ(6-4)は自動的に成り立つ。もし、S が本質的なら(6-4) は

$$v(S)\leq v(N)-\sum_{j\in N-S}\left(v(N)-v(N-\{j\})\right)$$

という条件になる。この条件は*擬凹性* と呼ばれる。従って、われわれの定義、本質的な提携に関する擬凹性、は本質的な提携に対してのみ擬凹性を要求する。この用語を利用して上記の命題を次のように系として述べる。

系 6-1.
ゲーム(N,v)が 1 人提携と n−1 人提携のみによって決定される非空のコアをもつための必要十分条件は(N,v)が本質的な提携に関して擬凹であることである。

2 番目の条件(6-5)は単にコアの非空性を保証するだけなので、最初の条件(6-4)の方が重要である。最初の条件(6-4)は、(N,v)が次に述べる経営者を含む提携に関して擬凹なゲームであれば、満たされる。経営者を含む提携に関する擬凹性は[7]と[19]で導入された。$N=M\cup W, M\cap W=\varnothing, W\neq\varnothing$ とする。ゲーム(N,v)が次の条件(6-10)と(6-11)（さらにコアの非空性のために(6-5)）を満たす時、*経営者を含む提携に関して擬凹* であるという：

$$v(S)=0\quad\left(M\not\subset S, S\subset N\right)\tag{6-10}$$

$$v(S) \geq 0, v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N-S} \left(v(N) - v(N - \{i\})\right) \quad \left(M \subset S \subset N\right) \qquad (6\text{-}11)$$

このゲームは次のようにして得られる：
プレイヤーは*経営者* であるプレイヤーの集合 M と*労働者* の集合 W からなる。経営者全員の一致した協力がなければ利益は得られない。これは(6-10)を意味する。条件(6-11)はすべての経営者を含む提携 S にとって、S 以外のプレイヤーは*限界寄与* $v(N)-v(N-\{i\})$を得るという理解のもとで､Sに留まるよりも全体提携Nを形成した方が有利であることを意味している。

さて、経営者を含む提携に関する擬凹性が本質的な提携に関する擬凹性を意味することを示す。(6-10)と(6-11)より $v(\bullet) \geq 0$ である。従って、$v(S)=0$ ならば(6-4)が成り立つ。$v(S)>0$ ならば$S \supset M$ であり、(6-4)は(6-11)より得られる。

われわれの条件(6-4)と経営者を含む提携に関する擬凹性の条件(6-10)と(6-11)の関係をもっと詳しく調べるために、$v(\bullet) \geq 0$ で $M := \left\{i \in N \mid v(N - \{i\}) = 0\right\}$ を経営者の集合と仮定する。さらに、$v(\{j\}) \leq v(N - \{i\})\left(\forall i \in M, \forall j \in N - \{i\}\right)$、すなわち、プレイヤー$j$ 以外に経営者 i がいれば 1 人提携の提携値 $v(\{j\})=0$ と仮定する。このとき、われわれの条件(6-4)（とコアの非空性の条件(6-5)）は

$$v(S) = 0 \quad \left(M \not\subset S, S \subset N\right)$$

$$v(S) \geq 0, v(S) \leq \max\left[\sum_{i \in S} v(\{i\}), v(N) - \sum_{j \in N-S} \left(v(N) - v(N - \{j\})\right)\right] \left(M \subset S \subset N\right)$$

となる。本質的な提携は経営者を含むことに注意する。われわれの条件(6-4)においては、経営者を含む提携すべてが(6-11)を満たす必要はなく、本質的な提携のみが満たせばよい。

後で示すように破産ゲームは必ずしも経営者を含む提携に関して擬凹ではないが、本質的な提携に関しては擬凹である（補題6-4参照）。従ってわれわれの条件(6-4)は(6-10)と(6-11)よりも緩いことが分かる。

本質的な提携に関して擬凹なゲームの交渉集合 $M(v)$がコア $Core(N,v)$と一致するための十分条件を提出する。まず、次の補題が必要である。

補題 6-3.
ゲーム(N,v)は(6-4)と(6-5)を満たし、$x \in A(N,v) - Core(N,v)$ と仮定する。もし、$x_{j_0} > \Delta_{j_0}$ であり次の条件を満たす $j_0, j_1 \in N, j_0 \neq j_1$が存在すれば、$x \notin M(v)$ である：

$$\sum_{j \in S} x_j + x_{j_0} \geq v\left(S \cup \{j_0\}\right) \quad \left(\forall S \subset N - \{j_0, j_1\}\right) \tag{6-12}$$

証明： $\varepsilon_j > 0 \, (j \in N - \{j_0\}), \sum_{j \in N - \{j_0\}} \varepsilon_j = x_{j_0} - \Delta_{j_0}$ とし、$y_j := x_j + \varepsilon_j \, (j \in N - \{j_0\})$ とおく。$y_j > x_j \, (j \in N - \{j_0\})$ かつ $\sum_{j \in N - \{j_0\}} y_j = v(N - \{j_0\})$ であるので、$(y; N - \{j_0\})$ はプレイヤー j_0 に対する j_0 以外のプレイヤー（特に j_1）の異議である。$(y; N - \{j_0\})$ には逆異議がないことを示す。それには次のことを示せばよい：

$$\sum_{j \in S} y_j + x_{j_0} > v\left(S \cup \{j_0\}\right) \quad \left(\forall S \subset N - \{j_0, j_1\}\right)$$

$S \neq \varnothing$ であれば、この不等式は $\sum_{j \in S} y_j > \sum_{j \in S} x_j$ と(6-12)によりすぐに得られる。$S = \varnothing$ であれば、この不等式は $x_{j_0} > \Delta_{j_0} \geq f(j_0) = v(\{j_0\})$ より得られる。ゆえに $x \notin M(v)$ である。（証明終わり）

次の命題は既知であるが（例えば、[3]の第 2 章の例 5.3）、補題6-3を利用した証明を与える。

命題 6-2.
コアが空でない 3 人ゲーム(N,v)の交渉集合はコアと一致する。

証明： コアが空でない 3 人ゲーム(N,v)は(6-4)と(6-5)を満足することに注意する。$Core(N,v) \subset M(v)$ であるので、$M(v) \subset Core(N,v)$ を証明すればよい。

$x \in A(N,v) - Core(N,v)$ と仮定すると、$\{j_0, j_1, j\} = \{1,2,3\}$ $x_{j_0} > \Delta_{j_0}, x_{j_1} \leq \Delta_{j_1}$ となっている。不等式(6-12)は $x_j + x_{j_0} = v(N) - x_{j_1} \geq v(N) - \Delta_{j_1} = v(\{j, j_0\})$ より成り立つ。ここで、最初の等式は $x \in A(N,v)$ より、2 番目の等式は Δ_{j_1} の定義より、不等式は j_1 の仮定より成立する。従って、補題6-3より $M(v) \subset Core(N,v)$ となる。

（証明終わり）

次の命題で本質的な提携に関して擬凹なゲームの交渉集合がコアと一致する十分条件を与える。

命題 6-3.
ゲーム (N,v) が (6-4) と (6-5) を満たすと仮定する。$j^* \neq j^{**}$ であり $\Delta_{j^*} - f(j^*) = \min\{\Delta_j - f(j) \mid j \in N\}$、$\Delta_{j^{**}} - f(j^{**}) = \max\{\Delta_j - f(j) \mid j \in N\}$ であるとする。このときもし、

$$v(N) \leq \sum_{j \in N - \{j^*, j^{**}\}} f(j) + \Delta_{j^*} + \Delta_{j^{**}} \tag{6-13}$$

ならば、$M(v)=Core(N,v)$となる。

証明： 命題6-2の証明と同様に十分条件(6-12)を証明する。$x \in A(N,v)$ であるので、$\sum_{j \in S} x_j + x_{j_0} \geq \sum_{j \in S} f(j) + f(j_0)$ であることに注意する。従って、

$\sum_{j \in S} x_j + x_{j_0} \geq v(N) - \sum_{j \in N - S \cup \{j_0\}} \Delta_j \left(S \subset N - \{j_0, j_1\}\right)$ を示せばよい。2 つの場合を区別する。

ケース 1 （$x_{j^{**}} > \Delta_{j^{**}}$）：

$j_0 := j^{**}$、j_1 を j_0 以外の任意の要素とする。その時、

$$\sum_{j \in S} x_j + x_{j_0} \geq \sum_{j \in S} f(j) + \Delta_{j^{**}}$$

である。他方、

$$\begin{aligned} v(N) - \sum_{j \in N - S \cup \{j^{**}\}} \Delta_j &= v(N) - \sum_{j \in N - S \cup \{j^{**}\}} \left(\Delta_j - f(j)\right) - \sum_{j \in N - S \cup \{j^{**}\}} f(j) \\ &\leq v(N) - \Delta_{j^*} + f(j^*) - \sum_{j \in N - S \cup \{j^{**}\}} f(j) \\ &\leq f(j^*) + \sum_{j \in N - \{j^*, j^{**}\}} f(j) + \Delta_{j^{**}} - \sum_{j \in N - S \cup \{j^{**}\}} f(j) \\ &= \sum_{j \in S} f(j) + \Delta_{j^{**}} \end{aligned}$$

となる。ただし、最初の不等式は $\Delta_j - f(j) \geq 0, \left|N - S \cup \{j^{**}\}\right| \geq 1$ と j^* の定義により、2 番目の不等式は(6-13)より成立する。従って(6-12)が成り立つ。

ケース 2 （$x_{j^{**}} \leq \Delta_{j^{**}}$）：

$j_1 := j^{**}$、j_0 は $x_{j_0} > \Delta_{j_0}$ を満たす任意の要素とする。$S = N - \{j_0, j^{**}\}$ ならば、

$x_{j^{**}} \leq \Delta_{j^{**}}$ より

$$
\begin{aligned}
v(N) - \sum_{j \in N - S \cup \{j_0\}} \Delta_j &= v(N) - \Delta_{j^{**}} \\
&\leq v(N) - x_{j^{**}} \\
&= \sum_{j \in S} x_j + x_{j_0}
\end{aligned}
$$

となり、(6-12)が成り立つ。

$S \neq N - \{j_0, j^{**}\}$ ならば、

$$
\begin{aligned}
v(N) - \sum_{j \in N - S \cup \{j_0\}} \Delta_j &= v(N) - \sum_{j \in N - S \cup \{j_0\}} \left(\Delta_j - f(j)\right) - \sum_{j \in N - S \cup \{j_0\}} f(j) \\
&\leq v(N) - \Delta_{j^*} - \Delta_{j^{**}} + f(j^*) + f(j^{**}) - \sum_{j \in N - S \cup \{j_0\}} f(j) \\
&\leq \sum_{j \in S} f(j) + f(j_0) \\
&\leq \sum_{j \in S} x_j + x_{j_0}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、最初の不等式は $j^{**} \in N - S \cup \{j_0\}, \left|N - S \cup \{j_0\}\right| > 1$ と j^* の定義により、2 番目の不等式は(6-13)より成立する。従って(6-12)が成り立つ。

（証明終わり）

少なくとも 1 人の経営者がいる場合、経営者を含む提携に関して擬凹なゲームの交渉集合はコアと一致することが[19]で証明されている。$|M| \geq 1$ ならば、経営者を含む提携に関して擬凹なゲームは(6-13)を満たすことを示す。$|M| > 1$ ならば、$f(j) = 0\left(j \in N\right), \Delta_j = v(N)\left(j \in M\right)$ であり、ある経営者 j^{**} に対して $\Delta_{j^{**}} = v(N)$、

ある労働者j^*に対して$\Delta_{j^*} \geq 0$となる。また、$|M|=1$ならば、$f(j)=0\left(j \in W\right)$であり、経営者[3]$j^{**}$に対して$\Delta_{j^{**}} = v(N)$、ある労働者$j^*$に対して$\Delta_{j^*} \geq 0$となる。従って、$|M| \geq 1$ならば(6-13)が成立する。すなわち、命題6-3は[19]の結果の一般化とみなすことができる。

例：破産問題

破産問題（[1][16]を参照）は順序対$(E;d)$で定義される。ここで、$E \in \mathbb{R}$、$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n) \in \mathbb{R}^N$、$d_i \geq 0 (i=1,\ldots,n), 0 \leq E \leq \sum_{j=1}^{n} d_j$である。資産$E$を持つある人が負債$d_1,d_2,\ldots,d_n$を残して死亡した。この$n$人の債権者は資産$E$をいかに配分すべきであろうか？

この破産問題をゲームとして捉えるためにNを債権者の集合とし、[16]で導入された次の*破産ゲーム*$(N,v_{E;d})$を利用する：

$$v_{E;d}(S) := \max\left[0, E - d(N-S)\right] \quad \left(S \subset N, S \neq \varnothing\right) \tag{6-14}$$

ここで、$d(S) := \sum_{j \in S} d_j (S \subset N, S \neq \varnothing), d(\varnothing) := 0$である。

次の補題で述べるように破産ゲームは本質的な提携に関して擬凹なゲームである。

補題 6-4.
(6-14)の破産ゲームは次を満たす。

$$\begin{cases} v_{E;d}(\{i\}) = \max\left[0, E - d(N) + d_i\right] \\ v_{E;d}(N) - v_{E;d}(N-\{i\}) = \min\left[E, d_i\right] \end{cases} \quad \left(i \in N\right)$$

$$Core(N, v_{E;d}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{j \in N} x_j = E, \\ \max\left[0, E - d(N) + d_i\right] \leq x_i \leq \min\left[E, d_i\right] \left(i \in N\right) \end{array} \right\} \tag{6-15}$$

---

3 (6-11)より、$\Delta_{j^{**}} - f(j^{**}) = v(N) - v(\{j^{**}\}) \geq \sum_{j \in W} \Delta_j \geq \Delta_j (j \in W)$である。

証明： これらの結果は既に知られているが、命題6-1の(6-4)と(6-5)を示すことによって(6-15)を証明する。

(6-4)の右辺の第2項は $E-\sum_{i\in N-S}\min[E,d_i]$ に等しく、$E-\sum_{i\in N-S}d_i$ 以上である。

従って、もし、$v_{E;d}(S)=E-d(N)+d(S)$ ならば、(6-4)は成立する。一方、$v_{E;d}(\bullet)\geq 0$

より(6-4)の右辺は0以上である。従って、$v_{E;d}(S)=0$ の場合も(6-4)は成立する。

$0\leq E, 0\leq d_i, E-d(N)+d_i\leq E, E-d(N)+d_i\leq d_i$ であるので、(6-5)の最初の部分が成り立つ。

最後に(6-5)の2番目の部分を証明する。すなわち、

$$\sum_{i\in N}\max[0,E-d(N)+d_i]\leq E\leq\sum_{i\in N}\min[E,d_i] \tag{6-16}$$

（最初の不等式）：

もし、最初の和において正の項が唯1つ、例えば、$E-d(N)+d_i$ ならば、この項は E 以下である。一方、(6-16)の最初の和において正の項が少なくとも2つある、例えば、$(E-d(N)+d_i)+(E-d(N)+d_k)+\cdots$ ならば、第2項以降を上界 d_k で評価して、

$$\begin{aligned}(E-d(N)+d_i)+(E-d(N)+d_k)+\cdots &\leq (E-d(N)+d_i)+d_k+\cdots\\ &=E-d(N-S)\leq E\end{aligned}$$

となる。ただし、$S=\{j\in N\mid E-d(N)+d_j>0\}$ である。

（2番目の不等式）：

ある i に対して $\min[E,d_i]=E$ ならば、(6-16)の2番目の不等式は明らかに成り立つ。$E\geq d_i(\forall i\in N)$ ならば、$E\leq d(N)$ より(6-16)の2番目の不等式は成り立つ。

（証明終わり）

(6-15)とは異なる破産ゲームのコアの次のような表現が[6]で与えられている：

$$Core(N,v_{E;d})=\left\{x\in\mathbb{R}^N\mid\sum_{j\in N}x_j=E, 0\leq x_i\leq d_i\,(i\in N)\right\} \tag{6-17}$$

破産ゲームにおいて、本質的な提携に関する擬凹性と経営者を含む提携に関

する擬凹性との関係をさらに調べる。破産ゲーム$(N,v_{E;d})$の経営者の集合は$M=\{i\in N\mid d_i\geq E\}$で与えられる。また、$M$を含む任意の提携が(6-11)、すなわち、$\sum_{j\in N-M} d_j \leq E$、を満たす時かつその時のみ、$(N,v_{E;d})$は経営者を含む提携に関して擬凹なゲームであった。$N=\{1,2,3\}, E=100, d=(100,90,80)$とする。このとき、$M=\{1\}$、$d_2+d_3>E$である。すなわち、この破産ゲームは経営者を含む提携に関して擬凹なゲームではない。

本質的な提携に関して擬凹なゲームがさらに凸ならば、破産ゲームと密接に関連していることを示すことによってこの項を終わる。

命題 6-4.

$f(i) := v(\{i\}), \Delta_i := v(N)-v(N-\{i\})\ (i\in N)$とする。ゲーム$(N,v)$が(6-4)と(6-5)を満たすと仮定する。もし、(N,v)が凸ゲームならば、(N,w)は破産ゲーム$(N,v_{E;d})$である。ただし、$w(S) := v(S)-\sum_{j\in S} f(j)(S\subset N)$、$E := v(N)-\sum_{j\in N} f(j)$、$d_j := \Delta_j - f(j)\ (j\in N)$である。

証明： $S\subset N, S\neq\varnothing, N$に対して、$S=\{j_1,\ldots,j_s\}, N-S=\{j_{s+1},\ldots,j_n\}$と表現する。$x\in\mathbb{R}^N$を$x_{j_1} := v(\{j_1\}), x_{j_i} := v(\{j_1,\ldots,j_i\})-v(\{j_1,\ldots,j_{i-1}\})(i=2,\ldots,n)$のように決める。$(N,v)$が凸であるので$x\in Core(N,v)$が成り立つ（[3]を参照）。すなわち、

$$f(j_1)\leq v(\{j_1\})\leq \Delta_{j_1}$$

$$f(j_i)\leq v(\{j_1,\ldots,j_i\})-v(\{j_1,\ldots,j_{i-1}\})\leq \Delta_{j_i}\quad (i=2,\ldots,n)$$

i=1,…,sとおいてその和を求めると$v(S)\geq\sum_{j\in S} f(j)$が得られる。一方、$i$=$s$+1,…,$n$とおいてその和を求めると$v(S)\geq v(N)-\sum_{j\in N-S}\Delta_j$を得る。これらと(6-4)より

$$v(S)=\max\left[\sum_{j\in S} f(j), v(N)-\sum_{j\in N-S}\Delta_j\right]$$

となる。従って、

$$w(S) := v(S) - \sum_{j \in S} f(j) = \max\left[0, v(N) - \sum_{j \in N} f(j) - \sum_{j \in N-S} \left(\Delta_j - f(j)\right)\right]$$

$$= \max\left[0, E - \sum_{j \in N-S} d_j\right]$$

となる。ただし、$d_j \geq 0\left(j \in N\right), 0 \leq E \leq \sum_{j \in N} d_j$ である。　　　　（証明終わり）

6-2-3 仁：一対－穏健（貪欲）－交渉一貫性

以後、一対交渉一貫性を譲渡可能効用ゲームに適用する。この項では c または d を基準点とする一対交渉一貫性を考察する。非空のコアが 1 人提携と n–1 人提携のみによって決定されるゲームにおいて、f とΔを適切に解釈すれば一対－穏健（または、貪欲）－交渉一貫性は仁と密接な関係になる。前項と同様に $f(i) := v(\{i\})$、$\Delta_i := v(N) - v(N - \{i\})$ とおく。すなわち、各プレイヤーは自分で獲得可能な利得の最小値を 1 人提携の値 $v(\{i\})$と、最大値を全体提携に対する限界寄与 $v(N) - v(N - \{i\})$と見積もっている。従って、ゲーム(N,v)の一対－穏健（または、貪欲）－交渉一貫性を満たす配分は $v(N)$と、基準点 c（または d）を通じて $\left(f(i)\right)_{i \in N}, \left(\Delta_i\right)_{i \in N}$ に依存する。

本質的な提携に関して擬凹であるゲームの仁$\eta(N,v)$が一対－穏健（または、貪欲）－交渉一貫性を満たす一意な配分であることを示す前に、破産ゲームを考察する。われわれは補題6-4により破産ゲーム$(N,v_{E;d})$は本質的な提携に関して擬凹であることをすでに示している。

補題 6-5.
$(N,v_{E;d})$を(6-14)の破産ゲームとし、

$f(i) := v_{E;d}(\{i\})$、$\Delta_i := v_{E;d}(N) - v_{E;d}(N - \{i\})$ $(i \in N)$ とおく。

(i) コアの要素 x と $i, j \in N, i \neq j$ に対して、次が成り立つ：

$$c_{ij}^{v_{E;d}}(x^{\{i,j\}}) = \max\left[0, x_i + x_j - d_j\right]$$

$$d_{ij}^{v_{E;d}}(x^{\{i,j\}}) = \min\left[x_i + x_j, d_i\right]$$

(ii) 一対一穏健（または、貪欲）一交渉一貫性を満たす配分の集合はコアとカーネルの共通部分に一致し、ただ 1 つの要素仁$\eta(N,v_{E;d})$からなる。

証明： (i)を証明すれば、この節での一対一穏健一交渉一貫性は[1]または[3]のCG 一貫性と一致し、この節での一対一貪欲一交渉一貫性は[6]のものと一致し、(ii)は既知となる。従って、(i)のみを証明する。

補題6-4と c, d の定義より

$$\begin{aligned} c_{ij}^{v_{E;d}}(x^{\{i,j\}}) &= \max\left[\max\left[0, E-d(N)+d_i\right], x_i+x_j-\min\left[E,d_j\right]\right] \\ &= \max\left[\max\left[0, E-d(N)+d_i\right], \max\left[x_i+x_j-E, x_i+x_j-d_j\right]\right] \quad (6\text{-}18) \\ &= \max\left[0, E-d(N)+d_i, x_i+x_j-E, x_i+x_j-d_j\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{ij}^{v_{E;d}}(x^{\{i,j\}}) &= \min\left[\min\left[E,d_i\right], x_i+x_j-\max\left[0,E-d(N)+d_j\right]\right] \\ &= \min\left[E, d_i, x_i+x_j, x_i+x_j-E+d(N)-d_j\right] \end{aligned} \quad (6\text{-}19)$$

が成り立つ。

$x \in Core(N, v_{E;d})$ と(6-17)より $0 \le x_i \le d_i, x_i+x_j \le E, d_i+d_j-x_i-x_j \le d(N)-E$ である。これは(6-18)と(6-19)の（第 1 項）$\ge$（第 3 項）、（第 2 項）$\le$（第 4 項）を意味している。（証明終わり）

$f(i)=v(\{i\}), \Delta_i = v(N)-v(N-\{i\})$ とし、$P(v)$を(N,v)の一対一穏健（または、貪欲）一交渉一貫性を満たす配分の集合とする。補題6-5(ii)より $P(v_{E;d})=K(N,v_{E;d}) \cap Core(N, v_{E;d})=\{\eta(N,v_{E;d})\}$となる。最後に、本質的な提携に関して擬凹なゲームに関する一般的な結果を述べる。

定理 6-1.

$f(i) := v(\{i\}), \Delta_i := v(N)-v(N-\{i\})\ (i \in N)$ とおく。ゲーム(N,v)が(6-4)と(6-5)を満たせば、一対一穏健（または、貪欲）一交渉一貫性は仁$\eta(N,v)$と一致する一意の配分を決定する。

証明： ゲーム(N,v)は*ゼロ一正規化* されている、すなわち、$v(\{i\})=0\ (i \in N)$ と仮定する。$E := v(N), d_i := \Delta_i = v(N)-v(N-\{i\})(i \in N)$ で与えられる破産ゲーム

$(N,v_{E;d})$を考察する。(N,v)が(6-4)と(6-5)を満たすという定理の仮定より、命題6-1 (iii)が $f(\cdot)=0$ で成立する。これと(6-17)より $Core(N,v)=Core(N,v_{E;d})$が成り立つ。

次に、$P(v)=P(v_{E;d})$を示す。$P(v)$は全体提携値 $v(N)$に依存し、さらに、$(f(i))_{i\in N}=$

$(v(\{i\}))_{i\in N}$ と $(\Delta_i)_{i\in N}=(v(N)-v(N-\{i\}))_{i\in N}$ に

$$c_{ij}^{v}(x^{\{i,j\}}):=\max\left[f(i),x_i+x_j-\Delta_j\right]$$

を通して依存する。同様に $P(v_{E;d})$は E と $(d_i)_{i\in N}$ に、補題6-5 (i)より

$$c_{ij}^{v_{E;d}}(x^{\{i,j\}})=\max\left[0,x_i+x_j-d_j\right]$$

を通して依存する。(N,v)はゼロ一正規化されているのであるから、$P(v)=P(v_{E;d})$ となる。

$Core(N,w)=Core(N,u)\neq\varnothing$ とすると、[3]の第 2 章の系 6.8 と定理 7.8 と定理 7.9 より $\eta(N,w),\eta(N,u)\in K(N,w)\cap Core(N,w)=K(N,u)\cap Core(N,u)$ となる。

また、補題6-5 (ii)より $P(v_{E;d})=K(N,v_{E;d})\cap Core(N,v_{E;d})=\{\eta(N,v_{E;d})\}$、$\eta(N,v)\in$

$K(N,v)\cap Core(N,v)=K(N,v_{E;d})\cap Core(N,v_{E;d})=\{\eta(N,v_{E;d})\}$ であり、$\eta(N,v)=$

$\eta(N,v_{E;d})$ となる。一方、$P(v)=P(v_{E;d})=\{\eta(N,v_{E;d})\}$より、$P(v)=\{\eta(N,v)\}$となる。

(N,v)がゼロ一正規化されていないならば、$w(S):=v(S)-\sum_{j\in S}v(\{j\})(S\subset N)$ で

与えられるそのゼロ一正規化ゲーム(N,w)を考察する。ゲーム(N,w)は(N,v)の性質

(6-4)と(6-5)を受け継ぐので、$P(w)=\{\eta(N,w)\}$となる。$P(w)=P(v)-(v(\{i\}))_{i\in N}$ と

$\eta(N,w)=\eta(N,v)-(v(\{i\}))_{i\in N}$ に注意すれば、$P(v)=\{\eta(N,v)\}$となる。

（証明終わり）

上記の定理の証明から、(N,v)がゼロ一正規化された本質的な提携に関して擬凹なゲームであれば、コア、$P(v)$、仁は $E=v(N),d_j=\Delta_j(j\in N)$ で与えられる破産ゲーム$(N,v_{E;d})$のコア、$P(v)$、仁と一致する。

経営者を含む提携に関して擬凹なゲームの一対－穏健－交渉一貫性に関する詳細な議論は[7]で行われている。また、Driessen [5]は他の基準点に関する一対交渉一貫性を適用して双方向割当て市場ゲームを考察している。そこでは任意の一対のプレイヤーに対してではなく、適切に選ばれた一対のプレイヤーに対してのみ交渉一貫性が適用されている。また、双方向割当て市場ゲームのコアの構造はわれわれのものと異なっている。

$P(v)$は以下のように計算できる：

「$x \in P(v)$」$\Leftrightarrow$「$x_i = (c_{ij}^v(x) + d_{ij}^v(x))/2\ (i, j \in N, i \neq j)$」であるので、一対－穏健（または、貪欲）－交渉一貫性を満たす配分 x は次の方程式の解である：

$$\min\left[x_i - f(i), \Delta_j - x_j\right] = \min\left[x_j - f(j), \Delta_i - x_i\right] \quad \left(i, j \in N, i \neq j\right) \tag{6-20}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \tag{6-21}$$

この方程式を解くと（例えば、[3]の 155 ページ参照）、

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} \min\left[f(i) + \lambda, \dfrac{f(i) + \Delta_i}{2}\right] & \left(v(N) \leq \dfrac{\sum_{j \in N}(\Delta_j + f(j))}{2}\right) \\ \max\left[\Delta_i - \lambda, \dfrac{f(i) + \Delta_i}{2}\right] & (\text{その他}) \end{cases} \quad \left(i \in N\right)$$

となる。ただし、λ は $\sum_{i \in N} x_i(\lambda) = v(N)$ となるように決定される。

定理6-1の別証明： [3]の第 2 章の定理 7.8 と 7.9 を参照すれば、$Core(N, v) \neq \emptyset$ であるならば、$\{\eta(N, v)\} \subset Core(N, v) \cap K(N, v)$ となる。また、[3]の第 2 章の定理 6.7 と[7]を参照すると、

$$Core(N, v) \cap K(N, v) = \{x \in Core(N, v) \mid \delta_{ij}^v(x) = \delta_{ji}^v(x)(i, j \in N, i \neq j)\}$$

が成り立つ。ただし、$\delta_{ij}^v(x) := \max\left[\delta \in \mathbb{R} \mid x - \delta e^i + \delta e^j \in Core(N, v)\right]$であり、$e^i \in \mathbb{R}^N$ は i 番目の基本ベクトルである。(N,v)が本質的な提携に関して擬凹なゲームならば、$\delta_{ij}^v(x) = \min\left[x_i - f(i), \Delta_j - x_j\right]$となり $\{\eta(N, v)\} \subset P(v)$ となる。一方、例えば、

[3]の第 6 章の定理 3.2 と[7]を参照すると、$x \in P(v)$ が満たす上記の方程式(6-20)と(6-21)は一意の解を持つので、$\{\eta(N,v)\} = P(v)$ が成立する。

次の例は本質的な提携に関して擬凹ではないゲームにおいては、一対一穏健（または、貪欲）一交渉一貫性を満たす一意の配分が必ずしも仁とはならないことを示している。明らかに、3 人ゲームは(6-4)を満たすので、4 人ゲームの反例をあげる。次のような*割当てゲーム* を考察する（[5]、[20]を参照）:
女性の集合を F:={1,2}、男性の集合を M:={3,4}とし、$N := F \cup M$ とする。この割当てゲームの特性関数 v は次のように定義される：

$$v(S) := \begin{cases} \max\left[a_{13}+a_{24}, a_{14}+a_{23}\right] & (S=N) \\ \max\left[a_{ik}, a_{jk}\right] & \left(S=\{i,j,k\}, i,j \in F, k \in M\right) \\ \max\left[a_{ij}, a_{ik}\right] & \left(S=\{i,j,k\}, i \in F, j,k \in M\right) \\ a_{ij} & \left(S=\{i,j\}, i \in F, j \in M\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ここでは、次のような数値例を扱う

$$\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$v(\{1,4\}) > \max\left[0, v(N)-(\Delta_2+\Delta_3)\right]$であるので、この数値例のゲームは本質的な提携に関して擬凹ではない。一対一穏健（または、貪欲）一交渉一貫性を満足する一意の配分は $v(N) > (\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4)/2$ と $P(v)$の計算法より、

$$\begin{cases} x_1(\lambda) = x_4(\lambda) = \max\left[6-\lambda, 3\right] \\ x_2(\lambda) = x_3(\lambda) = \max\left[4-\lambda, 2\right] \\ x_1(\lambda)+x_2(\lambda)+x_3(\lambda)+x_4(\lambda) = 12 \end{cases}$$

で与えられ、$P(v)$={($x_1(2)$,$x_2(2)$,$x_3(2)$,$x_4(2)$)}={(4,2,2,4)}となる。一方、仁はこれと異なり $\eta(N,v)$=(4.5,1.5,1.5,4.5)となる。

6-2-4 仁と τ-値の関係

定理6-1は本質的な提携に関して擬凹なゲームの一対一穏健（または、貪欲）一

交渉一貫性を満たす配分の集合は 1 点からなることを述べていた。次の補題は一対一中間一交渉一貫性を満たす配分の集合も 1 点からなることを示している。

補題 6-6.

$f(i)\le\Delta_i(i\in N), \sum_{i\in N} f(i)\le X\le\sum_{i\in N}\Delta_i$ とする。この時、$\sum_{i\in N} x_i = X$ を満たし、一対一中間一交渉一貫性を満たす一意の配分 $x\in\mathbb{R}^N$ が存在し、次のように与えられる：

$$x_i = f(i)+\frac{X-\sum_{j\in N} f(j)}{\sum_{j\in N}\left(\Delta_j - f(j)\right)}\left(\Delta_i - f(i)\right)\quad\left(i\in N\right) \tag{6-22}$$

証明： x を基準点が e である一対交渉一貫性を満たす配分とする。その時、x は補題6-2より次の方程式を満足する：

$$x_i = f(i)+\frac{\left(x_i + x_j - f(i)-f(j)\right)\left(\Delta_i - f(i)\right)}{\Delta_i - f(i)+\Delta_j - f(j)}\quad\left(i,j\in N, i\neq j\right)$$

これより、

$$\frac{x_i - f(i)}{\Delta_i - f(i)}=\frac{x_j - f(j)}{\Delta_j - f(j)}\quad\left(i,j\in N, i\neq j\right)$$

となる。従って、以下の条件を満たすある定数 K が存在する：

$$x_i - f(i) = K\left(\Delta_i - f(i)\right)\quad\left(i\in N\right) \tag{6-23}$$

i について和を求め、$\sum_{i\in N} x_i = X$ を利用すると

$$K=\frac{X-\sum_{i\in N} f(i)}{\sum_{i\in N}\left(\Delta_i - f(i)\right)}$$

となる。これを(6-23)に代入して(6-22)を得る。（証明終わり）

ゲーム(N,v)において f とΔを適切に解釈すれば、一対一中間一交渉一貫性はτ-値と密接に関係してくる。 $f(i):=b_i^v-\lambda_i^v,\Delta_i:=b_i^v\ (i\in N)$ とするとき、ゲーム(N,v)の準平衡性は $f(i)\le\Delta_i(i\in N),\sum_{j\in N}f(j)\le v(N)\le\sum_{j\in N}\Delta_j$ を意味する。次に、$X=v(N)$ ならば、(6-22) の x が τ-値に等しくなることを示す。$f(i)=b_i^v-\lambda_i^v,\Delta_i=b_i^v,X=v(N)$ を(6-22)に代入すると

$$x_i=f(i)+\frac{X-\sum_{j\in N}f(j)}{\sum_{j\in N}\left(\Delta_j-f(j)\right)}\left(\Delta_i-f(i)\right)$$

$$=b_i^v-\lambda_i^v+\frac{v(N)-\sum_{j\in N}\left(b_j^v-\lambda_j^v\right)}{\sum_{j\in N}\lambda_j^v}\lambda_i^v$$

$$=b_i^v+\frac{v(N)-\sum_{j\in N}b_j^v}{\sum_{j\in N}\lambda_j^v}\lambda_i^v$$

$$=b_i^v-\frac{g^v(N)}{\sum_{j\in N}\lambda_j^v}\lambda_i^v=\tau_i(v)$$

となる。従って、次の定理の証明を与えた：

定理 6-2.

ゲーム(N,v)に対して、 $f(i):=\Delta_i-\lambda_i^v,\Delta_i:=v(N)-v(N-\{i\})(i\in N)$ とする。(N,v)が準平衡ゲームならば、τ-値$\tau(v)$は一対一中間一交渉一貫性を満たす一意の配分である。

プレイヤーiが要求できる最小値と最大値が、各々 $\Delta_i-\lambda_i^v$ と $v(N)-v(N-\{i\})$であるならば、それが一対一中間一交渉一貫性を満たすという意味で、τ-値は自然な配分である。

われわれは定理6-1で $f(i):=v(\{i\})$とおき、定理6-2で $f(i):=b_i^v-\lambda_i^v$ とおいた。本

質的な提携に関して擬凹なゲーム(N,v)がさらに半凸ならば、$b_i^v - \lambda_i^v = v(\{i\})$であるので、両方の定理が$(N,v)$に適用できる。ここで、ゲーム$(N,v)$が*半凸* であるとは、次の関係が成り立つ事をいう：

$$b_i^v \geq v(\{i\}), v(S) - \sum_{j \in S-\{i\}} b_j^v \leq v(\{i\}) \quad \left(i \in S \subset N\right) \tag{6-24}$$

従って、次の系が得られる。

系 6-2.

$f(i) := v(\{i\}), \Delta_i := v(N) - v(N-\{i\})(i \in N)$ とする。ゲーム(N,v)が(6-4)と(6-5)と(6-24)を満たせば､仁は一対一穏健（または、貪欲）一交渉一貫性を満たす一意な配分と一致し､一方、τ-値は一対一中間一交渉一貫性を満たす一意な配分と一致する。

系6-2は本質的な提携に関して擬凹な半凸ゲームにおいては仁とτ-値が異なる基準点に関する一対交渉一貫性で特徴付けられることを示している。

次の補題で本質的な提携に関して擬凹なゲームが半凸であるための必要かつ十分条件を与える。条件(6-25)は他のプレイヤーが全体提携Nに関する限界寄与を受け取るという理解のもとで、全体提携 N を形成するよりも自分ひとりでいる方が有利であることを示している。

補題 6-7.
ゲーム(N,v)が(6-4)と(6-5)を満たすと仮定する。この時、(N,v)が半凸であるための必要かつ十分条件は次式で与えられる：

$$v(N) - \sum_{j \in N-\{i\}} \Delta_j \leq v\left(\{i\}\right) \quad \left(i \in N\right) \tag{6-25}$$

証明： (6-25)から(6-24)を導く。

$b_i^v = \Delta_i = v(N) - v(N-\{i\})$ であるので、(6-24)の最初の条件は(6-5)から得られる。

$i \in S$ より

$$\sum_{j \in S} v\left(\{j\}\right) \leq \sum_{j \in S-\{i\}} \Delta_j + v\left(\{i\}\right) = \sum_{j \in S-\{i\}} b_j^v + v\left(\{i\}\right)$$

$$v(N)-\sum_{j\in N-S}\Delta_j=v(N)-\sum_{j\in N-\{i\}}\Delta_j+\sum_{j\in S-\{i\}}\Delta_j$$
$$\leq v(\{i\})+\sum_{j\in S-\{i\}}\Delta_j=\sum_{j\in S-\{i\}}b_j^v+v(\{i\})$$

となり、(6-4)より(6-24)が得られる。　　　　　　　　　　　（証明終わり）

経営者を含む提携に関して擬凹なゲームにおいて$|M|>1$（経営者が 1 人よりも多い）ならば、(6-25)が成立する。何故なら、$|M|>1$ より $v(\{i\})=0\leq\Delta_i(i\in N)$、$\Delta_1=\Delta_2=v(N)$（$1,2\in M$ と仮定する）であるので、(6-25)が成り立つ。従って、2 人以上の経営者が存在する経営者を含む提携に関して擬凹なゲームにおいては仁とτ-値が異なる基準点に関する一対交渉一貫性で再解釈できる。

6-2-5 双行列に関して

6-2-1項で表6-1の双行列を利用して基準点 c,d,e を説明した。他の双行列を利用してこれらの基準点を説明することも可能である。プレイヤーi と j の役割を入れ替えれば、すなわち、表6-1の双行列を転置すれば、表6-2の双行列が得られる。一方、表6-3の双行列は異なった特徴を持っている。この双行列は定和ではない。

表 6-2. 他の双行列

		プレイヤーj C	B
プレイヤーi	Y(ou)	$f(i),X-f(i)$	$\Delta_i,X-\Delta_i$
	I	$X-f(j),f(j)$	$X-\Delta_j,\Delta_j$

$$f(i)+f(j)\leq X\leq\Delta_i+\Delta_j$$

表 6-3. 非定和である双行列

		プレイヤーj A	N
プレイヤーi	(C,B)	$f(i),\Delta_j$	$X-f(j),X-\Delta_i$
	(B,C)	$\Delta_i,f(j)$	$X-\Delta_j,X-f(i)$

$$f(i)+f(j)\leq X\leq\Delta_i+\Delta_j$$

この行列は次のようにして得られる：
プレイヤーiは各々のプレイヤーがいかに行動すべきかを選ぶ（両方のプレイヤーが同じように行動することは許されていない)。一方、プレイヤーj はプレイヤーiの提案を「受け入れる（A)」か「否か（N)」を選ぶ。プレイヤーjの戦略が「N」ならば、プレイヤーi が選んだように自分の相手が行動し、自分はその残りを受け取る。例えば、プレイヤーi が（大胆（B）,慎重（C)）を選び、プレイヤーj が「N」を選べば、プレイヤーi は $X-\Delta_j$ を受け取り、プレイヤーj は $X-f(i)$を受け取る。両方のプレイヤーの利得の和が総量Xを超える可能性があるので、このゲームは基準点を得るためにのみ利用される。

このような双行列ゲームを作るキーポイントは次の通りである：
プレイヤーiとjに対して各々、4 つの利得

$$f(i) \le \Delta_i, X-\Delta_j \le X-f(j) \text{ と } f(j) \le \Delta_j, X-\Delta_i \le X-f(i)$$

がある。これらの利得を利用して純粋戦略にナッシュ均衡を持たない双行列を作りたい。双行列のプレイヤーiの部分が表6-4のように与えられていると仮定する。この双行列には純粋戦略のナッシュ均衡が存在しないので、t_{12} と t_{21} は $f(j)$ か $X-\Delta_i$ でなければならない。$t_{12}=f(j)$、$t_{21}=X-\Delta_i$ ならば、ゲームは定和になり、表6-1を得る。$t_{12}= X-\Delta_i$、$t_{21}= f(j)$ならば、4 点は図6-1の直線 AB 上になく、表6-3の双行列となる。表6-1、6-2、6-3で与えられた双行列は人為的ではあるが、基準点を決定する時のプレイヤー間の葛藤の一側面を表している。

表 6-4. 基礎となる双行列

		プレイヤーj 戦略 1	プレイヤーj 戦略 2
プレイヤーi	戦略 1	$f(i),t_{11}$	$X-f(j),t_{12}$
	戦略 2	Δ_i,t_{21}	$X-\Delta_j,t_{22}$

$$f(i)+f(j) \le X \le \Delta_i+\Delta_j$$

表6-1と6-2で与えられた双行列ゲームをナッシュ交渉問題として捉えてみる

（例えば、[13]の第 8 章を参照)。変動脅しナッシュ交渉解は一対－中間－交渉一貫性を満たす配分である。不一致点がマックスミニ値またはミニマックス値ならば、ナッシュ交渉解は一対－穏健（または、貪欲）－交渉一貫性を満たす配分である。ナッシュ交渉問題の場合では、ミニマックス値が不一致点となるのは不自然である。というのは、不一致点がナッシュ交渉解よりも両方のプレイヤーにとってより望ましいからである。しかし、一対交渉一貫性とナッシュ交渉問題とのこの対応関係は表6-3で与えられた双行列では成立しない。なぜなら、われわれは X の合理的な再配分を探しているのであり、双行列で与えられた問題のナッシュ交渉解を求めているのではないからである。

6-3 譲渡可能効用ゲームにおける *k* 人平均寄与の残余均等配分値

6-3-1 *k* 人平均寄与の残余均等配分値（EN^{k}AC-値）

この項では協力ゲームの特別なタイプの 1 点解を統一的に扱い、予備的な定義とともに、譲渡可能効用ゲームの新しい解を定義する。6-3-2項では新しい解の性質を調べる。6-3-3項では新しい解と準仁の一致を考察する。

譲渡可能効用ゲームは次のような順序対(N,v)である。N はプレイヤーの有限集合で、$v:2^N \to \mathbb{R}$は*特性関数* であって、Nの部分集合（*提携* と呼ばれる）すべてからなる冪集合 2^N 上で定義される。ゲーム(N,v)では各提携 S（$S \in 2^N$ または$S \subset N$）に S の*提携値* と呼ばれる実数値 $v(S)$が関係付けられている。これはSのメンバーが協力して得られる利益を表している。空集合では何の価値も生まない、すなわち、$v(\varnothing)=0$である。集合 S の要素の個数を$|S|$（あいまいでなければ s）で表す。特に、$n:=|N|$とし、ゲームは少なくとも 3 人のプレイヤーを含むと仮定する（$n \geq 3$）。すべてのゲーム(N,v)の集合を $\boldsymbol{G}$ で示す。

ゲーム(N,v)の（1 点、多価）解はゲームに参加している各プレイヤーに全体提携 N の提携値 $v(N)$をいかに分けるかという本質的な問題に関係している。一般的に、$\boldsymbol{G}$ の*値*（1 点解）は各ゲーム(N,v)に利得ベクトル

$\Phi(N,v)=\left(\Phi_i(N,v)\right)_{i\in N}$ を割り当てる関数Φである。利得ベクトル$\Phi(N,v)$は、*効率性条件* $\sum_{i\in N}\Phi_i(N,v)=v(N)$ を満たすならば、*配分*（*allocation*）と呼ばれる。ゲーム(N,v)におけるプレイヤーi の値$\Phi_i(N,v)$はこのゲームに参加することによる i の分け前の評価値を表す。

このような配分方法の例として、いわゆる CIS-値（Center of Imputation Set）、ENPAC-値（Egalitarian Non-Pairwise-Averaged Contribution value）、ENSC-値（Egalitarian Non-Separable Contribution value）などがある。これらは次のように定義される：

$i \in N$に対して

$$CIS_i(N,v):=v(\{i\})+\frac{1}{n}\left[v(N)-\sum_{j\in N}v(\{j\})\right]$$

$$ENPAC_i(N,v) := PAC_i(N,v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N} PAC_j(N,v)\right]$$

$$ENSC_i(N,v) := SC_i(N,v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N} SC_j(N,v)\right]$$

ここで、$PAC_i(N,v) := \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j\in N-\{i\}}\left[\left(v(N) - v(N-\{i,j\})\right) - \frac{v(N-\{i,j\})}{n-2}\right]$、

$SC_i(N,v) := v(N) - v(N-\{i\})$ である。

ENSC-値は水資源の多目的利用プロジェクトの分野で広く論じられている（Straffin and Heaney [27]参照）。ENPAC-値は Driessen and Funaki [8]で考察されている。これらの解は次のように解釈できる：

各プレイヤーはあらかじめ決められた*個人寄与*、すなわち、$v(\{i\})$、$PAC_i(N,v)$、$SC_i(N,v)$、を得た後、残りを均等に分ける。同様に任意の整数 $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ に対して、*k 人平均寄与の残余均等配分値*（EN^{k}AC-値、Egalitarian Non-k-Averaged Contribution value）

$EN^kAC(N,v) = \left(EN^kAC_i(N,v)\right)_{i\in N}$ を次のように定義する：

$i\in N$ に対して

$$EN^kAC_i(N,v) := c_i^k(N,v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N} c_j^k(N,v)\right] \tag{6-26}$$

あるいは同じ事であるが

$$EN^kAC_i(N,v) := \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j\in N}\left[c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v)\right] \tag{6-27}$$

と定義する。

定義(6-27)より、EN^{k}AC-値は $\left(c_j^k(N,v)\right)_{j\in N}$ 自体には依存せず、

差 $\left(c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v)\right)_{i,j\in N}$ に依存するので、EN^{k}AC-値を一意に定義するためには、

$c^k(N,v)$の選び方が多数ある。$c^k(N,v)$の 2 つの特別な選び方 $\underline{c}^k(N,v)$ と $\overline{c}^k(N,v)$ が興

味深い：

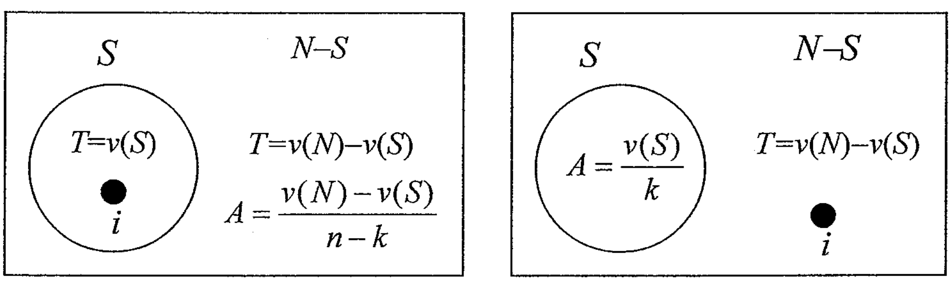
$$\underline{c}_i^k(N,v) := \left|\Gamma_k^{i+}\right|^{-1} \sum_{S\in\Gamma_k^{i+}} \left[v(S) - (k-1)\frac{\left(v(N)-v(S)\right)}{n-k} \right] \tag{6-28}$$

$$\overline{c}_i^k(N,v) := \left|\Gamma_k^{i-}\right|^{-1} \sum_{S\in\Gamma_k^{i-}} \left[\left(v(N)-v(S)\right) - (n-k-1)\frac{v(S)}{k} \right] \tag{6-29}$$

ここで、$\Gamma_k^{i+} := \left\{S\subset N \mid |S|=k, i\in S\right\}$ はプレイヤーiを含むk人提携すべての集合で、$\Gamma_k^{i-} := \left\{S\subset N \mid |S|=k, i\notin S\right\}$ はプレイヤーiを含まないk人提携すべての集合である。$\underline{c}_i^k(N,v)$ をプレイヤーi の*下-k 人平均寄与*、$\overline{c}_i^k(N,v)$ をプレイヤーi の*上-k 人平均寄与*と呼ぶ。

$\underline{c}_i^k(N,v)$ と $\overline{c}_i^k(N,v)$ の 1 つの解釈は以下の通りである：
k 人提携とその提携値がプレイヤーの寄与を決定する時に重要な役割を果たすと仮定しよう。プレイヤーi の個人寄与は次のように評価される：

$S\in\Gamma_k^{i+}$ とする（図6-2の左側を参照)。全利益 $v(N)$は $v(S)$と $v(N)-v(S)$の 2 つに分けられる。$v(S)$は提携 S のメンバーに利用可能な総量である。プレイヤーi は i 以外の S のメンバーと $N-S$ のメンバーを区別しない。そこで S の i 以外の各メンバーは $\dfrac{v(N)-v(S)}{n-k}$ を得ると仮定される。この値は、$v(N)-v(S)$が $N-S$ のプレイヤーに利用可能な総量なので、$N-S$ の各プレイヤーが得る平均量とみなされる。



T：総量　A：平均量

図 6-2. k 人提携 S とプレイヤーi

従って、$v(S)$の中のプレイヤーi に残る部分は$v(S)-(k-1)\dfrac{\left(v(N)-v(S)\right)}{n-k}$と期待される。$\Gamma_k^{i+}$ のすべての提携について平均を求めると$\underline{c}_i^k(N,v)$を得る。

他方、$S\in\Gamma_k^{i-}$ とする（図6-2の右側を参照)。全体提携値 $v(N)$は $v(S)$と $v(N)-v(S)$ の２つに分けられる。$v(N)-v(S)$は提携$N-S$のメンバーに利用可能な総量である。上記と同じ論法で、i 以外の $N-S$ の各メンバーは$\dfrac{v(S)}{k}$を得ると仮定される。この値は、$v(S)$がS内のプレイヤーに利用可能な総量であるので、S内の各プレイヤーが得る平均量とみなされる。従って、$v(N)-v(S)$の中のプレイヤーiに残る部分は$\left(v(N)-v(S)\right)-(n-k-1)\dfrac{v(S)}{k}$と期待される。$\Gamma_k^{i-}$ のすべての提携について平均を求めると$\overline{c}_i^k(N,v)$を得る。

各$h\in\{1,2,\ldots,n-1\}$に対して、$\Gamma_h:=\left\{S\subset N \mid |S|=h\right\}$を h 人提携すべての集合とし、h人提携の平均提携値v_h、プレイヤーiを含むh人提携の平均提携値v_h^{i+}、プレイヤーiを含まないh人提携の平均提携値v_h^{i-}を各々次のように定義する：

$$v_h:=\left|\Gamma_h\right|^{-1}\sum_{S\in\Gamma_h}v(S)$$

$$v_h^{i+}:=\left|\Gamma_h^{i+}\right|^{-1}\sum_{S\in\Gamma_h^{i+}}v(S)$$

$$v_h^{i-}:=\left|\Gamma_h^{i-}\right|^{-1}\sum_{S\in\Gamma_h^{i-}}v(S)$$

簡単な計算により次の基本的な関係が得られる：
各$h\in\{1,2,\ldots,n-1\}$に対して、

$$\sum_{j\in N}v_h^{j+}=\sum_{j\in N}v_h^{j-}=nv_h \tag{6-30}$$

$$v_h=\frac{h}{n}v_h^{i+}+\left(1-\frac{h}{n}\right)v_h^{i-} \tag{6-31}$$

式(6-28)と(6-29) より次の等式を得る。

$$\underline{c}_i^k(N,v) = \frac{n-1}{n-k} v_k^{i+} - \frac{k-1}{n-k} v(N), \quad \overline{c}_i^k(N,v) = v(N) - \frac{n-1}{k} v_k^{i-} \tag{6-32}$$

従って、

$$\underline{c}_i^k(N,v) - \underline{c}_j^k(N,v) = \frac{n-1}{n-k}\left(v_k^{i+} - v_k^{j+}\right) \tag{6-33}$$

$$\overline{c}_i^k(N,v) - \overline{c}_j^k(N,v) = \frac{n-1}{k}\left(v_k^{j-} - v_k^{i-}\right) \tag{6-34}$$

となる。ここで、(6-31)により(6-33)は(6-34)と等しい。実際、定義式(6-26)と(6-27)における $c^k(N,v) \in \mathbb{R}^N$ は $i, j \in N$ に対して次のように定義される。

$$c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v) = \binom{n-2}{k-1}^{-1} \left[\sum_{S \in \Gamma_k^{i+}} v(S) - \sum_{S \in \Gamma_k^{j+}} v(S) \right] \tag{6-35}$$

$\underline{c}_i^1(N,v) = v(\{i\})$、$\overline{c}^{n-2}(N,v) = PAC(N,v)$、$\overline{c}^{n-1}(N,v) = SC(N,v)$ により、CIS-、ENPAC-、ENSC-値は各々EN^{1}AC-、EN^{n-2}AC-、EN^{n-1}AC-値に一致する。

2 つの有用な補題と 1 つの系を述べることによってこの項を終える。最初の補題6-8と系6-3はコアの下界と上界に関係している。2 つ目の補題6-9は EN^{k}AC-値を連立 1 次方程式の解として特徴づけている。表記上の便宜のため、$y \in \mathbb{R}^N$ に対して $y(S) := \sum_{j \in S} y_j \left(S \subset N, S \neq \varnothing\right), y\left(\varnothing\right) := 0$ とする。

補題 6-8.
(N,v)をゲームとし、$x \in \mathbb{R}^N$ は次式を満たすものとする。

$$\sum_{j \in N} x_j = v(N), v(S) \leq \sum_{j \in S} x_j \quad \left(S \in \Gamma_k\right) \tag{6-36}$$

このとき

$$\underline{c}_i^k(N,v) \leq x_i \leq \overline{c}_i^k(N,v) \quad (i \in N) \tag{6-37}$$

が成り立つ。さらに、$v(S) = \sum_{j \in S} \alpha_j (S \in \Gamma_k), v(N) = \sum_{j \in N} \alpha_j$ となる $\left(\alpha_j\right)_{j \in N} \in \mathbb{R}^N$ が存在すれば、$x_j = \alpha_j (j \in N)$ である。

証明： 最初に次のことに注意する。$y \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\left|\Gamma_k^{i+}\right|^{-1} \sum_{S \in \Gamma_k^{i+}} \sum_{j \in S} y_j = \frac{n-k}{n-1} y_i + \frac{k-1}{n-1} y(N) \quad (i \in N)$$

$$\left|\Gamma_k^{i-}\right|^{-1} \sum_{S \in \Gamma_k^{i-}} \sum_{j \in S} y_j = \frac{k}{n-1} \left[y(N) - y_i \right] \quad (i \in N)$$

である。式(6-36)において $S \in \Gamma_k^{i+}$ の範囲で和を求め、$\left|\Gamma_k^{i+}\right|$ で割り、x_i について解くと、$x(N)=v(N)$ より、

$$v_k^{i+} \le \frac{n-k}{n-1} x_i + \frac{k-1}{n-1} x(N) \quad (i \in N)$$

$$\frac{n-1}{n-k} v_k^{i+} - \frac{k-1}{n-k} v(N) \le x_i \quad (i \in N)$$

が得られる。(6-32)より、これは(6-37)の最初の不等式を意味している。次に、$S \in \Gamma_k$ の時、$v(S) = \sum_{j \in S} \alpha_j$ であれば、

$$\sum_{j \in S} \alpha_j \le \sum_{j \in S} x_j \quad \left(S \in \Gamma_k \right)$$

が成り立つ。この式において、$S \in \Gamma_k^{i+}$ の範囲で和を求め、$\left|\Gamma_k^{i+}\right|$ で割ると、$\alpha(N)=v(N)$ により、

$$\frac{n-k}{n-1} \alpha_i + \frac{k-1}{n-1} \alpha(N) \le \frac{n-k}{n-1} x_i + \frac{k-1}{n-1} x(N) \quad (i \in N)$$

となる。これは $\alpha_i \le x_i (i \in N)$ を意味している。

他方、式(6-36)において $S \in \Gamma_k^{i-}$ の範囲で和を求め、$\left|\Gamma_k^{i-}\right|$ で割ると、同じ手続きにより(6-37)の 2 つ目の不等式と $x_i \le \alpha_i (i \in N)$ を得る。故に、$x_i = \alpha_i (i \in N)$ となる。 (証明終わり)

定義により、コア $Core(N,v)$ の要素 x は条件(6-36)を満たすので、(6-37)はコアの下界と上界を与える。これを系として述べる。

系 6-3.

$x \in Core(N,v)$ ならば $\underline{c}_i^k(N,v) \le x_i \le \overline{c}_i^k(N,v) \quad (i \in N)$ である。

補題 6-9.

$EN^kAC(N,v)$は未知数 $x = (x_i)_{i\in N}$ を持つ次の連立 1 次方程式の一意の解である。

$$\begin{cases} x_i - x_j = c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v) \quad (i,j \in N) \\ \sum_{j\in N} x_j = v(N) \end{cases}$$

ここで、$c^k(N,v)$は(6-35)を満たす。

証明： $EN^kAC(N,v)$ はこの連立 1 次方程式を満足する。一意性を示すために、x と y がこの方程式の解と仮定する。$x_i - x_j = y_i - y_j (i,j \in N)$ より、

$x_j - y_j = a$ (constant)$(j \in N)$ で、$a = \frac{1}{n}\left(\sum_{j\in N} x_j - \sum_{j\in N} y_j\right) = 0$ となる。従ってこの方程式は一意の解を持つ。（証明終わり）

6-3-2 EN^{k}AC-値の性質

この項では EN^{k}AC-値の性質を調べる。まず、EN^{k}AC-値は k 人提携値の 2 種類の平均の差のある割合と全体提携値の均等配分の和と解釈できる。この結果により、$EN^1AC(N,v)$, …, $EN^{n-1}AC(N,v)$の重心がシャープレイ値と一致することが分かる。3 つ目の性質は EN^{k}AC-値が Driessen *et al.* [10]で研究されている値のクラスの特別な場合とみなされることである。次に、双対ゲームの EN^{k}AC-値は元のゲームの EN^{n-k}AC-値であることを示し、最後に簡単な数値例を与える。

次の命題で EN^{k}AC-値の 3 つの有用な表現を与える。これらの表現は EN^{k}AC-値を計算する際に助けとなる。

命題 6-5.

次の式が成り立つ：

$$EN^k AC_i(N,v) = \begin{cases} \dfrac{v(N)}{n} + \dfrac{n-1}{n-k}\left(v_k^{i+} - v_k\right) (a) \\ \dfrac{v(N)}{n} + \dfrac{n-1}{k}\left(v_k - v_k^{i-}\right) \ (b) \quad (i \in N) \\ \dfrac{v(N)}{n} + \dfrac{n-1}{n}\left(v_k^{i+} - v_k^{i-}\right) (c) \end{cases} \tag{6-38}$$

証明： (6-30)、(6-35)と v_k^{+} から

$$\sum_{j \in N}\left[c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v)\right] = \sum_{j \in N}\frac{n-1}{n-k}\left(v_k^{i+} - v_k^{j+}\right)$$
$$= \frac{n(n-1)}{n-k}\left(v_k^{i+} - v_k\right) (i \in N)$$

上式と(6-27)から(6-38)-(a)が得られる。他方、(6-31)により(6-38)-(b), -(c)が得られる。 （証明終わり）

Dragan *et al.* [2]はシャープレイ値が次のような重み付き和であることを示している。

$$Sh_i(N,v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{h=1}^{n-1}\frac{1}{h}\left(v_h - v_h^{i-}\right) \quad (i \in N)$$

(6-38)-(b)を参考にすると

$$Sh_i(N,v) = \frac{\sum_{h=1}^{n-1} EN^h AC_i(N,v)}{n-1}$$

すなわち、シャープレイ値は $\left(EN^k AC(N,v)\right)_{k \in \{1,\ldots,n-1\}}$ の重心である。$k_1 \neq k_2$ の時、シャープレイ値と EN^{k_1}AC -値と EN^{k_2}AC -値が同一直線上に並ぶのは、EN^{k_1}AC -値と EN^{k_2}AC -値と次のように定義された n–3 個の点の重心 CG が同一直線上に並ぶ時である（図6-2参照)。

$$\mathrm{CG} := \frac{\sum\left\{EN^h AC(N,v) \mid h \in \{1,\ldots,n-1\}, h \neq k_1, k_2\right\}}{n-3}$$

この共線関係の十分条件の 1 つは $EN^1AC(N,v),\ldots,EN^{n-1}AC(N,v)$によって作られる多面体が線分になることである（Dragan *et al.* [2]の PAW-ゲーム）。すなわち、$v_h - v_h^{i-} = c_h(v_k - v_k^{i-})\left(h \in \{1,\ldots,n-1\}\right)$ となる $k \in \{2,\ldots,n-1\}$ と $\{c_h\}_{h=1,\ldots,n-1}$ が存在することである。ただし、(N,v)はゼロ正規化されていて（$EN^1AC_i(N,v) = \frac{v(N)}{n}\,(i \in N)$）、$c_1$=0、$c_k$=1 と仮定する。

$\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ を自然数の集合とし、次のように定義される $\boldsymbol{G}$ 上の値Φを考察する：

$$\Phi_i(N,v) = \sum_{S \subset N-\{i\}} p_{|S|}^n \left[b_{|S|+1}^n v(S \cup \{i\}) - b_{|S|}^n v(S) \right] \quad (i \in N) \tag{6-39}$$

ここで、$\left\{b_s^h : h \in \mathbf{N}-\{1\}, s = 1,2,\ldots,h\right\}$ は $b_h^h := 1\,(h \in \mathbf{N}-\{1\})$ 以外は任意の定数であり、$\left\{p_s^h : h \in \mathbf{N}-\{1\}, s = 0,1,\ldots,h-1\right\}$ は

$$p_s^h := h^{-1}\binom{h-1}{s}^{-1} \quad (0 \le s \le h-1)$$

である。Roth [21]、Shapley [24]、Weber [29]を参照すれば、$b_s^h = 1\,(1 \le s \le h)$ ならば(6-39)はシャープレイ値に一致することがわかる。そして、$b_s^h = 0\,(1 \le s \le h-1)$ ならば(6-39)は最も簡単な均等解 $\Phi_i(N,v) = \frac{v(N)}{n}\,(i \in N)$ に一致する。

また、(6-39)は次のように書き換えられる：

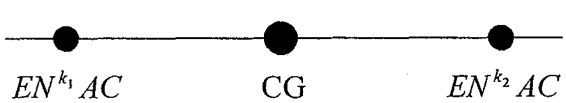


図 6-2. シャープレイ値と EN^{k}AC-値との共線関係

$$\Phi_i(N,v)=\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{S\in\Gamma_h^{i-}}p_h^n\left[b_{h+1}^n v(S\cup\{i\})-b_h^n v(S)\right]$$
$$=\sum_{h=0}^{n-1}p_h^n b_{h+1}^n\sum_{S\in\Gamma_h^{i-}}v(S\cup\{i\})-\sum_{h=0}^{n-1}p_h^n b_h^n\sum_{S\in\Gamma_h^{i-}}v(S)$$
$$=\frac{v(N)}{n}+\sum_{h=1}^{n-1}p_{h-1}^n b_h^n\sum_{S\in\Gamma_h^{+}}v(S)-\sum_{h=1}^{n-1}p_h^n b_h^n\sum_{S\in\Gamma_h^{i-}}v(S)$$
$$=\frac{v(N)}{n}+\sum_{h=1}^{n-1}\frac{b_h^n}{n}\left(v_h^{i+}-v_h^{i-}\right)$$

従って、(6-38)-(c)より EN^{k}AC-値は(6-39)で $b_k^n=n-1, b_s^n=0\,(1\le s\le n-1, s\ne k)$ の時であることがわかる。次に(6-39)の形式の他の 2 つの値についても述べる。

$b_s^n=(s+1)^{-1}\ (1\le s\le n-1)$ ならば、いわゆる団結値となる（Nowak and Radzik [15]）。$b_s^n=\dfrac{s}{2^{n-2}}\begin{pmatrix}n-1\\ s\end{pmatrix}(1\le s\le n-1)$ ならば、いわゆる最小 2 乗準仁となる（Ruiz *et al.* [22]）。(6-39)形式の値の公理的特徴付けに関しては Driessen *et al.* [10] が考察している。

例 6-1. 次の 4 人ゲームを考察する：

$$v(S)=\begin{cases}1 & (S\in W)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

ここで、$W=\{\{1,2,3,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ である。命題6-5などを用いると、

$$EN^1AC(N,v)=EN^3AC(N,v)=(1/4,1/4,1/4,1/4)$$
$$EN^2AC(N,v)=(1/2,1/2,0,0)$$

となる。シャープレイ値は(1/3,1/3,1/6,1/6)であり、上記の 3 つのベクトルの平均である。従って、EN^{1}AC-、EN^{2}AC-値とシャープレイ値は 1 直線上にあることが分かる。（例終わり）

(N,v^*) を(N,v)の*双対ゲーム*とする。すなわち、

$$v^*(S) := v(N) - v(N-S) \quad (S \subset N) \tag{6-40}$$

とする。次の命題は双対ゲームの EN$^{(\cdot)}$AC-値の間の有用な関係を示している。

命題 6-6.
次の関係が成り立つ：

(i) $\underline{c}^k(N, v^*) = \overline{c}^{n-k}(N, v)$

(ii) $EN^k AC(N, v^*) = EN^{n-k} AC(N, v)$

証明： (i)：「$S \in \Gamma_k^{i+} \Leftrightarrow N-S \in \Gamma_{n-k}^{i-}$」と $\left|\Gamma_k^{i+}\right| = \left|\Gamma_{n-k}^{i-}\right|$ に注意すると、(6-40)、(6-28)、(6-29)より、次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}\underline{c}_i^k(N, v^*) &= \left|\Gamma_k^{i+}\right|^{-1} \sum_{S \in \Gamma_k^{i+}} \left[\big(v(N) - v(N-S)\big) - (k-1)\frac{v(N-S)}{n-k} \right] \\ &= \left|\Gamma_{n-k}^{i-}\right|^{-1} \sum_{T \in \Gamma_{n-k}^{i-}} \left[\big(v(N) - v(T)\big) - \big(n-(n-k)-1\big)\frac{v(T)}{n-k} \right] \\ &= \overline{c}_i^{n-k}(N, v) \quad (i \in N)\end{aligned}$$

(ii)： (i)と(6-26)より、

$$\begin{aligned}EN^k AC_i(N, v^*) &= \underline{c}_i^k(N, v^*) + \frac{1}{n}\left[v^*(N) - \sum_{j \in N} \underline{c}_j^k(N, v^*) \right] \\ &= \overline{c}_i^{n-k}(N, v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j \in N} \overline{c}_j^{n-k}(N, v) \right] \\ &= EN^{n-k} AC_i(N, v) \quad (i \in N)\end{aligned}$$

となる。 （証明終わり）

6-3-3 EN^{k}AC-値と準仁の一致

この項では、EN^{k}AC-値が、ゲームのあるクラスにおいて k 人提携の不満が一定であることを要求する、連立 1 次方程式の一意の解であることを示す。また、EN^{k}AC-値が準仁 $\eta^*(N, v)$ と一致するための十分条件を与える。準仁は、EN^{k}AC-値と対照的に、不満という概念に依存していることに注意する。それでもなおこの 2 つの概念は適切に定義されたゲームのクラスにおいて一致する。

命題 6-7.
下記の(i)と(ii)は同値である。
(i) 次の連立 1 次方程式を満足する一意な$x \in \mathbb{R}^N$と一意な$a \in \mathbb{R}$が存在する：

$$\begin{cases} e^v(S,x) = a & \left(S \in \Gamma_k\right) \\ \displaystyle\sum_{j \in N} x_j = v(N) & \end{cases} \tag{6-41}$$

(ii) 次の等式を満たす$\alpha = \left(\alpha_i\right)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$と$\beta \in \mathbb{R}$が存在する：

$$v(S) = \sum_{j \in S} \alpha_j + \beta \qquad \left(S \in \Gamma_k\right) \tag{6-42}$$

さらに、(6-41)の解 x は EN^{k}AC-値と一致し、x と a はα、βによって次のように表現される

$$x_i = \alpha_i + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j \in N} \alpha_j\right] \quad (i \in N) \tag{6-43}$$

$$a = \frac{k}{n}\left[\sum_{j \in N} \alpha_j - v(N)\right] + \beta \tag{6-44}$$

証明： (i)⇒(ii)：(i)における x と a により、$\alpha := x, \beta := a$ とおけば(i)より(ii)が得られる。
(ii)⇒(i)：（存在：）(ii)が成立していると仮定する。$x(N) = v(N)$ であるので $const := \dfrac{v(N) - \alpha(N)}{n}$ とおいて $x_j := \alpha_j + const\ (j \in N)$ とする。この x は(6-41)と(6-43)を満足する。(6-44)は $a = v(S) - x(S) = \alpha(S) + \beta - \left(\alpha(S) + \dfrac{k}{n}\left(v(N) - \alpha(N)\right)\right)$ に注意すれば得られる。
（一意性：）連立 1 次方程式(6-41)の次の一部分を考慮する：

$$e^v(S \cup \{i\}, x) = e^v(S \cup \{j\}, x) \quad (i, j \in N, |S| = k-1, i \notin S, j \notin S)$$

この時、次の連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{cases} x_i - x_j = \alpha_i - \alpha_j & (i, j \in N) \\ \sum_{j \in N} x_j = v(N) \end{cases} \tag{6-45}$$

(6-42)を(6-35)に代入すると $c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v) = \alpha_i - \alpha_j$ となるので、(6-45)は補題6-9の方程式と同じである。すなわち、x は一意で、$EN^k AC(N,v)$ でなければならない。 （証明終わり）

一般性を失うことなく、(6-42)のαとβを$\sum_{j \in N} \alpha_j = v(N)$ となるように選ぶことができる。この時、$\alpha = EN^k AC(N,v)$、$\beta = e^v(S,\alpha)(S \in \Gamma_k)$ となる。

例 6-2. ［地主ゲーム］プレイヤー1を地主、プレイヤー2,3,…,nを土地を農耕する以外に貢献できない農夫とする。$f:\{0,1,\ldots,n-1\} \to \mathbb{R}$ を、$f(t)$が地主に雇われた t 人（$0 \le t \le n-1$）の農夫の労働による土地の収穫高を表す、生産関数とする。地主は何も生産しない、すなわち、$f(0)=0$ である。また、fは非減少関数、$f(t) \le f(t+1) (0 \le t \le n-2)$、と仮定する。この経済状況は$N := \{1,2,\ldots,n\}$で特性関数$v: 2^N \to \mathbb{R}$が次式で与えられるゲームとしてモデル化することができる。

$$v(S) := \begin{cases} 0 & (1 \notin S) \\ f(|S|-1) & (1 \in S) \end{cases}$$

このように、地主を含む提携の提携値はその提携にいる農夫によって生産される収穫高に等しい。農夫は土地を持っていないので、農夫だけからなる提携の提携値は 0 である。したがって、この地主ゲームはゼロ-正規化されていて；$v(\{i\}) = 0 (i \in N)$である。

β:=0、任意の$k \in \{1,\ldots,n-1\}$に対して

$$\alpha_j := \begin{cases} f(k-1) & (j=1) \\ 0 & (j \ne 1) \end{cases}$$

とおけば、$v(S) = \sum_{j \in S} \alpha_j + \beta \left(S \in \Gamma_k\right)$となるので、EN^{k}AC-値は(6-41)の一意な解であり

$$EN^kAC_i(N,v)=\begin{cases} f(k-1)+\dfrac{1}{n}\left[f(n-1)-f(k-1)\right] & (i=1) \\ \dfrac{1}{n}\left[f(n-1)-f(k-1)\right] & (i\neq 1) \end{cases}$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（例終わり）

$v(S)=\sum_{j\in S}\alpha_j+\beta$ $(S\in\Gamma_k)$ 、 $\alpha(N)$=$v(N)$ ならば、 $z:=EN^kAC(N,v)=\left(\alpha_j\right)_{j\in N}$ で $e^v(S,z)=\beta$ $(S\in\Gamma_k)$ であった。$e^v(S,z)\leq\beta$ は $v(S)\leq\sum_{j\in S}\alpha_j+\beta$ と同値であるので、次の系が導かれる。

系 6-4.
$z:=EN^kAC(N,v)$ とする。その時、次の(i)と(ii)は同値である。

(i) EN^{k}AC-値における最大不満は k 人提携で達成される。すなわち、

$$e^v(S,z)\leq e^v(T,z)(T\in\Gamma_k,\varnothing\neq S\subset T \text{ または } T\subset S\subset N,S\neq N) \tag{6-46}$$

で、EN^{k}AC-値における k 人提携の不満が一致する。すなわち、ある定数 $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$e^v(S,z)=a \quad (S\in\Gamma_k)$$

となる。

(ii) $\sum_{j\in N}\alpha_j=v(N)$ で次式を満たす $\alpha=\left(\alpha_j\right)_{j\in N}\in\mathbb{R}^N$ と $\beta\in\mathbb{R}$ が存在する：

$$v(S)\leq\sum_{j\in S}\alpha_j+\beta \quad (S\subset N,S\neq\varnothing,N) \tag{6-47}$$

ただし、$S\in\Gamma_k$ の時は等号が成立し、$\alpha=EN^kAC(N,v)$ である。

次の定理は、あるゲームのクラスでは EN^{k}AC-値と準仁が一致することを述べている。

定理 6-3.
ゲーム(N,v)において(6-47)が成立すれば$\eta^*(N,v)=EN^kAC(N,v)$である。

証明： $x:=\eta^*(N,v)$、$z:=EN^kAC(N,v)$とおく。(6-47)が成立すると仮定し、x=zであることを証明する。S=N と$S=\varnothing$の時には$e^v(S,x)=e^v(S,z)=0$であるので、2つの不満ベクトル$\theta(x)$と$\theta(z)$の辞書的順序での比較に関して、Nと$\varnothing$の（ゼロ）不満は無視できる。$x:=\eta^*(N,v)$は$\theta(x)\le_L \theta(z)$を意味するので、$\theta_1(x)\le\theta_1(z)$である。$\alpha=EN^kAC(N,v)$であるので、(6-47)により、$\theta_1(z)=\beta$（$z$における最大不満は$\beta$である）となる。$\theta_1(x)\le\theta_1(z)=\beta$から、

$$\sum_{j\in S}\alpha_j+\beta-x(S)=e^v(S,x)\le\theta_1(x)\le\theta_1(z)=\beta \quad (S\in\Gamma_k)$$
$$\sum_{j\in S}\alpha_j\le\sum_{j\in S}x_j \quad (S\in\Gamma_k)$$

これと補題6-8より$x_j=\alpha_j=EN^kAC_j(N,v)(j\in N)$を得る。　　　（証明終わり）

(6-47)が成立するとき、$\eta^*(N,v)=EN^kAC(N,v)\in Core(N,v)$であるのは$\beta\le 0$の時であり、かつその時に限る。

$\dfrac{v(N)}{n}\ne\dfrac{v_k}{k}$と仮定する。その時、$\underline{c}_j^k(N,v)\ne\overline{c}_j^k(N,v)(j\in N)$であり、(6-35)より、あるを$m\in\mathbb{R}$を利用して$c_j^k(N,v)=\dfrac{m}{n}\overline{c}_j^k(N,v)+\dfrac{n-m}{n}\underline{c}_j^k(N,v)(j\in N)$と表現できる。$k$人平均寄与$c^k(N,v)$に関する*ギャップ関数* を$g_k^m(S):=\sum_{j\in S}c_j^k(N,v)-v(S)(S\subset N)$と定義する。$m\ne k$ならば、条件(6-47)は次式と同値である

$$g_k^m(S)\ge\left[\frac{k(n-k)}{n(n-1)(m-k)}+\frac{|S|}{n}\right]g_k^m(N) \quad (S\subset N, S\ne\varnothing, N)$$

ここで、$S\in\Gamma_k$の時、等号が成立する。k=n–2かつm=nの場合はDriessen and Funaki [8]で扱われている。この不等式を以下で証明する。

証明： $c^k(N,v)$の代わりにc^kと書く。次のことが成り立つことに注意する：

$$v(S)-c^k(S)-\frac{s}{n}\left[v(N)-c^k(N)\right]\le a \quad (S\subset N, S\ne\varnothing, N)$$

ここで、$S\in\Gamma_k$ の時、等号が成立する。等式の部分より $a=v_k-\frac{k}{n}v(N)$ となる。

$$c^k(N)=\frac{m}{n}\overline{c}^k(N)+\frac{n-m}{n}\underline{c}^k(N)=\frac{mn-nk+n-m}{n-k}v(N)+\frac{n(k-m)(n-1)}{k(n-k)}v_k$$

であるので、不等式の部分から、v_k を消去することにより

$$-g_k^m(S)+\frac{s}{n}g_k^m(N)\le\frac{k(n-k)}{n(k-m)(n-1)}g_k^m(N)$$

となる。 （証明終わり）

$m=k$ ならば、$\sum_{j\in N}c_j^k(N,v)=v(N)$ となるので(6-26)より

$c_j^k(N,v)=\alpha_j=EN^kAC_j(N,v)(j\in N)$ かつ $\sum_{j\in N}\alpha_j=v(N)$ となる。ゆえに、条件(6-47)は次のようになる：

$$g_k^k(S)\ge\beta \quad (S\subset N, S\ne\varnothing, N)$$

ただし、$S\in\Gamma_k$ の時、等号が成立する。

例 6-3. 再び例6-1を考える。このゲームの準仁 $\eta^*(N,v)$（仁 $\eta(N,v)$）は $EN^2AC(N,v)$ と等しいことがチェックできる。$e^v\left(\{1,2\},EN^2AC(N,v)\right)\ne e^v\left(\{1,3\},EN^2AC(N,v)\right)$ であるので、条件(6-47)は成立していない。 （例終わり）

例 6-4. ［地主ゲーム（続き）］再び例6-2の地主ゲームを考える。

$\alpha_1:=f(k-1)+\frac{1}{n}\left(f(n-1)-f(k-1)\right)$、$\alpha_j:=\frac{1}{n}\left(f(n-1)-f(k-1)\right)(j\in N, j\ne 1)$、

$\beta:=-\frac{k}{n}\left(f(n-1)-f(k-1)\right)\le 0$ とおけば、$v(S)=\sum_{j\in S}\alpha_j+\beta\ (S\in\Gamma_k)$ かつ

$\sum_{j\in N}\alpha_j=v(N)$ となる。条件(6-47)が成立する必要かつ十分条件は $k=1$ かつ

$\dfrac{f(n-1)}{n} \geq \max_{1<s<n} \dfrac{f(s-1)}{s-1}$ である。この時、$\eta_i(N,v) = EN^1AC_i(N,v) = CIS_i(N,v)$
$= \dfrac{f(n-1)}{n} (i \in N)$ となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（例終わり）

ゲーム(N,v)と提携$M \subset N$が与えられた時、Mの部分集合（すなわち、2^M）のみに特性関数vを制限することによって得られる*部分ゲーム* を(M,v)と書く。また、$\Delta_S(M,v) := v(M) - v(M-S)(S \subset M)$ と定義する。$\Delta_S(M,v)$ はSのメンバーの（(M,v)の全体提携に対する）協力による増加利益と解釈される。この項の残りの部分においてわれわれは k 人提携で最大の不満を与える配分の集合を考察する。次の予備的な補題によりこの集合が与えられる。

補題 6-10.

$x = \left(x_i\right)_{i \in N}$ とすると、次の(i)と(ii)は同値である。

(i)　$e^v(S,x) \leq e^v(T,x)(T \in \Gamma_k, \varnothing \neq S \subset T \text{ または } T \subset S \subset N, S \neq N)$　　(6-48)

(ii)

$$x(R) \leq \min\left[\Delta_R(T,v) \mid T \in \Gamma_k, R \subset T\right] (R \subset N, |R| < k) \tag{6-49}$$

$$x(R) \geq \max\left[\Delta_R(T \cup R,v) \mid T \in \Gamma_k, T \subset N-R\right] (R \subset N, |R| < n-k) \tag{6-50}$$

補題6-10 の証明は容易なので省略する。各ゲーム(N,v)に対し、$U^k(N,v)$:={ $x \in A(N,v) | x$ は(6-49)と(6-50)を満たす}を定義する。言葉で言えば、$U^k(N,v)$の要素である配分において、k 人未満の提携への利得はその提携のメンバーの（適切な k 人部分ゲームの全体提携に対する）協力による増加利益の最小値より大きくなく、そして、r 人（$r<n-k$）を含む提携への利得はその提携のメンバーの（適切な $r+k$ 人部分ゲームの全体提携に対する）協力による増加利益の最大値以上である。また、$U^k(N,v)$は空集合かもしれないことに注意する。

条件(6-48)が成立すれば、k 人提携が配分 x において*効率的*であるという。補題6-10は配分xが効率性条件(6-48)を満たす必要かつ十分条件が$x \in U^k(N,v)$であることを示している。

Schmeidler [23]を参照すると、一般的に、準仁$\eta^*(N,v)$は準カーネル$K^*(N,v)$の部分集合である。この項の最後の部分は $U^k(N,v)$と準カーネルの共通部分と

EN^{k}AC-値との関係についてである。次の定理は、EN^{k}AC-値におけるすべての k 人提携の不満が同じなら $U^k(N,v)$と準カーネルの共通部分は空集合か EN^{k}AC-値 1 点からなる、と述べている。さらに、非空性は EN^{k}AC-値と準仁が同一であることを保証している。

定理 6-4.
(N,v)を(6-41)または(6-42)を満たすゲームとする。この時、次が成立する。

(i) $U^k(N,v)\cap K^*(N,v)\subset\left\{EN^kAC(N,v)\right\}$

(ii) $U^k(N,v)\cap K^*(N,v)=\left\{EN^kAC(N,v)\right\}\Leftrightarrow EN^kAC(N,v)\in U^k(N,v)$

(iii) $\eta^*(N,v)\in U^k(N,v)\Leftrightarrow EN^kAC(N,v)\in U^k(N,v)$

(iv) $EN^kAC(N,v)\in U^k(N,v)\Rightarrow \eta^*(N,v)=EN^kAC(N,v)$

証明： (i)と(ii)の「$\Leftarrow$」の部分は次の補題で証明する。(ii)の「$\Rightarrow$」の部分は明らかである。補題6-10より仮定(6-41)と $EN^kAC(N,v)\in U^k(N,v)$ は(6-47) と同値であるので、定理6-3が(iii)の「$\Leftarrow$」の部分と(iv)を証明する。(iii)の「$\Rightarrow$」の部分を証明するために、$\eta^*(N,v)\in U^k(N,v)$ と仮定する。何時も $\eta^*(N,v)\in K^*(N,v)$ は成立する。従って、(i)と $\eta^*(N,v)\in U^k(N,v)\cap K^*(N,v)$ より、$EN^kAC(N,v)=\eta^*(N,v)$ $\in U^k(N,v)$ となる。（証明終わり）

補題 6-11.
(N,v)を(6-41)または(6-42)を満たすゲームとする。この時、次が成立する。

(i) $x\in K^*(N,v)$ かつ $x\in U^k(N,v)$ ならば、$x=EN^kAC(N,v)$ である。

(ii) $EN^kAC(N,v)\in U^k(N,v)$ ならば、$EN^kAC(N,v)\in K^*(N,v)$ である。

証明： 仮定(6-41)または(6-42)より、$S\subset N,|S|=k-1$、$i,j\notin S,i\neq j$ となる任意

の S,i,j に対して、$e^v\left(S\cup\{j\},x\right)-e^v\left(S\cup\{i\},x\right)=x_i-x_j+\alpha_j-\alpha_i$ である。

$x\in U^k(N,v)$ かつ $s_{ij}^v(x)=e^v(S^*,x)(i\in S^*,j\notin S^*,\left|S^*\right|=k)$ と仮定すると、

$j\in T,i\notin T,|T|=k,T\subset N$ である任意の T に対して、

$$
\begin{aligned}
e^v(T,x)&=e^v\left((T-\{j\})\cup\{i\},x\right)+x_i-x_j+\alpha_j-\alpha_i\\
&\leq e^v(S^*,x)+x_i-x_j+\alpha_j-\alpha_i\\
&=s_{ij}^v(x)+x_i-x_j+\alpha_j-\alpha_i
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これは、$s^v_{ji}(x)=e^v\left((S^*-\{i\})\cup\{j\},x\right)$ と

$$s^v_{ji}(x)=s^v_{ij}(x)+x_i-x_j+\alpha_j-\alpha_i(i,j\in N,i\neq j) \tag{6-51}$$

を意味する。

(i)：$x\in K^*(N,v)$ と仮定すると、(6-51)より補題6-9の連立方程式が得られ、$x=EN^kAC(N,v)$となる。

(ii)：$z:=EN^kAC(N,v)\in U^k(N,v)$ と仮定する。$z_i-z_j=\alpha_i-\alpha_j(i,j\in N)$ であるので、

(6-51)より、$s^v_{ji}(z)=s^v_{ij}(z)(i,j\in N,i\neq j)$ となる。

これは$z=EN^kAC(N,v)\in K^*(N,v)$である事を意味している。　（証明終わり）

6-4 EN^{k}AC-値とシャープレイ値の縮小ゲームによる一貫性

6-4-1 *k* 人平均寄与の残余均等配分値（EN^{k}AC-値）

譲渡可能効用を持つ提携形ゲームは順序対(N,v)である。ただし、N はプレイヤーの有限集合であり、v は*提携* と呼ばれる N の部分集合上で定義される*特性関数* $v:2^N \to \mathbb{R}$ である。$v(S)$ $(S \subset N)$ は S の*提携値* と呼ばれ、S のメンバーが協力して得られる利得を表す。$v(\varnothing)=0$ と仮定する。前節のように集合 S に含まれる要素の個数を$|S|$または s で表す。プレイヤーの集合が N に固定されたゲームのクラスを $\boldsymbol{G}^N$、プレイヤーの集合が可変なゲームのクラスを $\boldsymbol{G}$ で表す。

ゲーム(N,v)の解（1 点解、集合解）は全体提携の提携値 $v(N)$をいかに分けるかに関わっている。利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ は $\sum_{j\in N} x_j = v(N)$ を満たす時、*効率的* といわれる。$\boldsymbol{G}$ 上の*値*（1 点解）はゲーム(N,v)に効率的な利得ベクトル $\sigma(N,v) = \left(\sigma_i(N,v)\right)_{i\in N}$ を対応させる関数σである。$\sigma_i(N,v)$はゲーム(N,v)に参加することによるプレイヤーi の利得の評価値を表す。$k \in \{1,\ldots,n-1\}$ に対して、*k 人平均寄与の残余均等配分値* (EN^{k}AC-値) $EN^kAC(N,v) = \left(EN^kAC_i(N,v)\right)_{i\in N}$ は次のように定義される（第6-3節参照）：

$$EN^kAC_i(N,v) := c_i^k(N,v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j\in N} c_j^k(N,v)\right] \quad (i \in N)$$

または、同値的に

$$EN^kAC_i(N,v) := \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j\in N}\left[c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v)\right] \quad (i \in N)$$

EN^{k}AC-値は *k 人平均寄与* $c^k(N,v) := \left(c_j^k(N,v)\right)_{j\in N}$ それ自体には依存せず、次のように定義される差$\left(c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v)\right)_{i,j\in N}$ に依存する：

$$c_i^k(N,v) - c_j^k(N,v) := \binom{n-2}{k-1}^{-1}\left[\sum_{S\in\Gamma_k^{i+}} v(S) - \sum_{S\in\Gamma_k^{j+}} v(S)\right] \quad (i,j \in N)$$

ここで、$\Gamma_k^{i+} := \{S \subset N \mid |S| = k, i \in S\}$ はプレイヤーi を含む k 人提携すべての集合、$\Gamma_k^{i-} := \{S \subset N \mid |S| = k, i \notin S\}$ はプレイヤーiを含まないk人提携すべての集合である。$c^k(N,v)$の特別な場合$\underline{c}^k(N,v)$ と $\overline{c}^k(N,v)$ が興味深い：

$$\underline{c}_i^k(N,v) := \left|\Gamma_k^{i+}\right|^{-1} \sum_{S \in \Gamma_k^{i+}} \left[v(S) - (k-1)\frac{v(N)-v(S)}{n-k} \right] \qquad (6\text{-}52)$$

$$\overline{c}_i^k(N,v) := \left|\Gamma_k^{i-}\right|^{-1} \sum_{S \in \Gamma_k^{i-}} \left[\left(v(N)-v(S)\right) - (n-k-1)\frac{v(S)}{k} \right]$$

$\underline{c}_i^k(N,v)$ をプレイヤーi の*下-k 人平均寄与*、$\overline{c}_i^k(N,v)$ を i の*上-k 人平均寄与* と呼ぶ。$\underline{c}_j^1(N,v) = v(\{j\})$、$\overline{c}_j^{n-1}(N,v) = SC_j(N,v) := v(N) - v(N-\{j\})\ (j \in N)$ であるので、CIS-値と ENSC-値は各々EN^{1}AC-値と EN^{n-1}AC-値である。ただし、

$$\left.\begin{aligned} CIS_j(N,v) &:= v(\{j\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}) \right] \\ ENSC_j(N,v) &:= SC_j(N,v) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{i \in N} SC_i(N,v) \right] \end{aligned}\right\} (j \in N)$$

である。この項の残りの部分では値のいくつかの性質をあげ、EN^{k}AC-値に関する補題を述べる。

定義 6-1（RISE）.
$\boldsymbol{G}$ 上の値σは次の条件を満たす時、*戦略的同等性のもとで相対的に不変*である（RISE；*Relatively Invariant under Strategic Equivalence*）といわれる：
$w = \alpha v + \beta\ (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^N)$ を満たす $(N,v), (N,w) \in \boldsymbol{G}$ に対して、$\sigma(N,w) = \alpha\sigma(N,v) + \beta$ である。

定義 6-2（ETP^k）.
$k \in \{1, \dots, n-1\}$ とする。$\boldsymbol{G}$ 上の値σは次の条件を満たす時、*k 人提携に関して代替プレイヤーの同等な扱い*（ETP^k; *Equal Treatment Property*）を満たすといわれる：プレイヤー$i, j \in N (i \neq j)$ がゲーム $(N,v) \in \boldsymbol{G}$ において $\sum_{S \in \Gamma_k^{i+}} v(S) = \sum_{S \in \Gamma_k^{j+}} v(S)$ を満たすとき、$\sigma_i(N,v) = \sigma_j(N,v)$である。

性質 ETP^{k}は等しい k 人平均提携値を持つプレイヤーには等しい利得を与えることを要求する。

定義 6-3（ETP）.
$\boldsymbol{G}$ 上の値σは次の条件を満たす時、*代替プレイヤーの同等な扱い*（ETP；*Equal Treatment Property*）を満たすといわれる：
プレイヤー$i, j \in N(i \neq j)$がゲーム$(N,v) \in \boldsymbol{G}$において$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ $(\forall S \subset N - \{i, j\})$を満たすとき、$\sigma_i(N,v)=\sigma_j(N,v)$である。

簡単な計算により EN^{k}AC-値が RISE、ETP^k、ETP を満たすことがわかる。これを補題として述べる。

補題 6-12.
$k \in \{1,\ldots,n-1\}$とする。EN^{k}AC-値は RISE、ETP^k、ETP を満足する $\boldsymbol{G}$ 上の値である。

6-4-2 G^Nにおける EN^{k}AC-値の公理化

この項ではプレイヤーの集合を N に固定し、$\boldsymbol{G}^N$ 上での EN^{k}AC-値の公理的特徴付けに焦点を絞る。次の定理は EN^{k}AC-値が RISE と ETP^k で特徴付けられることを述べている：

定理 6-5.
$n \geq 2, k \in \{1,\ldots,n-1\}$とする。EN^{k}AC-値は RISE と ETP^k を満たす $\boldsymbol{G}^N$ 上の一意の値である。

証明： 補題6-12により EN^{k}AC-値は RISE と ETP^k を満たす。証明の一意性の部分は[9]の定理 3.1 の証明とかなり類似しているが、便宜のために証明を述べる。σを $\boldsymbol{G}^N$ 上の RISE と ETP^k を満たす値とする。$\sigma=EN^kAC$ を証明する。

$(N,v) \in \boldsymbol{G}^N$に対して戦略的に同等なゲーム$(N,w)$を $w:=v-\beta$によって定義する。

ただし、$\beta := \left(\underline{c}_j^k(N,v)\right)_{j \in N} \in \mathbb{R}^N$である。

$\sum_{S \in \Gamma_k^{i+}} w(S) = \sum_{S \in \Gamma_k^{j+}} w(S)\ \left(i, j \in N(i \neq j)\right)$を示す。$k$=1 ならば、明らかに$\sum_{S \in \Gamma_k^{i+}} w(S)$

$= \sum_{S \in \Gamma_k^{j+}} w(S) = 0$となる。$k \geq 2$ならば、

$$\sum_{S\in\Gamma_k^{j+}} w(S) = \sum_{S\in\Gamma_k^{j+}} v(S) - \sum_{S\in\Gamma_k^{j+}}\left[\sum_{i\in S-\{j\}}\beta_i + \beta_j\right]$$

$$= \sum_{S\in\Gamma_k^{j+}} v(S) - \binom{n-2}{k-2}\sum_{i\in N}\beta_i - \left(\left|\Gamma_k^{j+}\right| - \binom{n-2}{k-2}\right)\beta_j \quad \text{((6-52)による)}$$

$$= \binom{n-2}{k-2}\left[v(N) - \sum_{i\in N}\beta_i\right] \quad (j\text{に依存しない})$$

従って、σ の ETP^k により $\sigma_j(N,w) = \dfrac{v(N) - \sum_{i\in N}\beta_i}{n}\,(j\in N)$ となる。σ の RISE により $\sigma_j(N,v) = \beta_j + \sigma_j(N,w) = EN^kAC_j(N,v)\ (j\in N)$ となる。　　（証明終わり）

6-4-3 G における EN^{k}AC-値の公理化

この項では縮小ゲームによる一貫性によりプレイヤーの総数が可変なゲームの集合 $\boldsymbol{G}$ 上における EN^{k}AC-値の公理的特徴付けを考察する。*縮小ゲーム*はゲーム $(N,v)\,(n\geq 2)$ から 1 人のプレイヤーが次のように退場することにより得られる。退場するプレイヤーi は利得ベクトル $x\in\mathbb{R}^N$ の自分の成分を受け取る。残りのプレイヤーは $N-\{i\}$を形成する。この縮小ゲームの特性関数 $v^x:2^{N-\{i\}}\to\mathbb{R}$ は元のゲームの特性関数と利得ベクトル x から作られる。値が効率性を満たすようにするために $v^x(N-\{i\}):=v(N)-x_i$ とする。その他の提携 S に対する提携値 $v^x(S)$は、次に述べる縮小ゲーム性が成立するようにこの項の後で特定する。

定義 6-4（RGP）.
$\boldsymbol{G}$ 上の値σ は次が成り立つとき、その縮小ゲームに関して*縮小ゲーム性*（RGP；*Reduced Game Property*）を満たすという：

$(N,v)\in\boldsymbol{G}\,(n\geq 2)$ と $i,j\in N(i\neq j)$ に対して $\sigma_j\left(N-\{i\},v^{\sigma(N,v)}\right)=\sigma_j(N,v)$ である。

ある値の縮小ゲーム性は次のことを述べている：
1 人のプレイヤーが元のゲームからその値の彼の取り分を持って退場する、その時、残りのプレイヤーは縮小ゲームにおいても元のゲームにおいても同じ利得を（その値により）得る。このように RGP は一貫性の性質とみなせる。値を RGP で特徴付けるために次の補題が必要である：

補題 6-13.
Φを RISE と ETP を満足する $\boldsymbol{G}$ 上の値とする。さらに、ある縮小ゲーム $\left((N-\{i\},v^x)\right)_{i\in N,x\in\mathbb{R}^N}$ に対して、次の関係式(6-53)が成り立つとする：

$$\Phi_j(N-\{i\},v^x)=\Phi_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\left[\Phi_i(N,v)-x_i\right]\quad\left(i,j\in N(i\neq j),x\in\mathbb{R}^N\right)\text{(6-53)}$$

((6-53)はΦの RGP を意味する。)

その時、Φはその縮小ゲームに対して RGP を満たし、RISE と ETP を満たす $\boldsymbol{G}$ 上の一意の値である。

証明： 証明は[9]の定理 4.3 と同様であるが、便宜のため$|N|$に関する帰納法で証明する。σ を仮定の縮小ゲームに関して RGP を満たし、RISE と ETP を満たす値とする。値の効率性により$|N|=1$ ならば、$(N,v)\in\boldsymbol{G}$ に対して$\sigma(N,v)=\Phi(N,v)$である。RISE と ETP により、2 人ゲームの時にはこれらの値は標準的な解に一致する；$\sigma_i\left(\{i,j\},v\right)=\Phi_i\left(\{i,j\},v\right)=v\left(\{i\}\right)+\frac{1}{2}\left[v(\{i,j\})-v(\{i\})-v(\{j\})\right]$。$|N|\geq 3$ とし、$|\bar{N}|<|N|$ であるゲーム $(\bar{N},w)\in\boldsymbol{G}$ に対して $\sigma(\bar{N},w)=\Phi(\bar{N},w)$ と仮定する。σ の RGP とΦの一意性に関する帰納法の仮定と(6-53)から

$$\sigma_j(N,v)=\sigma_j(N-\{i\},v^{\sigma(N,v)})=\Phi_j(N-\{i\},v^{\sigma(N,v)})$$
$$=\Phi_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\left[\Phi_i(N,v)-\sigma_i(N,v)\right]$$
$$\sigma_j(N,v)-\Phi_j(N,v)=\frac{1}{n-1}\left[\Phi_i(N,v)-\sigma_i(N,v)\right]$$

となり、i と j を入れ替えて

$$\sigma_i(N,v)-\Phi_i(N,v)=\frac{1}{n-1}\left[\Phi_j(N,v)-\sigma_j(N,v)\right]$$
$$=\frac{1}{(n-1)^2}\left[\sigma_i(N,v)-\Phi_i(N,v)\right]$$

が得られる。$n\geq 3$ より、これは$\sigma(N,v)=\Phi(N,v)$を意味している。（証明終わり）

さて、EN^{k}AC-値の $\boldsymbol{G}$ 上での公理的特徴付けを考察する。最初に CIS-値と ENSC-

値の RGP をわれわれの表記法で表現すると、

$$EN^1AC_j\left(N-\{i\},v^x\right)=EN^1AC_j(N,v)\quad (j\in N-\{i\})$$

$$EN^{n-2}AC_j\left(N-\{i\},v^y\right)=EN^{n-2}AC_j(N,v)\quad (j\in N-\{i\})$$

となる。ただし、x=$EN^1AC(N,v)$, y=$EN^{n-1}AC(N,v)$, n=$|N|$である。CIS-値の RGP は同じ k の値、すなわち、k=1 を利用する。一方、ENSC-値の RGP は違う値、n–2=(n–1)–1 と n–1、を利用する（これらの値は対応するゲームのプレイヤーの総数–1 と等しい)。従って、次のような 2 つのタイプの縮小ゲーム性を区別しなければならない：

$k\in\{1,\ldots,n-1\}$ に対して

(**CIS-タイプ**)： $$EN^kAC_j\left(N-\{i\},v^x\right)=EN^kAC_j(N,v)\quad (j\in N-\{i\})\qquad (6\text{-}54)$$

(**ENSC-タイプ**)： $$EN^{n-k-1}AC_j\left(N-\{i\},v^y\right)=EN^{n-k}AC_j(N,v)\,(j\in N-\{i\})\quad (6\text{-}55)$$

ただし、x=$EN^kAC(N,v)$, y=$EN^{n-k}AC(N,v)$, n=$|N|$である。

EN^kAC-値と EN^{n-k}AC-値が各々RGP を満たすように 2 つのタイプ、CIS-と ENSC-タイプ、の縮小ゲームを導入する。k=n–1 ならば、k は(6-54)の左辺の縮小ゲーム$\left(N-\{i\},v^{EN^kAC(N,v)}\right)$のプレイヤーの総数に等しく、(6-55)において k–n–1 はゼロになる。この k=n–1 の時は、(6-54)の右辺は ENSC-値であり、(6-55)の右辺は CIS-値であるので、k=0 と k=n の時の EN^kAC-値を次のように定義する：

$$EN^kAC(N,v):=\begin{cases}CIS(N,v) & (k=0)\\ ENSC(N,v) & (k=n)\end{cases}\qquad (6\text{-}56)$$

ここで縮小ゲームを定義する。

CIS-タイプ（$EN^kAC(N,v)$ **値のための縮小ゲーム**）：

$S\subset N-\{i\},S\neq N-\{i\},\varnothing$ に対して

$$v^x(S):=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|S|-1}{n-2}\right)v(S)+\dfrac{1}{n-2}\displaystyle\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right] & \left(k\leq|N|-2\right)\\ v(S\cup\{i\})-x_i & \left(k=|N|-1\right)\end{cases}\qquad (6\text{-}57)$$

ENSC-タイプ（$EN^{n-k}AC(N,v)$ **値のための縮小ゲーム**）：
$S \subset N-\{i\}, S \neq N-\{i\}, \varnothing$ に対して

$$v^x(S) := \begin{cases} \dfrac{|S|}{n-2}\left[v(S \cup \{i\}) - x_i\right] + \dfrac{1}{n-2}\displaystyle\sum_{l \in N-S\cup\{i\}} v(S \cup \{l\}) & \left(k \leq |N|-2\right) \\ v(S) & \left(k = |N|-1\right) \end{cases} \quad (6\text{-}58)$$

とする。k=|N|−1 の時の(6-57)と(6-58)の縮小ゲームに関して、k=n−1 の場合の(6-54)と(6-55)の RGP が成立する事は ENSC-と CIS-値の RGP により既に知られている（例えば、Driessen *et al.* [9]、Moulin [12]または後述の定理6-6を参照）。従って、$1 \leq k \leq n-2$ の場合だけを次の補題で取り扱う。

補題 6-14.

$n \geq 3$ とする。任意の $i,j,k \in N\left(i \neq j, 1 \leq k \leq n-2\right)$ と任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して次の事が成立する：

(i) $k \leq n-2$ である(6-57)の縮小ゲームに対して、次の事が成り立つ：

$$\underline{c}_j^k(N-\{i\}, v^x) = \underline{c}_j^k(N,v) + \frac{1}{n-k-1}\left[\underline{c}_i^k(N,v) - x_i\right]$$

$$EN^kAC_j(N-\{i\}, v^x) = EN^kAC_j(N,v) + \frac{1}{n-1}\left[EN^kAC_i(N,v) - x_i\right] \quad (6\text{-}59)$$

(ii) $k \leq n-2$ である(6-58)の縮小ゲームに対して、次のことが成り立つ：

$$\overline{c}_j^{n-k-1}(N-\{i\}, v^x) = \overline{c}_j^{n-k}(N,v) - \frac{1}{k}\left[v(N) - \overline{c}_i^{n-k}(N,v)\right]$$

$$EN^{n-k-1}AC_j(N-\{i\}, v^x) = EN^{n-k}AC_j(N,v) + \frac{1}{n-1}\left[EN^{n-k}AC_i(N,v) - x_i\right] \quad (6\text{-}60)$$

証明： 次の記号を利用する：$\Gamma_k^{i+,j+} := \left\{S \subset N \mid i,j \in S, |S| = k\right\}$、

$\Gamma_k^{i-,j+} := \left\{S \subset N \mid i \notin S, j \in S, |S| = k\right\}$、$\Gamma_k^{i-,j-} := \left\{S \subset N \mid i,j \notin S, |S| = k\right\}$

(i) (6-57)の|S|=k の場合を利用して、

$$\sum_{S\in\Gamma_k^{i-,j+}} v^x(S)=\left(1-\frac{k-1}{n-2}\right)\sum_{S\in\Gamma_k^{i-,j+}} v(S)$$
$$+\frac{1}{n-2}\sum_{S\in\Gamma_k^{i-,j+}}\sum_{l\in S} v(S\cup\{i\}-\{l\})-\frac{k}{n-2}\left|\Gamma_k^{i-,j+}\right|x_i$$

$$\begin{aligned}\sum_{S\in\Gamma_k^{i-,j+}}\sum_{l\in S} v(S\cup\{i\}-\{l\}) &= \sum_{S\in\Gamma_k^{i-,j+}}\left(\sum_{l\in S-\{j\}} v(S\cup\{i\}-\{l\})+v(S\cup\{i\}-\{j\})\right)\\ &=(n-k)\sum_{S\in\Gamma_k^{i+,j+}} v(S)+\sum_{S\in\Gamma_k^{i+,j-}} v(S)\\ &=(n-k-1)\sum_{S\in\Gamma_k^{i+,j+}} v(S)+\sum_{S\in\Gamma_k^{i+}} v(S)\end{aligned}$$

であり、

$$\frac{1}{\left|\Gamma_k^{i-,j+}\right|}=\frac{n-1}{n-k}\frac{1}{\left|\Gamma_k^{j+}\right|}、\quad \underline{c}_j^k(N,v)=\frac{n-1}{n-k}\frac{1}{\left|\Gamma_k^{j+}\right|}\sum_{S\in\Gamma_k^{j+}} v(S)-\frac{k-1}{n-k}v(N)$$

であるので、

$$\begin{aligned}\underline{c}_j^k(N-\{i\},v^x) &= \frac{n-2}{n-k-1}\frac{1}{\left|\Gamma_k^{i-,j+}\right|}\sum_{S\in\Gamma_k^{i-,j+}} v^x(S)-\frac{k-1}{n-k-1}\left(v(N)-x_i\right)\\ &=\underline{c}_j^k(N,v)+\frac{1}{n-k-1}\left(\underline{c}_i^k(N,v)-x_i\right)\end{aligned}$$

となる。次に(6-59)を示す。

$$\begin{aligned}\sum_{l\in N-\{i\}} \underline{c}_l^k(N-\{i\},v^x) &= \sum_{l\in N-\{i\}} \underline{c}_l^k(N,v)+\frac{n-1}{n-k-1}\left(\underline{c}_i^k(N,v)-x_i\right)\\ &=\sum_{l\in N} \underline{c}_l^k(N,v)+\frac{k}{n-k-1}\underline{c}_i^k(N,v)-\frac{n-1}{n-k-1}x_i\end{aligned}$$

であるので、すべての $j\in N-\{i\}$ に対して、

$$EN^kAC_j(N-\{i\},v^x)=\underline{c}_j^k(N-\{i\},v^x)+\frac{1}{n-1}\left[v^x(N-\{i\})-\sum_{l\in N-\{i\}}\underline{c}_l^k(N-\{i\},v^x)\right]$$

$$=\underline{c}_j^k(N,v)+\frac{1}{n-k-1}\left(\underline{c}_i^k(N,v)-x_i\right)$$

$$+\frac{1}{n-1}\left[v(N)-x_i-\sum_{l\in N}\underline{c}_l^k(N,v)-\frac{k}{n-k-1}\underline{c}_i^k(N,v)+\frac{n-1}{n-k-1}x_i\right]$$

$$=EN^kAC_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\left[EN^kAC_i(N,v)-x_i\right]$$

となり、(6-59)が示された。

(ii) (6-58)の$|S|=n-k-1$ の場合を利用して、(i)と同様に示す事ができる。

（証明終わり）

上記の証明において、(6-57)においては$|S|=k$ の場合のみを、(6-58)においては$|S|=n-k-1$ の場合のみを利用した。(6-57)と(6-58)の縮小ゲームの定義において、S には依存しないが、$|S|$には依存する項を加えても結果は成立する。例えば、(6-57)における$|S|=k=1$ の場合と(6-58)における$|S|=n-k-1=n-2$ の場合の差は、両方が CIS-値の縮小ゲームであるので、0 と期待されるが、$\frac{1}{n-2}\left[v(\{i\})-x_i\right]$である。また、(6-57)における $k=n-1$ の場合と(6-58)における $k=1$ で$|S|=n-k-1=n-2$ の場合の差は、両方が ENSC-値の縮小ゲームであるので、0 と期待されるが、$\frac{1}{n-2}v(N-\{i\})$である。

$k\le n-2$ の場合の縮小ゲーム(6-57)は

$$v^x(S):=\frac{n-1}{n-2}\left[\left(1-\frac{|S|}{n-1}\right)v(S)+\frac{1}{n-1}\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right]\right]$$

と書き換えられる。これは次のような意味を持っている（図6-3参照）。

人数が k 人である提携のみが EN^{k}AC-値を評価する時に意味を持つ。S をプレイヤーi を含まない k 人提携とする。縮小ゲーム$(N-\{i\},v^x)$における提携 S の提携値を評価するために、提携 S は（k 人提携のままで）プレイヤーi を S のあるメンバーと置き換える事によって含もうとする。しかし、置き換わるプレイヤーl は$N-\{i\}$からランダムに選ばれる。もし、プレイヤーl が提携 S に属しておれば、プレイヤーi と置き換わり、提携$S\cup\{i\}-\{l\}$が形成される。プレイヤーi が利得 x_iを持ってゲーム(N,v)から退場する時、縮小ゲームにおける提携 S はその残り、

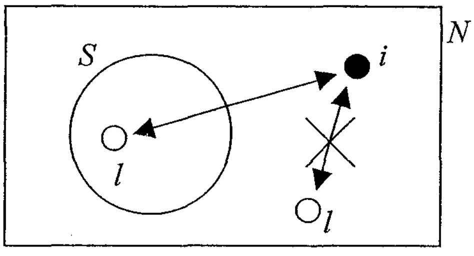


図 6-3. S のプレイヤーl は i と置き換わる。

すなわち、$v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i$ を得る。もし、プレイヤーl が提携 S に属していなければ、提携 S はプレイヤーi を含むことができないので、縮小ゲーム$(N-\{i\},v^x)$ におけるその提携値は $v(S)$のままである。従って、縮小ゲーム$(N-\{i\},v^x)$における提携 S の期待提携値は

$$\left(1-\frac{|S|}{n-1}\right)v(S)+\frac{1}{n-1}\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right]$$

となり、$v^x(S)$はこれに解釈が困難な定数$\dfrac{n-1}{n-2}$をかけたものである。

一方、$k\leq n-2$ の場合の縮小ゲーム(6-58)は

$$v^x(S):=\frac{n-1}{n-2}\left[\frac{|S|}{n-1}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right]+\frac{1}{n-1}\sum_{l\in N-S\cup\{i\}}v(S\cup\{l\})\right]$$

と書き換えられる。これは次のような意味を持っている（図6-4参照）。
人数が n–k–1 人である提携だけが EN^{n-k-1}AC-値を評価する時に意味を持つ。S をプレイヤーi を含まない n–k–1 人提携とする。縮小ゲーム$(N-\{i\},v^x)$における提携 S の提携値を評価するために、提携 S はメンバーを 1 人加えることによって（n–k 人提携を形成して）プレイヤーi を含もうとする。しかし、加わるプレイヤーl は $N-\{i\}$からランダムに選ばれる。もし、プレイヤーl が提携 S に属しておれば、

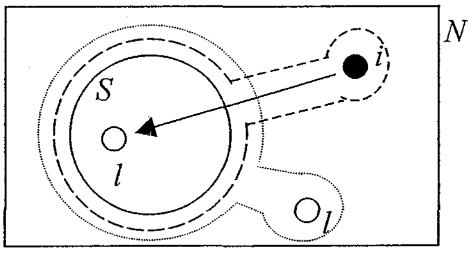


図 6-4. プレイヤーlが既にSのメンバーならば、
プレイヤーiがSに加わる。

（プレイヤーlは既にSのメンバーなので）プレイヤーiがSに加わる。プレイヤーiが利得x_iを持ってゲーム(N,v)から退場する時、縮小ゲームにおける提携Sはその残り、すなわち、$v(S\cup\{i\})-x_i$を得る。もし、プレイヤーlが提携Sに属していなければ、提携Sはプレイヤーlに代わってプレイヤーiを加えることをプレイヤーlに説得することができないので、縮小ゲーム$(N-\{i\},v^x)$におけるその提携値は$v(S\cup\{l\})$である。従って、縮小ゲーム$(N-\{i\},v^x)$における提携Sの期待提携値は

$$\frac{|S|}{n-1}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right]+\frac{1}{n-1}\sum_{l\in N-S\cup\{i\}}v(S\cup\{l\})$$

となり、$v^x(S)$はこれに解釈が困難な定数$\dfrac{n-1}{n-2}$をかけたものである。

次の定理は EN^{k}AC-値と EN^{n-k}AC-値を RISE と ETP と RGP で公理化する。

定理 6-6.

(N,v)をゲームとする。任意の$k\in\{1,\ldots,n-1\}$ $(n:=|N|)$に対して次の事が成立する。

(i) $EN^kAC(N,v)$は RISE と ETP を満たし、縮小ゲーム(6-57)に関して RGP を満たす **G** 上の一意の値である。

(ii) $EN^{n-k}AC(N,v)$は RISE と ETP を満たし、縮小ゲーム(6-58)に関して RGP を満たす **G** 上の一意の値である。

証明： $k=n-1$ ならば、EN^{k}AC-値と EN^{n-k}AC-値は各々ENSC-値と CIS-値になる。

従って、定義(6-56)と(6-57)（$k=n-1$）と(6-58)（$k=n-1$）により、これらの場合は各々$EN^{n-k}AC$-値と$EN^{k}AC$-値において$k=1$とした場合とみなせる。それゆえ一般性を失うことなく$1 \le k \le n-2$と仮定できる。$EN^{k}AC$-値と$EN^{n-k}AC$-値の RISE と ETP は補題6-12により得られる。補題6-13と6-14により定理の残りの部分が得られる。（証明終わり）

上記の定理6-6において(6-57)の$|S|=k$の場合、(6-58)の$|S|=n-k-1$の場合のみを利用した。これは(6-57)の$|S| \neq k$の場合と(6-58)の$|S| \neq n-k-1$の場合に$v^x(S)$を任意に定義しても定理6-6は成立する事を意味する。

6-4-4 シャープレイ値の公理化

この項では$\boldsymbol{G}$と$\boldsymbol{G}^N$上におけるシャープレイ値を特徴付ける。特に、シャープレイ値を公理化する新しい縮小ゲームを提出する。

まず、シャープレイ値と$EN^{k}AC$-値に関する 2 つの補題が必要である。最初の補題はシャープレイ値$Sh(N,v)$(Roth [21]、Shapley [24]を参照)が$n-1$個の$EN^{k}AC$-値($k=1,\ldots,n-1$)の凸結合として表現できると述べている(証明は第6-3節を参照)。

補題 6-15.
次の関係が成り立つ：

$$Sh_j(N,v)=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} EN^k AC_j(N,v) \quad (j\in N) \tag{6-61}$$

補題 6-16.

$k\in\{1,\ldots,n-1\}$とする。ゲーム(N,v)、(N,v_1)、(N,v_2)が次の関係を満たすと仮定する：

$$\begin{cases} v(S)=\lambda(|S|)v_1(S)+\big(1-\lambda(|S|)\big)v_2(S) & (|S|=k) \\ v(N)=v_1(N)=v_1(N) \end{cases} \tag{6-62}$$

ここで、$0\le\lambda(\bullet)\le 1$とする。このとき次の式が成り立つ。

$$EN^k AC(N,v)=\lambda(k)EN^k AC(N,v_1)+\big(1-\lambda(k)\big)EN^k AC(N,v_2)$$

証明：　ゲーム(N,v)の$EN^{k}AC$-値は$v(N)$と$\{v(S)\,|\,|S|=k\}$にのみ依存するので

(6-62)が成立する。　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

さて、シャープレイ値を公理化する新しい縮小ゲームを提出する。シャープレイ値に対する縮小ゲームは次のように定義される：
$S \subset N-\{i\}, S \neq N-\{i\}, \varnothing$ に対して

$$v^x(S) := \frac{|S|}{n-1} v_1^x(S) + \left(1 - \frac{|S|}{n-1}\right) v_2^x(S) \tag{6-63}$$

とする。ただし、

$$v_1^x(S) := \frac{|S|}{n-2}\left[v(S \cup \{i\}) - x_i\right] + \frac{1}{n-2} \sum_{l \in N-S\cup\{i\}} v(S \cup \{l\})$$

$$v_2^x(S) := \left(1 - \frac{|S|-1}{n-2}\right) v(S) + \frac{1}{n-2} \sum_{l \in S}\left[v(S \cup \{i\} - \{l\}) - x_i\right]$$

とする。

定理 6-7.
シャープレイ値は RISE と ETP を満たし、縮小ゲーム(6-63)に関して RGP を満たす $\boldsymbol{G}$ 上の一意の値である。

証明：　シャープレイ値は RISE と ETP を満たす。(6-63)の縮小ゲームに対してシャープレイ値が(6-53)を満たす事を示せばよい。最初に、$1 \leq k \leq n-2$ のとき v_1^x と v_2^x は各々(6-58)と(6-57)と同じであるので、(6-59)より

$$EN^k AC_j(N-\{i\}, v_2^x) = EN^k AC_j(N, v) + \frac{1}{n-1}\left[EN^k AC_i(N, v) - x_i\right] \quad (1 \leq k \leq n-2)$$

を得る。(6-60)で $k = n-t-1\,(1 \leq t \leq n-2)$ とおくと

$$EN^t AC_j(N-\{i\}, v_1^x) = EN^{t+1} AC_j(N, v) + \frac{1}{n-1}\left[EN^{t+1} AC_i(N, v) - x_i\right] \quad (1 \leq t \leq n-2)$$

を得る。従って、補題6-15と6-16より、

$$
\begin{aligned}
Sh_j(N-\{i\},v^x) &= \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-2} EN^k AC_j(N-\{i\},v^x) \\
&= \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}\left[\frac{k}{n-1}EN^k AC_j(N-\{i\},v_1^x)+\left(1-\frac{k}{n-1}\right)EN^k AC_j(N-\{i\},v_2^x)\right] \\
&= \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{k}{n-1}\left(EN^{k+1}AC_j(N,v)+\dfrac{1}{n-1}\left(EN^{k+1}AC_i(N,v)-x_i\right)\right) \\ +\left(1-\dfrac{k}{n-1}\right)\left(EN^k AC_j(N,v)+\dfrac{1}{n-1}\left(EN^k AC_i(N,v)-x_i\right)\right)\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k-1}{n-1}EN^k AC_j(N,v)+\left(1-\frac{k}{n-1}\right)EN^k AC_j(N,v)\right] \\
&\quad +\frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-1}\left[\frac{k-1}{n-1}EN^k AC_i(N,v)+\left(1-\frac{k}{n-1}\right)EN^k AC_i(N,v)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}x_i \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}EN^k AC_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}EN^k AC_i(N,v)-x_i\right] \\
&= Sh_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\left[Sh_i(N,v)-x_i\right]
\end{aligned}
$$

となり、(6-53)が示された。 （証明終わり）

Sobolev [25]はシャープレイ値が RISE と SYM を満たし、後述の縮小ゲーム(6-64)に関して RGP を満たす $\boldsymbol{G}$ 上の一意の値である事を証明した。値σは、ゲーム(N,v)と N 上の順列θに対して、$\theta\sigma(N,v)=\sigma(N,\theta v)$が成り立つとき、*対称*(SYM)であるという。ここで、ゲーム$(N,\theta v)$と利得ベクトルθx は$(\theta v)(\theta S):=v(S)$ $(S\subset N)$と$(\theta x)(\theta i):=x(i)$ $(i\in N)$によって与えられる。SYM は ETP よりも強い条件である。Driessen [4]はシャープレイ値が後述の縮小ゲーム(6-65)に関して RGP を満たす事を示したが一意性に関しては未解決であった。今からこれらの縮小ゲーム(6-64)と(6-65)に関してシャープレイ値が(6-53)を満たす事を示す。したがって、シャープレイ値は RISE と ETP を満たし、縮小ゲーム(6-64)と(6-65)に関して RGP を満たす一意な値である。

$$
v^x(S):=\frac{|S|}{n-1}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right]+\left(1-\frac{|S|}{n-1}\right)v(S) \tag{6-64}
$$

$$v^x(S) := \begin{cases} v(N) - x_i & (S = N - \{i\}) \\ \left(1 - \dfrac{|S|}{n-1}\right)\left[v(S) - v(N-S)\right] & (\text{その他}) \end{cases} \tag{6-65}$$

縮小ゲーム(6-64)と(6-65)に関してシャープレイ値が(6-53)を満たす事の証明：
縮小ゲーム(6-64)と(6-65)に関して、簡単な計算により、 $j \in N - \{i\}$ に対して

$$Sh_j(N-\{i\}, v^x) = \sum_{S \subset N - \{i,j\}} \gamma_{n-1}(s)\left[v^x(N - \{i\} - S) - v^x(S)\right]$$

$$= \sum_{S \subset N-\{i,j\}} \left(\begin{array}{l} \dfrac{n-s-1}{n-1} \cdot \dfrac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!}\left[v(N-S) - v(S)\right] \\ + \dfrac{s}{n-1} \cdot \dfrac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!}\left[v(N-\{i\}-S) - v(S \cup \{i\})\right] \\ + \dfrac{2s-n+1}{n-1} \cdot \dfrac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!} x_i \end{array} \right)$$

となる[4]。 $T = S \cup \{i\}\,(t = s+1)$ とおいて

$$\sum_{S \subset N-\{i,j\}} \frac{s}{n-1} \cdot \frac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!}\left[v(N-\{i\}-S) - v(S \cup \{i\})\right]$$

$$= \sum_{\{i\} \subset T \subset N-\{j\}} \frac{t-1}{n-1} \cdot \frac{(t-1)!(n-t-1)!}{(n-1)!}\left[v(N-T) - v(T)\right]$$

$$= \sum_{\{i\} \subset S \subset N-\{j\}} \frac{n}{n-1} \cdot \frac{s-1}{s} \gamma_n(s)\left[v(N-S) - v(S)\right]$$

であり、また、

[4] $\gamma_n(s) := \dfrac{s!(n-s-1)!}{n!}$ である。

$$\sum_{S\subset N-\{i,j\}} \frac{2s-n+1}{n-1}\cdot\frac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!}x_i$$

$$=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{s!(n-s-2)!}\cdot\frac{(2s-n+1)s!(n-s-2)!}{(n-1)^2(n-2)!}x_i$$

$$=\frac{x_i}{(n-1)^2}\sum_{s=0}^{n-2}(2s-n+1)$$

$$=-\frac{x_i}{n-1}$$

となるので、次式を得る：

$$\begin{aligned} Sh_j(N-\{i\},v^x) &= \frac{n}{n-1}\sum_{S\subset N-\{i,j\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\ &+\frac{n}{n-1}\sum_{\{i\}\subset S\subset N-\{j\}}\frac{s-1}{s}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\ &-\frac{1}{n-1}x_i \end{aligned} \tag{6-66}$$

さらに(6-66)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
Sh_j(N-\{i\},v^x) &= \frac{n}{n-1}\sum_{S\subset N-\{j\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{n}{n-1}\sum_{\{i\}\subset S\subset N-\{j\}}\frac{1}{s}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}x_i \\
&= Sh_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\sum_{S\subset N-\{j\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}\sum_{\{i\}\subset S\subset N-\{j\}}\frac{n}{s}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}x_i \\
&= Sh_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\sum_{S\subset N-\{i,j\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad +\frac{1}{n-1}\sum_{\{i\}\subset S\subset N-\{j\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}\sum_{\{i\}\subset S\subset N-\{j\}}\frac{n}{s}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}x_i \\
&= Sh_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\sum_{S\subset N-\{i,j\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}\sum_{\{i\}\subset S\subset N-\{j\}}\frac{n-s}{s}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}x_i \\
&= Sh_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\sum_{S\subset N-\{i,j\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad +\frac{1}{n-1}\sum_{\{j\}\subset S\subset N-\{i\}}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n-1}x_i \\
&= Sh_j(N,v)+\frac{1}{n-1}\left[Sh_i(N,v)-x_i\right]
\end{aligned}$$

ここで、最後から 2 つ目の等号は T=N–S とおき $\gamma_n(n-t)=\dfrac{n-t}{t}\gamma_n(t)$ と

$$\sum_{\{i\}\subset S\subset N-\{j\}} \frac{n-s}{s}\gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right]$$
$$=\sum_{\{j\}\subset T\subset N-\{i\}} \frac{t}{n-t}\gamma_n(n-t)\left[v(T)-v(N-T)\right]$$
$$=-\sum_{\{j\}\subset S\subset N-\{i\}} \gamma_n(s)\left[v(N-S)-v(S)\right]$$

から成立する。従って、縮小ゲーム(6-64)と(6-65)に関してシャープレイ値が(6-53)を満たす事が示された。（証明終わり）

シャープレイ値の $\boldsymbol{G}^N$ 上での公理的特徴付けを述べる事でこの項を終わる。補題6-17は EN^{k}AC-値の定義と補題6-15より直ちに得られる。

補題 6-17.

$$Sh_j(N,v)=c_j^*(N,v)+\frac{1}{n}\left[v(N)-\sum_{i\in N}c_i^*(N,v)\right]\quad (j\in N)$$

である。ただし、$c_j^*(N,v)=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}c_j^k(N,v)\quad (j\in N)$ である。

定義 6-5（ETP*）.

$\boldsymbol{G}$ 上の値 σ は $c_i^*(N,v)=c_j^*(N,v)$ を満たすゲーム (N,v) において $\sigma_i(N,v)=\sigma_j(N,v)\,(i,j\in N, i\neq j)$ が成り立つとき、ETP*を満たすといわれる。

定理 6-8.
シャープレイ値は RISE と ETP*を満たす $\boldsymbol{G}^N$ 上の一意の値である。

証明： $w=\alpha v+\beta\,(\alpha>0,\beta\in\mathbb{R}^N)$ を満たす $(N,v),(N,w)\in\boldsymbol{G}^N$ に対して、$c_i^*(N,\alpha v+\beta)-c_j^*(N,\alpha v+\beta)=\alpha\left(c_i^*(N,v)-c_j^*(N,v)\right)+\beta_i-\beta_j$ が成り立つ。すなわち、$c_i^*(N,\alpha v+\beta)-\alpha c_i^*(N,v)-\beta_i=c_j^*(N,\alpha v+\beta)-\alpha c_j^*(N,v)-\beta_j=(\text{一定})$ となる。従って、補題6-17より $Sh_j(N,\alpha v+\beta)=\alpha Sh_j(N,v)+\beta_j\quad (j\in N)$ となり、シャープレイ値は RISE を満たす。シャープレイ値が ETP*を満たす事は補題6-17より明らかで

ある。

次に一意性を示す。σを $\boldsymbol{G}^N$ 上の RISE と ETP*を満たす値とする。$\sigma=Sh$ を証明する。

$(N,v)\in \boldsymbol{G}^N$ に対して戦略的に同等なゲーム(N,w)を $w:=v-\beta$によって定義する。ただし、$\beta:=\left(c_j^*(N,v)\right)_{j\in N}\in \mathbb{R}^N$ である。このとき、

$$c_i^*(N,w)-c_j^*(N,w)=c_i^*(N,v)-\beta_i-c_j^*(N,v)+\beta_j=0 \quad \left(i,j\in N\right)$$

が成り立つので、σの ETP*により $\sigma_j(N,w)=\dfrac{v(N)-\sum_{i\in N}\beta_i}{n}\left(j\in N\right)$ となる。σの RISE により、$\sigma_j(N,v)=\beta_j+\sigma_j(N,w)=Sh_j(N,v)\left(j\in N\right)$ となる。（証明終わり）

6-4-5 例と応用

この項ではわれわれの結果のいくつかを例証する数値例を示し、応用についての関連する研究に言及する。

破産問題（Aumann *et al.* [1]、O'Neill [16]を参照）は $E\in\mathbb{R}, d=\left(d_1,\ldots,d_n\right)\in\mathbb{R}^N$

$d_i\geq 0\left(i=1,\ldots,n\right), 0\leq E\leq \sum_{j=1}^n d_j$ である順序対$(E;d)$で定義される。ある人が負債 $d_1,\ldots,d_n$ を残して死亡した。負債の総額は彼の資産は E 以上である。n 人の債権者はEを如何に分けるべきか？この破産問題をゲーム理論で定式化するために、N を債権者の集合とし、O'Neill [16]によって導入された次のような*破産ゲーム* $(N,v_{E;d})$を利用する：

$$v_{E;d}(S):=\max\left[0, E-\sum_{j\in N-S} d_j\right] \quad \left(S\subset N, S\neq\varnothing\right)$$

数値例として、E=120、d=(30,40,90,100)とおく。特性関数 $v_{E;d}$ は表6-1のようになる（例えば、34 は{3,4}を意味する）。簡単な計算により EN^{k}AC-値、シャープレイ値、仁ηは表6-2のようになる。どの値をこの問題の解として採用すべきであろうか？縮小ゲームによる一貫性が助けになる。プレイヤー1 が値（EN^{k}AC-値、シャープレイ値、仁）の自分の利得 x_1（表6-2の第 2 番目の列または表6-3の最初の列）を得て、ゲームから退場すると仮定する。対応する縮小ゲームの特性関数は表6-3で与えられている。v_2^x は EN^{k}AC-値に対する CIS-タイプの縮小ゲーム

(6-57)であり、v_1^x は EN^{k}AC-値に対する ENSC-タイプの縮小ゲーム(6-58)である。v^x はシャープレイ値に対する縮小ゲーム(6-63)となる。Aumann *et al.* [1] は破産ゲームの仁が 2 人ゲームに関する標準性と次の縮小ゲーム u^x に関して縮小ゲーム性を満たす一意の解である事を示した：

$$u^x(S) := \max\left\{ v(S \cup Q) - \sum_{j \in Q} x_j \mid Q \subset \{i\} \right\} \quad \left(S \subset N - \{i\}, S \neq \varnothing, N - \{i\}\right)$$

もし、表6-3の 1 つの縮小ゲーム、例えば、第 6 行目の v^x を妥当な縮小ゲームの

表 **6-1**. 特性関数 $v_{E;d}$

S	34	123	124	134	234	1234	その他
$v_{E;d}(S)$	50	20	30	80	90	120	0

表 **6-2**. $(N,v_{E;d})$の EN^{k}AC-値、シャープレイ値、仁η

i	1	2	3	4
$EN^1AC_i(N,v_{E;d})$	30	30	30	30
$EN^2AC_i(N,v_{E;d})$	17.5	17.5	42.5	42.5
$EN^3AC_i(N,v_{E;d})$	−5	5	55	65
$Sh_i(N,v_{E;d})$	14.17	17.5	42.5	45.83
$\eta_i(N,v_{E;d})$	15	20	42.25	42.25

表 **6-3**. 各縮小ゲームの提携値

x_1	S	2	3	4	23	24	34	234
30	$v_2^x(S)$	−15	−15	−15	——	——	——	90
17.5	$v_2^x(S)$	——	——	——	−17.5	−17.5	7.5	102.5
17.5	$v_1^x(S)$	−8.75	16.25	16.25	——	——	——	102.5
−5	$v_1^x(S)$	——	——	——	70	80	130	125
14.17	$v^x(S)$	−7.08	1.25	1.25	29.17	35.83	77.5	105.83
15	$u^x(S)$	0	0	0	5	15	65	105

——は任意でよい。

表現であるとみなすならば、われわれはこの破産問題の解としてシャープレイ値を採用すべきである。このように縮小ゲーム性は種々の解概念を比較して、考察している状況においてどの解が望ましいかを選び出す際に役立つ。

縮小ゲームによる一貫性にはいくつかの応用がある。前段落で参照したように Aumann *et al.* [1]は破産ゲームの一貫した解を考察した。Peleg [18]は縮小ゲーム性を利用して市場ゲームのコアを公理化した。市場ゲームは経済活動の基本的でかつ重要なゲーム論的モデルである。Moulin [12]は偽線形社会選択問題の一貫した（彼の用語では、「分離した」）仲裁方法を考察した。偽線形社会選択問題は（有限な選択肢の中から）1 つの不可分な公共財を選びそのコストをエージェントにどのように負担させるかを決定する問題である。彼は一貫性公理によって 3 種の社会選択関数を公理論的に特徴付けた；この中の 1 つが譲渡可能効用を持つ提携形ゲームと関係している。Young [30]はゲーム理論的な扱いではないが課税問題において一貫性を扱った。Thomson [28]はゲーム理論、経済学、政治学におけるさまざまな問題に対する一貫性の応用に関してサーベイを行っている。

6-5 結言

この章では譲渡可能効用ゲームを利用して、複数プレイヤー間の資源配分を考察した。

第6-2節では譲渡可能効用ゲーム(N,v)の仁とτ-値の関係を双行列ゲームを通して考察した。この双行列には 3 つの重要な値がある；純粋戦略におけるマックスミニ値、ミニマックス値、それとゲームの値である。本研究で新しく得られた主な結果は次のとおりである：

- ゲーム(N,v)が本質的な提携に関して擬凹であれば、仁は基準点がマックスミニ値（または、ミニマックス値）である一対交渉一貫性を満たす一意の配分と一致する。
- 一方、ゲーム(N,v)が準平衡ゲームならば、τ-値は基準点がゲームの値である一対交渉一貫性を満たす一意の配分と一致する。
- 特に、本質的な提携に関して擬凹な半凸ゲームにおいて、仁とτ-値の違いは一対交渉一貫性における基準点の違いである。
- 破産ゲームと経営者を含む提携に関して擬凹なゲームはもちろん本質的な提携に関して擬凹である。
- 本質的な提携に関して擬凹なゲームは非空なコアが 1 人と n–1 人の提携のみから決定されるゲームのクラスと同一である。
- また、このクラスのゲームにおいてコアが交渉集合と一致する十分条件も

与えた。

第6-3節では CIS-、ENPAC-、ENSC-値として知られている譲渡可能効用ゲームの解を統一的な方法で扱った。

本研究で新しく得られた主な結果は次のとおりである：

- k 人平均寄与の残余均等配分値（EN^{k}AC-値）と呼ばれる新しい解を提出した。この EN^{k}AC-値を計算する際に利用する 2 つの興味ある個人寄与を与えた。これら 2 つの個人寄与はそのゲームのコアの上、下界となる。
- EN^{k}AC-値の 3 つの有用な表現を与えた。これらの 1 つはシャープレイ値が n–1 個の EN^{k}AC-値（k=1,…,n–1）の重心であることを示している。また、双対ゲームの EN^{k}AC-値は元のゲームの EN^{n-k}AC-値であることも示した。
- EN^{k}AC-値が良く知られている準仁と呼ばれる解と一致するために譲渡可能効用ゲームが満たすべき十分条件を与えた。この十分条件は、「各提携値がその提携のメンバーの EN^{k}AC-値の総和プラスある定数以下である；特に、k 人提携の時は等号が成り立つ」である。

第6-4節ではプレイヤーの総数が固定されたゲームのクラス及びプレイヤーの総数が可変なゲームのクラスにおける EN^{k}AC-値とシャープレイ値の公理的特徴付けを扱った。本研究で新しく得られた主な結果は次のとおりである：

- プレイヤーの総数が固定されたゲームのクラスで、EN^{k}AC-値は戦略的同等性のもとでの相対的不変性（RISE）と代替プレイヤーの同等な扱いの修正版（ETP^k）を満たす一意の値である。
- EN^{k}AC-値に対する 2 つのタイプの縮小ゲームとシャープレイ値に対する新しい縮小ゲームを提出した。プレイヤーの総数が可変なゲームのクラスで、EN^{k}AC-値と EN^{n-k}AC-値とシャープレイ値は RISE、ETP を満たし、各々の縮小ゲームに関して RGP を満たす一意な値である。

以上、この章では、本質的な提携に関して擬凹な半凸ゲームにおいて、仁と τ-値の違いを一対交渉一貫性における基準点の違いとして再解釈し、EN^{k}AC-値とシャープレイ値の違いを縮小ゲームによる一貫性における縮小ゲームの違いとして再解釈した。

参考文献

[1] Aumann, R. J. and M. Maschler: Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, Vol. 36 (1985), 195-213.

[2] Dragan, I., Driessen, T.S.H., and Y. Funaki.: Collinearity between the Shapley value and the egalitarian division rules for cooperative games. OR Spektrum, Vol.1 (1996), 97-105.

[3] Driessen, T. S. H.: Cooperative Games, Solutions and Applications. Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands (1988).

[4] Driessen, T.S.H.: A Survey of Consistency Properties in Cooperative Game Theory. SIAM Review, Vol. 33 (1991), 43-59.

[5] Driessen, T. S. H.: On the Core and Kernel of the Bilateral Assignment Market. Memorandum No. 1284, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (1995).

[6] Driessen, T. S. H.: An Alternative Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy problem from the Talmud: the case of the greedy bankruptcy game. Memorandum No. 1286, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (1995).

[7] Driessen, T. S. H.: Pairwise-bargained consistency and cooperative Game Theory: the case of a two-sided economic model. Memorandum No. 1322, Department of Applied Mathematics, Univerisy of Twente (1996).

[8] Driessen, T.S.H., and Y. Funaki.: The Egalitarian Non-Pairwise-Averaged Contribution (ENPAC-) value for TU-games. in T. Parthasarathy, B. Dutta, J.A.M. Potters, T.E.S. Raghavan, D. Ray and A. Sen (eds.), Game Theoretical Applications to Economics and Operations Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1997), 51-66.

[9] Driessen, T.S.H. and Funaki, Y.: Reduce Game Propeties of Egalitarian Division Rules for TU-games. in T. Parthasarathy, B. Dutta, J.A.M. Potters, T.E.S. Raghavan, D. Ray and A. Sen (eds.), Game Theoretical Applications to Economics and Operations Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1997), 85-103.

[10] Driessen, T.S.H., Radzik, T., and R. Wanink.: Potential and consistency: a uniform approach to values for TU-games. Memorandum No. 1323, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (1996).

[11] Hart, S. and Mas-Colell, A.: Potential, value and consistency. Econometrica, Vol. 57 (1989), 589-614.

[12] Moulin, H.: The separability axiom and equal-sharing methods. Journal of Economic Theory, Vol. 36 (1985), 120-148.

[13] Myerson, R. B.: Game Theory. Cambridge, Harvard Univerisity Press, 1991.

[14] Namekata, T. and Driessen, T.S.H.: The Egalitarian Non-k-Averaged Contribution (EN^{k}AC-) value for TU-games. International Game Theory Review, Vol.1 (1999), 45-61.

[15] Nowak, A.S., and T. Radzik.: A solidarity value for n-person transferable utility games. International Journal of Game Theory, Vol. 23 (1994), 43-48.

[16] O'Neill, B.: A Problem of Rights Arbitration from the Talmud. Math. Social Sciences, Vol. 2 (1982), 345-371.

[17] Peleg, B.: On the reduced game property and its converse. International Journal of Game Theory, Vol. 15 (1986), 187-200; Correction. International Journal of Game Theory, Vol. 16 (1987), 290.

[18] Peleg, B.: An Axiomatization of the core of market games. Mathematics of Operations Research, Vol. 14 (1989), 448-456.

[19] Potters, J., R. Poos, S. Tijs and S. Muto: Clan Games. Games and Economic Behavior, Vol. 1 (1989), 275-293.

[20] Rochford, S.C.: Symmetrically Pairwise-Bargained Allocations in an Assignment Market. J. Econom. Theory, Vol. 34 (1984), 262-281.

[21] Roth, A.E. (ed.).: The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley. Cambridge: Cambridge University Press (1988).

[22] Ruiz, L.M., Valenciano, F., and J.M. Zarzuelo.: The least square prenucleolus and the least square nucleolus: two values for TU-games based on the excess vector. International Journal of Game Theory, Vol. 25 (1996), 113-134.

[23] Schmeidler, D.: The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 17 (1979), 1163-1170.

[24] Shapley, L.S.: A value for *n*-person games. Annals of Mathematics Study, Vol. 28 (1953), 307-317. Also in Roth (1988), 31-40.

[25] Sobolev, A.I.: The functional equations that give the payoffs of the players in an *n*-person game. In Advances in Game Theory, ed., Izdat. 'Mintis,' Vilnius, (1973), 151-153. (In Russian.)

[26] Sobolev, A.I.: The characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations. In Mathematical Methods in the Social Sciences, Vol. 6 (1975), N.N. Vorobev, ed., Vilnius, 94-151. (In Russian.)

[27] Straffin, P.D., and J.P. Heaney.: Game Theory and the Tennessee Valley Authority. International Journal of Game Theory, Vol. 10 (1981), 35-43.

[28] Thomson, W.: Consistent Allocation Rules. Rochester Center for Economics Research Working Paper, (1996), No. 418.

[29] Weber, R.J.: Probabilistic values for games. (1988). In Ross (1988), 101-119.

[30] Young, H. P.: On dividing an amount according to individual claims or liabilities. Mathematics of Operations Research, Vol. 12 (1987), 398-414.

第7章 複数プレイヤー間における動的意思決定

7-1 緒言

前章までは多段階の逐次資源配分及び複数プレイヤー間の資源配分を扱った。この章では複数プレイヤー間における動的意思決定を考察する。

非協力ゲーム理論の目的の 1 つはゲーム的状況においてある意味で安定な結果を見つけることである。ナッシュ均衡は有名な解概念であるが次の安定性に基づいている：
どのプレイヤーにとっても、他のプレイヤーが戦略を変えないという条件の下で自分だけが戦略を変えても自分の利得が（厳密に）増加しない。しかし、直感的に社会的に望ましいと思われる結果をナッシュ均衡として結論づけるために、複雑な数学的テクニックを必要とする場合がある。例えば、有限回繰返し囚人のジレンマゲームにおいて 2 人のプレイヤーが協調行動をとるナッシュ均衡はない。2 人のプレイヤーの協調行動がナッシュ均衡として実現するためには複雑な数学的テクニックが必要となる（[1]の第 4 章を参照）。

そこでこの章ではまず、囚人のジレンマゲームを取り上げ、繰返しゲーム及び 1 期間のゲームにおいて協調行動の正当化を試みる。次に、戦略形で与えられた有限 2 人ゲームの純粋戦略におけるナッシュ均衡よりも緩い安定性を考察する。この章の目的は以上の 2 つのモデルにおいて社会的に望ましい結果を安定であると結論付ける新たな方法と枠組みを提供することである。

第7-2節では、まず、繰返し囚人のジレンマゲームにおいて、部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成し、協調行動を実現させるある戦略を提出する。この戦略はトリガー戦略と呼ばれるものよりも穏健である。なぜなら、前者は相手の何回かのミスを許すが、後者は相手のいかなるミスも許さないからである。この戦略は Myerson [3]で述べられている Getting-even 戦略を修正したものである。なお、この戦略が、繰返し囚人のジレンマゲームにおいて、部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成することを証明する際に動的計画法を利用する。しかし、これは動的計画法が繰返しゲームの考察に必須の手法であるという意味ではなく、相手プレイヤーの繰返しゲームにおける戦略を一旦固定した後は自分 1 人の最大化問題とみなすことができその観点から動的計画法を適用できるという意味である。次に、1 期間囚人のジレンマゲームを扱い、ジレンマを避けるある方法を示唆する。この方法においてわれわれはプレイヤー間の関係に対して従来とは異なったモデルを採用し、プレイヤーが、思考過程においてどの戦略を選ぶべきかを決定する際に、戦略を同時に変更する可能性を考慮に入れている。こ

のモデルの背後にあるわれわれの考えに関しても論じている。

1 期間囚人のジレンマゲームにおいて両プレイヤーの協調行動が安定であることを正当化する第7-2節の方法の鍵となるアイデアは、プレイヤーの思考過程において戦略を同時に変える可能性を考慮することであった。第7-3節では、さらに思考過程における誘因列というアイデアを加えて、戦略形で与えられた有限 2 人ゲームの純粋戦略における安定性を導入する。純粋戦略においてナッシュ均衡が存在すれば安定であるという意味でこの安定性はナッシュ均衡よりも緩い。プレイヤーの思考過程における誘因列とプレイヤーが同時に戦略を変える可能性を考慮する妥当性と、この安定性が重要な役割を果たすと思われる状況も考察する。

7-2 囚人のジレンマとプレイヤー間の関係

7-2-1 繰返し囚人のジレンマゲーム

囚人のジレンマゲームは戦略形が表7-1によって与えられる非協力ゲームである。各々の合理的なプレイヤーが自分の唯一の支配戦略 D を利用すれば、戦略の組(D,D)が実現する。この戦略の組はまた唯一のナッシュ均衡でもある。このナッシュ均衡による利得の組(0,0)は戦略の組(C,C)による利得の組(1,1)にパレート支配されている。合理的なプレイヤーが、自分の利得の最大化を求めることによって、両プレイヤーにとって良くない状況をもたらす戦略を選ぶ。これがジレンマと呼ばれる理由である。このジレンマを回避する 1 つの方法が繰返し

表 7-1. 囚人のジレンマゲーム

		プレイヤー2		
		C（協調）	D（裏切）	
プレイヤー1	C（協調）	1, 1	b, a	$a>1$, $b<0$, $a+b<2$
	D（裏切）	a, b	0, 0	

ゲームを考えることである。繰返し囚人のジレンマゲームに対して興味あるいくつかの戦略が考えられている。その中で「トリガー」戦略と「しっぺ返し」

戦略は次のような戦略である：

トリガー 戦略：

最初の期は C を選べ。それ以降は、もし 2 人のプレイヤーのうち少なくとも 1 人が D を選んだことがあるなら D を選べ、そうでなければ C を選べ。

しっぺ返し 戦略：

最初の期は C を選べ。それ以降は、直前の期に相手が取った手を選べ。

言い換えると、最初の期は C を選べ。それ以降は、相手が直前の期に D をとった時にちょうど 1 回だけ D を選べ。

(a) 無限回繰返しゲーム

次の定理で分かるように、無限回繰返しゲームにおいて、ある条件のもとで、戦略の組 (トリガー,トリガー) は部分ゲーム完全ナッシュ均衡であり、(しっぺ返し,しっぺ返し) はナッシュ均衡である。δ ($0<\delta<1$) を*割引率*、すなわち、明日受け取る額面 1 単位のお金の今日の価値はδである、とする。

定理 7-1.（無限回繰返し）

$\delta \geq \dfrac{a-1}{a}$ ならば、戦略の組 (トリガー,トリガー) は部分ゲーム完全ナッシュ均衡である。$\delta \geq \max\left\{\dfrac{a-1}{a}, \dfrac{a-1}{1-b}\right\}$ ならば、戦略の組 (しっぺ返し,しっぺ返し) はナッシュ均衡である。

証明： [1]または[3]を参照。

上記の定理7-1は次のことを述べている：

明日受け取る額面 1 単位のお金の今日の価値が今日の 1 単位のお金の価値とほぼ等しいならば、「トリガー」または「しっぺ返し」戦略のもとで結果(C,C)が毎期実現する。また、部分ゲーム完全ナッシュ均衡である点で「トリガー」の方が「しっぺ返し」よりも望ましい。しかし、「トリガー」は他の観点から見るとそれほど良いものではない。すなわち、「トリガー」は相手のどんなミスも許さないという点で「しっぺ返し」よりも厳しい。Myerson [3]は弱虫ゲームの文脈でもっと優しい戦略「Getting-even」を提唱している。すなわち、

Getting-even 戦略：

最初の期は C を選べ。それ以降は、もし自分が以前に D を取った回数が相手が以前に D を取った回数より多いか等しいならば C を選べ、そうでなければ D を選べ。

「Getting-even」は相手のミスを自分のミスと同程度許すので「トリガー」よりも優しい。戦略の組 (Getting-even,Getting-even) はある条件のもとで無限回繰返し弱虫ゲームにおいて部分ゲーム完全ナッシュ均衡であるが ([3]参照)、囚人のジレンマゲームにおいては部分ゲーム完全ナッシュ均衡ではない。この項では、Getting-even の修正版である、K-有界 Getting-even 戦略が、ある条件のもとで無限回繰返し囚人のジレンマゲームにおいても部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成することを示す。

最初に、K-有界 Getting-even 戦略を正確に定義する。K を正の整数とする。i=1,2 に対して、$d_i(1)=0$、$n=2,3,\ldots$ に対して、$d_i(n)$=「第 n 期以前にプレイヤーi が D を取った回数」とする。これらの記号を利用して、プレイヤーj に対するプレイヤーi の K-有界 Getting-even 戦略 は次のように定義される：

K-有界 Getting-even 戦略：

$$\text{第 } n \text{ 期には} \left\{ \begin{array}{l} d_i(n) \geq K \text{ または } d_j(n) \geq K \text{ ならば、D} \\ d_i(n) < d_j(n) < K \text{ ならば、D} \\ d_j(n) \leq d_i(n) < K \text{ ならば、C} \end{array} \right\} \text{を選べ。}$$

$K=\infty$ならば、K-有界 Getting-even 戦略は正確に Getting-even 戦略と一致し、K=1 ならば、正確にトリガー戦略と一致する。従って、K-有界 Getting-even 戦略をトリガー戦略と Getting-even 戦略の中間にある戦略と見なすことができる。

定理 7-2.（無限回繰返し）

$K \geq 2$ と仮定する。$\delta \geq \max\left\{\frac{a-1}{a}, \frac{a-1}{1-b}, \sqrt[K-1]{\frac{-b}{1-b}}\right\}$ ならば、戦略の組(K-有界 Getting-even, K-有界 Getting-even)は無限回繰返し囚人のジレンマゲームの部分ゲーム完全ナッシュ均衡である。

証明： 相手のプレイヤーが K-有界 Getting-even を利用している時、自分もそれを利用するのが最適であることを、動的計画法を利用して、証明する。一般性を失うことなく、プレイヤー2 が K-有界 Getting-even を利用すると仮定する。この状況のもとでプレイヤー1 は自分の総期待利得を最大にしようとする。従って、これはゲームではなく逐次意思決定問題とみなせる。

状態空間を $S=\{(u,v)|u,v=0,\ldots,K-1\}\cup\{\mathrm{D}\}$ とする。第 n 期目の状態 $s=(u,v)\in S$ は

$d_1(n)=u$、$d_2(n)=v$ を表す。$s=\mathrm{D}\in S$ は $d_1(n)\geq K$ または $d_2(n)\geq K$ を表す。状態 D は吸収状態、すなわち、ゲームの状態が状態 D に入れば、そこに永久に留まる、ことに注意する。プレイヤー2 が K-有界 Getting-even を利用するので、状態 $s=(u,v)$（$u\leq v$）ならば、C を取り、状態 $s=(u,v)$（$u>v$）または $s=\mathrm{D}$ ならば、D を取る。さらに

> $f(s)=$「状態 s から出発する無限期間を通じてプレイヤー1 が得る、δで割り引かれた総期待利得の最大値」

のように定義する。この時、最適性の原理より関数 f が次の方程式を満足する：

取る手 ＝　　C（協調），D（裏切り）

$$f(\mathrm{D}) \;=\max\{b+\delta f(\mathrm{D}),0+\delta f(\mathrm{D})\} \tag{7-1}$$

$$f(u,v)=\max\{1+\delta f(u,v),a+\delta f(u+1,v)\} \quad (u\leq v<K) \tag{7-2}$$

$$f(u,v)=\max\{b+\delta f(u,v+1),0+\delta f(u+1,v+1)\} \quad (v<u<K) \tag{7-3}$$

ここで、(7-2)と(7-3)の右辺に現れる $f(K,\cdot)$ は $f(\mathrm{D})$ と解釈する。方程式(7-1)、(7-2)、(7-3)において max の右にある最初の項はプレイヤー1 の手 C に、2 番目の項は手 D に対応する。

$s=\mathrm{D}$ と仮定する。プレイヤー2 は D を取るので、プレイヤー1 は自分が C または D を取れば、各々 b または 0 を得る。そして次の期の状態は D のままである。従って、方程式(7-1)が得られる。次に、$s=(u,v)$（$u\leq v<K$）と仮定する。プレイヤー2 は C を取るので、プレイヤー1 は C を取れば 1 の利得を得、次の期の状態は (u,v) のままである。プレイヤー1 が D を取れば a の利得を得、次の期の状態は $(u+1,v)$ となる。ゆえに(7-2)が得られる。最後に、$s=(u,v)$（$v<u<K$）と仮定する。プレイヤー2 は D を取るので、プレイヤー1 が C を取れば b の利得を得、次の期の状態は $(u,v+1)$ となる。プレイヤー1 が D を取れば 0 の利得を得、次の期の状態は $(u+1,v+1)$ となる。従って、方程式(7-3)が得られる。$b<0$ と $0<\delta<1$ に注意すると、方程式(7-1)は $f(\mathrm{D})=\delta f(\mathrm{D})$ となり、これより、$f(\mathrm{D})=0$ となる。すなわち、状態 $s=\mathrm{D}$ ではプレイヤー1 は D を取るべきであることが分かる。

この定理を証明するには次の等式と不等式（部分ゲーム完全性に関しては、特に、(7-4)と(7-5)）を示せば十分である：

$$f(u,v)=a+\delta f(u+1,v)\geq 1+\delta f(u,v) \quad (u<v<K) \tag{7-4}$$

$$f(u,v)=b+\delta f(u,v+1)\geq \delta f(u+1,v+1) \quad (v<u<K) \tag{7-5}$$

$$f(u,u)=1+\delta f(u,u)\geq a+\delta f(u+1,u) \quad (u<K) \tag{7-6}$$

(7-6)の等式部分より

$$f(u,u)=\frac{1}{1-\delta} \quad (u=0,\dots,K-1) \tag{7-7}$$

を得る。(7-4)の等式部分を$f(v-1,v)$まで繰返し利用して、

$$\begin{aligned} f(u,v)&=a+\delta f(u+1,v)\\ &=a\left(1+\delta+\cdots+\delta^{v-u-1}\right)+\delta^{v-u}f(v,v)\\ &=a\left(1+\delta+\cdots+\delta^{v-u-1}\right)+\frac{\delta^{v-u}}{1-\delta}\\ &=\frac{a\left(1-\delta^{v-u}\right)+\delta^{v-u}}{1-\delta} \qquad (u<v<K) \end{aligned} \tag{7-8}$$

となる。また、(7-5)の等式の部分から、

$$f(u,v)=\frac{b\left(1-\delta^{u-v}\right)+\delta^{u-v}}{1-\delta} \quad (v<u<K) \tag{7-9}$$

が得られ、(7-7)、(7-8)、(7-9)を(7-4)の不等式部分に代入して、

$$\frac{a\left(1-\delta^{v-u}\right)+\delta^{v-u}}{1-\delta}\geq 1+\delta\frac{a\left(1-\delta^{v-u}\right)+\delta^{v-u}}{1-\delta}$$

が成立しなければならない。この不等式は、簡単な計算により、$a\geq 1$ と一致し、明らかに成立する。(7-7)、(7-8)、(7-9)を(7-5)の不等式部分に代入して、

$$\frac{b\left(1-\delta^{u-v}\right)+\delta^{u-v}}{1-\delta} \geq \begin{cases} \delta \dfrac{b\left(1-\delta^{u-v}\right)+\delta^{u-v}}{1-\delta} & (v<u<K-1) \\ 0 & (v<u=K-1) \end{cases}$$

が成立しなければならない。これより、

$$\frac{b\left(1-\delta^{u-v}\right)+\delta^{u-v}}{1-\delta} \geq 0 \quad (v<u<K)$$

$$\delta^{u-v} \geq \frac{-b}{1-b} \quad (v<u<K)$$

が得られ、この最後の不等式より、

$$\delta \geq \sqrt[K-1]{\frac{-b}{1-b}} \tag{7-10}$$

となる。(7-7)、(7-8)、(7-9)を(7-6)の不等式部分に代入して、

$$1 \geq a+\delta \cdot \begin{cases} b+\dfrac{\delta}{1-\delta} & (u<K-1) \\ 0 & (u=K-1) \end{cases}$$

が成立しなければならない。これより、

$$\begin{cases} \delta \geq \dfrac{a-1}{1-b} & (u<K-1) \\ \delta \geq \dfrac{a-1}{a} & (u=K-1) \end{cases} \tag{7-11}$$

となる。(7-10)と(7-11)より、$\delta \geq \max\left\{\frac{a-1}{a}, \frac{a-1}{1-b}, \sqrt[K-1]{\frac{-b}{1-b}}\right\}$ならば、プレイヤー2 が K-有界 Getting-even を利用している時、プレイヤー1 が K-有界 Getting-even を利用するのは最適である。　（証明終わり）

(b) 有限回繰返しゲーム

次項のために、有限回繰返しの場合にいかにジレンマを回避するかを見てお

く。まず、両プレイヤーが「何時も D を取る」という戦略を利用するのが唯一の（部分ゲーム完全）ナッシュ均衡である。最後の数期間を除いて(C,C)が実現するように次のように有限回繰返しゲームを修正する：
プレイヤー2 は通常の合理的なプレイヤーであるが、プレイヤー1 は 2 つのタイプ、タイプ t とタイプ r、からなる。タイプ r は通常の合理的なプレイヤーであるが、タイプ t は「しっぺ返し」戦略だけを利用する。プレイヤー1 がタイプ t である確率は p で与えられる。この仮定のもとで次の定理が成り立つ（この有限回繰返しの場合はδ=1 と仮定する）。

定理 7-3.（有限回繰返し）
$p \geq \max\left\{\dfrac{a-1}{a}, \dfrac{-b}{1-b}\right\}$ならば、最後の 2 期間を除いて毎期(C,C)を実現する完全ベイズ均衡が存在する。

証明： [1]を参照。

「しっぺ返し」戦略は計画期間の最後の期を除いて相手のプレイヤーに C を誘導するので、相手が「しっぺ返し」戦略を取るタイプである可能性が高ければ、(C,C)を実現する完全ベイズ均衡が存在する。

7-2-2 1 期間囚人のジレンマゲーム

繰返し囚人のジレンマゲームで如何にジレンマを回避するかを前項でみた。通常の有限回繰返しゲーム（1 期間ゲームも含めて）においては唯一の均衡が毎期(D,D)となるので、(C,C)を実現させるには何らかの細工が必要であった。

無限回繰返しの場合、この細工は相手のプレイヤーが直前の期に取った手に自分の手を依存させることである。この依存によって「もしあなたが協調（C）から逸脱したら結局自分の損になるよ」の言明が意味のあるものになる。通常の 1 期間問題では相手の手に自分の決定を依存させる方法がないため繰返しゲームを扱わなければならない。

有限回繰返しの場合、この細工は、最後の期以外は協調（C）を誘うしっぺ返し戦略を、相手が採用している可能性である。

ジレンマを回避するために繰返しゲームを必要とするのは、主に、通常の 1 期間ゲームでは、思考過程においてさえ、自分の戦略を相手の戦略に依存させ得る正当な理由がないからである。

非協力ゲームの基本的な仮定は次の通りである。

通常の基本的な仮定（UA）：
各プレイヤーは、自分がどの戦略を選択すべきかを決定する思考過程におい

てさえ、相手とは独立に自分の戦略を選ぶことができる。

通常の経済活動において人々がお互いに行動している場合にはこの仮定 UA は妥当であるかもしれない。しかし、人は互いにそのように理想的に分離しているとは限らない。例えば、親密な関係があるが何らかの理由で自由に意志疎通ができない場合には、仮定 UA は妥当でない。従って、プレイヤー間にこの関係を導入しある種の安定性を表す他の解概念を必要とする。以下に述べるアプローチはこの線に沿ったものである。

仮定 1（A1）：

両プレイヤーにとって望ましいとみなされるある戦略の組が存在する。そして、この望ましい戦略の組を実現するための正当な理由を探している。

仮定 2（A2）：

プレイヤーがどの戦略を選ぶべきかを考える思考過程において両プレイヤーが同時に戦略を変える可能性を仮定する。

安定性：

仮定 1 で与えられた戦略の組は、仮定 2 のもとでどのプレイヤーもそれから逸脱する動機を持たなければ、*安定*である。

上記の仮定 1、2 と安定性の意味を明らかにするために、1 期間囚人のジレンマの場合を通してこれらを正確に説明する。

(C,C)を解として提出するのがわれわれの目的であるので、(C,C)が両プレイヤーにとって望ましい戦略の組である。上述の安定性は正確には次のことを意味する：

各プレイヤーは C から D へ逸脱する動機を持つかもしれない。仮定 2 より、プレイヤー1（2）は、もし自分が C から D へ選択を変えれば、プレイヤー2（1）も確率ε_1（ε_2）で同時に変える、と考える。望ましい(C,C)の期待利得 1 が逸脱した時の期待利得 $0\varepsilon_1+(1-\varepsilon_1)a$（$0\varepsilon_2+(1-\varepsilon_2)a$）以上であれば、すなわち、

$$1 \geq 0\varepsilon_1 + (1-\varepsilon_1)a$$

$$\varepsilon_1 \geq \frac{a-1}{a}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 \geq 0\varepsilon_2 + (1-\varepsilon_2)a \\ \\ \varepsilon_2 \geq \dfrac{a-1}{a} \end{array}\right)$$

であれば、プレイヤー1（2）は C から逸脱する動機を持たない。この事より、

$\varepsilon_1 \geq \dfrac{a-1}{a}, \varepsilon_2 \geq \dfrac{a-1}{a}$ ならば、(C,C)は上述の意味で安定であり、次の定理が得られる。

定理 7-4. ((ε_1,ε_2)-安定)

1 期間囚人のジレンマゲームにおいて、$\varepsilon_1 \geq \dfrac{a-1}{a}, \varepsilon_2 \geq \dfrac{a-1}{a}$ ならば、(C,C)は仮定 1、2 のもとで安定である。

われわれはジレンマをかなり簡単な方法で克服した。しかしながらその途中でゲーム理論において通常基本的と考えられているいくつかの仮定を破ってきた。特に仮定 2 には、その妥当性について、もう少し説明が必要である。最初にわれわれは仮定 2 がどんな場合でも成立するとは主張しない。また、われわれはあるプレイヤーから他のプレイヤーに瞬時に情報を伝達する媒体の存在を仮定しているわけでもない。われわれはこの項の最後の段落で明らかにするあるアイデアのモデル化を試みただけである。仮定 2 は多くの経済的社会的状況では成立しないが、本質的な部分が仮定 2 によって適切に表現される状況も存在する。例えば、親密な関係にあるプレイヤーが拘束力のある合意をすることができない状況を仮定しよう。この状況は協力ゲームとしてモデル化できないし、また、プレイヤーは互いに他と理想的には孤立していないので通常の非協力ゲームともみなすことができない。

この状況を図7-1を利用して説明する。この図において A と B は 2 人のプレイヤーを表す。円周はプレイヤーの皮膚を意味し、矢印はプレイヤー間の関係を表す。左の図は通常の非協力ゲーム的状況を表す。相手から完全に独立してい

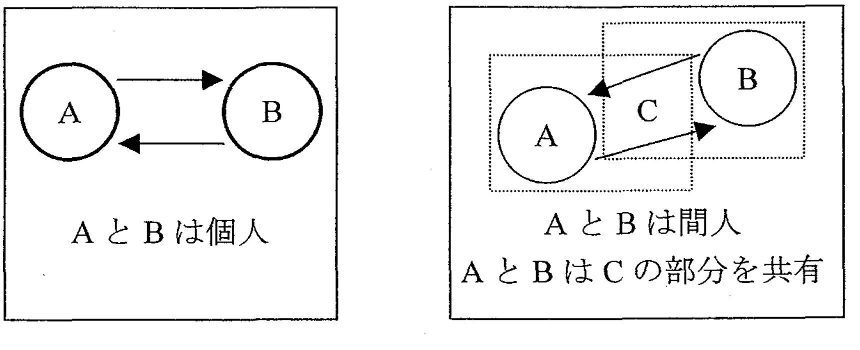


図 7-1. プレイヤー間の関係

ることを強調するためにこの状態のプレイヤーを*個人*と呼ぶ。この独立性を太い円周で示している。各個人はプレイヤーの間で起こる何事も自分の外部で起こると感じている。仮定 UA はこのような場合に適用できる。

右の図はもうひとつの状況を表している。プレイヤーは互いに他と理想的には孤立していない。この状態のプレイヤーを*間人*と呼ぶ。この右の図と間人という語は浜口 [2]による。浜口は仏教を通じて人間の新しいパラダイムを探求しこの図を描いた。この図のわれわれの解釈は次の通りである：
間人は互いに余り孤立していない。間人が自分に属していると感じている部分は自分の身体だけに限定されない。間人は、自分であると思うある不確かな領域が、自分の周りにあると感じている。図の細い円周は皮膚によって余り孤立していないことを示し、自分であると思う不確かな領域が破線の長方形で表現されている。2 人のプレイヤーのこの不確かな部分が共通部分（C の部分）を持つことに注意する；この部分を通じて 2 人の間人は互いに関係する。もし、プレイヤーが間人からなっているならば、仮定 UA は適切ではない。われわれは C の部分を適切に解釈しそれを既存のゲーム理論へ組み込まなくてはならない。
仮定 1 によりわれわれは望ましい戦略の組を正当化するもっともな理由を探している。この仮定 1 のもとで、仮定 2 は思考過程において逸脱を抑止するために非常に自然な仮定である。ほかにもたくさんの方法があるだろうが、仮定 2 は図の共通部分 C の 1 つの解釈である。

表 7-2. (C,C)を実現するモデルとその条件

モデル（戦略）	変数（その意味）	閾値
無限回繰返し (トリガー,トリガー)	δ（割引率）	$\frac{a-1}{a}$
無限回繰返し (しっぺ返し,しっぺ返し)	δ（割引率）	$\max\left\{\frac{a-1}{a},\frac{a-1}{1-b}\right\}$
無限回繰返し（*） (K-有界 g-even,K-有界 g-even)	δ（割引率）	$\max\left\{\frac{a-1}{a},\frac{a-1}{1-b},\sqrt[K-1]{\frac{-b}{1-b}}\right\}$
有限回繰返し	p（タイプが t である確率）	$\max\left\{\frac{a-1}{a},\frac{-b}{1-b}\right\}$
1 期間問題（*）	ε_i（同時に戦略を変える確率）	$\frac{a-1}{a}$

(*)： 本研究によって得られた新しい結果

囚人のジレンマゲームにおけるジレンマの回避に関して、既存の結果と新しい結果を表7-2にまとめた。*印がこの節で得られた結果である。

7-3 ナッシュ均衡よりも緩い純粋戦略における安定性について

7-3-1 誘因列と戦略の同時変更を考慮した安定性

この節では$\Gamma:=(N,C,u)$で与えられる有限2人戦略形ゲームを考察する。ここで、$N:=\{1,2\}$はプレイヤーの集合、$C:=C_1\times C_2$（C_iはプレイヤーiの戦略の（有限）集合）、$u:=(u_1,u_2)$（$u_i:C\to\mathbb{R}$はプレイヤーiの効用関数）である。対応$T:C\to C$を$T(c):=T_1(c)\times T_2(c)$

$$T_i(c):=\begin{cases}\left\{d_i\in C_i \mid u_i(d_i,c_{-i})=\max_{e_i\in C_i}u_i(e_i,c_{-i})\right\} & \left(u_i(c)<\max_{e_i\in C_i}u_i(e_i,c_{-i})\right)\\ \{c_i\} & (\text{その他})\end{cases}$$

と定義する。ここで、$c_{-i}=(c_j)_{j\in N-\{i\}}$であり$(e_i,c_{-i})$は$c$の$i$番目の要素を$e_i$に置き換えたものである。集合$T(c)$は通常の最適反応対応$R(c)$の部分集合である。*最適反応対応* は$R(c):=R_1(c)\times R_2(c)$

$$R_i(c):=\left\{d_i\in C_i \mid u_i(d_i,c_{-i})=\max_{e_i\in C_i}u_i(e_i,c_{-i})\right\}$$

で与えられる。$R_i(c)$は他のプレイヤーが戦略c_{-i}を利用している時にプレイヤーiに最大利得を与える戦略の集合である。c_iがc_{-i}の最適反応でなければ、$T_i(c)$は$R_i(c)$と同じであるが、c_iがc_{-i}の最適反応であれば、$T_i(c)$はc_iだけを含む。われわれがRではなくてTを利用する理由は次の通りである：
もし、c_iがc_{-i}の最適反応でなければ、プレイヤーiはc_iから$R_i(c)$の要素へ逸脱する誘因を持つ。他方、c_iがc_{-i}の最適反応であれば、プレイヤーiはc_iから逸脱する誘因を持たない；この場合には$R_i(c)$からc_i以外の要素を除く方が都合がよい。対応Tを利用すれば、$T(c)$のどの要素へも、プレイヤーがcから逸脱したい誘因を持つ、と表現できる。また、$I(c):=\{i\in N \mid c_i\notin T_i(c)\}$と定義する。$i\in I(c)$であるプレイヤー$i$は$c_i$から$T_i(c)$の要素へ戦略を変更する強い誘因が存在する。何故なら、他のプレイヤーが戦略を変更しないという条件の下で、プレイヤーiが

戦略を変えることによって自分の利得が増えるからである。「$I(c)=\varnothing$」$\Leftrightarrow$「$T(c)=\{c\}$」$\Leftrightarrow$「$c\in C$はナッシュ均衡である」ことに注意する。また、「$I(c)\neq\varnothing$」$\Leftrightarrow$「$c\notin T(c)$」であることにも注意する。

定義 7-6.

初項c^*を持つ誘因列$\left(c^k\right)_{k=0,1,\dots}$、その極限集合$c^\infty$、誘因列を考慮した$\varepsilon$-安定性を次のように定義する：

誘因列：$c^0 := c^*, c^{k+1} :=$ 任意の要素 $\in T(c^k)$ $\left(k=0,1,2,\cdots\right)$

誘因列$\left(c^k\right)_{k=0,1,\dots}$の極限集合：

$$c^\infty := \begin{cases} \{c^1\} & \left(I(c^1)=\{1,2\}\right) \\ \text{列}(c^k)_{k=0,1,\dots}\text{において無限回現れる}c^k\text{すべての集合} & (\text{その他}) \end{cases}$$

誘因列を考慮したε-安定性：任意の$\varepsilon:=(\varepsilon_1,\varepsilon_2), 0\le\varepsilon_1,\varepsilon_2\le 1$に対して次の条件(7-12)が満たされれば

$$\begin{gathered} c^0=c^*\text{であるすべての列}(c^k)_{k=0,1,\dots}\text{の}a,b\in c^\infty\text{と}i\in N\text{に対して}{}^{5} \\ u_i(c^*)\ge\varepsilon_i u_i(a_i,b_{-i})+(1-\varepsilon_i)u_i(a_i,c^*_{-i}) \end{gathered} \tag{7-12}$$

戦略の組$c^*:=(c_1^*,c_2^*)\in C$は*誘因列を考慮したε-安定*であると定義する。

ε_iの意味は後述の仮定 **P** で与えられる。後の例で示されるように誘因列を考慮したε-安定な戦略の組がいつも存在するとは限らない。$T(\cdot)$は必ずしも 1 点集合ではないので、同じ初項 c^*を持つ複数の誘因列$(c^k)_{k=0,1,\dots}$を構成することができる。しかし、誘因列$(c^k)_{k=0,1,\dots}$に関する有用な性質が次の補題で与えられる：

補題 7-1.

誘因列$(c^k)_{k=0,1,\dots}$に対して次の(i)と(ii)が成立する。

(i) ある非負整数 k に対して$I(c^k)=\varnothing$ならば、$c^\infty=\{c^k\}$かつ c^kはナッシュ均衡である。

---

[5] $c^\infty=\{e^\infty\}$ならば、安定条件(7-12)は$u_i(c^*)\ge\varepsilon_i u_i(e^\infty)+(1-\varepsilon_i)u_i(e_i^\infty,c^*_{-i})$となる。

(ii)　ある非負整数kと$i \in N$に対して$I(c^k)=\{i\}$ならば、$I(c^{k+1})=\{j\}(j \in N, j \neq i)$または$I(c^{k+1})=\varnothing$である。

証明：　(i)：ある非負整数kに対して$I(c^k)=\varnothing$であるという仮定は$T(c^k)=\{c^k\}$かつ$m=k+1,k+2,\ldots$に対して$c^m=c^k$であることを意味する。故に、$c^\infty=\{c^k\}$でc^kはナッシュ均衡である。

(ii)：$I(c^k)=\{i\}$であるので、$u_i(a_i,c_{-i}^k)=\max_{e_i \in C_i} u_i(e_i,c_{-i}^k)>u_i(c^k)$、$c^{k+1}=(a_i,c_{-i}^k)$となる$a_i \in C_i$が存在する。$c_{-i}^{k+1}=c_{-i}^k$であるので、$c_i^{k+1}=a_i$はまだ$c_{-i}^{k+1}$の最適反応である。従って、$T_i(c^{k+1})=\{c_i^{k+1}\}$かつ$i \notin I(c^{k+1})$となる。これは$I(c^{k+1})=\{j\}(j \in N, j \neq i)$または$I(c^{k+1})=\varnothing$を意味している。　　　　（証明終わり）

集合Sの要素の個数を$|S|$で示す。$|I(c)|(c \in C)$は$\{0,1,2\}$上の値をとるので、補題7-1により、$\left(|I(c^k)|\right)_{k=0,1,\ldots}$は非増加数列である。もう少し正確にいえば、$\left(I(c^k)\right)_{k=0,1,\ldots}$は次の形のうちの1つをとる：

N:　$\left(\varnothing,\cdots^a\right)$

L1:　$\left(\{i\},\varnothing,\cdots^a\right)$または$\left(\{i\},\{j\},\cdots^b,\varnothing,\cdots^a\right)$または$\left(\{i\},\{j\},\cdots^b,\{i\},\varnothing,\cdots^a\right)$または

$\left(\{1,2\},\varnothing,\cdots^a\right)$または$\left(\{1,2\},\{i\},\varnothing,\cdots^a\right)$または$\left(\{1,2\},\{i\},\{j\},\cdots^b,\varnothing,\cdots^a\right)$または

$\left(\{1,2\},\{i\},\{j\},\cdots^b,\{i\},\varnothing,\cdots^a\right)$

L2:　$\left(\{i\},\{j\},\cdots^c\right)$または$\left(\{1,2\},\{i\},\{j\},\{i\},\{j\},\cdots^c\right)$

L3:　$\left(\{1,2\},\{1,2\},\cdots^d\right)$

ここで、$\{i,j\}=\{1,2\}$、「$\cdots^a$」:=「$\varnothing$」の無限回の繰返し、「$\cdots^b$」:=「$\{i\},\{j\}$」の何回かの繰返し、「$\cdots^c$」:=「$\{i\},\{j\}$」の無限回の繰返し、「$\cdots^d$」:=われわれの議論では重要でないもの、である。

上記の場合分けに対応して、与えられた初項c^*を持つ誘因列$(c^k)_{k=0,1,\ldots}$とその極限c^∞が次の命題のように構成される：

命題 7-8.

任意に与えられた初項 c^*に対して、複数の誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ と極限集合 c^∞ が構成されうる。しかし、それらは次の形のうちの 1 つをとる：

N: $c^k = c^*(k = 0,1,\ldots)$ かつ $c^\infty = \{c^*\}$ である。これは c^*がナッシュ均衡であるという主張と同値である。

L1: 複数の誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ が構成され得る。しかし、それは次の性質を持つ：

k=0,1,...に対して、1 つの場合を除いて[6]、2 人のプレイヤーのうち 1 人が c^kから自分の戦略を変える誘因を持つ。そして、このプレイヤーは c^{k+1} を得る際に複数の選択肢があり得る。

任意の $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ に対して、極限集合 c^∞ はナッシュ均衡である唯一の要素からなる。

L2: 複数の誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ が構成されうる。しかし、それは次の性質を持つ：

k=0,1,...に対して、1 つの場合を除いて[6]、2 人のプレイヤーのうち 1 人が c^kから自分の戦略を変える誘因を持つ。そして、このプレイヤーは c^{k+1} を得る際に複数の選択肢があり得る。

任意の $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ に対して、極限集合 c^∞ は 1 点集合ではなく、そのどの要素もナッシュ均衡ではない。

L3: 複数の誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ が構成されうる。

任意の $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ に対して、$c^\infty = \{c^1\}$ は定義7-6によって決定され、c^1 はナッシュ均衡ではない。

証明： **N** の場合は明らかである。**L3** は定義7-6により直ちに導かれる。**L1** の証明は **L2** の証明と同様なので **L2** だけを証明する。

(1) $I(c^*) = \{1,2\}$ ならば、プレイヤー1 と 2 は戦略を c^*から変更する誘因を持つ。さらに、$|T(c^*)|>1$ ならば、c^1 を得る際に複数の選択肢がある。

(2) $\left(I(c^k)\right)_{k=0,1,\ldots} = \left(\{i\},\{j\},\cdots^c\right)$ ならば、1 人のプレイヤーだけが自分の戦略を変える誘因を持つ。ある非負の整数 k に対して、$|T(c^k)|>1$ ならば、c^{k+1} を得る際に複

[6] これは $I(c^*) = \{1,2\}$ である場合である。c^1 は c^*から得られる。

数の選択肢がある。k=0,1,…に対して、$I(c^k) \neq \varnothing$（これは $c^{k+1} \neq c^k$、すなわち、c^kがナッシュ均衡ではないことと同値である）であるので、$(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ は 1 点に収束しない。さらに、C が有限集合であるため、C の複数個の要素が $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ の中に無限回現れる。従って、c^∞ は 1 点集合ではなく、その要素はナッシュ均衡ではない。 （証明終わり）

$c^\infty = \{c^*\}$ ならば、安定条件(7-12)は明らかに成立するので、命題7-8の **N** より次の系が得られる。

系 7-5.
任意の $0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1$ に対して、純粋戦略におけるナッシュ均衡は誘因列を考慮した $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -安定である。

系7-5は誘因列を考慮したε-安定性はナッシュ均衡の安定性よりも緩いことを示している。誘因列を考慮したε-安定性の意味を説明するために、ゲーム理論では通常みられないわれわれの基本的な仮定を述べる。

仮定 7-1.
状況（S）:
2 人のプレイヤーは必ずしもナッシュ均衡ではない直感的に社会的に望ましい結果 c^*を正当化したいと思っている。特に、どのプレイヤーも自分の思考過程において c^*から逸脱する誘因を押さえたいと思っている。
逸脱（D）と同時変更の可能性（P）:
2 人のプレイヤーは思考過程で初項 c^*を持つ（可能ならば複数個の）誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ と極限集合 c^∞ を構成する。任意の誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ とその極限集合 c^∞ に対して、
（**D**：）プレイヤー $i \in N$ が c_i^* から逸脱するならば、自分は $a \in c^\infty$ である a_i を取り、相手のプレイヤーj は $b \in c^\infty$ である b_j を取ると思う。また、
（**P**：）プレイヤーi は自分が c_i^* から a_i に逸脱すれば、確率 ε_i で相手のプレイヤーj も同時に b_j に逸脱すると考える。

仮定7-1のもとで、安定条件(7-12)が満たされれば、どのプレイヤーも c^* から逸脱することによって、正の利益を得ることはない。これが c^* が安定であるというわれわれの意味である。

さて、仮定7-1の妥当性を検討する。まず、適用する状況を **S** に記述された場合に限定する。われわれの安定性は 2 人のプレイヤー間であらかじめ直感的に社会的に望ましい結果が存在しない場合には適用できない。次の7-3-2項で仮定

7-1の **S** を適用できる例をあげる。

次に、仮定7-1の **D** の妥当性を検討する。$c \in T(c^*), c \neq c^*$ であるような c が存在すると仮定する。この時、プレイヤー $i \in I(c^*)$ は c_i^* から c_i へ戦略を変える誘因が存在する。この誘因は、さらに、プレイヤーたちの思考過程に（可能ならば複数個の）誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ を構成する。

(1)： 命題7-8より **L1** と **L2** の場合には最初の誘因 c^1 は 2 人のプレイヤーが持つ可能性（$I(c^*)=\{1,2\}$）があるが、その他の誘因 $c^{k+1}(k=1,2,\ldots)$ はただ 1 人のプレイヤー（$|I(c^k)|=1(k=1,2,\ldots)$）のみが持つ。この場合には次の推測が妥当である：あるプレイヤー（i とする）が戦略 A を取れば、他のプレイヤー（j とする）は A に対する最適反応である B を取る。この時、プレイヤー i は B に対する最適反応である C を取る。この時、プレイヤー j は C に対する最適反応である D を取る。…；すなわち、誘因列が明確に決定される。

(2)： 仮定7-1の **S** により、プレイヤーは思考過程において c^* からの逸脱を抑制する理由を探している。

(1)と(2)より、どのプレイヤーも、思考過程において、どの誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ に沿っても自分が逸脱する誘因を抑制できるなら、c^* を安定と見なすために十分である。L1 の場合、誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ は 1 点に収束し、この収束点が最初の誘因 c^1 からの最終結果である。それ故、この収束点を極限集合 c^∞ の唯一の要素として定義した。L2 の場合、誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ は 1 点に収束しないので、最初の誘因 c^1 からの最終結果は唯一には決定できない。従って、極限集合 c^∞ を誘因列 $(c^k)_{k=0,1,\ldots}$ に無限回現れるすべての項の集合と定義し、最初の誘因 c^1 からの最終結果を $a,b \in c^\infty$ である (a_i, b_j) とするのは妥当である。このため少し複雑な安定条件(7-12)を採用した。

L3 の場合；$I(c^*)=I(c^1)=\{1,2\}$ であるので、誘因 c^1 と c^2 を 2 人のプレイヤーが持つ。この場合、上述のように適切な誘因列を構成することができない；というのは仮定7-1の **P** では、確実にではなくある確率で 2 人のプレイヤーが同時に戦略を変えることを仮定したので、c^* から c^1 を経由して c^2 へ彼らが戦略を確実には変えることはない。従って、$(c^k)_{k=2,3,\ldots}$ の部分に妥当な意味を見出すことは困

難である。それ故、この部分を無視して、$c^{\infty} := \{c^1\}$ と定義した。仮定7-1の **S** のもとでは、この定義 $c^{\infty} := \{c^1\}$ でプレイヤーの c^* からの逸脱を抑止するために十分であるとみなす。

最後に仮定7-1の **P** の妥当性を手短に考察する[7]。われわれは、1 人のプレイヤーから他のプレイヤーに情報を瞬時に運び、プレイヤーの意思に反して戦略を強制的に変更させる媒体の存在を、仮定しているわけではない。プレイヤーが直感的に社会的に望ましい結果から逸脱したいと思うのは、ただ、他のプレイヤーが戦略を変えないという理解のもとで自分が逸脱すれば正の利益が得られるからである。しかし、このような一方的な逸脱は、他のプレイヤーも同じ状況にあるので、それほど容易ではない。日常生活で、人々は社会的に望ましい結果からの逸脱を次のように抑制すると想像される：
逸脱したいが、しかし、他人も自分が考えるように考えるだろうからこの逸脱を実行することは止めよう。われわれの仮定 **P** はこのアイデアの 1 つの表現である。

7-3-2 関連する結果

この項で誘因列を考慮した ε-安定性を例証するためにいくつかの例を考察する。また、関連する結果についてのコメントも与える。これらの例においてパレート最適な結果の中で 2 人の利得の差が最小のものを社会的に望ましい結果とみなすことにする。

表7-4の囚人のジレンマゲームでは、$0.2 \le \varepsilon_i \le 1 (i = 1, 2)$ の時、(C,C)が誘因列を考慮した $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -安定である。この例は命題7-8の **L1** に属している。この結果は第7-2節と同じである。従って、われわれのこの節における安定性は第7-2節の安定性の一般化である。表7-5の例 2 では、$0 \le \varepsilon_1 \le 1, 0.5 \le \varepsilon_2 \le 1$ の時、(A,a)は誘因列を考慮した $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -安定である。この例は命題7-8の **L2** に属していて、

$c^{\infty} = \{(\mathrm{B}, \mathrm{b}), (\mathrm{B}, \mathrm{c}), (\mathrm{C}, \mathrm{b}), (\mathrm{C}, \mathrm{c})\}$ である。表7-6の例では誘因列を考慮した安定な戦略の組が存在しない。

[7] もっと基本的な議論に関しては第7-2節を参照。

表 7-4. 囚人のジレンマゲーム

		プレイヤー2 C	プレイヤー2 D
プレイヤー1	C	**5,5**	0,6
	D	6,0	1,1

表 7-5. 例 2 の戦略形

		プレイヤー2 a	b	c	d
プレイヤー1	A	**3,2**	0,3	0,2	–1,0
	B	2,0	1,0	0,1	–1,0
	C	2,0	0,1	1,0	–1,0
	D	0,–1	0,–1	0,–1	0,0

表 7-6. 誘因列を考慮した安定な戦略の組がない例

		プレイヤー2 L	プレイヤー2 R
プレイヤー1	U	1,–1	–1,1
	D	–1,1	1,–1

表7-3のチキンゲームでは、$\frac{2}{9} \le \varepsilon_i \le 1 (i=1,2)$ の時、(C,C)が誘因列を考慮した $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -安定である。この例は命題7-8の **L3** に属している。Myerson [3]はこのチキンゲームの無限回繰返し版を考察し、割引率が 2/3 以上の時、両プレイヤーが

表 7-3. チキンゲーム

		プレイヤー2 C	プレイヤー2 B
プレイヤー1	C	**4,4**	1,6
	B	6,1	–3,–3

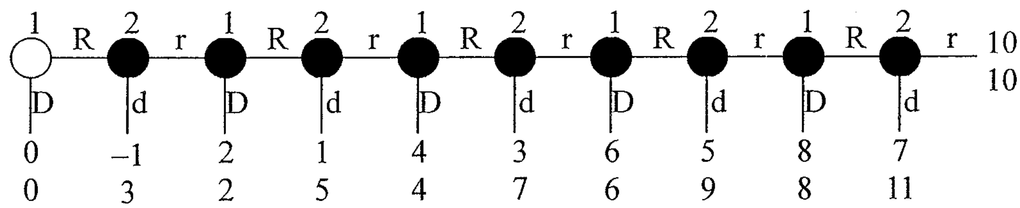


図 7-2. ムカデゲーム

しっぺ返し戦略を利用するのがナッシュ均衡であることを示している。しっぺ返し戦略のもとでは、プレイヤーは最初の期に C（慎重）を取り、それ以後は直前の期に相手のプレイヤーが選んだ手を取る。両プレイヤーがしっぺ返し戦略を取ると、結果(C,C)が毎期出現する。

Rosenthal [5]は図7-2の展開形で与えられたムカデゲームを考察している。このゲームは左にある白のノードから出発する。プレイヤー1 と 2 は交互に「右」か「下」を選ぶ。一方のプレイヤーが下を選ぶとゲームは終了する。唯一の部分ゲーム完全ナッシュ均衡は「いつも下を選ぶ」である。このムカデゲームで「右」を支持する Rosenthal と Myerson の方法を示す前に、「いつも右を選ぶ」を正当化するわれわれの方法を示す。

このゲームの戦略形は表7-7で与えられている。$c^* := (\mathrm{RRRRR,rrrrr})$ とおくと、$c^1 = (\mathrm{RRRRR,rrrrd})$,$\cdots$, $c^{10} = (\mathrm{D,d})$ 、 $c^\infty = \{(\mathrm{D,d})\}$ となる。安定条件(7-12)はいつも成立する。すなわち、(RRRRR,rrrrr)は任意のεに対して、誘因列を考慮したε -安定である。

Rosenthal [5]は次のように考察した（図7-3参照）:
プレイヤーは最大の利得を与える手を確率 1 で選ぶのではなく、良い方の手を確率 $\min\{1, 0.5 + 0.4\Delta\}$ で選ぶ。ここで、Δは良い手の利得と悪い手の利得の差である。図7-3の箱の中の 2 つの数字はそのノードからの期待利得を表す（上の数字がプレイヤー1 の期待利得)。例えば、もっとも右にある黒のノードにおいて、プレイヤー2 は確率 0.1 で r を確率 0.9 で d を選ぶ。同様にプレイヤー1 は彼の最初と 2 番目のノードで確率 1 で R を選ぶ。プレイヤー2 は彼の最初と 2 番目のノードで確率 0.93 で r を確率 0.07 で d を選ぶ。

表 7-7. ムカデゲームの戦略形

		プレイヤー2					
		d	rd	rrd	rrrd	rrrrd	rrrrr
プレイヤー1	D	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	RD	−1,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2
	RRD	−1,3	1,5	4,4	4,4	4,4	4,4
	RRRD	−1,3	1,5	3,7	6,6	6,6	6,6
	RRRRD	−1,3	1,5	3,7	5,9	8,8	8,8
	RRRRR	−1,3	1,5	3,7	5,9	7,11	**10,10**

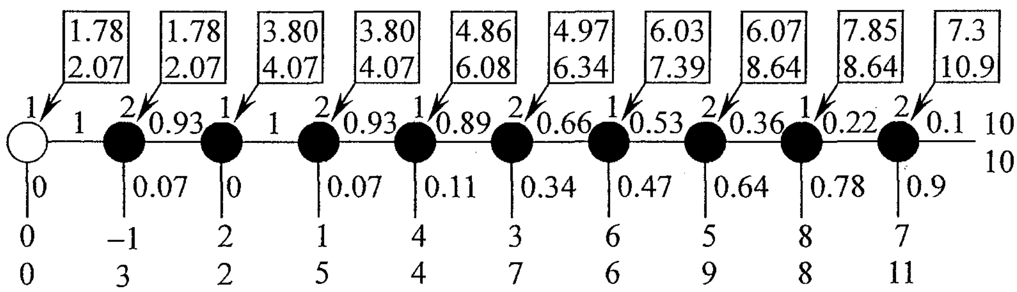


図 7-3. Rosenthal のモデル

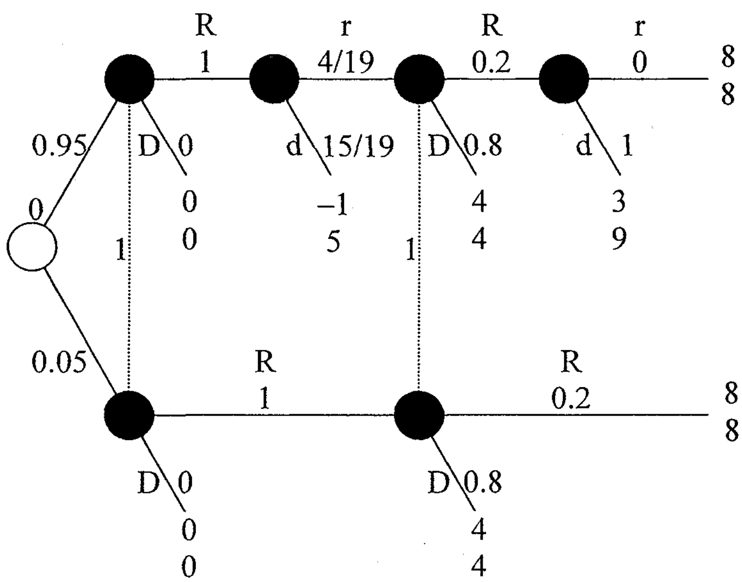


図 7-4. Myerson のモデル

Myerson [3]は図7-4で与えられるもっと複雑なモデルを利用している。プレイヤー2 は通常のプレイヤーではない。プレイヤー2 は 2 つのタイプからなる；タイプ 1 は合理的なプレイヤーであるが、タイプ 2 は R 以外は選べない。プレイヤー2 は自分のタイプを知っているが、プレイヤー1 はプレイヤー2 が確率 0.95 でタイプ 1 であると思っている。このゲームの逐次均衡は図7-4に与えられている；プレイヤー1 は彼の最初のノードで R を選び、プレイヤー2（のタイプ 1）は彼の最初のノードにおいて確率 4/19 で r を確率 15/19 で d を選ぶ。

この節を終わるにあたり、誘因列を考慮したε-安定性が重要な役割を果たすいくつかの場合を以下に要約する。表7-8は戦略形の関連する部分を表している。この表で $u_i^* := u_i(c^*)(i \in N)$ である。もし、すべての $a,b \in c^\infty$ に対して、

表 7-8. 戦略形の一部分、$a,b \in c^\infty, c^0 = c^*$

		プレイヤー2	
		c_2^*	b_2
プレイヤー1	c_1^*	u_1^*, u_2^*	$\bullet, u_2(c_1^*, b_2)$
	a_1	$u_1(a_1, c_2^*), \bullet$	$u_1(a_1, b_2), u_2(a_1, b_2)$

$u_1^* \geq u_1(a_1, c_2^*), u_1^* \geq u_1(a_1, b_2), u_2^* \geq u_2(c_1^*, b_2), u_2^* \geq u_2(a_1, b_2)$ かつ $c^0 = c^*$ ならば、表7-7の Rosenthal のムカデゲームのように安定性条件(7-12)は明らかに成立する。もし、すべての $a,b \in c^\infty$ に対して、
$u_1^* > u_1(a_1, b_2), u_2^* > u_2(a_1, b_2)$ かつ $c^0 = c^*$ ならば、表7-4の囚人のジレンマゲームのように、十分 1 に近い $\varepsilon_i (i \in N)$ に対して、安定性条件(7-12)は成立する。

7-4 結言

この章では複数プレイヤー間における動的意思決定を考察した。本研究で得られた結果をまとめると：

- 第7-2節では、繰返し囚人のジレンマゲームにおいて、協調行動を実現し、部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成し、従来知られているトリガー戦略よりも優しい、新しい *K*-有界 Getting-even 戦略を提出した。
- さらに、プレイヤーの思考過程において戦略を同時に変える可能性を考

慮して 1 期間囚人のジレンマゲームにおいても協調行動を正当化するモデルを考察した。

- 第7-3節では、第7-2節の考えをさらに発展させ、思考過程における誘因列を考慮し有限 2 人戦略形ゲームにおいてナッシュ均衡よりも緩い安定性、誘因列を考慮したε-安定性、を導入した。

以上のように、囚人のジレンマゲームと有限 2 人戦略形ゲームを利用して、社会的の望ましい結果を安定な解として正当化する方法を考察した。

参考文献

[1] Gibbons, R.: Game Theory for Applied Economists. Princeton, Princeton University Press, 1992.

[2] 浜口恵俊、間柄としての「人間」ー仏教に探る新しい社会科学の基礎ー、季刊仏教、9 (1989)、67-75.

[3] Myerson, R. B.: Game Theory. Cambridge, Harvard Univerisity Press, 1991.

[4] Namekata, T.: Prisoner's Dilemma and the Relation between Players. Mathematica Japonica, Vol. 45 (1997), 433-439.

[5] Rosenthal, R.W.: Games of Perfect Information, Predatory Pricing and the Chain-Store Paradox. Journal of Economic Theory, Vol. 25 (1981), 92-100.

第8章 結論

本研究では資源配分に関する数理的研究を行った。まず、第 3 章から第 5 章において動的な逐次資源配分を考察し、第 6 章において複数プレイヤー間の資源配分を、第 7 章において複数プレイヤー間における動的意思決定を扱い、以下のような知見を得た。

第 3-2 節では、従来考察されて来なかった、離散時点に出現する有限種類の目標物に離散資源を逐次配分する問題を扱った。期待報酬関数がある条件を満たす場合に、資源の最適使用量が残り期間の非増加関数であること、手持ち資源量の非減少関数であること、等を証明した。第 3-3 節では手持ち資源が時間の経過と共に劣化する場合を扱い、期待報酬関数がある条件を満たす場合に、資源の最適使用量が劣化率の非減少関数であることを示した。第 3-4 節では 1 期間を犠牲にして資源補給が可能な場合を考察し、臨界値（＝手持ち資源の個数がその値以下ならば資源を補給するというその値）のいくつかの性質を導出した。

第 4 章では、第 3-2 節の基本モデルにおいて既知であったパラメータが未知である場合を考察した。まず、第 4-2 節では目標物の出現確率が未知であるが、その主観確率分布が意思決定者に利用可能な場合を考察し、資源の最適使用量が残り期間の非増加関数となるための十分条件を導出した。第 4-3 節では計画期間の長さが未知な場合を扱い、ある条件のもとで、資源の最適使用量が経過期間数の非減少関数であることを証明した。これら第 4 章の結果はパラメータが既知である第 3 章の結果の一般化である。

第 5 章では、取替え用の手持ちユニットが有限である並列冗長システムの取替え問題を利用して、連続する 2 つの決定時点間の経過時間の分布が直前の決定に依存する連続時間離散資源逐次資源配分を考察した。特に 2-ユニット系で寿命分布が指数関数に従う時、手持ちユニットが 2 個の場合と無限個の場合の最適政策を陽に求めた。

これらの知見の意義は、以下のとおりである：
本研究で扱ったモデルは現実の状況を簡略化したものであるが、期待報酬関数等に関する仮定は現実的な仮定である。その仮定のもとで最適政策の構造が数理的に証明されたことは、最適政策を求める際に、その構造をもつものだけに限定して探索すればよく、最適政策を容易に求めることに役立つ。また、数理的に導出されたこれらの最適政策の構造は直感的にも予想されるものであり、これらの構造がわれわれのモデルのどの要素から帰結されるかを証明した事は、同様な要素を持つより複雑な現実的な状況でいかなる決定をすべきかの指針を与える。

第 6 章では譲渡可能効用ゲームを利用して複数プレイヤー間の公平な資源配

分を考察した。まず、第 6-2 節では譲渡可能効用ゲームにおいて主要な解である仁とτ-値を考察し、仁とτ-値を一対交渉一貫性によって基準点の違いと解釈できることを証明した。また、「あるゲームが、その非空なコアが 1 人と n–1 人提携のみによって決定される」ための必要かつ十分条件は、「そのゲームが本質的な提携に関して擬凹なゲームである」ことを証明した。第 6-3 節では従来知られている均等配分値を一般化した k 人平均寄与の残余均等配分値を導入し、この解の種々の性質を考察した。特に、EN^{k}AC-値が準仁と一致するための十分条件も与えた。第 6-4 節では EN^{k}AC-値とシャープレイ値を縮小ゲームによる一貫性で特徴付ける縮小ゲームを導出した。

これらの知見の意義は以下のとおりである：
譲渡可能効用ゲームを含む協力ゲーム理論の 1 つの目的は公平な配分を研究することであり、そのためにコア、(準) 仁、シャープレイ値、τ-値等、種々の解が提案されている。これらの解はそれぞれ独自な公平性を追求しており、解の違いが容易に分かるようには定義されていない。従って、現実場面でどの解を利用するかを決定する際の助けとなるように、同じ土俵の上でこれらの解を比較できるように特徴付けることが望まれる。その方法論として、従来、一対交渉一貫性と縮小ゲームによる一貫性の 2 つが考えられてきた。第 6-2 節で行った仁とτ-値の関係は前者による特徴付けであり、第 6-4 節で行った EN^{k}AC-値とシャープレイ値の特徴付けは後者によるものである。また、EN^{k}AC-値と準仁はまったく異なった考えから定義された解であり、この 2 つが一致する十分条件を得たことは、これらの解の特徴を知る上で役に立つ。

第 7-2 節では囚人のジレンマゲームにおける協調行動に関して考察した。まず、繰返し囚人のジレンマゲームにおいて協調行動を部分ゲーム完全ナッシュ均衡として実現させる K-有界 Getting-even 戦略を導入し、更に 1 回限りの囚人のジレンマゲームにおいて協調行動を安定な解として正当化するために従来のプレイヤーの仮定を明示的に変更し、ε-安定性を導入した。第 7-3 節では、これを更に有限 2 人戦略形ゲームにまで一般化し、純粋戦略におけるナッシュ均衡よりも緩い誘因列を考慮したε-安定性を提出した。
これらの知見の意義は以下のとおりである：
囚人のジレンマゲームにおいて協調行動を正当化する 1 つの方法である繰返し囚人のジレンマゲームにおいて、従来知られているトリガー戦略は部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成するが相手の失敗を 1 回しか許さないので厳し過ぎる。一方、トリガー戦略よりも優しいしっぺ返し戦略は部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成しない。そこで厳しさにおいてこの中間に位置し部分ゲーム完全ナッシュ均衡を構成する新しい K-有界 Getting-even 戦略を導入したことは、協調を誘発させるために自分の行動を工夫する助けになるという意義がある。また、

通常の非協力ゲーム理論で想定されているプレイヤーは他のプレイヤーから過度に孤立しているとの反省から、プレイヤーの仮定の中に、社会的に望ましい結果への志向性、及び、同時に戦略を変える可能性を考慮することを明示的に示し、ε-安定性を導入することにより 1 回限りの囚人のジレンマゲームにおいて協調行動を正当化した事、及び、この安定性に更に誘因列を考慮し有限 2 人戦略形ゲームに純粋戦略におけるナッシュ均衡よりも緩い安定性を導入した事は、関係性をその内部に秘めた新しいプレイヤー像を探求する 1 つの試みとみなせる。

このように本研究では、多期間にわたる資源配分を効率的に行う政策の性質を一般化し、複数プレイヤー間の公平な資源配分方法を再解釈し、さらに新たな方法を提出した。また、社会的ジレンマを回避する新たな方法を提示した。

以上のように、基本的なモデルではあるが、多期間における効率な資源配分、複数プレイヤー間の公平な資源配分、社会的に望ましい状況の合理的説明、を数理的に扱った本論文の社会的意義は、社会的行為主体としてこれらのモデルに対応する状況に適切に対処する際の行動指針を与える点である。

さて、最後に本研究の今後の課題と発展性について列挙する。

1. 第 6-4 節で EN^kAC-値とシャープレイ値を縮小ゲームによる一貫性で特徴付ける縮小ゲームを導出したが、このわれわれの手法を利用して、他の解に関して同様のことが可能かを検討すること。
2. 上記の方法は、まず、解がありその解に関して縮小ゲームによる一貫性を満たす縮小ゲームを探求したが、それとは反対に、まず意味的に妥当である縮小ゲームを与えてそれによる一貫性を満たす解を定義し、その性質を調べること。
3. 第 7 章で従来のプレイヤーに関する仮定の問題点を指摘し、新たなプレイヤー像を導入したが、更に種々の合理性を検討し、その数理モデルを考案すること。
4. 上記の種々の合理性を検討する際、特に、社会的な公平性を各プレイヤーがその内部に想定し得ることが重要である。しかし、その公平性には様々な表現があり、更に、そのような公平性を最初から各プレイヤーが内部に持っていることはあり得ない。そこで、次の 2 つが必要である:(a)その公平性の様々な表現を譲渡可能効用を持つ提携形ゲームにおける公平性を利用して探求する。(b)各プレイヤーの内部に時間的に徐々に社会的な公平性を実現し得る過程を動的計画法を利用して考察する。この(a,b)の研究を進めること。

特に、4.の課題を遂行するには多くの労力と時間を要することが予想されるが、人間の相互作用の総体としての社会現象のより良き理解とその十全な発展に寄与するために、数理的な手法を適用すべき領域である。

謝辞

本研究の論文をまとめるにあたり、その機会を与えて下さった大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻教授 石井博昭先生には、終始懇切な御指導、御助言を賜りました。深く感謝の意を表すと共に、厚く御礼申し上げます。

大阪大学大学院工学研究科超高温理工学研究施設教授　後藤誠一先生、大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻教授 八木厚志先生、伊東一良先生、川上則雄先生には、本論文作成に際し、細部にわたり御指導、及び、貴重な御助言を頂き心より感謝いたします。

本研究の遂行にあたり大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻 在学時に西田俊夫先生（現在、大阪大学名誉教授）、田畑吉雄先生（現在、大阪大学大学院経済学研究科教授）の御指導と御助言を賜り、深く感謝いたします。

本研究の遂行にあたりオランダ University of Twente の Dr. Theo S.H.Driessen 博士には研究の機会および助言を賜り感謝いたします。

著者発表論文

1. Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: A Sequential Allocation Problem with Two Kinds of Targets. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. **22** (1979), 16-28.
2. Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: A Sequential Allocation Problem with Unknown Probabilities of Appearance. *Mathematica Japonica*, Vol. **24** (1979), 341-349.
3. Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: A Sequential Unit Allocation for Parallel Redundant System. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. **23** (1980), 353-367.
4. Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: A Sequential Allocation Problem with Perishable Goods. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. **24** (1981), 202-212.
5. Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: Some Remarks on Sequential Allocation Problem over Unknown Number of Periods. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. **24** (1981), 339-346.
6. Namekata, T., Y. Tabata and T. Nishida: A Note on Sequential Allocation Problem When Resources can be Supplied. *Mathematica Japonica*, Vol. **28** (1983), 305-314.
7. Namekata, T.: Prisoner's Dilemma and the Relation between Players. *Mathematica Japonica*, Vol. **45** (1997), 433-439.
8. Namekata, T.: Note on Stability in Pure Strategies weaker than Nash Equilibrium. *Mathematica Japonica*, Vol. **46** (1997), 265-272.
9. Namekata, T. and T.S.H. Driessen: The Egalitarian Non-k-Averaged Contribution (EN^{k}AC-) value for TU-games. *International Game Theory Review*, Vol. **1** (1999), 45-61.
10. Namekata, T. and T.S.H. Driessen: Bargaining Property of a Nucleolus and τ-Value in a Class of TU-Games. Accepted in *Computers and Mathematics with Applications*.
11. Namekata, T. and T.S.H. Driessen: Reduced Game Property of the Egalitarian Non-k-Averaged Contribution (EN^{k}AC-) Value and the Shapley Value. *International Transactions in Operational Research*, Vol. **7** (2000), 365-382.