



Title	不確定状況下での生産管理システムの基礎的研究
Author(s)	今野, 勤
Citation	大阪大学, 2000, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.11501/3169455">https://doi.org/10.11501/3169455</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

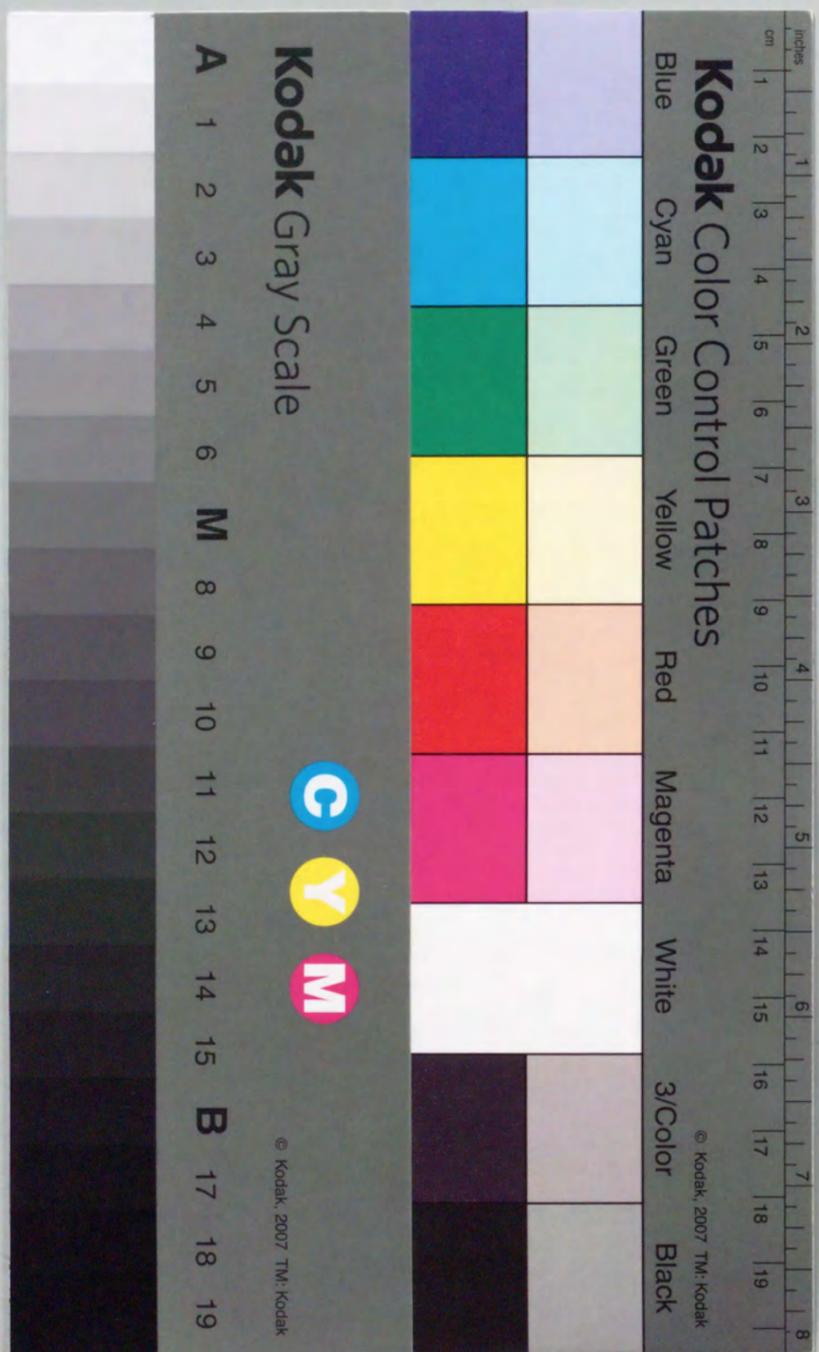
<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

不確定状況下での生産管理システムの  
基礎的研究

1999年

今野 勤



①

不確定状況下での生産管理システムの  
基礎的研究

1999年

今野 勤

## 目次

第1章 緒論	1
第2章 不足時間, 人員構成比率を考慮した人員配分計画	5
2.1 はじめに	5
2.2 不足時間を考慮した人員配分計画のモデル	6
2.3 不足時間を考慮した人員配分計画の解法	8
2.4 数値例	12
2.5 人員構成比率をも考慮した人員配分計画のモデル	16
2.6 人員構成比率をも考慮した人員配分計画の解法	19
2.7 数値例	25
2.8 適用例について	32
2.9 おわりに	33
第3章 資源制約, 納期が不確定下でのスケジューリング	35
3.1 はじめに	35
3.2 D. Werraによるオープンショップ問題	36
3.3 資源制約が不確定下でのオープンショップスケジューリング問題 の定式化	37
3.4 モデルと解法	39

3.5 納期及び先行関係が不確定下での二機械並列スケジューリング問題 の定式化.....	44
3.6 先行関係, 処理可能時間, 納期をもつ通常の二機械問題の解法 .....	46
3.7 ファジィ版での解法 .....	48
3.8 おわりに .....	50
<b>第4章 需要, 生産能力, 在庫量が不確定下での生産計画</b> .....	<b>51</b>
4.1 はじめに .....	51
4.2 モデルの定式化 .....	52
4.3 解法 .....	56
4.4 数値例 .....	64
4.5 おわりに.....	71
<b>第5章 保管, 機会損失費用が不確定下での購入計画</b> .....	<b>73</b>
5.1 はじめに .....	73
5.2 定式化 .....	74
5.3 ファジィ最小オーダー .....	76
5.4 最適購入量 .....	77
5.5 数値例 .....	80
5.6 補修部品在庫モデル .....	80
5.7 補修部品在庫モデルの解法 .....	83
5.8 数値例 .....	85
5.9 おわりに .....	88

<b>第6章 結論</b> .....	<b>89</b>
<b>謝辞</b> .....	<b>93</b>
<b>付録</b> .....	<b>95</b>
A ファジィ理論の基礎 .....	95
A.1 ファジィ集合と拡張原理 .....	95
A.2 ファジィ数とその演算 .....	98
B ネットワーク計画問題 .....	101
B.1 グラフ .....	101
B.2 最大流問題 .....	102
<b>参考文献</b> .....	<b>107</b>
<b>著者発表論文</b> .....	<b>112</b>

## 第1章

### 緒論

近代資本主義社会の繁栄を支えているものの一つに「物の製造」があり、必要とする物を如何に安く、安全に作れるかが、生産計画の原点である。生産計画には、効率を追求するという側面もあり、生産の効率化のためには、製品の受注、部品の受発注、配送、流通などの工程との連鎖の必要性が強くなってきている。これまでの場当たりの、定性的な生産計画から、在庫管理の基本的な考え方を基に、コンピュータの高性能化と相まった数量的な生産計画技法が考えられるようになってきた。コンピュータネットワークの普及により、流通在庫が実時間で把握できるようになり、実時間で生産計画を作成することが必要になってきた。こうした実時間での計画作成では、流通在庫など膨大なデータを扱うことが必要であるが、需要予測等関連するデータが必ずしも信頼できるデータとは限らない上、計画立案時にすべてのデータが同時に揃うとは限らない場面が出てくる。その結果、制約条件、目的関数に信頼がおけないか、決まっていない不確定な場合が日常茶飯事である。このような場合における、生産管理の計画作成では以下のような問題が生じる。

(1) 制約条件、目的関数が多岐に渡り、しかも不確定である。

(2) 計算の高速化が要求される。

従来行われてきた生産管理の研究では、計画作成のモデル構築に際して、大別すると2種類のアプローチが採られてきた。ひとつは、生産活動の理想モデルを数理的に構築し、制約条件、目的関数を厳密に定義し、最適解を導き出す数理計画法に基づく方法である[50]。

G.B.Dantzigに代表される線形計画法[4],[10],[11]や整数計画法[18], また, R.E.Bellman[5]の動的計画法などがそれである. もう一方のアプローチでは, 計画作成のモデル構築において, 生産活動を計画と統制に分け, 物と情報それぞれの入力, 出力及びこれらのプロセスをモデル化し, 在庫などのパラメータを変化させて, シミュレーションにより実行解を求める方法である[54][58]. 高桑[60]は, シミュレーションと最適化手順を組み合わせる方法を提案しているが, いずれも入力パラメータが確定変数である. 不確定な状況をシミュレーションする場合には, 幾つかの条件を設定し, パラメータを設定し直すことにより, 最適解を求めることができる. しかし, 条件設定をまちがえれば最適解を見逃す可能性があり, またシミュレーション結果をみながら, 条件設定を試行錯誤で変えるという効率的でない方法が採られている. 以上のように, 従来の研究では制約条件, 目的関数が不確定状況である場合には, 必ずしも積極的に対応しているとは考え難い.

このような研究状況を考慮して, 本研究では次のように研究の目的を定めた. 生産管理の各モデルごとにこれまでは確定的として扱われてきた制約条件, 目的関数において, 不確定な状況を設定し, これらの制約条件, 目的関数を意思決定者の満足度として定義する. さらに, これらふたつが複合するケースも考慮する. すなわち, 本研究では従来の研究では, あまり扱われてこなかったこれらの不確定状況での数理計画法によるモデルの構成とその解法を開発し, 不確定状況下においても有効で, かつ妥当な解を得ることと, 計算の高速化を計る. 従来の不確定状況下の生産管理システムの研究では, 確定状況下のモデルに, 本研究よりも多数の制約条件, 目的関数を設定して解を求めた. 本研究のモデルとその解法は, 従来の方法と比較すると, 制約条件, 目的関数の設定数が少なく, よって計算の高速化が可能になった. したがって, これまでの不確定状況下の生産管理システムの研究に付加して, 新たな研究方法として発展すると考えられる.

本論文は, 6章構成になっており, 本章は, 研究の背景, 目的, 意義, 各章の概説を述べる. 第2章「人員構成, 不足時間を考慮した人員配分計画」では, 各職場への配分人員を決める際に, 意思決定者が仕事量に対する職場毎の不足時間, 人員構成比率を, 主観的に判断しなければならない場合について, 両者を満足させる総合満足度を最適化するモデルを設定し, その解法について示す. 制約条件, 目的関数が確定状況下の数理計画法は, 多制約ナップサック問題として扱われてきた[7],[21][45]. まず, 各職場に何人を配置すれば,

時間外労働, 休日出勤などの不足時間をできるだけ少なくすることができるかという, 基本的な問題に対するモデルと解法を示す. 次に正規雇用者, 臨時雇用者を混合した場合の人員構成比率をも考慮したモデルと, その解法を示す. 現実の場面としては, 月に1回, 生産量の負荷に合わせて, 人員配分を再編成し直すことを想定している. 第2章で扱うモデルは, ファジィ多目的意思決定問題[28],[32],[35],[36],[55]とは異なり新しいモデルである. 与えた解はそれらの報告で述べられた方法とは異なるものであり, この種の問題にはより有効と考えられる.

第3章「資源制約, 納期が不確定下でのスケジューリング」では, 生産スケジューリングを扱う. はじめに資源制約をもつオープンショップスケジューリングモデルを示す. ここで, 納期とは製品納入時期を指す. このモデルでは, 各ジョブはオープンショップ型, すなわち処理順は, あらかじめ定めておらず任意である. そして, 作業の開始, 終了時間の範囲を指す実行可能時間については, ある時間帯を外れると満足度が低くなるとして, メンバシップ関数で定義する[15]. また, 期間ごとに資源制約があり, ある一定以上の資源を使用するジョブ同士は, 同時に処理することはできないこととする. 現実問題としては, 学校や職場で実施する健康診断や, 複数台のトラックが工場の構内の複数箇所で, 荷物の積み卸しする場面でのスケジューリング問題として想定できる[37],[42]. つぎに実行可能時間が不確定なジョブの二機械多目的スケジューリング問題を扱う. 全く同じ機能, 性能をもつ等価な2機械があり, そのどちらの機械でも処理可能なジョブを考える. ジョブは単位処理時間をもつとする. ジョブ間で先行関係, 処理開始時間, 納期が不確定の場合に, 処理開始時間, 先行関係を最適にしようとするものである[41]. 現実問題としては, 2箇所の出荷バースがある配送倉庫に, 不確定な納期をもつトラック便を, どうスケジュールするかという場面が想定できる. このような問題に対して適用可能な効率的解法を与えている.

第4章「需要, 生産能力, 在庫量が不確定下での生産計画」では, 需要予測が不確定で, 部品在庫量, 生産量, 注文数量が不確定下で, 利益を最大にする製品毎の計画数量を求め, ここで, 制約にある幅を持たせているのは, これらに許容範囲があることと, 注文数量をはじめとして, その数値に不確定さが存在し, 意思決定者の主観に頼らなければならないためである. このモデルは在庫損失, 生産能力のばらつきを最小にした上で, 採算性を考慮するモデルである[6],[34],[38],[39],[57],[43]. 提案する解法は単純ではあるが現実的な

解を与えている。

第5章「保管，機会損失費用が不確定下での購入計画」では，まず在庫管理の基本的な問題である，部品保管費用，機会損失の和が最小になる発注量を求めるモデルを考える[50]．このモデルを機会損失費用（この場合は，品切れ時の費用）が不確定である状況を想定した場合に拡張し，最適な発注量を求める．次に，部品保管，機会損失費用がともに不確定下で購入量を求めるモデルと効果的解法を示す[27],[44]．このモデルは，制約条件，目的関数が確定状況下の確率論的在庫モデル[31]を不確定状況下に拡張したものである．

第6章「結論」で，本研究について各章のまとめと，残された課題，今後の展開について述べる．

## 第2章

# 不足時間，人員構成比率を考慮した人員配分計画

### 2.1 はじめに

市場における価格変動が激しい製造業の現場では，毎月，製品毎の計画数量の変動に合わせて，工場内の各職場に配分する人員を変えて対応している．また，職場毎に不足時間があれば，残業，休日出勤で補っている．

工場全体の不足時間を最小にする人員配分を求める問題は，多制約ナップサック問題[21],[45]としてモデル化されることが一般的であるが，制約条件，目的関数が確定していることが前提であり，不確定な場合には適用できない．この点を解決するために，ファジィ理論のメンバシップ関数を用いてモデル化を行う[29],[30]．不足時間をメンバシップ関数で表し，まず解の存在条件を判定する．所定人員を段階的に割り付けることにより複数解の比較ができ，解の妥当性が明確になる．本章では人員配分問題へファジィ理論を応用したシンプルで有効な解法を提案する．第2.2節では，ここで提案するモデルを構築し，2.3でその解法を示すとともに，その計算の手間について評価し，2.4で計算例を示す．同様に2.5，2.6で人員構成比率をも考慮した人員配分計画を扱う．この問題は，職場の人員構成（例えば，正規雇用者と臨時雇用者の比率）を考慮しないと，生産活動そのものが成り立たない場合を想定している．2.7で数値例を，2.8ではある企業での適用例を示し，2.9で結論を示す[32],[33],[35]．

## 2.2 不足時間を考慮した人員配分計画のモデル

## 記号の定義

- $c$  : 定時時間 (ex. 月間労働時間/人)  
 $r_i$  : 職場  $i$  の能率 ( $0 \leq r_i \leq 1$ )  
 $x_i$  : 職場  $i$  の配分人員 (ex. 人/月) で非負の整数  
 $\bar{x}_i$  : 職場  $i$  仮配分人員  
 $z_i$  : 職場  $i$  の不足時間 (ex. 月間延労働時間の不足分)  
 $\bar{z}_i$  : 職場  $i$  の仮不足時間  
 $j_i$  : 職場  $i$  の仕事量 (ex. 月間総仕事量)  
 $m_i(z_i)$  : 不足時間が  $z_i$  のときの職場  $i$  の満足度  
 $s$  : 在籍人員  
 $k$  : 超過割当人員  
 $n$  : 職場数  
 $d_i$  : 職場  $i$  の仮割当人員  
 $q_i$  : 職場  $i$  の減員可能上限  
 $a_i$  : 職場  $i$  の不足時間下限  
 $b_i$  : 職場  $i$  の不足時間上限  
 $e_i$  :  $b_i - a_i$

## 不足時間満足度

不足時間満足度を図 2.1 及び (2.1) 式で表す。不足時間が多いと人件費や電気代など管理費がかかるうえ、就業条件が違う社員がおり、必ずしも不足時間を補うのが簡単ではないことを表した。不足時間を満足度として扱うのは、人件費、納期、品質、時間外労働の法的規制など複合した条件が含まれるからである。これらの満足度は職

場の意思決定者が経験的に決めることを想定している。

$$m_i(z_i) = \begin{cases} 1 & (z_i \leq a_i) \\ 1 - \frac{z_i - a_i}{e_i} & (a_i < z_i \leq b_i) \\ 0 & (z_i > b_i) \end{cases} \quad (2.1)$$

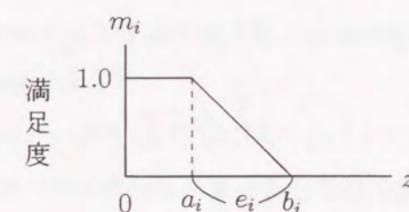


図 2.1 不足時間  $z_i$  のメンバシップ関数

## 目的関数

製造業の現場では、工場の在籍人員は定められた一定期間の範囲で、長期的な受注見通しを用いて決める。それに合わせ、工場内の職場への人員配分は、毎月の生産計画に応じて変えることが必要である。このモデルでは、職場の不足時間満足度のうち、最も小さい値を最大にする解法を求める。すなわち目的関数を総残業時間ではなく、職場毎の不足時間の満足度の最小値を最大化するマックス・ミニモデルとして、(2.2) 式のように表す。これは、職場間の格差の不満を最小にするためである。前提としては、各職場の仕事の性質が異なるため、職場毎に能率に違いがあるとする。

$$\min_i \{m_i(z_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\} \rightarrow \text{最大} \quad (2.2)$$

## 職場毎の仕事量

職場に割り当てられる仕事量は、製品、部品の種類と数量で決まり、仕事量の不足分は増員、時間外労働でまかなうとする。これを(2.3)式で表す。

$$r_i \cdot c \cdot x_i + z_i = j_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

## 在籍人員

(2.4)式は、総人員数は職場の配分人員の和であることを示す。

$$\sum_{i=1}^n x_i = s \quad (2.4)$$

上記の条件で、職場の不足時間満足度の最小値を最大化するモデル(2.1)を考える。これは職場間の仕事の違いを職場毎の不足時間満足度で定式化し、職場間の仕事量の最大、最小の差を小さく調整することを考慮したモデルである。

## 2.3 不足時間を考慮した人員配分計画の解法

不足時間を考慮した人員配分計画の解法は、意味ある解が存在すかどうかを判定し、満足度の初期値を与え、解のマックス・ミニを判定し、最適解を求めるという手順を踏む。以下に解法を述べる。

[手順1] 在籍人員の過不足を検討する。

(2.3),(2.4)式から配分人員の最大値と最小値を求めると以下の(2.5),(2.6)式の各々左辺となる。

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{j_i}{r_i \cdot c} \right\rfloor \geq s \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{j_i - b_i}{r_i \cdot c} \right\rceil \leq s \quad (2.6)$$

ここで、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は、 $\cdot$ を超えない最大の整数を示す。 $\lceil \cdot \rceil$ は、 $\cdot$ より小さくない最小の整数を示す。(2.5)式は全ての職場の最大配分人員は、在籍人員を上回っていることを示す。

(2.6)式は全ての職場の最小配分人員は、在籍人員を下回っていることを示す。ただし(2.5)式が成立しない場合は、すなわち $x_i = \left\lfloor \frac{j_i}{r_i \cdot c} \right\rfloor$ で、不足時間が $a_i$ 以下とすれば、在籍人員に余剰がでる、また(2.6)式が成立しない場合は、最小の不足時間満足度がゼロとなり、在籍人員が不足している。したがって、これらの場合は在籍人員を見直す必要があるため、問題の設定以前であり、手順は終了する。以下では(2.5),(2.6)式が成立した場合のみ考え、手順2へ進む。ここで(2.5),(2.6)式の計算手間[21]はそれぞれ $O(n)$ になる。

[手順2] 配分人員の初期値を与える。

不足時間の満足度の最小値を(2.7)式のように $\bar{t}$ とする。最小値を最大にするのであるから、まず各職場の満足度の仮の最小値を共通の値 $\bar{t}$ とする。(2.1)式を $\bar{t}$ で置き換えると(2.8)式を得る。

$$\min m_i(z_i) = \bar{t} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.7)$$

$$\bar{z}_i = b_i - \bar{t} \cdot e_i \quad (a_i < z_i \leq b_i) \quad (2.8)$$

(2.8)式と(2.3)式から仮の配分人員 $\bar{x}_i$ を求める。

$$\bar{x}_i = \frac{j_i - b_i + \bar{t} \cdot e_i}{r_i \cdot c} \quad (2.9)$$

ここでは、 $\bar{x}_i$ は必ずしも整数にはならない。手順1で解が存在することから、(2.3),(2.8)式より(2.10)式が成立する $\bar{t}$ を計算する。

$$\sum_{i=1}^n \frac{j_i - b_i + \bar{t} \cdot e_i}{r_i \cdot c} = s \quad (2.10)$$

(2.10)式を $\bar{t}$ について解くと、(2.11)式となり、これを初期値とする。

$$\bar{t} = \left\{ s - \sum_{i=1}^n \frac{j_i - b_i}{r_i \cdot c} \right\} / \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{r_i \cdot c} \quad (2.11)$$

$\bar{t}$ を、(2.8),(2.9)式に代入し、 $\bar{x}_i$ ,  $\bar{z}_i$ を求める。このとき、 $\bar{x}_i$ がすべて整数であれば、 $\bar{x}_i$ がマックス・ミニ解となっている。これは、最小満足度の初期値による仮配分人員が、在籍人員に一致した場合である。したがって、最小満足度がすべての職場で等しいので、ここでアルゴリズムが収束する。しかし、このケースはまれであり、一般

的には $\bar{x}_i$ が整数でない $\bar{x}_i$ が存在するので手順3に進む. ここで(2.11)式の計算手間は,  
 $O(n)$ になる.

[手順3] 超過人員を求める.

(2.9)式を用いて, (2.12)式で職場*i*毎の仮割当人員 $d_i$ を設定する.

$$[\bar{x}_i] = d_i \quad (2.12)$$

手順3では超過割当人員を計算する. (2.13)式に, 全職場での超過割当の人員を表す.

$$\sum_{i=1}^n d_i - s = k \quad (2.13)$$

(2.12), (2.13)式の計算手間は, それぞれ,  $O(n)$ になる.

少なくともひとつの職場*i*について $\bar{x}_i < [\bar{x}_i] < \bar{x}_i + 1$ となるので

$$s = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i < \sum_{i=1}^n [\bar{x}_i] < \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + n$$

すなわち $0 < \sum_{i=1}^n [\bar{x}_i] - s \leq n$ である.

[手順4] 仮割当から各職場の減員可能人員の上限 $q_i$ を求める.

$$q_i = \min \left( k, \left\lceil \frac{b_i}{c \cdot r_i} \right\rceil \right) \quad (a_i < z_i \leq b_i) \quad (2.14)$$

$q_i$ は右辺第1項の各職場の超過割当人員もしくは, 第2項が意味する各職場の最大不足人員のどちらかの人員しか, 削減できないことを示す. (2.14)式の計算手間は, 職場数が $n$ なので,  $O(n)$ になる.

[手順5] 各職場*i*毎に $q_i$ まで1人ずつ減らしたときの人員についての満足度 $t_i(x_i)$ を計算する.

職場*i*の配分人員が $x_i$ のとき, (2.1), (2.3)式から $z_i$ ,  $m_i(z_i)$ を求め, 特に $m_i(z_i)$ で $x_i$ についての各職場の不足時間満足度 $t_i(x_i)$ とすると, (2.15)式になる.

$$t_i(x_i) = \frac{c \cdot r_i \cdot x_i + b_i - j_i}{e_i} \quad (2.15)$$

初期値として $x_i$ に $d_i$ を代入する. 次に $t_i(d_i - 1), \dots, t_i(d_i - q_i)$ を求める. 職場数が $n$ で最大 $n$ 個満足度を計算するので,  $O(n^2)$ になる.

[手順6] 各職場で削減できる人員に対応する $q_i$ 番目までの満足度を選択する.

手順5で求めた $t_i(d_i - 1) \sim t_i(d_i - q_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )について満足度を降順にソートし, 上から $k$ 番目までを選択する.

[手順7] 配分人員を求め不足時間を算出する.

手順6で求めた $t_i(d_i - 1) \sim t_i(d_i - q_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )を全職場について降順にソートした結果を,  $t_{i_1}(d_{i_1} - l_{i_1}) \sim t_{i_k}(d_{i_k} - l_{i_k})$ とする.

このとき $i \neq i_1, \dots, i_k$ に対しては

$$x_i^* = d_i \quad (2.16)$$

とし, そうでない*i*に対しては

$$x_i^* = \min \{ d_{i_j} - l_{i_j} \mid i_j = i, j = 1, 2, \dots, k \} \quad (2.17)$$

とする. ここで, 満足度の高い順に解が並ぶので, マックス・ミニ解である各職場の配分人員が求まる. また, 計算手間は,  $O(n^2)$ 回のもをソートするので $O(n^2 \log n)$ になる[1].

(2.3)式を $z_i$ について解くと(2.18)式になり,

$$z_i = j_i - c \cdot r_i \cdot x_i^* \quad (2.18)$$

不足時間が算出できる.

以上の手順でマックス・ミニ解が求まる. ここで計算手間は,  $k = O(n)$ なので,  $x_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )は,  $O(n)$ で決まり全体として, 手順7は $O(n^2 \log n)$ になる.

手順の解析についての妥当性と計算手間は以下の定理で示される.

定理 2.1 この手順は、 $O(n^2 \log n)$  の計算手間で最適配分人員を求める。

証明

妥当性は、上記の手続きより明らかである。計算手間は、各手順で示したもののトータルなので一番オーダの大きい  $O(n^2 \log n)$  が全体の計算手間である。Q.E.D.

2.4 数値例

上記の手順を示す例題を与える。表2.1のような1ヶ月あたりの仕事量をもつ3職場について、不足時間満足度の最小値を最大にする配分人員を求める問題を考える。不足時間満足度は、図2.2から2.4及び(2.19)から(2.21)式とする。

表2.1 各職場の仕事量・能率一覧表

条件 \ 職場	1	2	3
仕事量 ( $j_i$ )	2000	4000	6000
能率 ( $r_i$ )	0.8	0.9	1.0

在籍人員  $s = 75$ 人 定時操業時間  $c = 160$ 時間/月・人

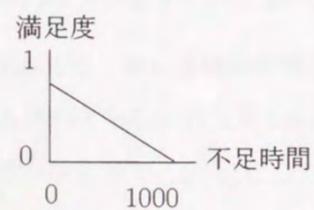


図2.2 職場1の不足時間満足度

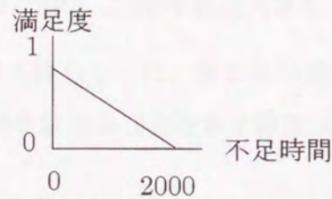


図2.3 職場2の不足時間満足度

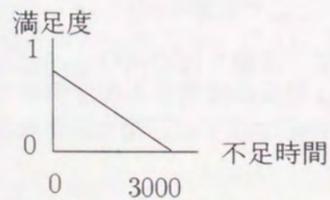


図2.4 職場3の不足時間満足度

$$m_1(z_1) = \begin{cases} 1 & (z_1 = 0) \\ 1 - \frac{z_1}{1000} & (0 < z_1 \leq 1000) \\ 0 & (z_1 > 1000) \end{cases} \quad (2.19)$$

$$m_2(z_2) = \begin{cases} 1 & (z_2 = 0) \\ 1 - \frac{z_2}{2000} & (0 < z_2 \leq 2000) \\ 0 & (z_2 > 2000) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$m_3(z_3) = \begin{cases} 1 & (z_3 = 0) \\ 1 - \frac{z_3}{3000} & (0 < z_3 \leq 3000) \\ 0 & (z_3 > 3000) \end{cases} \quad (2.21)$$

目的関数

$$\min_i \{m_i(z_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\} \rightarrow \text{最大} \quad (2.22)$$

[手順1] 意味ある解が存在するかどうか判定する。

(2.5), (2.6) 式は

$$\left\lfloor \frac{2000}{0.8 \times 160} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4000}{0.9 \times 160} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6000}{1.0 \times 160} \right\rfloor = 79 \geq 75$$

$$\left\lceil \frac{2000 - 1000}{0.8 \times 160} \right\rceil + \left\lceil \frac{4000 - 2000}{0.9 \times 160} \right\rceil + \left\lceil \frac{6000 - 3000}{1.0 \times 160} \right\rceil = 41 \leq 75$$

となる。すなわち(2.5), (2.6)式が成り立つことにより意味ある解が存在することが分かる。

[手順2] 配分人員の初期値を与える。

(2.11)式から、仮の満足度  $\bar{r}$  は

$$\bar{t} = \left[ 75 - \left( \frac{2000 - 1000}{0.8 \times 160} + \frac{4000 - 2000}{0.9 \times 160} + \frac{6000 - 3000}{1.0 \times 160} \right) \right] / \left( \frac{1000}{0.8 \times 160} + \frac{2000}{0.9 \times 160} + \frac{3000}{1.0 \times 160} \right) = 0.854$$

となる.

(2.9)式で職場毎の仮の配分人員を求める.

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (2000 - 1000 + 0.854 \times 1000) / (0.8 \times 160) \\ &= 14.48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= (4000 - 2000 + 0.854 \times 2000) / (0.9 \times 160) \\ &= 25.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= (6000 - 3000 + 0.854 \times 3000) / (1.0 \times 160) \\ &= 34.76 \end{aligned}$$

いずれも整数でないので手順3へ行く.

[手順3] 仮割当人員を求める.

(2.12)式から,

$$d_1 = [14.48] = 15$$

$$d_2 = [25.75] = 26$$

$$d_3 = [34.76] = 35$$

$$\sum_{i=1}^n d_i = 76$$

(2.13)式から  $k = 76 - 75 = 1$  となる.

[手順4] 仮割当から各職場の減らせる人員の上限  $q_i$  を求める.

(2.14)式から

$$q_1 = \min \left( 1, \left[ \frac{1000}{0.8 \times 160} \right] \right) = 1$$

$$q_2 = \min \left( 1, \left[ \frac{2000}{0.9 \times 160} \right] \right) = 1$$

$$q_3 = \min \left( 1, \left[ \frac{3000}{1.0 \times 160} \right] \right) = 1$$

[手順5] 各職場毎に  $q_i$  まで減らせる人員について満足度を求める.

$$t_1(14) = \frac{0.8 \times 160 \times 14 + 1000 - 2000}{1000}$$

$$= 0.792$$

$$t_2(25) = \frac{0.9 \times 160 \times 25 + 2000 - 4000}{2000}$$

$$= 0.8$$

$$t_3(34) = \frac{1.0 \times 160 \times 34 + 3000 - 6000}{3000}$$

$$= 0.813$$

[手順6] 各職場の満足度を降順にソートし, 上から  $k = 1$  番目までを選択する.

$$t_3(34) > t_2(25) > t_1(14)$$

したがって  $t_3(34)$  が最大であるから, 3番目の職場から一人を減らして

$$x_1 = 15, x_2 = 26, x_3 = 34$$

が最適である.

[手順7] 配分人員から不足時間を求める. (2.18)式から

$$z_1 = 2000 - 160 \times 0.8 \times 15 = 80$$

$$z_2 = 4000 - 160 \times 0.9 \times 26 = 256$$

$$z_3 = 6000 - 160 \times 1.0 \times 34 = 560$$

以上のように, 配分人員と不足時間を求め, これらがマックス・ミニ解となる.

次に(2.1)式に  $z_i$  を代入し満足度を求め, 配分人員, 不足時間, 不足時間満足度を整理すると表2.2になる.

$$m_1(80) = 0.920, m_2(256) = 0.872, m_3(560) = 0.813$$

よって、満足度の最小は  $m_3(560) = 0.813$  である。

表2.2 マックス・ミニ解

解\職場	1	2	3
配分人員	15人	26人	34人
不足時間	80時間/月	256時間/月	560時間/月
満足度	0.920	0.872	0.813

## 2.5 人員構成比率をも考慮した人員配分計画のモデル

2.2~2.4では不足時間だけを考慮した人員配分モデルを扱った。2.5~2.7では人員構成比率をも考慮したモデルを扱う [22],[32],[33],[35],[36]。モデルの妥当性については、以下のような根拠に基づいている。

製造業の現場では、工場の総人員を一定期間の範囲で、長期的な受注見通しで決め、工場内の職場への人員配分は、毎月の生産計画に応じて変えている [51]。その際に考慮することは、職場毎の特性に合わせて残業時間を変えることである。また、臨時雇用者の多い職場では、正規雇用者の多い職場と比べ、就業時間が長くできず不足時間の補填に制約を受けるケースがある。人員配分上は正規雇用者と臨時雇用者の人員構成比率を考慮する。すなわち本章では前出の人員配分モデルに人員構成比率を付加したモデルを構築する。また、目的関数を不足時間だけでなく、構成比率の満足度の最小値を最大化するマックス・ミニモデルにした。これは、職場間の格差の不満を最小にするためである。ここで、各目的関数を満足度に置き換えたのは、不足時間、構成比率が職場の意思決定者の経験に依存し、品質、納期、費用などのパラメータを複合した判断基準と考えたからである。なお、職場能率を2.2~2.4のモデルと違い省いた。前出のモデルの研究から分かったが、職場能率は本来仕事量全体にかかる係数である。したがって、仕事量を調整するパラメータとしての意味が少なく、本モデルとしては本質的な差がないので、職場能率を省きモデルをシンプルにする。

### 記号の定義

- $c_x$  : 正規雇用者定時時間,  $c_y$  : 臨時雇用者定時時間
- $x_i$  : 職場*i*の正規雇用者の配分人員 (非負整数)
- $y_i$  : 職場*i*の臨時雇用者の配分人員 (非負整数)
- $j_i$  : 職場*i*の仕事量
- $s_x$  : 正規雇用者の在籍人員
- $s_y$  : 臨時雇用者の在籍人員 (ただし  $s = s_x + s_y$ )
- $s$  : 総在籍人員,  $n$  : 職場数
- $z_i$  : 職場*i*の不足時間 (残業時間) ( $z_i \geq 0$ )
- $a_i$  : 職場*i*の不足時間下限
- $b_i$  : 職場*i*の不足時間上限
- $e_i$  :  $b_i - a_i$
- $t_i$  : 不足時間が  $z_i$  のときの職場*i*の不足時間満足度
- $k_i$  : 職場*i*の正規雇用者の構成比率下限
- $u_i$  : 職場*i*の構成比率
- $v_i$  : 構成比率が  $u_i$  のときの職場*i*正規雇用者の構成比率満足度

### 各職場の仕事量と在籍人員

$$c_x x_i + c_y y_i + z_i = j_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.23)$$

(2.23)式では  $c_x$ ,  $x_i$ が職場*i*での正規雇用者による仕事量,  $c_y$ ,  $y_i$ が職場*i*での臨時雇用者による仕事量を示し、不足が生じたときは不足時間 (残業時間)  $z_i$ を加算して、各職場の仕事量をこなすことを示す。

$$\sum_{i=1}^n x_i = s_x \quad \sum_{i=1}^n y_i = s_y \quad (2.24)$$

$$c_x \geq c_y \geq 0 \quad (2.25)$$

(2.24), (2.25)式で、それぞれ正規雇用者、臨時雇用者の在籍人員が決まっていることを示す。

各職場の不足時間満足度

不足時間の満足度は、

$$t_i = m_i^1(z_i) = \begin{cases} 1 & (z_i \leq a_i) \\ 1 - \frac{z_i - a_i}{e_i} & (a_i < z_i \leq b_i) \\ 0 & (z_i > b_i) \end{cases} \quad (2.26)$$

(2.26)式とする。\$b\_i\$以下で各職場の不足時間が小さくなるほど、不足時間満足度 \$t\_i\$ が大きくなることを表す。図2.5は(2.26)式を図示したものである。

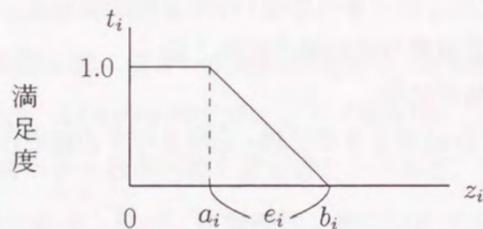


図2.5 不足時間 \$z\_i\$ のメンバシップ関数

各職場の人員構成比率

正規雇用者、臨時雇用者の人員構成比率は

$$u_i = \frac{x_i}{x_i + y_i} \quad (2.27)$$

となり、その満足度を

$$v_i = m_i^2(u_i) = \begin{cases} 1 & (u_i = 1.0) \\ \frac{1}{1 - k_i}(u_i - k_i) & (k_i < u_i < 1.0) \\ 0 & (u_i \leq k_i) \end{cases} \quad (2.28)$$

とする。これらの式は正規雇用者が多いほど、品質が安定し生産性も高いと、現場の意思決定者は判断することと仮定している。ただし、\$0 \le k\_i < 1\$とする。(2.28)式を図2.6ように図示される。

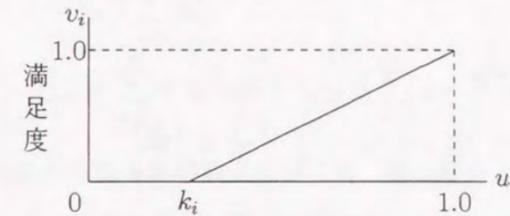


図2.6 職場 \$i\$ の構成比率 \$u\_i\$ のメンバシップ関数

目的関数

$$\min_i \{ \min(t_i, v_i) \mid i = 1, 2, \dots, n \} \rightarrow \text{最大} \quad (2.29)$$

上記の条件(2.23)~(2.28)式の下で、職場の残業時間、構成比率に対する満足度の最小値(2.29)式を最大化する。ここで、目的関数を総不足時間だけでなく、構成比率の満足度の最小値をも最大化するマックス・ミニモデルとする。これは、職場間の格差の不満を最小にするのと、不足時間、構成比率が職場意思決定者の経験に依存し、品質、納期、費用などのパラメータを複合した目的関数を想定していることによる。

2.6 人員構成比率をも考慮した人員配分計画の解法

人員構成比率をも考慮した人員配分問題の解法は、まず意味のある実行可能解の存在を判定し、満足度の初期値を与え、解のマックス・ミニを判定し、最適解を求めるという考え方で手順を構成する。

[手順1] 不足時間に関する意味ある解の存在可能性を条件判定する。

構成比率、不足時間満足度の上下限值から、まず構成比率満足度最大=1.0、不足時間満足度最大=1.0のとき、正規雇用者の最大配分人員  $x_i^h$  を計算する。このとき

$$c_x x_i^h = j_i \quad (2.30)$$

より

$$x_i^h = \left[ \frac{j_i}{c_x} \right] \quad (2.31)$$

となる。(2.31)式から、正規雇用者の最大配分人員  $x_i^h$  が求まる。この場合は正規雇用者だけで、仕事量をこなすと仮定した正規雇用者の配分人員なので、臨時雇用者の配分人員はゼロになる。

臨時雇用者の最大配分人員を  $y_i^h$  としたとき、正規雇用者数の最小配分人員  $x_i^l$  を求めると、(2.27)式に  $u_i = 0$  を代入すると、(2.32)式になる。

$$x_i^l = \left[ \frac{k_i}{1 - k_i} y_i^h \right] \quad (2.32)$$

$$c_x x_i^l + c_y y_i^h + b_i = j_i \quad (2.33)$$

から

$$\left[ \left( c_x \frac{k_i}{1 - k_i} + c_y \right) y_i^h \right] + b_i = j_i \quad (2.34)$$

となり

$$y_i^h = \left[ \frac{j_i - b_i}{c_x \frac{k_i}{1 - k_i} + c_y} \right] \quad (2.35)$$

として  $y_i^h$  が求まる。

意味ある解の存在条件を示す。

$$\sum_{i=1}^n x_i^l \leq s_x \leq \sum_{i=1}^n x_i^h \quad (2.36)$$

$$0 < s_y \leq \sum_{i=1}^n y_i^h \quad (2.37)$$

$$\sum_{i=1}^n j_i - \sum_{i=1}^n b_i \leq c_x s_x + c_y s_y \leq \sum_{i=1}^n j_i - \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.38)$$

(2.36)式は、正規雇用者の在籍人員が最大配分人員、最小配分人員の間にあることを示す。同様に臨時雇用者の在籍人員が、最大・最小配分人員内にあることを(2.37)式は示す。(2.38)式は、各職場の仕事量の合計から最大・最小の不足時間を減じた時間内に、各定時時間に各在籍人員を乗じた値の合計があり、これが実行可能範囲であることを示す。ここで、各式を検証する計算手間は、職場数分であり  $O(n)$  になる。

[手順2] 正規雇用者の未配分人員、臨時雇用者の超過割当人員の存在を判定する。

正規雇用者の未配分人員  $d_x$ 、臨時雇用者の超過割当人員  $d_y$  を求める。

$$s_x - \sum_{i=1}^n x_i^l = d_x \geq 0 \quad (2.39)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^h - s_y = d_y \geq 0 \quad (2.40)$$

(2.39)式は正規雇用者の在籍人員は、正規雇用者の最小配分を上回ることを示す。(2.40)式は、臨時雇用者の最大配分人員は在籍人員を上回ることを示す。なお手順1、手順2において(2.36)~(2.40)式が成立することにより、仕事量について意味ある解の存在を確認する。

[手順3] 構成比率満足度に関する意味ある解の存在を判定する。

ここで、構成比率、不足時間満足度の定義から、正規雇用者の配分を増やし、臨時雇用者の配分を減らしていかなければならない。したがって、正規雇用者の配分人員は(2.41)式が成立することが条件となる。

$$d_x - d_y \geq 0 \quad (2.41)$$

ここで各職場の正規雇用者配分人員の最大値, 最小値の差を,

$$f_i = x_i^h - x_i^l \quad (2.42)$$

とする.

$f_i = 0$ の職場は, 不足時間, 構成比率の制約がきつく, 雇用者の増減ができないことを示す. したがって,  $f_i$ の値が0の職場は, 配分人員が求まったとして, 以後の考察の対象から外すことになる. さらに意味ある解が存在するには(2.41)式から, すべての職場で, (2.43)式もしくは, (2.44)式が成り立つことが必要である.

$$f_i \geq y_i^h \quad (2.43)$$

$$f_i \geq d_x \quad (2.44)$$

(2.43)式は, 各職場の正規雇用者の配分を増員分が, 臨時雇用者のそれを減員分だけ上回ることを示す. これは不足時間満足度, 構成比率満足度を共に高めることを意味する. (2.44)式は, 職場*i*の自由度が正規雇用者の未配分人員 $d_x$ より多いことを表す.

[手順4] 解を求めるための処理を示す.

構成比率, 不足時間の満足度の下限を初期値として解を求めるので, 臨時雇用者だけを増員することはない. 構成比率が下がるからである. したがって, 正規雇用者のみ増員するか, 正規雇用者を増やし臨時雇用者を減らすことも, あわせて考えてよい. 以下, 処理を述べる.

処理1 正規雇用者のみ1人増やす.

構成比率, 不足時間満足度がともに向上するので, 有効である.

処理2 正規雇用者を1人増やし, 臨時雇用者を1人減らす.

これは, 構成比率満足度が, 処理1に比べ大きくなる. さらに, (2.25)式から不足時間満足度は正規雇用者と臨時雇用者の差の分のみ増えることになる.

処理2は, (2.25), (2.26), (2.28)式から不足時間満足度を下げずに, 構成比率満足度を上げるので, 目的関数に対して, 妥当性のある処理である. また, 処理2で, 臨時雇用者を2名以上減員する場合は想定できるが, 不足時間満足度が単調増加しない場合が考えられるので, 1名ずつの増減を処理とした.

[手順5] 正規雇用者, 臨時雇用者の配分人員から各満足度を求める.

正規雇用者の計算過程での配分人員 $\bar{x}_i$ , 臨時雇用者の計算過程での配分人員を $\bar{y}_i$ とすると, (2.23)式に $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ を代入し(2.45)式を求めることができる.  $\bar{z}_i$ は計算過程での不足時間を示す.

$$\bar{z}_i = j_i - c_x \bar{x}_i - c_y \bar{y}_i \quad (2.45)$$

$\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ を(2.26), (2.27), (2.28)式に代入し, 計算過程での各満足度 $\bar{t}_i, \bar{v}_i$ を求める. 初期値としては $x_i^l, y_i^h$ を代入する. ここでの計算手間は $O(n)$ になる.

[手順6] 正規雇用者, 臨時雇用者それぞれの増減できる人数と, その差を求める.

(2.46), (2.47), (2.48)式から計算過程での正規雇用者, 臨時雇用者の増減できる人数及びその差 $\bar{d}_x, \bar{d}_y, \bar{g}$ を求める. 初期値は,  $d_x, d_y$ とする.

$$\bar{d}_x = s_x - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \quad (2.46)$$

$$\bar{d}_y = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i - s_y \quad (2.47)$$

$$\bar{g} = \bar{d}_x - \bar{d}_y \quad (2.48)$$

[手順7] 満足度の最小値を選ぶ。

((2.49)式で、すべての職場の両方の満足度の最小値を求める。同値のとき満足度が複数ある場合は、それらの職場毎のもう一方の満足度が小さい職場  $k$  を選ぶ。

$$w_k = \min_i \{ \min(\bar{t}_i, \bar{v}_i) \mid i = 1, 2, \dots, n \} \quad (2.49)$$

[手順8] 配分人員の増減を行う。

(1)  $x_k^h > \bar{x}_k, \bar{y}_k > 0, w_k = \bar{v}_k, \bar{d}_y > 0, \bar{g} \geq 0$  ならば処理2を選ぶ。

正規、臨時雇用者配分人員の増減が可能なので、構成比率満足度を大きくするために、正規雇用者を増やし臨時雇用者社員の配分を減らす。

(2)  $x_k^h > \bar{x}_k, w_k = \bar{v}_k, \bar{g} > 0$  かつ  $\bar{y}_k = 0$  または  $\bar{d}_y = 0$  ならば処理1を選ぶ。

正規雇用者のみ配分人員を変えられるので、構成比率満足度を大きくするために、正規雇用者を増やす。

(3)  $x_k^h > \bar{x}_k, \bar{g} > 0, w_k = \bar{t}_k$  ならば処理1を選ぶ。

不足時間満足度を増やし、構成比率満足度を低下させないために正規雇用者を増やす。

(4)  $x_k^h > \bar{x}_k, \bar{y}_k > 0, \bar{d}_y > 0, \bar{g} = 0, w_k = \bar{t}_k$  ならば処理2を選ぶ。

正規雇用者、臨時雇用者とも増減可能で、残業満足度を増やすために正規雇用者を増やし、臨時雇用者を減らす。(1)から(4)は、配分人員の余裕を判定し、かつ不足時間、構成比率の満足度が大きく向上する処理を選択することを意味する。

[手順9] 処理にしたがって、正規雇用者、臨時雇用者の配分を増減する。

処理1  $\bar{x}_k + 1 \rightarrow \bar{x}_k \quad (2.50)$

ここで  $\rightarrow$  は代入を意味する

処理2  $\bar{x}_k + 1 \rightarrow \bar{x}_k \quad (2.50)$

$\bar{y}_k - 1 \rightarrow \bar{y}_k \quad (2.51)$

[手順10] 各満足度を計算し、終了判定を行う。

(2.45), (2.26), (2.27), (2.28)式から、各満足度を計算する。さらに、(2.46), (2.47)式から  $\bar{d}_x = 0$  かつ  $\bar{d}_y = 0$  になった時点の各職場の配分人員及び、満足度が最適解である。それ以外は手順5以下を繰り返す。

定理 2.2 上記の手順は、 $O(d_x \cdot n)$  の計算量で配分人員を求める。

証明

妥当性は、上記の議論より明らかである。計算量は各手順で示したもののトータルであり、増員できる正規雇用者数  $d_x$  に依存するので一番オーダの大きい  $O(d_x \cdot n)$  が全体の計算手間である。Q.E.D.

2.7 数値例

表2.3のような1ヶ月あたりの仕事量を持つ3職場を想定した例について、上記の手順に従う解を求める。以下、図2.7~2.12及び(2.52)~(2.57)式の条件下で、不足時間満足度、構成比率満足度の最小値を最大化する配分人員を求める。

表2.3 各職場の仕事量

条件 \ 職場	1	2	3
仕事量 ( $j_i$ )	3000時間	6000時間	4000時間

正規雇用者定時操業時間  $c_x = 160$  時間  
 臨時雇用者定時操業時間  $c_y = 120$  時間  
 正規雇用者在籍人員  $s_x = 60$  人  
 臨時雇用者在籍人員  $s_y = 25$  人

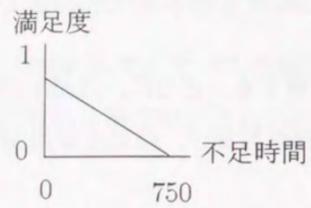


図2.7 職場1の不足時間満足度

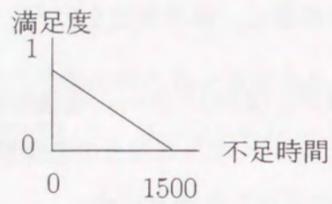


図2.8 職場2の不足時間満足度

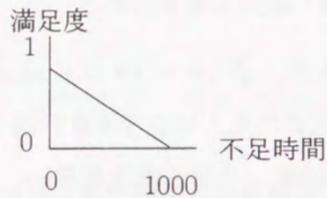


図2.9 職場3の不足時間満足度

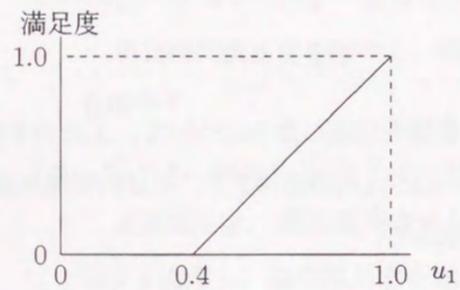


図2.10 職場1の構成比率満足度

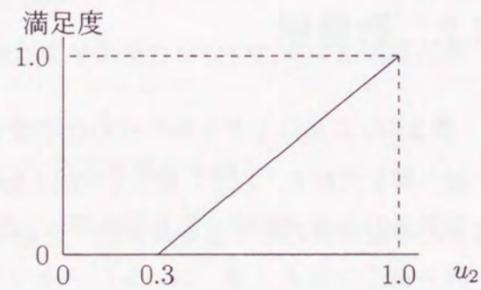


図2.11 職場2の構成比率満足度

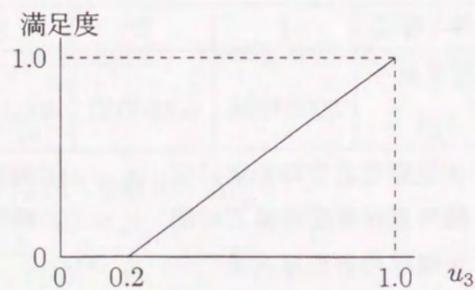


図2.12 職場3の構成比率満足度

$$t_1 = m_1^1(z_1) = \begin{cases} 1 & (z_1 = 0) \\ 1 - \frac{z_1}{750} & (0 < z_1 \leq 750) \\ 0 & (z_1 > 750) \end{cases} \quad (2.52)$$

$$t_2 = m_2^1(z_2) = \begin{cases} 1 & (z_2 = 0) \\ 1 - \frac{z_2}{1500} & (0 < z_2 \leq 1500) \\ 0 & (z_2 > 1500) \end{cases} \quad (2.53)$$

$$t_3 = m_3^1(z_3) = \begin{cases} 1 & (z_3 = 0) \\ 1 - \frac{z_3}{1000} & (0 < z_3 \leq 1000) \\ 0 & (z_3 > 1000) \end{cases} \quad (2.54)$$

$$v_1 = m_1^2(u_1) = \begin{cases} 1 & (u_1 > 1.0) \\ \frac{1}{1-0.4}(u_1 - 0.4) & (0.4 \leq u_1 \leq 1.0) \\ 0 & (u_1 < 0.4) \end{cases} \quad (2.55)$$

$$v_2 = m_2^2(u_2) = \begin{cases} 1 & (u_2 > 1.0) \\ \frac{1}{1-0.3}(u_2 - 0.3) & (0.3 \leq u_2 \leq 1.0) \\ 0 & (u_2 < 0.3) \end{cases} \quad (2.56)$$

$$v_3 = m_3^2(u_3) = \begin{cases} 1 & (u_3 > 1.0) \\ \frac{1}{1-0.2}(u_3 - 0.2) & (0.2 \leq u_3 \leq 1.0) \\ 0 & (u_3 < 0.2) \end{cases} \quad (2.57)$$

以上が制約条件であり, 以下の目的関数を最大化する問題を扱う.

目的関数

$$\min_i \{ \min(t_i, v_i) \} \rightarrow \max \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

各満足度のどちらか最小になる満足度を最大にする解を求める.

[手順1] 各満足度の上下限值をもとに解の存在を条件判定する.

(2.31), (2.32), (2.35) 式から職場毎の上下限值を求める.

#### 職場1

$$\begin{aligned} x_1^h &= \left\lfloor \frac{3000}{160} \right\rfloor = 18 \\ y_1^h &= \left\lfloor \frac{3000 - 750}{160 \frac{0.4}{0.6} + 120} \right\rfloor = 10 \\ x_1^l &= \left\lceil \frac{0.4}{0.6} 10 \right\rceil = 7 \end{aligned}$$

#### 職場2

$$\begin{aligned} x_2^h &= \left\lfloor \frac{6000}{160} \right\rfloor = 37 \\ y_2^h &= \left\lfloor \frac{6000 - 1500}{160 \frac{0.3}{0.7} + 120} \right\rfloor = 24 \\ x_2^l &= \left\lceil \frac{0.3}{0.7} 24 \right\rceil = 11 \end{aligned}$$

#### 職場3

$$\begin{aligned} x_3^h &= \left\lfloor \frac{4000}{160} \right\rfloor = 25 \\ y_3^h &= \left\lfloor \frac{4000 - 1000}{160 \frac{0.2}{0.8} + 120} \right\rfloor = 19 \\ x_3^l &= \left\lceil \frac{0.2}{0.8} 19 \right\rceil = 5 \end{aligned}$$

次に, 解の存在を (2.36), (2.37), (2.38) 式で判定する.

$$\begin{aligned} \text{正規雇用者} & 23 \leq 60 \leq 80 \\ \text{臨時雇用者} & 0 < 25 \leq 53 \\ \text{不足時間の上下限} & 9750 \leq 12600 \leq 13000 \end{aligned}$$

以上のように (2.36), (2.37), (2.38) 式が成り立つので, 不足時間満足度については解が存在する.

[手順2] 正規雇用者の未配分人員, 臨時雇用者の不足人員を求める.

(2.38), (2.39) 式から, 正規雇用者の未配分人員, 臨時雇用者の不足人員を求める.

$$d_x = 60 - 23 = 37 \geq 0$$

$$d_y = 53 - 25 = 28 \geq 0$$

[手順3] 構成比率に関する解の存在を判定する.

ここで, (2.40) 式で解の存在を判定する.

$$d_x - d_y = 37 - 28 = 9 \geq 0$$

$$f_1 = 18 - 7 = 11, f_2 = 37 - 11 = 26, f_3 = 25 - 5 = 20$$

さらに, 各職場の  $f_i$  の値が 11, 26, 20 なので, (2.41) 式が成り立つことから, 構成比率に関する解が存在することが分かる.

[手順4] 解を求めるための処理を示す.

処理1 正規雇用者のみ 1 人増やす.

処理2 正規雇用者を 1 人増やし, 臨時雇用者を 1 人減らす.

[手順5] 正規雇用者, 臨時雇用者の配分人員から各満足度を求める.

手順1 で求めた初期値をもとに不足時間満足度を求める. (以下, 小数点以下 3 桁 4 捨 5 入)

## 職場 1

$$\bar{z}_1 = 3000 - 160 \times 7 - 120 \times 10 = 680$$

$$\bar{u}_1 = 7/17 = 0.42$$

$$\bar{t}_1 = 1 - \frac{680}{750} = 0.09$$

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{1-0.4} (0.41 - 0.4) = 0.02$$

## 職場 2

$$\bar{z}_2 = 6000 - 160 \times 11 - 120 \times 24 = 1360$$

$$\bar{u}_2 = 11/35 = 0.31$$

$$\bar{t}_2 = 1 - \frac{1360}{1500} = 0.09$$

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{1-0.3} (0.31 - 0.3) = 0.01$$

## 職場 3

$$\bar{z}_3 = 4000 - 160 \times 5 - 120 \times 19 = 920$$

$$\bar{u}_3 = 5/24 = 0.21$$

$$\bar{t}_3 = 1 - \frac{920}{1000} = 0.08$$

$$\bar{v}_3 = \frac{1}{1-0.2} (0.21 - 0.2) = 0.01$$

[手順6] 正規雇用者, 臨時雇用者それぞれの増減できる人数を求める.

初期値は,  $d_x, d_y$  とする.

$$\bar{d}_x = 37, \bar{d}_y = 28, \bar{g} = \bar{d}_x - \bar{d}_y = 9$$

[手順7] 満足度の最小値を選ぶ.

(2.47) から満足度の最小値を選ぶ.

$$w_1 = \bar{v}_3 = 0.01$$

[手順8] 配分人員の増減を行う.

$x_3^h = 25 \geq 5 = \bar{x}_3, \bar{y}_3 = 19 > 0, w_3 = \bar{v}_3 = 0.01, \bar{d}_y > 0, \bar{g} = 20$  から条件(1)が成り立つ. したがって, 処理2を採用する.

[手順9] 処理にしたがって, 正規雇用者, 臨時雇用者の配分を増減する.

(2.50), (2.51) 式から,

$$\bar{x}_3 + 1 \rightarrow \bar{x}_3 = 6$$

$$\bar{y}_3 - 1 \rightarrow \bar{y}_3 = 18$$

[手順10] 各満足度を計算し, 終了判定を行う.

職場3の各満足度及び,  $\bar{d}_x, \bar{d}_y$  を計算する.

$$\bar{z}_3 = 4000 - 160 \times 6 - 120 \times 18 = 880$$

$$\bar{u}_3 = 6/24 = 0.25$$

$$\bar{t}_3 = 1 - \frac{880}{1000} = 0.12$$

$$\bar{v}_3 = \frac{1}{1-0.2} (0.25 - 0.2) = 0.06$$

$$s_x - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = 60 - 24 = 36 = \bar{d}_x \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{y}_i - s_y = \bar{d}_y = 27 \neq 0$$

したがって手順5に戻り,  $\bar{d}_x = 0, \bar{d}_y = 0$  になるまで繰り返す.

この例題の解は以下のようになる.

表2.4 満足解

職場	正規 雇用者	臨時雇用者	不足 時間	構成 比率	不足時間 満足度	構成比率 満足度
1	14	4	280	0.78	0.63	0.63
2	28	12	80	0.70	0.95	0.57
3	18	9	40	0.67	0.96	0.59

## 2.8 適用例について

本モデルと解法をある企業の50名のサブ組立職場で活用した結果を、図2.13を用いて例示する[33]。サブ組立職場は大きく3組に分かれており、後工程（自工程より下流にある工程）は11本のラインである。このような複雑な物流形態では、人員の配分と日々の差立（生産に関する数量、タイミング等の指示）は大きく変動する。そこで、人員配分システムと差立システムを導入し、次のように運用している。生産計画に対する日々の生産実績から、向こう一週間の人員配分を人員配分システムで計算する。後工程のラインは11本あり、物流経路は1対1に対応していない。そこで、ライン進度に合わせて、納期順に仕事を並べ直し、生産の順序を指示する必要があり差立システムを付加した。ここで、差立システムの機能は、サブ組立職場の仕事を単に後工程の納期順に並べて生産指示をすることである。人員配分システムで仕事量の負荷調整をし、各職場の稼働率を調整している。

これらの機能を両システムで、日々支援している。細かい時間単位の調整は、現場の意思決定者が行っている。従来は人員配分を計算するのに時間がかかり、月1回しか配分計画を立てていなかった。したがって日々の配分は、意思決定者の経験に依存した方法で実施していたが、本モデルと解法を適用し、毎日、配分計画を計算することにより、稼働率を7%向上することが達成できた。

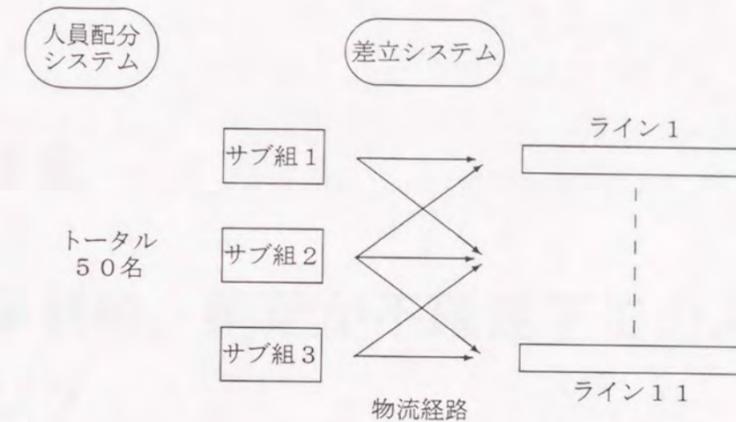


図2.13 システム概念図

## 2.9 おわりに

本章では、構成比率満足度、不足時間満足度の最小値を最大にする、マックス・ミニ問題の解法を示した。本研究の意義は、従来の人員配分の方法では取り扱えなかった制約条件、目的関数が不確定な場合を取り扱うことができたこと、また、その結果として数的に手順をシンプルに構築できたことである。しかしながら、それでもこの不足時間満足度、構成比率満足度を扱ったモデルでは、手順が複雑になった。今後は、この手順をさらに改良し、より計算手間を削減することが必要である。

## 第3章

# 資源制約, 納期が不確定下でのスケジューリング

### 3.1 はじめに

従来のスケジューリング問題では, 製品納入時期である納期や資源は確定としていた. しかしながら実際の場合では, 納期はある程度の幅をもって調整できる上, 資源の過不足についても, 時間外労働や増員で調整が可能である [52],[53]. 本章では, ジョブの開始可能時間, 納期, 資源について許容される幅をもたせることができる複数機械オープンショップスケジューリング問題を考える. この章では, 納期, 資源をファジィ概念化し, メンバシップ関数で定義する. これらの関数が解の最適性を評価する満足度であるとし, これらの満足度の最小値を最大化することを目的とする. しかし, 一般には両方を同時に最大化するスケジュールは存在しないので, 非劣スケジュールを求める.

通常の資源制約付オープンショップスケジューリング問題は, D.Werra[61]によって二部グラフ上での辺彩色問題を解くことによって, 解かれている [3]. 本章ではD.Werraのモデルの納期, 資源をファジィ概念化して, スケジューリングモデルを構築し, 解法を導いた [59]. モデルの現実的な妥当性は, 次のとおりである. 資源制約において, 人的要素を例にすると, 時間外労働や臨時雇用者の増員などで幅をもたせることは可能であるが, 人件費の問題だけでなく作業ミスなどもあり, 費用の把握が難しい場合がある. 納期については, 大まかにしか決まっておらず, 早くはじめることも, 延ばすことも可能である. こ

れらを, 現場の意思決定者が統合して各満足度に置き換え, スケジュール作成の判断基準とした.

第3.2節ではもともになる D.Werra の問題について紹介し, 3.3 で我々の問題の定式化について述べ, 非劣スケジュールを定義したのち, 3.4 で解法について, 3.5 から 3.8 で, 納期, 先行関係が不確定な二機械問題について, モデルと解法を述べ, 3.9 で結論と今後の課題について記述する.

### 3.2 D.Werraによるオープンショップ問題

処理機械の集まりを  $\{P_1, \dots, P_m\}$ , これらで処理されるジョブの集合を  $\{J_1, \dots, J_n\}$  とする. 各ジョブ  $J_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) は各機械  $P_1, \dots, P_m$  で処理されるタスク  $T_{1j}, \dots, T_{mj}$  によって構成される. 処理の順序はあらかじめ決められていないので, 自由である. 各  $T_{ij}$  の処理時間  $p_{ij}$  は与えられている. タスクの分割処理は認められているとする. さらに, 付加的な制約条件として, 再生することができない資源  $R$  を考え, 各タスク  $T_{ij}$  は, 処理される各単位時間について  $R$  の 1 単位を消費する.  $i$  番目の区間の始め ( $i-1$ ) で資源  $R$  は付加的に  $h_i$  だけ利用でき, 余った分は以降にまわすことができる.

D.Werra の考えた問題は, 区間が 0 から  $i$  までの間で使われる資源  $R$  の総量  $r(i)$  は

$$r(i) \leq \sum_{s=1}^i h_s \quad (1 \leq i)$$

を満たし, 最小の完了時間を与えるスケジュールを見つけることである.

D.Werra は, この問題は NP 完全という難しい問題のクラスに属することを示すとともに, 単位処理時間の場合については効率的なアルゴリズムを提案した. 我々は, 次の節でこの場合のファジィ版を考え, 対応するネットワークの最大フロー問題を利用した効率的アルゴリズムを提案する [12],[13],[14],[37],[42],[付録 B.2].

### 3.3 資源制約が不確定下でのオープンショップスケジューリング問題の定式化

以下の様な  $m$  機械オープンショップスケジューリング問題を考える.

1.  $m$  台の機械  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) とこの機械で処理されるべき,  $n$  個のジョブ  $J_1, J_2, \dots, J_n$  がある.
2. 各ジョブ  $J_1, J_2, \dots, J_n$  は各機械で処理されるべき  $m$  個のタスク  $T_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) からなり,  $T_{ij}$  の処理時間は各々単位時間とする.
3. 各ジョブはオープンショップ型, すなわち各ジョブのタスクの処理順序は任意である.
4. 各タスクの処理には単位資源量が必要である.
5. 各ジョブの実行可能時間  $\tilde{u}_j$  すなわち処理開始時間  $s_j$  (非負整数) と完了時間  $e_j$  (非負整数) は, フレキシブルで図 3.1 で示されるような単峰な階段関数で定義される満足度が付随している.

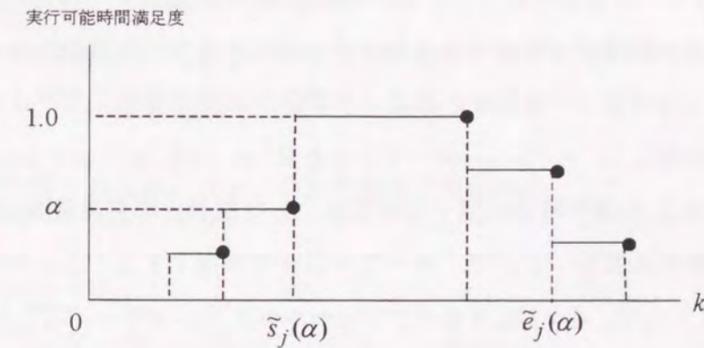
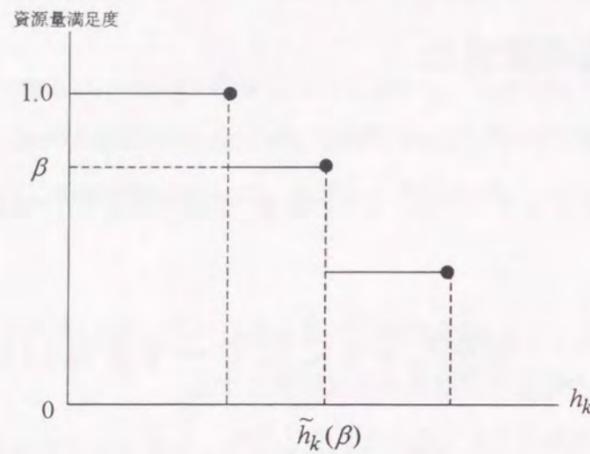


図 3.1 ジョブ  $j$  の実行可能時間満足度

6. 各区間  $k$  で使用可能な資源量 (非負整数と仮定) もフレキシブルで, 図 3.2 で示されるような非増加階段関数である満足度が付随している.

図3.2 区間  $k$  の資源量満足度

7. 各区間の資源の余剰分は次の区間に繰り越すことができる.

以上, 1~7の条件下で, 資源量, 実行可能時間の条件を満足しながら, すべての資源量満足度の最小値, すべての実行可能時間の満足度の最小値について, いずれかの最小値を最大にするスケジュールを求めることが目的である. D.Werraのモデルとの違いは, 上記5~7にある. また目的関数が2目的であるので, 一般には両方とも最大にするスケジュールが存在しない. 従って以下で定義する非劣スケジュールを求める.

各スケジュールに対して, スケジュールベクトルを  $V^\pi = (V_1^\pi, V_2^\pi) = (\min_{1 \leq j \leq n} \alpha_j, \min_{0 \leq k \leq q-1} \beta_k)$  と定義するが,  $\alpha_j$  は  $J_j$  の実行時間に関する満足度,  $\beta_k$  は区間  $k$  の資源量満足度である.  $q$  (後述の図3.3) は最終区間  $[q-1, q]$  で, すべてのジョブが完了することを示す [8],[9].

スケジュール  $\pi_1, \pi_2$  は, 各々対応するスケジュールベクトル  $V^{\pi_1} = (V_1^{\pi_1}, V_2^{\pi_1}), V^{\pi_2} = (V_1^{\pi_2}, V_2^{\pi_2})$  が

$$V_1^{\pi_1} \geq V_1^{\pi_2}, V_2^{\pi_1} \geq V_2^{\pi_2}, V^{\pi_1} \neq V^{\pi_2}$$

のとき, スケジュール  $\pi_1$  はスケジュール  $\pi_2$  に優越するという. スケジュール  $\pi$  は優越するベクトルが存在しないとき非劣スケジュールであるという. 次に3.4で非劣スケジュールを求める解法を示す [59].

### 3.4 モデルと解法

解法の手順は次のとおりである. 問題は実行時間満足度, 資源量満足度の最小値を最大にすることであるから, すべてのジョブ, 区間の各満足度に対し同一の値を初期値として与える. 次に, すべての実行可能時間満足度を  $\alpha$ , すべての資源量満足度を  $\beta$  としたときの部分問題  $P_\alpha^\beta$  の解法を示す. この部分問題のモデルと解法を示した後に, 部分問題  $P_\alpha^\beta$  のそれぞれの満足度を変化させ, 主問題の非劣スケジュールの求め方について述べる.

#### $P_\alpha^\beta$ の記号定義

区間  $k : [k-1, k]$

$s_j(\alpha)$  : ジョブ  $j$  の満足度が  $\alpha$  以上の開始時間の最小値 ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

$e_j(\alpha)$  : ジョブ  $j$  の満足度が  $\alpha$  以上の完了時間の最大値 ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

$h_k(\beta)$  : 区間  $k$  の満足度が  $\beta$  以上の資源量の最大値

$D_k(\alpha) = \{J_j \mid s_j(\alpha) - 1 \leq k-1 \leq e_j(\alpha) - 1\}$  : 区間  $k$  に実行可能なジョブ  $j$  の集合  
すなわち, これは,  $k-1$  時点以前にスタートでき,  $k$  時点以降に, 終了できる区間  $k$  で実行可能なジョブの集合を意味する.

$q(\alpha) = \max_j \{e_j(\alpha)\} - 1$  : 最遅処理開始時間

完了時間の満足度が  $\alpha$  以上であるように最終ジョブを完了するために, もっとも可能な最遅処理開始時間

$s(\alpha) = \min_j \{s_j(\alpha)\}$  : 最も早いジョブの最遅延処理開始時間

$h'_1(\beta) = \min\{h_1(\beta), m\}$

$h'_k(\beta) = \min\{\sum_{i=1}^k h_i(\beta) - \sum_{i=1}^{k-1} h_i(\beta), m\} \quad (k = 2, \dots, q(\alpha))$

$P_\alpha^\beta$  に対して, 対応するネットワーク  $G_\alpha^\beta$  を以下のように定義する.

$G_\alpha^\beta$  の記号定義

$$G_\alpha^\beta = (V, A), V = \{S, T\} \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

$S$ : ソース,  $T$ : シンク

$V_1 = \{s(\alpha) + 1, \dots, q(\alpha) + 1\}$ : 処理区間の端点集合

実行時間満足度の  $\alpha$  の時の最も早い処理完了区間, 及び最も遅い処理完了区間を表す端点の集合

$V_2 = \{J_1, \dots, J_n\}$ : ジョブを表す端点の集合

$V_3 = \{P_1, \dots, P_m\}$ : 機械を表す端点の集合

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ : ネットワークを構成する弧の集合

ここで

$$A_1 = \{(S, k) \mid k = s(\alpha) + 1, \dots, q(\alpha) + 1\}$$

$$A_2 = \{(k, J_j) \mid J_j \in D_k(\alpha), j = 1, 2, \dots, n, k = s(\alpha) + 1, \dots, q(\alpha)\}$$

$$A_3 = \{(J_j, P_i) \mid j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$A_4 = \{(P_i, T) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$$

弧の容量は以下のように定義する.

$$\begin{aligned} c(s, k) &= h'_k(\beta) & (s, k) \in A_1, & & c(k, J_j) &= 1 & (k, J_j) \in A_2 \\ c(J_j, P_i) &= 1 & (J_j, P_i) \in A_3, & & c(P_i, T) &= n & (P_i, T) \in A_4 \end{aligned}$$

これらは次のことを意味している.

- (1) ソースから  $V_1$  までの容量は資源量である.
- (2) 処理完了時間からジョブへの弧の容量は1とする.
- (3) ジョブから機械までの弧の容量は1とする.
- (4) 機械からシンクまでの弧の容量はジョブ数とする.

このネットワークを図示すると図3.3になる.

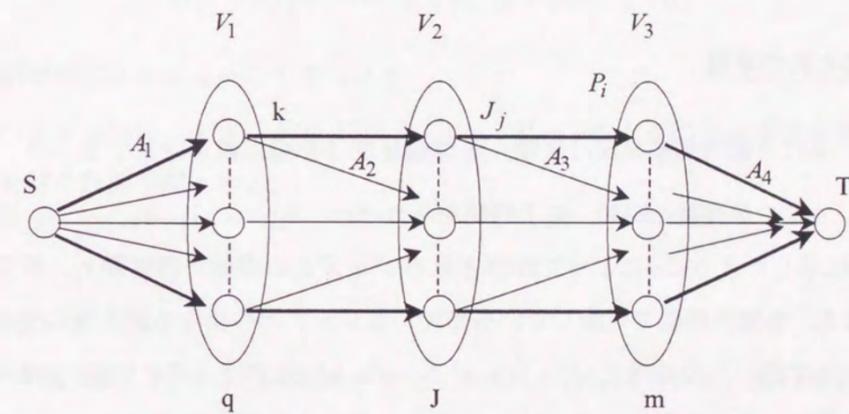


図3.3 対応するネットワーク  $G_\alpha^\beta$

$P_\alpha^\beta$ の解法

[手順1]  $P_\alpha^\beta$ についてネットワーク  $G_\alpha^\beta$ を構築する.

[手順2]  $G_\alpha^\beta$ についても最大フロー問題を解く [13],[24].

最大フロー  $v$ が職場数とジョブ数の積  $mn$ より小さければ  $P_\alpha^\beta$ は実行不可能で終了する. その他のとき ( $v$ は  $mn$ のとき)は手順3へ.

[手順3] 対応するスケジュールの構築

最大フローのパターンを  $f_\alpha^\beta(i, j)$ ,  $(i, j) \in A$ とする.  $f_\alpha^\beta(k, J_j) = 1$ ,  $(k, J_j) \in A_2$ ,  $f_\alpha^\beta(J_j, P_i)$ ,  $(J_j, P_i) \in A_3$ ならば, 区間  $k$ でジョブ  $J_j$ を  $P_i$ 上で処理する.

次に主問題のための手順を示す.

主問題のための手順

[手順1] 実行可能時間満足度は降順, 資源満足度は昇順に値を設定する

各ジョブの処理開始時間, 完了時間をそれぞれ  $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ とすると, 図3.1に示したように  $\alpha$ によって許容されるジョブ  $J_j$ の開始可能時間  $s_j$ , 終了時間  $e_j$ は異なる. 各階段関数で定義しているので, 各ジョブ間の異なる満足度について降順にソートする. その結果を  $\alpha^0 = 1 > \alpha^1 > \dots > \alpha^r > \alpha^{r+1} = 0$ とする.  $r$ は異なる満足度の数とする. 同様に, 各区間  $\tilde{h}_k$ の異なる満足度の値を昇順にソートし, その結果を  $\beta^0 = 0 < \beta^1 < \dots < \beta^w < \beta^{w+1} = 1$ とする.  $\alpha$ を変えるカウンター  $f$ ,  $\beta$ を変えるカウンター  $g$ をともにゼロにして, 算出したスケジュールを  $DS = \phi$ として, 手順2へ進む.

[手順2]  $P_{\alpha_f}^{\beta_g}$ は,  $\alpha_f$ を  $f$ 番目の  $\alpha$ ,  $\beta_g$ を  $g$ 番目の  $\beta$ とし, 部分問題  $P_{\alpha_f}^{\beta_g}$ を構築する.

実行可能スケジュール  $\pi_f^g$ が存在するか否かをチェックする. もし, 実行可能解がなければ手順5へ, その他のときは手順3へ.

[手順3]  $\alpha$ による終了判定

もし,  $f = r + 1$ ならば終了. (DSは非劣スケジュールを与える.) その他のときは手順4へ.

[手順4]  $\alpha$ の値を1単位増加する.

$DS = DS \cup \{\pi_f^g\}$ ,  $f = f + 1$ として, 手順2へ戻る.

[手順5]  $\beta$ による終了判定

もし,  $g = w + 1$ ならば終了. その他の場合は,  $g = g + 1$ として, 手順2へ戻る.

定理 3.1 上記の手順は

$$O(r \times F((m+n+g+2), (g+m)(n+1)))$$

の計算手間で非劣スケジュールを見つける.

ここで,  $g = \max(e_j(\alpha^r))$ ,  $F(a, b)$ は  $|V| = a$ ,  $|A| = b$ のときのネットワークの最大フロー問題を解く計算手間とする.

証明

(妥当性)

上記の手順では,  $P_\alpha^\beta$ の実行可能性がチェックされ, 各  $\alpha$ について, 実行可能である最大の  $\beta$ をもつ  $P_\alpha^\beta$ の実行可能スケジュールが求められている. 従って,  $P_\alpha^\beta$ の解法の妥当性を示せば十分である. 対応するネットワーク  $G_\alpha^\beta$ の構成から, 最大フローの値が  $mn$ であるときの対応するスケジュールは各区間で資源制約を満たし, 各ジョブ  $J_j$ の実行可能時間制約も満たす.

(計算手間)

$u, v$ のソーティングは各々  $O(r \log r)$ ,  $O(w \log w)$ の計算手間を要する. 上記のアルゴリズムでチェックされるべき部分問題  $P_\alpha^\beta$ の最大数は  $O(\min(r, w))$ である.  $P_\alpha^\beta$ に対応する  $G_\alpha^\beta$ は高々  $O(m+n+g+2)$ 個の弧と  $O((g+m)(n+1))$ 個の点をもっている. 各  $\alpha_f$ に対して,  $G_{\alpha_f}^{\beta_g}$ の中で  $\beta_g$ が更新される毎に容量  $C(s, k)$ だけが減少し, 他は同一である.

従って,  $A_1$  が最小カットで, その全体の容量が  $mn$  より小さい場合は,  $P_{\alpha_f}^{s_0}$  は実行可能でない. この事は  $O(rw)$  でチェックでき, ネットワークフロー問題は各  $\alpha_f$  についてトータルとして1回解く計算手間で十分である. 従って上記, 計算手間を得る. Q.E.D.

### 3.5 納期及び先行関係が不確定下での二機械並列スケジューリング問題の定式化

この節以降では, ファジィ二機械多目的スケジューリング問題として, ファジィ処理開始可能時間とファジィ納期(まとめて, ファジィ実行可能時間という)をもち, ファジィ先行関係(先行するジョブと, 後続するジョブが必ずしも一意に決まらない関係を示す)を考慮した, 多目的スケジューリング問題を考える. ファジィでない通常の先行関係付きの2つの二機械問題の解法 [16], [17] をベースに, H.Ishii[26] の解法を拡張した方法を示す. 以下のような等価並列二機械問題を考える.

- (1) 二台の並列機械とそのどちらか一方で処理されるべき  $n$  個のジョブ  $J_1, J_2, \dots, J_n$  がある.
- (2) 各ジョブ  $J_i$  は単位処理時間をもち, ファジィ開始可能時間  $\tilde{s}_i$  およびファジィ納期  $\tilde{d}_i$  をもつ.  $\tilde{s}_i$  はそのジョブの処理開始時間  $s_i$  (非負整数と仮定) に関する満足度を表す次のようなメンバシップ関数をもつ.

$$\mu_{\tilde{s}_i}(s_i) = \begin{cases} 0 & (s_i \leq r_i) \\ m_i(s_i) & (r_i < s_i < r_i + e_i) \\ 1 & (s_i \geq r_i + e_i) \end{cases}$$

$r_i, e_i \geq 0$  (いずれも整数とする)

ただし  $s_i$  を整数とし,  $m_i(s_i)$  は単調非減少で0と1の間の値をとる. 同様にして  $\tilde{d}_i$  はそのジョブの完了時間  $C_i$  に関する満足度を表す次のようなメンバシップ関数をもつ.

$$\mu_{\tilde{d}_i}(C_i) = \begin{cases} 1 & (C_i \leq d_i) \\ k_i(C_i) & (d_i < C_i < d_i + f_i) \\ 0 & (C_i \geq d_i + f_i) \end{cases}$$

ただし,  $f_i, d_i \geq 0, r_i + e_i \leq d_i$  で, いずれも整数,

$C_i$  も整数とし,  $k_i(C_i)$  は単調非増加で, 0と1の間の値をとるとする. 以上の定義により,  $\bar{r}_i \equiv r_i + e_i$  が従来の処理可能時間, そして  $d_i$  が納期に対応する.

- (3) 各々2つのジョブ  $J_i, J_j$  間に処理される順序として  $J_i$  の完了が  $J_j$  より遅くないときの満足度  $\mu_{ij}$  で付随する. ただし,  $\mu_{ij}$  は0と1の間の値で, ここでは,  $\mu_{ij} < 1$  ならば  $\mu_{ji} = 1$  とし,  $\mu_{ij} = \mu_{ji} = 1$  ならば,  $J_i$  と  $J_j$  は独立とする. 独立なジョブ以外は同時処理は許されないとする.
- (4) スケジュール  $\pi$  のもとで, ジョブ  $J_i$  の処理開始時間を  $s_i^\pi$ , 完了時間を  $C_i^\pi$  で示すと,  $\pi$  での処理開始時間に関する最小の満足度  $\mu_{r \min}^\pi$  は

$$\mu_{r \min}^\pi = \min\{\mu_{\tilde{s}_i}(s_i^\pi) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

で与えられる. また, 完了時間に関する満足度の最小値  $\mu_{d \min}^\pi$  は

$$\mu_{d \min}^\pi = \min\{\mu_{\tilde{d}_i}(C_i^\pi) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

で与えられる. したがって, ジョブの実行時間に関する満足度の最小値  $\mu_1^\pi$  は

$$\mu_1^\pi = \min\{\mu_{r \min}^\pi, \mu_{d \min}^\pi\}$$

となる. 一方, ジョブの処理順序に関する満足度の最小値  $\mu_2^\pi$  は

$$\mu_2^\pi = \min\{\mu_{ij} \mid C_i^\pi < C_j^\pi\}$$

で与えられる.

- (5) 上記の設定のもとで, 次の問題Qを考える.

$$Q : \mu_1^\pi \rightarrow \max, \mu_2^\pi \rightarrow \max \\ \pi \in \Pi$$

ここで  $\Pi$  は実行可能なスケジュール全体の集合である.

一般には  $\mu_1^{\pi}$  と  $\mu_2^{\pi}$  を同時に最大にするスケジュールは存在しないので, 本モデルではつぎに定義される非劣スケジュールを求める. 但し, 同じスケジュールベクトルをもつ複数のスケジュールが存在する可能性があるが, 同じ非劣スケジュールベクトルについては1つのスケジュールを求める [25],[59].

### 非劣スケジュール

第3.3節の非劣スケジュールを, この二機械問題に合わせて再定義する. 各スケジュール  $\pi$  に対して, スケジュールベクトル  $v^{\pi} = (\mu_1^{\pi}, \mu_2^{\pi})$  を定義する. スケジュールベクトル  $v^{\pi_1} = (v_1^{\pi_1}, v_2^{\pi_1})$  が  $v^{\pi_2} = (v_1^{\pi_2}, v_2^{\pi_2})$  に優越するとは,

$$v_1^{\pi_1} \geq v_1^{\pi_2}, v_2^{\pi_1} \geq v_2^{\pi_2}, v^{\pi_1} \neq v^{\pi_2}$$

が成り立つことをいう. スケジュールベクトル  $v^{\pi_2}$  に優越するスケジュールベクトルがないとき, スケジュールベクトル  $v^{\pi_2}$  を非劣ベクトルという. スケジュール  $\pi_1$  がスケジュール  $\pi_2$  に優越するとは対応するスケジュールベクトル  $v^{\pi_1}$  が  $v^{\pi_2}$  に優越するときをいう. スケジュール  $\pi_2$  が非劣スケジュールとは  $\pi_2$  に優越するスケジュールがないことをいう.

## 3.6 先行関係, 処理可能時間, 納期をもつ通常二機械問題の解法

ここで, 通常二機械問題, 処理可能時間, 納期をもつ二機械問題の Garey & Johnson の解法 [17] を概説する.

- (1) 二台の並列機械とそのどちらか一方で処理されるべき  $n$  個のジョブ  $J_1, J_2, \dots, J_n$  がある.
- (2) 各ジョブ  $J_i$  は単位処理時間を持ち, 処理可能時間  $\bar{r}_i$ , 納期  $d_i$  が定義されている. すなわち  $J_i$  は  $\bar{r}_i$  以降に処理を開始, 納期  $d_i$  以前に処理を完了しなければならない.
- (3) いくつかのジョブ間には先行関係  $\prec$  が定義されている.  $J_i \prec J_j$  はジョブ  $J_i$  がジョブ  $J_j$  に先行しなければならないこと, すなわち,  $J_j$  の処理を開始する前に  $J_i$  の処理

を完了していなければならないことを意味する. このような関係にない2つのジョブは互いに独立であるという. 各ジョブ  $J_i$  に対して,  $J_i \prec J_j$  であるジョブ  $J_j$  は  $J_i$  の後続ジョブであるという.

以上 (1)~(3) の条件設定のもとに, 処理可能時間, 納期, 先行関係をすべて満たすスケジュールを見いだす.

まず, 各ジョブ  $J_i$  と  $\bar{r}_i \leq s \leq d_i \leq d$  に対して  $S(i, s, d)$  が  $d_i \leq d$  をもち,  $J_i$  の後続ジョブであるか,  $\bar{r}_i \geq s$  であるかどうかであるすべてのジョブ  $J_j (j \neq i)$  の集合と定義する. そして,  $N(i, s, d)$  をその要素の個数とする. このとき,

$$N(i, s, d) \geq 2(d-s) \text{ かつ } d - \lceil N(i, s, d)/2 \rceil < d_i$$

が成り立つ間, 納期を  $d_i = d - \lceil N(i, s, d)/2 \rceil$  と修正する. この修正を続けていくと, これ以上修正ができなくなるか,  $d_i < \bar{r}_i + 1$  という実行不可能な状態になるかどうかである. この修正を効率的に行う方法は [17] で与えられており, 修正ができなくなった時点で実行不可能でなければ, 次の内的に整合の状態に至る.

### 内的に整合

内的に整合とは, 各ジョブについて次のことが成り立つ状態をいう.

- 1)  $d_i \geq \bar{r}_i + 1$
- 2)  $\bar{r}_i \leq s \leq d_i \leq d$  を満たす全ての  $s, d$  の対について, もし,  $N(i, s, d) \geq 2(d-s)$  ならば,  $d_i \leq d - \lceil N(i, s, d)/2 \rceil$  が成り立つ.

もし, 内的に整合であれば,  $J_i \prec J_j$  のとき  $d_i \leq d_j$  となっていることがいえる. ジョブを修正納期の順にソートし,  $d_i \leq d_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1)$  となるように番号を入れ替え, 優先リスト  $L = (J_1, J_2, \dots, J_n)$  をつくる. 機械があく毎にこのリストの前の方からスケジュールしていけば, 実行可能なスケジュールを得る. これは, 計算手間  $O(n^3)$  でできる.

## 3.7 ファジィ版での解法

ファジィ先行関係で  $0 < \mu_{ij} < 1$  なるものを降順にソートし, その結果を

$$\mu^0 \equiv 1 > \mu^1 > \mu^2 > \dots > \mu^a > 0$$

とする. ここで,  $a$  は異なる上記  $\mu_{ij}$  の個数である. つぎに

$$\mu_{\bar{s}_i}(s_i) : s_i \text{ は非負整数, } r_i \leq s_i \leq r_i + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\mu_{\bar{C}_i}(C_i) : C_i \text{ は非負整数, } d_i \leq C_i \leq d_i + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を定義し, 降順にソートして,

$$\mu_0 \equiv 1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_b > 0 \equiv \mu_{b+1}$$

とする.  $b$  は上記の 0 と 1 以外の異なるものの個数とする. さらに, 先行関係グラフ  $PG(V, A)$  を次のように作る.

I.  $V$  は各ジョブ  $J_i$  に対応する点  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) である.

II. 枝の集合  $A$  は  $J_i$  が  $J_j$  に直接先行するときの各枝  $(v_i, v_j)$  からなる.

また, 両立グラフ  $CG(V, A^c)$  をもとのファジィ先行関係から次のように作られる無向グラフとして作る.

III.  $V$  は各ジョブ  $J_i$  に対応する点  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) である.

IV. 枝の集合  $A^c$  はもともと独立なジョブの対  $(J_i, J_j)$  に対応する枝  $(v_i, v_j)$  から構成される.

また

$$A^0 = \{(v_i, v_j) \mid \mu_{ji} = \mu^0, \mu_{ij} \neq \mu^0\}$$

$$\bar{A}^l \equiv \{(v_i, v_j) \mid \mu_{ij} = \mu^0, \mu_{ji} = \mu^l\} \quad (l = 1, 2, \dots, a)$$

とする.

さらに, 有向グラフである先行関係グラフとして

$$PG^0 = (V, A^0), A^l = A^{l-1} - \bar{A}^l, PG^l = (V, A^l) \quad (l = 1, 2, \dots, a)$$

と逐次的に定義する.

先行関係グラフと, その時の処理可能時間, 納期, 先行関係から定まる修正納期を決定し, 両立グラフの各点にその修正納期をラベルとして付随する. 実際のスケジュールを求めるには, この修正納期つき両立グラフの極大両立マッチングを求め, それをスケジュールに変換すればよい. 以下に詳細を示す.

## マッチング

マッチングとは同一の点から出ている枝のうち, 高々1つの枝を選んで作られる枝の集合をいう. 両立マッチングとは, その中でマッチングとして選ばれた枝の両端の点のラベル (点  $v_i$  につけたジョブ番号を示す) は, ある1つのマッチングの枝から小さい順に並べることができるものをいい, その中で最大の個数のものを極大両立マッチングという [3].

この極大両立マッチングから, 次のように実際のスケジュールを作る.

- (1) あるマッチングに属する枝の両端の点 (両立ジョブの対という) に対応する2つのジョブは各機械で同時に処理される.
- (2) 現在のマッチングから増加パスをみつければ, スタート点として, 最小のラベルをもつ孤立点を選ぶ. そして, ラベルの小さいほうから増加パスを延ばしていく.
- (3) 両立ジョブの対から, それが見つかった順に処理をしていき, 次に孤立点として残ったジョブをラベルの順に処理していく.

以上の準備のもとに, つぎの手順を得る.

## 手順

[手順1]  $\mu^0 \equiv 1 > \mu^1 > \mu^2 > \dots > \mu^a > 0$  および  $\mu_0 \equiv 1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{b+1} > 0$  を計算する.  $l = 0$  とし,  $PG^0$  をつくり,  $\mu_t (t = 1, 2, \dots, b)$  を動かして,  $\mu_t$  以上の満足度となるように, 各ジョブの処理可能時間, 納期を各々  $[\mu_{\bar{s}_i}^{-1}(\mu_t)], [\mu_{\bar{d}_i}^{-1}(\mu_t)]$  とし, それが実行可能となる最大の  $\mu_t = \mu_{t_0}$ , 及びスケジュール  $\pi^0$  を求める. そして,  $DS = \{\pi^0\}$ ,  $l = 1$  として手順2へ.

[手順2]  $PG^l$  を作り,  $\mu_t (t = 1, 2, \dots, t_{l-1} - 1)$  を動かして  $\mu_t$  以上の満足度となるように, 各ジョブの処理可能時間, 納期を各々  $[\mu_{\bar{s}_i}^{-1}(\mu_t)], [\mu_{\bar{d}_i}^{-1}(\mu_t)]$  とし, それが実行可能となる最大の  $\mu_t = \mu_{t_0}$  があれば, そのスケジュール  $\pi^l$  を求める.  $\pi^l$  が  $DS$  のどれかのスケジュールにより優越されていなければ,  $DS = DS \cup \{\pi^l\}$  とする. そして, 手順3へ行く. 実行可能でない, あるいは優越されている場合は,  $\mu_t = \mu_{t_{l-1}}$  として手順3へ行く.

[手順3]  $l = l + 1$  とする.  $l = a + 1$  の場合は終了. そうでなければ, 手順3へ戻る.

定理 3.2 上記の手順は  $O((\sum_{i=1}^n (f_i + e_i))n^3)$  で非劣スケジュールを見出す.

## 証明

妥当性は上記の議論から明らかである. 計算量は, 各  $\mu_i (i = 1, 2, \dots, b + 1)$  は高々1回チェックされ, 各実行可能性のチェックは  $O(n^3)$  で行えるので, 上記の結果を得る. Q.E.D.

## 3.8 おわりに

資源制約, 納期が不確定下でのオープンショップスケジューリング問題について, ネットワーク, グラフを適用した2つのモデルを構築し, それぞれ解法を示した. しかし, いずれの解法も各満足度でソートするなど, 幾分複雑な手順がある. 今後はさらに適切なデータ構造等を用いることにより, その計算手間は改善できると思われる.

## 第4章

## 需要, 生産能力, 在庫量が不確定下での生産計画

## 4.1 はじめに

第2章, 第3章では, 人員配分問題, スケジューリング問題を扱った. 本章では生産計画作成問題を扱う. 生産計画を作成するとは, 例えば, 月・週などある決められた期間に何種類の製品, 部品を何台生産するかを計画することである. この問題は, 部品在庫, 生産能力を制約条件に, 費用を目的関数として, 数理計画法の多制約ナップサック問題が適用できる [20],[21],[45]. しかし, これらは制約条件, 目的関数が確定している事が前提であり, 不確定状況を扱うことが難しい. 本章では, 在庫量, 製造能力, 注文数量達成状況を制約条件とし, 総利益を最大にする製品毎の生産数量を, すなわち製品毎の計画数量を求めることを目的とする. ただし, 対象とするのは以下の2点である. (1) 3つの制約条件から1つ優先的に扱う制約条件を選択することにより, 制約式を変えなくても, 2種類の制約式のパターンごとに解を求めることができ, (2) 解が存在するレベルまで, 制約条件の許容幅を逐次広げながら, 解を求めることができる [38],[40],[47],[43].

## 4.2 モデルの定式化

## 記号の定義

- $x_j$  : 製品  $j$  の生産台数 (決定変数)  
 $\delta_{ij}$  : 製品  $j$  に必要な部品  $i$  の個数  
 $g_i$  : 部品  $i$  の当期在庫  
 $h_i$  : 部品  $i$  の発注残  
 $s_i$  : 部品  $i$  の在庫適正度関数  
 $a_i$  : 部品  $i$  の在庫下限  
 $b_i$  : 部品  $i$  の在庫上限  
 $t_j$  : 製品  $j$  の製品注文数量達成度関数  
 $o_j$  : 製品  $j$  の注文数量  
 $c_j$  : 製品  $j$  の注文数量下限  
 $d_j$  : 製品  $j$  の注文数量上限  
 $u_j$  : 製品  $j$  の製造能力達成度関数  
 $p_j$  : 製品  $j$  の適正製造量  
 $e_j$  : 製品  $j$  の製造下限  
 $f_j$  : 製品  $j$  の製造上限  
 $V_j$  : 製品  $j$  の製品注文数量利益関数  
 $\beta_j$  : 製品  $j$  の1台当たりの粗利額  
 $m$  : 部品種類数  
 $n$  : 製品種類数

次に在庫適正度を定義する。製品を生産するためには、製品を構成する部品が必要である。ゆえに各々の部品  $i (i = 1, 2, \dots, m)$  について、本来は次のような条件式を満たす必要がある。

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \leq g_i + h_i$$

これは、部品在庫と部品の発注残の合計より、部品の必要数は少なくなければならぬことを示す。この条件をもとにして、部品の在庫と発注残に対する在庫適正度を図4.1, (4.1)式の三角型メンバシップ関数  $s_i$  で表わす。

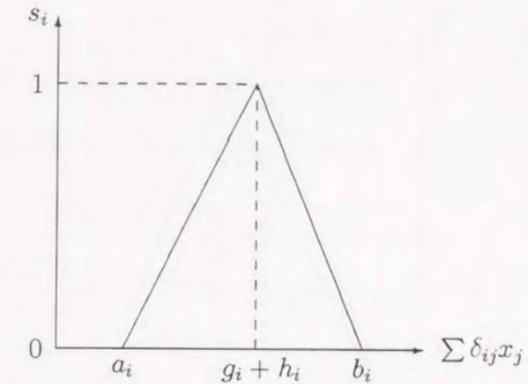


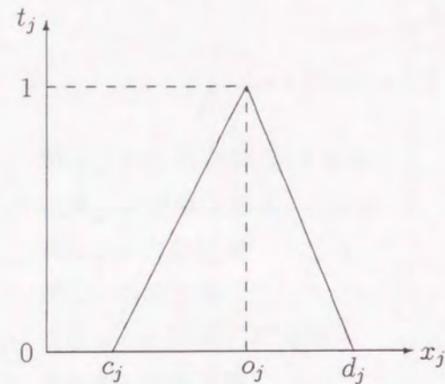
図4.1 在庫適正度  $s_i(\sum \delta_{ij} x_j)$

$$s_i \left( \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \right) = \begin{cases} \frac{\sum \delta_{ij} x_j - a_i}{(g_i + h_i) - a_i} & (a_i \leq \sum \delta_{ij} x_j \leq g_i + h_i) \\ \frac{b_i - \sum \delta_{ij} x_j}{b_i - (g_i + h_i)} & (g_i + h_i < \sum \delta_{ij} x_j \leq b_i) \\ 0 & (a_i > \sum \delta_{ij} x_j, b_i < \sum \delta_{ij} x_j) \end{cases} \quad (4.1)$$

在庫数量を最小値, 中央値, 最大値の3点見積もりすることで, 不確定状況を示している。また一意に条件を決めると, 解が存在しない場合がある。そこで解の存在範囲を探索するために, このようにモデル化した。他の制約条件についても同様である。

上記関数において, 区間  $[a_i, g_i + h_i]$  では, 部品余剰状態を表し, 区間  $[g_i + h_i, b_i]$  では, 部品が所定の在庫及び発注残では足りない状態を表す。部品を臨時に調達することが不可能な場合は,  $g_i + h_i = b_i$  である。

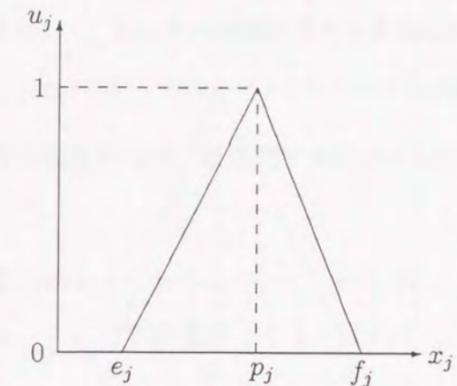
製品注文数量達成度を, 製品生産量  $x_j$  の製品注文数量  $o_j$  に対する満足度とし, 図4.2, (4.2)式の三角型メンバシップ関数  $t_j$  に示す [39]。

図4.2 製品注文数量達成度  $t_j(x_j)$ 

$$t_i(x_j) = \begin{cases} \frac{x_j - c_j}{o_j - c_j} & (c_j \leq x_j \leq o_j) \\ \frac{d_j - x_j}{d_j - o_j} & (o_j < x_j \leq d_j) \\ 0 & (x_j < c_j, x_j > d_j) \end{cases} \quad (4.2)$$

上記関数において, 区間  $[c_j, o_j]$  では, 製品注文数量に対して製品生産量が不足している状態 (例えば, 注文数に応えられないため, その分の予想利益を得ることができない状態) を示し, 区間  $[o_j, d_j]$  は, 製品生産量が過剰状態である (例えば, 完成在庫がある状態).

製造能力達成度を示す. 製品生産量  $x_j$  の適正製造量  $p_j$  に対する満足度を製造能力達成度を, 図4.3, (4.3) 式の三角型メンバシップ関数  $u_j$  に示す.

図4.3 製造能力達成度  $u_j(x_j)$ 

$$u_i(x_j) = \begin{cases} \frac{x_j - e_j}{p_j - e_j} & (e_j \leq x_j \leq p_j) \\ \frac{f_j - x_j}{f_j - p_j} & (p_j < x_j \leq f_j) \\ 0 & (x_j < e_j, x_j > f_j) \end{cases} \quad (4.3)$$

上記関数において, 区間  $[e_j, p_j]$  では, 製造適正量に対して, 製品生産量が不足している状態 (例えば, 工場の機械が遊んでいる状態) を表し, 区間  $[p_j, f_j]$  では, 製品生産量が過剰な状態 (例えば, 従業員に過大な残業を強いるような状態) を表す.

以上の3条件が不確定であり, これが意思決定者の判断によって, 許容される範囲である. つぎに目的関数について示すと, 各条件が一定水準を満たしているときの製品生産量  $x_j$  に対する利益を図4.4の製品注文数量利益関数適性度  $V_j(x_j)$  によって表す. 顧客の要求どおりに生産できた場合, 欠品もしくは, 過剰在庫を生まないので, 最も利益がでることを想定して目的関数を定義している.

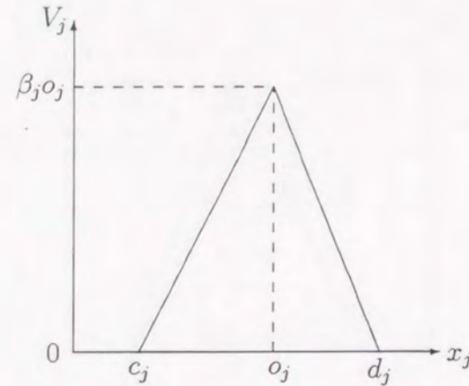


図4.4 製品注文数量利益  $V_j(x_j)$

$$V_j(x_j) = \begin{cases} \frac{\beta_j o_j (x_j - c_j)}{o_j - c_j} & (c_j \leq x_j \leq o_j) \\ \frac{\beta_j o_j (d_j - x_j)}{d_j - o_j} & (o_j \leq x_j \leq d_j) \\ 0 & (o_j < c_j, o_j > d_j) \end{cases} \quad (4.4)$$

上記関数  $V_j(x_j)$  は, (4.1), (4.2), (4.3) 式のようなメンバシップ関数とは異なる三角型関数であって, 縦軸上の値域はメンバシップ値  $[0, 1]$  ではなく, 利益額の値域  $[0, \beta_j o_j]$  である. ここでの生産計画作成問題では, (4.1), (4.2), (4.3) 式の各条件で, それぞれの要求される一定水準の範囲内において, (4.4) 式を製品毎に合計して求められる製品注文数量総利益関数の値を, 最大にすることを目的とする [40].

### 4.3 解法

ここで解法を主問題の手順と, 検証の手順に分割する. はじめに主問題の手順を示す. 主問題の解法の主なポイントは, 上記の3点見積もりした在庫適正度, 製品注文数量達成度, 製造能力達成度の3点について, 生産状況の変化によって意思決定者の主観的判断により, 最優先条件が変化することにも対応させることである. 以下にその手順を示す.

#### 主問題の解法

[手順1] (4.1), (4.2), (4.3) 式として, それぞれに満たすべき最低限の満足度  $\alpha_r (r = s_i, t_j, u_j)$  を与える.

[手順2] 意思決定者の判断にしたがって, 最優先する制約条件を選択する. この条件を  $P$  と呼ぶことにする.

[手順3] 最優先条件の  $P$  以外の2つの条件について, それぞれの最低限満足度  $\alpha_r$  での  $\alpha$ -カット集合を求めると, それが制約条件となる. それぞれの  $\alpha$ -カット集合は次のようにして求められる.

#### 1. 在庫適正度 $s_i$ の $\alpha$ -カット集合 $A_{s_i}$

$s_i = \alpha_{s_i}$  で  $\alpha$ -カットするとすると (4.1) 式より,  $a_i \leq \sum \delta_{ij} x_j \leq g_i + h_i$  では,

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \geq \alpha_{s_i} (g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i}) a_i$$

となるが, ここで,  $\sum \delta_{ij} x_j$  は物理的なものである部品  $i$  の数であるから自然数でなければならない. よってこれは, 記号  $\lceil x \rceil$  を  $x$  を下まわらない最小の自然数を表すものとする,  $\lceil \cdot \rceil$  を用い

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \geq \lceil \alpha_{s_i} (g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i}) a_i \rceil$$

と表される. また同様に,  $g_i + h_i \leq \sum \delta_{ij} x_j \leq b_i$  では,

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \leq \alpha_{s_i} (g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i}) b_i$$

となるが, 記号  $\lfloor x \rfloor$  を  $x$  を越えない最大の自然数を表すものとする,

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \leq \lfloor \alpha_{s_i} (g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i}) b_i \rfloor$$

と表される.

よって, 在庫適正度  $s_i$  の満足度  $\alpha_{s_i}$  での  $\alpha$ -カット集合  $A_{s_i}$  は,

$$A_{s_i} = \left\{ \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j : \lceil \alpha_{s_i} (g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i}) a_i \rceil \leq \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j \leq \lfloor \alpha_{s_i} (g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i}) b_i \rfloor \right\} \quad (4.5)$$

となる.

### 2. 製品注文数量達成度 $t_j$ の $\alpha$ -カット集合 $A_{t_j}$

$t_j = \alpha_{t_j}$  で  $\alpha$ -カットするとすると (4.2) 式より,  $c_j \leq x_j \leq o_j$  では,

$$x_j \geq \alpha_{t_j} o_j + (1 - \alpha_{t_j}) c_j$$

となるが, ここで製品数  $x_j$  もやはり自然数でなければならない. よって

$$x_j \geq \lceil \alpha_{t_j} o_j + (1 - \alpha_{t_j}) c_j \rceil$$

と表される. また, 同様に,  $o_j \leq x_j \leq d_j$  では,

$$x_j \leq \alpha_{t_j} o_j + (1 - \alpha_{t_j}) d_j$$

となるが, こちらは

$$x_j \leq \lfloor \alpha_{t_j} o_j + (1 - \alpha_{t_j}) d_j \rfloor$$

と表される.

よって, 製品注文数量達成度  $t_j$  の満足度  $\alpha_{t_j}$  での  $\alpha$ -カット集合  $A_{t_j}$  は

$$A_{t_j} = \left\{ x_j : \begin{aligned} & \lceil \alpha_{t_j} o_j + (1 - \alpha_{t_j}) c_j \rceil \\ & \leq x_j \leq \lfloor \alpha_{t_j} o_j + (1 - \alpha_{t_j}) d_j \rfloor \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

となる.

### 3. 製造能力達成度 $u_j$ の $\alpha$ -カット集合 $A_{u_j}$

$u_j = \alpha_{u_j}$  で  $\alpha$ -カットするとすると (4.3) 式より,  $e_j \leq x_j \leq p_j$  では,

$$x_j \geq \alpha_{u_j} p_j + (1 - \alpha_{u_j}) e_j$$

となるが, ここでも製品数  $x_j$  は, 前述のように自然数でなければならないので,

$$x_j \geq \lceil \alpha_{u_j} p_j + (1 - \alpha_{u_j}) e_j \rceil$$

と表される. また同様に,  $p_j \leq x_j \leq f_j$  では,

$$x_j \leq \alpha_{u_j} p_j + (1 - \alpha_{u_j}) f_j$$

となり,

$$x_j \leq \lfloor \alpha_{u_j} p_j + (1 - \alpha_{u_j}) f_j \rfloor$$

と表される.

よって, 製造能力達成度  $u_j$  の満足度  $\alpha_{u_j}$  での  $\alpha$ -カット集合  $A_{u_j}$  は,

$$A_{u_j} = \left\{ x_j : \begin{aligned} & \lceil \alpha_{u_j} p_j + (1 - \alpha_{u_j}) e_j \rceil \\ & \leq x_j \leq \lfloor \alpha_{u_j} p_j + (1 - \alpha_{u_j}) f_j \rfloor \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

となる.

#### [手順4] 最優先条件 $P$ についての検証

次に, 手順2で意思決定者が選択した最優先条件  $P$  について,  $P = 1.0$  から  $P = \alpha_r$  まで段階的に検証していく。(検証の手順は後述する.)  $P = 1.0$  のとき解が見つければ, それが求める解である. もし見つからなければ, 満足度を意思決定者の判断で値を決め, 一定値ずつ  $P = \alpha_r$  まで下げていく. そして, もし  $P = \alpha_r$  までに, 解が見つけれなければ, 手順1および手順2で決定した各条件の下では解は得られない.

検証の手順は, 主問題の手順4で, 最優先条件  $P$  の満足度の各段階における検証法が1つの手順となる. ここで「在庫適正度」と「製品注文数量達成度, 製造能力達成度」との制約条件間の違いであり, 前者は使用部品数についてのメンバシップ関数であり, 後者は製品生産台数についてのメンバシップ関数である. 最優先条件  $P$  として前者を選んだ場合と後者を選んだ場合とでは, 検証の手順に違いが出てくる. しかしながら, 手順を構成していく上での基本的な考え方は同一である. 最優先条件  $P$  を「製品注文数量達成度」, 「製造能力達成度」とした場合も「在庫適正度」と同様に解くことができるので, 以下に最優先条件  $P$  を「在庫適正度」とした場合のみを示す. 検証方法の考え方は, 最優先条件以外の制約条件は固定する. 最優先条件について, 満足度の最大値1.0から, 一定値  $\alpha_r$  ずつ段階的に値を下げていき, 解の存在の有無を検証する.

## 検証の手順

[手順1]  $P$ 以外の制約条件を考える。それらの条件は,  $A_{t_j}$  と  $A_{u_j}$  であり, これらは共に製品生産量  $x_j$  の値の範囲であるので, 結局その共通集合が制約条件となる。すなわち

$$\begin{aligned} & A_{t_j} \cap A_{u_j} \\ & = \{x_j : \max([\alpha_{t_j}o_j + (1 - \alpha_{t_j})c_j], [\alpha_{u_j}p_j + (1 - \alpha_{u_j})e_j]) \\ & \leq x_j \leq \\ & \min([\alpha_{t_j}o_j + (1 - \alpha_{t_j})d_j], [\alpha_{u_j}p_j + (1 - \alpha_{u_j})f_j])\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。

[手順2] 初期値は  $P = 1.0$ , すなわち  $s_i(\sum \delta_{ij}x_j) = 1.0$  のときから検証していく。

[手順3]  $P = \alpha_{s_i}$ , すなわち,  $s_i(\sum \delta_{ij}x_j) = \alpha_{s_i}$  ( $0 < \alpha_{s_i} \leq 1$ ) のときを検証する。

$s_i(\sum \delta_{ij}x_j) = \alpha_{s_i}$  ( $0 < \alpha_{s_i} \leq 1$ ) のときの在庫適正度の  $\alpha$ -カット集合は, (4.5) 式に求められている。よって,  $\sum \delta_{ij}x_j$  の存在範囲は,

$$\begin{aligned} & [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})a_i] \leq \sum_{j=1}^n \delta_{ij}x_j \leq \\ & [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})b_i] \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。(4.8) 式で求めた各製品  $j$  の生産量の最低生産量  $x_j^{min}$  と, 最大生産量  $x_j^{max}$  が (4.9) 式を実現可能にするかどうかを吟味する。ここで,  $x_j^{min}$  は, 製造能力下限もしくは製品注文数量下限のどちらか大きい値になるので

$$x_j^{min} = \max([\alpha_{t_j}o_j + (1 - \alpha_{t_j})c_j], [\alpha_{u_j}p_j + (1 - \alpha_{u_j})e_j])$$

であり,  $x_j^{max}$  は, 製造能力上限もしくは製品注文数量上限のどちらか小さい値になるので

$$x_j^{max} = \min([\alpha_{t_j}o_j + (1 - \alpha_{t_j})d_j], [\alpha_{u_j}p_j + (1 - \alpha_{u_j})f_j])$$

である。上で求めた製品  $j$  の最低生産量  $x_j^{min}$ , 最大生産量  $x_j^{max}$  は, 次式を満たす必要がある。すなわち

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij}(x_j^{max}) \leq [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})b_i] \quad (4.10)$$

であり, かつ

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij}(x_j^{min}) \geq [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})a_i] \quad (4.11)$$

でなければならない。このとき, この段階で実行可能であり, 手順3へと進む。もし, (4.10), (4.11) 式のいずれかが満たされず, 実行不可能であると判定された場合は,  $s_i(\sum \delta_{ij}x_j)$  の値を (状況に応じて) 一定値, 例えば, 0.1, 0.01 ずつ下げて手順3に戻る。

[手順4] 仮の最適解を設定し, 解の存在の有無を判定する。

手順3の結果得られた (4.10) 式及び, (4.11) 式において, 目的関数から製品注文数量と生産台数が一致したときが, 最大利益になるが, 部品在庫の許容範囲内でなければならない。そこで在庫の最適値を  $q_i = g_i + h_i$  とする。最もボトルネックになる部品  $i$  を  $i(lim)$  とすると (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) 式で判定する。次に, 在庫の最適値  $q_i$ , 在庫量の下限  $q_i^{min}$ , 在庫量の上限  $q_i^{max}$  とすると, 以下のようなになる。

$$\begin{aligned} q_i &= g_i + h_i \\ q_i^{min} &= [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})a_i] \\ q_i^{max} &= [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})b_i] \end{aligned}$$

ここで

$$q_i^* = \min(|q_i - q_i^{min}|, |q_i - q_i^{max}|) \quad (4.12)$$

とすると, (4.12) 式は, 在庫の最適値と在庫の上下限值との差の比較をし, 小さい値を  $q_i^*$  とする。つまり, ボトルネックの状態を数値化したものである。(4.13), (4.14), (4.15) 式から全部品のうち, ボトルネックとなる部品  $i(lim)$  を選び出し, この部品を使って生産する製品の最適生産数量  $x_{j(lim)}^*$  を求める。ただし, ボトルネックとなる部品が複

数存在する場合は, 各製品  $j$  の部品当たりの粗利額  $(\beta_j | \delta_{ij})$  が最も大きい製品に該当する部品をボトルネックとなる部品とする. さらに, 以下の条件 1, 2 について判定をし, 該当しない場合は条件 3 で, 最適生産量を求める. 考え方は, 次のとおりである. 手順 3 までに解が存在することは保証されている. 在庫の上下限界値と最適在庫量との差が最も大きく, かつ最適在庫量が上下限界の範囲外にあるボトルネックとなる部品を探索し, 最も在庫限界値に近い部品を使う製品の生産量限界値が該当する. これが条件 1, 2 である. 条件 1, 2 が該当しない場合は, 最適在庫量が, 在庫量の上下限界範囲内にあるので, 条件 3 を適用する.

**条件 1** 最もボトルネックになる部品  $i(lim)$  の在庫最適値が部品下限を下回る場合

$$q_{i(lim)}^l = \min(q_i^*) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.13)$$

(4.13) 式で定義する  $q_{i(lim)}^l$  分だけ生産が可能になる. したがって, 最もボトルネックになる部品  $i(lim)$  を使って生産する製品の最適生産量  $x_{j(lim)}^*$  は,  $x_{j(lim)}^{min}$  となる.

**条件 2** 最もボトルネックになる部品  $i(lim)$  の在庫最適値が部品上限を上回る場合

$$q_{i(lim)}^h = \min(q_i^*) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.14)$$

(4.14) 式で定義する  $q_{i(lim)}^h$  分だけ生産が可能になる. したがって, 最もボトルネックになる部品  $i(lim)$  を使って生産する製品の最適生産量  $x_{j(lim)}^*$  は,  $x_{j(lim)}^{max}$  となる.

**条件 3** 条件 1, 2 を満たす部品がなく, 最もボトルネックになる部品  $i(lim)$  の在庫最適値が部品上限・下限の中間の場合

$$q_{i(lim)}^m = \min(q_i^*) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.15)$$

となる.

(4.15) 式で定義する  $q_{i(lim)}^m$  分だけ生産が可能になる. したがって, 最もボトルネックになる部品  $i(lim)$  この部品を使って生産する製品の最適生産量  $x_{j(lim)}^*$  は,  $o_j$  となる. ここで, すべての部品  $i$  の制約式から, 最適生産台数  $x_j^*$  が全て求まれば, 手順 6 へ進む. そうでないときは手順 5 へ進む.

[手順 5] 在庫量の最適値, 上下限界値を再設定する.

ボトルネックでない部品を  $i(\neq lim)$ , 該当する部品の最適生産量を  $x_{j(\neq lim)}^* = 0$  とし, 各在庫量は以下のように値を設定し手順 4 へ戻る.

$$q_i = (g_i + h_i) - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j^* \quad (4.16)$$

$$q_i^{min} = [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})a_i] - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j^* \quad (4.17)$$

$$q_i^{max} = [\alpha_{s_i}(g_i + h_i) + (1 - \alpha_{s_i})b_i] - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j^* \quad (4.18)$$

[手順 6] 製品注文数量総利益を求める.

手順 5 までの過程で, 各条件内での各製品  $j$  の生産台数  $x_j$  を求めた. 生産台数  $x_j$  から, 各製品  $j$  の製品注文数量利益を求め, 製品注文数量総利益を求める. 各製品  $j$  の製品注文数量利益  $V_j(x_j)$  は, (4.4) 式により求められる. 製品注文数量総利益はそれを基にして,  $\sum_{j=1}^n V_j(x_j)$  と求められる.

以上のように, このモデルにおける解法は, 3点見積もりして幅を持たせた在庫, 製品注文数量, 生産能力制約条件を用いたことと, 最優先すべき制約条件を選択できるようにしたところに特徴がある.

### 4.4 数値例

ここで, 今まで述べてきた生産計画作成問題に対して, 具体的に数字を与えた例題を示す. ここでは, 製品種類数3, 部品種類数4の生産計画作成問題を以下のように決める. 各製品A, B, Cには, それぞれ部品a, b, c, dを使用し, その使用量が部品使用数であることを, 図4.5に示す.

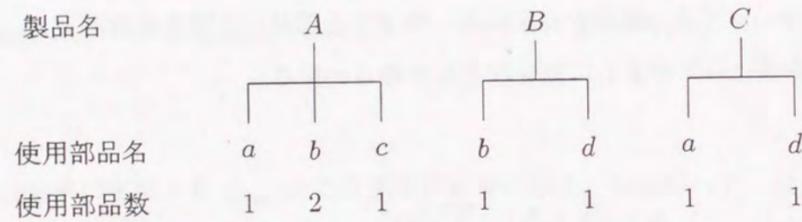


図4.5 部品構成

在庫量  $s_i(\sum \delta_{ij}x_j)$  は, 以下のように計算する.

$$a \quad \sum \delta_{1j}x_j = x_1 + x_3$$

$$b \quad \sum \delta_{2j}x_j = 2x_1 + x_2$$

$$c \quad \sum \delta_{3j}x_j = x_1$$

$$d \quad \sum \delta_{4j}x_j = x_2 + x_3$$

#### 1. 在庫適正度

各部品の在庫下限, 在庫上限を(4.1)式に代入して, 各在庫適正度のメンバシップ関数を, 図4.6のように示す.

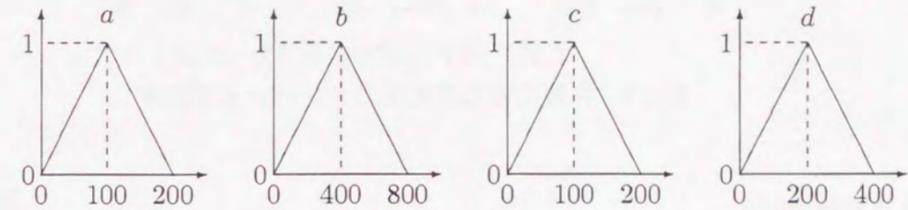


図4.6 各在庫適正度のメンバシップ関数

#### 2. 製品注文数量達成度

各製品の注文数量下限, 注文数量上限を以下のように定め, これらを(4.2)式に代入して, 各製品注文数量達成度のメンバシップ関数を設定し, 図4.7に示す.

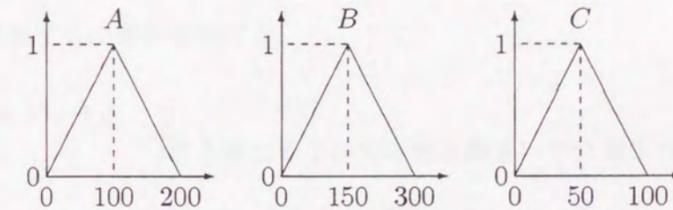


図4.7 各製品注文数量達成度のメンバシップ関数

#### 3. 製造能力達成度

各製品の製造下限, 製造上限を定め, これらを(4.3)式に代入して, 各製造能力達成度のメンバシップ関数を設定し, 図4.8に示す.

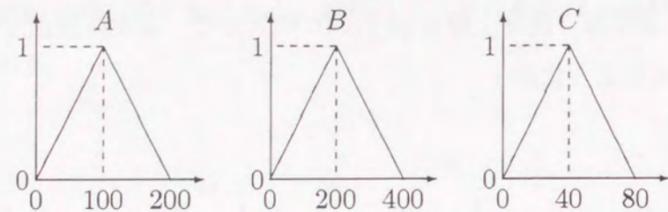


図4.8 各製造能力達成度のメンバシップ関数

## 4. 製品注文数量利益

ここで, 各製品1台当たりの粗利額を次のように設定する.

$$A : 15,000 \quad , \quad B : 5,000 \quad , \quad C : 20,000$$

さらに, 以上の各条件に適切な満足度を与えることにより, 各製品の生産台数を求める. (4.4)式に代入することによって, 各製品注文数量利益額を求め, 最終的に製品注文数量総利益を求めることになる. ただし, 本例題では制約条件の $\alpha$ -カットの値は0.1ポイントずつ下げることとする.

## 主問題の解法

[手順1] それぞれの満たすべき満足度を次のように与える.

$$s_i \geq 0.7, \quad t_j \geq 0.8, \quad u_j \geq 0.8$$

[手順2] ここでは最優先条件 $P$ を在庫適正度 $s_i$ とする.

[手順3] 最優先条件 $P$ 以外の制約条件の $\alpha$ -カット集合を求める.

製品注文数量達成度は $t_j \geq 0.8$ より,

$$A_{t_1} = \{x_1 : 80 \leq x_1 \leq 120\}$$

$$A_{t_2} = \{x_2 : 120 \leq x_2 \leq 180\}$$

$$A_{t_3} = \{x_3 : 40 \leq x_3 \leq 60\}$$

製造能力達成度は $u_j \geq 0.8$ より,

$$A_{u_1} = \{x_1 : 80 \leq x_1 \leq 120\}$$

$$A_{u_2} = \{x_2 : 160 \leq x_2 \leq 240\}$$

$$A_{u_3} = \{x_3 : 32 \leq x_3 \leq 48\}$$

[手順4]  $P = s_i$ であるので, 4.3節の検証の手順に従う.

## 検証の手順

[手順1]  $A_{t_j} \cap A_{u_j}$ を求めると次のようになる.

$$A_{t_1} \cap A_{u_1} = \{x_1 : 80 \leq x_1 \leq 120\}$$

$$A_{t_2} \cap A_{u_2} = \{x_2 : 160 \leq x_2 \leq 180\}$$

$$A_{t_3} \cap A_{u_3} = \{x_3 : 40 \leq x_3 \leq 48\}$$

[手順2] 初期値を $P = 1$ とする.

[手順3] 解が存在をするか否か検証する.

1. 最優先条件 $P = 1$ のとき

$$\sum \delta_{1j} x_j = 100 \quad , \quad \sum \delta_{2j} x_j = 400$$

$$\sum \delta_{3j} x_j = 100 \quad , \quad \sum \delta_{4j} x_j = 200$$

となる. しかし, 部品 $a$ については,

$$1 \times x_1^{\min} + 1 \times x_3^{\min} = 120 > \sum \delta_{1j} x_j = 100$$

より不能.

2.  $P = 0.9$ のときも同様に不能

3.  $P = 0.8$  のとき

$$\text{部品 } a \quad 80 \leq \sum \delta_{1j} x_j \leq 120$$

$$\text{部品 } b \quad 320 \leq \sum \delta_{2j} x_j \leq 480$$

$$\text{部品 } c \quad 80 \leq \sum \delta_{3j} x_j \leq 120$$

$$\text{部品 } d \quad 160 \leq \sum \delta_{4j} x_j \leq 240$$

となり実行可能.

[手順4] 最も制限に近いのは(4.12)式で計算すると部品  $a$  であり  $q_1^* = 20$  である. したがって条件1が成立するので, 部品  $a$  に該当する製品  $A$  と製品  $C$  の生産台数が決定する.

$$q_1^* = \min(|100 - 80|, |100 - 120|) = 20$$

から条件1が成立する.

$$A_{t_1} \cap A_{u_1} = \{x_1 : 80 \leq x_1 \leq 120\}$$

$$A_{t_3} \cap A_{u_3} = \{x_3 : 40 \leq x_3 \leq 48\}$$

から

$$x_{1(lim)}^* = 80, \quad x_{3(lim)}^* = 40$$

となる.

[手順5] 部品在庫量を(4.16),(4.17),(4.18)式により再設定する.

$$q_1 = 0, \quad q_1^{min} = -20, \quad q_1^{max} = 20$$

$$q_2 = 240, \quad q_2^{min} = 160, \quad q_2^{max} = 320$$

$$q_3 = 20, \quad q_3^{min} = 0, \quad q_3^{max} = 40$$

$$q_4 = 160, \quad q_4^{min} = 120, \quad q_4^{max} = 200$$

手順4へ戻る.

ここで手順4, 5を繰り返すと

$$x_{2(lim)}^* = 160$$

となる.

[手順6] 各製品の注文数量利益額は,

$$\text{製品 } A \quad V_1(x_1) = 1,200,000$$

$$\text{製品 } B \quad V_2(x_2) = 800,000$$

$$\text{製品 } C \quad V_3(x_3) = 800,000$$

となり, これより製品注文数量総利益は

$$\sum_{j=1}^3 V_j(x_j) = 2,800,000$$

となる.

ここで, この問題における各要因の最優先条件の違いによる結果の対比をする. アンダーラインは, 各要因のそれぞれの最優先条件に対する最も低い満足度を示す.

1. 最優先条件をそれぞれ  $s_i$ ,  $t_j$ ,  $u_j$  とした場合の在庫適正度  $s_i$  の値

表 4.1 在庫適正度  $s_i$  の値

	$s_i$		$t_j$		$u_j$	
	使用量	満足度	使用量	満足度	使用量	満足度
部品 $a$	120	<u>0.8</u>	130	<u>0.7</u>	130	<u>0.7</u>
部品 $b$	320	0.8	324	0.81	340	0.85
部品 $c$	80	0.8	82	0.82	90	0.9
部品 $d$	200	1.0	208	0.96	200	1.0
単純平均満足度	—	0.85	—	0.82	—	0.86

2. 最優先条件をそれぞれ  $s_i$ ,  $t_j$ ,  $u_j$  とした場合の製品注文数量達成度  $t_j$  の値

表 4.2 製品注文数量達成度  $t_j$  の値

	$s_i$		$t_j$		$u_j$	
	生産台数	満足度	生産台数	満足度	生産台数	満足度
製品 $A$	80	<u>0.8</u>	82	<u>0.82</u>	90	0.9
製品 $B$	160	0.93	160	0.93	160	0.93
製品 $C$	40	0.8	48	0.96	40	<u>0.8</u>
単純平均満足度	—	0.91	—	0.9	—	0.88

3. 最優先条件がそれぞれ  $s_i$ ,  $t_j$ ,  $u_j$  とした場合の製造能力達成度  $u_j$  の値

表 4.3 製造能力達成度  $u_j$  の値

	$s_i$		$t_j$		$u_j$	
	生産台数	満足度	生産台数	満足度	生産台数	満足度
製品 $A$	80	<u>0.8</u>	82	0.82	90	0.9
製品 $B$	160	0.8	160	0.8	160	<u>0.8</u>
製品 $C$	40	1.0	48	<u>0.8</u>	40	1.0
単純平均満足度	—	0.87	—	0.81	—	0.9

表 4.1, 4.2, 4.3 を各優先条件毎に縦にとおして見ると, 必ずしも満足度の単純平均が優先条件順にならないこともある. しかし, 各々の最低の満足度 (アンダーライン) に関しては, 在庫では表 4.1 の  $s_i$ , 製品注文数量では表 4.2 の  $t_j$ , 製造能力では表 4.3 の  $u_j$  が該当する最優先条件は, 必ず少なくとも他のケースよりも高くなっていることがわかる.

## 4.5 おわりに

生産計画作成問題については, 在庫量, 製造能力, 注文数量達成状況の 3 制約条件についてのメンバシップ関数を定義し, このうち 1 つを最優先条件と決めて, より効率的な生産を実現できるようなモデルと解法を示した. 今後の課題としては, 最適解判定方法の簡素化と今回のような 3 制約条件の中から 1 つ最優先条件を決める方法に加えて, これらのすべてに順序関係を設定した場合にも, 対応できるような解法を研究することが課題である.

## 第5章

### 保管, 機会損失費用が不確定下での購入計画

#### 5.1 はじめに

工場や問屋などから商品を仕入れ, その製品を販売する場合に, 需要量が一定であれば, その分だけ仕入れればよいが, 現実には一定であることは少なく, 確率的に変動する. 仕入れの量が需要に比べて少なすぎると顧客を逃して利益が下がり, また, 多すぎると保管費, あるいは品質低下による損害などによって, これも利益が下がることになる. このような状況で, いったいどれだけの量をいつ仕入れるのがよいかという問題が, 在庫問題であり, これまでに多くの研究がなされ, 様々なモデルが考えられている. 在庫の維持に関する費用は通常次のようなものが考えられる.

1. 調達費 (発注費)

商品の費用と商品を手に入れるための費用の和.

2. 在庫保管費

在庫を保持するための費用で, 保険費, 税金, 倉庫の運営費などを含む.

3. 品切れ費用

商品の需要があるのにその需要を満たす在庫がないためにかかる費用.

この場合, 未納入注文とみなすか, 売り損ないとして処理することが多いが, 売り損ないの場合, その機会損失の費用をはっきりと見積もることは難しく, 従来の研究でもこの問題を扱うものはなかった. 本モデルでは機会損失のなから, 品切れ費用を不確定と考え, モデルを構築し解法を示す [27].

## 5.2 定式化

従来のモデルの代表例として, 一期間確率在庫問題である「新聞売り子問題」[50]と呼ばれている問題を示し, 本モデルとの比較をする. 「新聞売り子問題」は, 新聞を街頭で売る場面を想定し, 次のように定式化している. 新聞単位あたりの仕入れ値は  $b$  (定数), 単位あたりの利益は  $a$  (定数) とする. また, 品切れ費用を  $c$  (定数) とする. また新聞の需要量は確率変数  $Y$  に従う確率変数とする. 仕入れの数を  $x$ , 実際の需要を  $y$  とすると全体の利益は

$$e(x, y) = \begin{cases} ay - b(x - y) & (y \leq x) \\ ax - c(y - x) & (y > x) \end{cases}$$

であるので, 確率変数  $Y = y$  である確率を  $p(y)$  とすると, 期待利益関数  $E(x)$  は次のようになる [50].

$$E(x) = \sum_{y=0}^{\infty} e(x, y)p(y) = \sum_{y=0}^x \{ay - b(x - y)\}p(y) + \sum_{y=x+1}^{\infty} \{ax - c(y - x)\}p(y)$$

また

$$E(x-1) = \sum_{y=0}^{x-1} \{ay - b(x - y)\}p(y) + \sum_{y=x}^{\infty} \{ax - c(y - x)\}p(y)$$

$$\begin{cases} E(x) - E(x-1) = -b \sum_{y=0}^{x-1} p(y) + (a+c) \sum_{y=x}^{\infty} p(y) = (a+c) - (a+b+c) \sum_{y=0}^{x-1} p(y) \\ E(x+1) - E(x) = (a+c) - (a+b+c) \sum_{y=0}^x p(y) \end{cases}$$

であることより, 次のことが成り立つ.

$$\begin{cases} E(x) \geq E(x-1) \Leftrightarrow \sum_{y=0}^{x-1} p(y) \leq \frac{a+c}{a+b+c} \\ E(x+1) \leq E(x) \Leftrightarrow \sum_{y=0}^x p(y) \geq \frac{a+c}{a+b+c} \end{cases}$$

すなわち, 最適解  $x^*$  は次の条件を満たす.

$$\sum_{y=0}^{x^*-1} p(y) \leq \frac{a+c}{a+b+c} \leq \sum_{y=0}^{x^*} p(y)$$

次に品切れ費用が次のようなメンバシップ関数に制限される  $L$  型のファジイ数 [15] であると仮定したモデルを考える.

$$\mu_c(t) = \max\{L(t-m), 0\}$$

ここで  $m$  を正の実数とし, 型関数  $L: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は以下の条件を満たすとする.

1.  $L(t) = L(-t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$
2.  $L(t) = 1$  iff  $t = 0$
3.  $L$  は上で  $[0, +\infty)$  上で広義単調減少
4.  $t_0 = \inf\{t > 0 | L(t) = 0\}$  とおくと,  $0 < t_0 < +\infty$  が成り立つ.

期待利益関数は

$$E(x) = \sum_{y=0}^x \{ay - b(x - y)\}p(y) + \sum_{y=x+1}^{\infty} \{ax - c(y - x)\}p(y)$$

であるから,  $c$  が  $L$  ファジイ数であるとき, 拡張原理 [付録 A.1], [定義 A.6] により,  $E(x)$  のメンバシップ関数は次のようになる.

$$\mu_{E(x)}(t) = \max\left\{L\left(\frac{t - m\alpha'(x) - \beta(x)}{\alpha'(x)}\right), 0\right\}$$

ここで

$$\alpha'(x) = - \sum_{y=x+1}^{\infty} (y-x)p(y), \quad \beta(x) = ax + (a+b) \left\{ \sum_{y=0}^x yp(y) - x \sum_{y=0}^x p(y) \right\}$$

である.

## 5.3 ファジィ最小オーダー

期待利益関数を次のように置き換えて,  $\tilde{C}(x) = -\tilde{E}(x)$  になる  $\tilde{C}(x)$  のファジィ最小オーダーを導入する. 以下の式で  $\tilde{C}(x)$  のメンバシップ関数  $\mu_{\tilde{C}(x)}$  が与えられる.

$$\mu_{\tilde{C}(x)} = \max \{L((t - m\alpha(x) + \beta(x)) / \alpha(x)), 0\}$$

ここで

$$\alpha(x) = -\alpha'(x) = \sum_{y=x+1}^{\infty} (y-x)p(y)$$

文献[5]に従って, 以下の  $L$  型ファジィ数上のファジィ最小オーダーを導入する.

仮定

以下の条件を満たすメンバシップ関数  $\mu_{\tilde{A}}$  をもつ, すべてのファジィ数  $\tilde{A}$  に限定する.

1.  $\mu_{\tilde{A}}$  は実数  $R$  から閉区間  $[0, 1]$  に射影する.
2. 次のような唯一の実数  $m$  が存在する:
  - (a)  $\mu_{\tilde{A}}(m) = 1$
  - (b)  $\mu_{\tilde{A}}$  は  $[-\infty, m]$  で非減少関数である.
  - (c)  $\mu_{\tilde{A}}$  は  $[m, \infty]$  で非増加関数である.

この実数  $m$  を  $\tilde{A}$  の中心と呼び,  $m_{\tilde{A}}$  で示す.

定義1 (ファジィ順序)

2つファジィ数  $\tilde{A}, \tilde{B}$  について  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  であるとは, 以下のように定義する.

1.  $m_{\tilde{A}} \leq m_{\tilde{B}}$ .
2. 以下のような実数  $d$  が存在する
  - (a)  $m_{\tilde{A}} \leq d \leq m_{\tilde{B}}$
  - (b)  $\mu_{\tilde{A}}(t) \geq \mu_{\tilde{B}}(t)$  (すべての  $t < d$ )
  - (c)  $\mu_{\tilde{A}}(t) \leq \mu_{\tilde{B}}(t)$  (すべての  $t > d$ )

モデルの簡略化のため, この条件をみたすメンバシップ関数

$$\mu_{\tilde{A}}(t) = \max \{L((t - m) / \alpha), 0\}, t \in R$$

をもつ  $L$  ファジィ数を  $\tilde{A} = (m, \alpha)_L$  として表す.

定理 5.1 文献[14]より, 2つの  $L$  ファジィ数  $\tilde{A} = (m, \alpha)_L, \tilde{B} = (n, \beta)_L$  に対して

$$\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow t_0|\alpha - \beta| \leq n - m$$

ここで,  $\leq$  は半順序関係を示す. したがって, 2つのファジィ数  $\tilde{A}, \tilde{B}$  については  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  または  $\tilde{A} \geq \tilde{B}$  か, あるいはどちらも起こらないかである.

定義2 (ファジィ順序)

任意の  $0 \leq \lambda \leq 1$  なる  $\lambda$  を定める.  $L$  ファジィ数  $\tilde{A} = (m, \alpha)_L, \tilde{B} = (n, \beta)_L$  について, パラメータ  $\lambda$  をもつ順序関係  $\leq_{\lambda}$  を定義する.

$$\tilde{A} \leq_{\lambda} \tilde{B} \Leftrightarrow \begin{cases} (a) t_0|\alpha - \beta| \leq n - m & \text{または} \\ (b) \lambda t_0|\alpha - \beta| \leq n - m \leq t_0|\alpha - \beta| & \text{または} \\ (c) |n - m| < \lambda t_0|\alpha - \beta| & \beta > \alpha \end{cases}$$

これは, 全順序関係となる.

## 5.4 最適購入量

第5.3節のファジィ順序に基づいて, 最適購入量を計算する.

$$\begin{aligned} C(x) &= m\alpha(x) - \beta(x) \\ &= m \left\{ \sum_{y=x+1}^{\infty} yp(y) - x \sum_{y=x+1}^{\infty} p(y) \right\} - ax - (a+b) \left\{ \sum_{y=0}^x yp(y) - x \sum_{y=0}^x p(y) \right\} \end{aligned}$$

とすると

$$C(x) - C(x-1) = b \sum_{y=0}^{x-1} p(y) - (m+a) \sum_{y=x}^{\infty} p(y) = (m+a+b) \sum_{y=0}^{x-1} p(y) - (m+a)$$

$$C(x+1) - C(x) = -(a+m) + (a+b+m) \sum_{y=0}^x p(y)$$

$$\alpha(x) - \alpha(x-1) = -\sum_{y=x}^{\infty} p(y)$$

であるが, ここで次の定理が成り立つ.

定理 5.2  $F(x) = \sum_{y=0}^x p(y)$  とし,  $x^l, x^u$  をそれぞれ

$$F(x-1) \leq \frac{a+m}{a+b+m}, F(x) \geq \frac{m+a+t_0}{a+b+m+t_0}$$

を満たす仕入れ量とすると曖昧な費用をもつ場合に, ファジィ順序  $\leq$  の意味で, 最適仕入れ量となる  $x^f$  は,  $x^l \leq x^f \leq x^u$  になる.

証明

$$\begin{aligned} & C(x-1) - C(x) - t_0|\alpha(x-1) - \alpha(x)| \\ &= b \sum_{y=0}^{x-1} p(y) - (m+a) \sum_{y=x}^{\infty} -t_0 \sum_{y=x}^{\infty} p(y) \\ &= -(m+a+b+t_0) \sum_{y=0}^{x-1} p(y) + (m+a+t_0) \end{aligned}$$

であり

$$\frac{m+a+t_0}{m+a+b+t_0} > \frac{m+a}{m+a+b}$$

であるので, 定理 5.1 より

$$\sum_{y=0}^{x-1} p(y) \leq \frac{a+b}{a+b+m}$$

が成り立つならば

$$\tilde{C}(x) \leq \tilde{C}(x-1)$$

が成り立つ.

一方

$$\begin{aligned} & C(x+1) - C(x) - t_0|\alpha(x+1) - \alpha(x)| \\ &= (m+a+b+t_0) \sum_{y=0}^x p(y) - (m+a+b+t_0) \end{aligned}$$

となることから

$$\sum_{y=0}^{x-1} p(y) \leq \frac{m+a+t_0}{m+a+b+t_0}$$

が成り立つならば

$$\tilde{C}(x) \leq \tilde{C}(x+1)$$

が成り立つ.

これら2つの不等式から, 最適仕入れ量  $x^f$  は  $x^l \leq x^f \leq x^u$  になる. Q.E.D.

ここで, 古典的な新聞売り子の問題における単位あたりの品切れ費用が固定で, 中心  $m$  と同じ値である場合の最適解を  $x_m$  とすると  $x_m$  は次の不等式を満たす.

$$F(x_{m-1}) \leq \frac{m+a}{m+a+b} \quad \text{かつ} \quad F(x_m) \geq \frac{m+a}{m+a+b}$$

一方, 中心が  $m$  の  $L$  ファジィ数とすると

$$\frac{m+a+t_0}{m+a+b+t_0} \geq \frac{a+m}{a+m+b}$$

より,  $x_f$  は  $x_m$  以上であることがわかる. さらに,  $x_f$  はファジィマックス順序 [15] の概念では最適解はただ一つに決まらない. そこで定理 5.2 で定義した  $x^f, x^l, x^u$  に,  $\lambda$ -ファジィマックス順序 [15] を用いて,  $x_\lambda^f, x_\lambda^l, x_\lambda^u$  を (すなわち, 対応する  $x^f, x^l, x^u$  の定義で  $t_0$  のところを  $\lambda t_0$  で置き換える) 定義すると, 以下の定理が成り立つ.

定理 5.3  $x_\lambda^u$  を

$$F(x) \geq \frac{m+a+\lambda t_0}{m+a+b+\lambda t_0}$$

を満たす最小の整数  $x$  とすると,  $x_\lambda^f$  は  $x_\lambda^l \leq x_\lambda^f \leq x_\lambda^u$  になる.

証明

定理 5.2 の不等式の  $t_0$  を  $\lambda t_0$  に置き換えれば明らかである.

$0 \leq \lambda \leq 1$  に対して

$$\frac{m+a+\lambda t_0}{m+a+b+\lambda t_0} \leq \frac{m+a+t_0}{m+a+b+t_0}$$

が成り立つので,  $x_\lambda^f$  はふつうのファジィ順序の概念では最適であるが, 逆は必ずしも成り立つとは限らない.  $\lambda = 0$  のときの最適解  $x_0^f$  は一つ求まり, この場合は  $x^l = x_0^f$  となるため  $x_m$  に一致する. Q.E.D.

### 5.5 数値例

$a = 200, b = 300$ とし, 品切れ費用を以下のようなLファジィ数とする.

$$\max\{L(t - 100), 0\}$$

したがって,  $t_0 = 100$ とする.

また, 需要量と確率は以下の表のようにする.

表5.1 需要量と確率

$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$p(4)$	$p(5)$	$p(6)$	$p(7)$	$p(8)$	$p(9)$	$p(10)$	$p(11)$	$p(12)$
0.03	0.03	0.05	0.08	0.11	0.12	0.14	0.14	0.12	0.10	0.04	0.02	0.02

曖昧性を含まないモデルでは,

$$\sum_{y=0}^{x^*-1} p(y) \leq \frac{a+c}{a+b+c} \leq \sum_{y=0}^{x^*} p(y)$$

を満たす  $x^*$  が解であり,  $(a+c)/(a+b+c) = 300/600 = 1/2$  より, 上の表から最適解は  $x^* = 6$  となる.

曖昧性を含んだモデルでは,  $(m+a+t_0)/(m+a+b+t_0) = 400/700 = 4/7$  より, 最適解は  $x^* = 7$  となって, 曖昧性を含まないモデルの最適解より大きくなる. したがって, 品切れ費用が確定できない条件は, 確定できる場合より, 品切れに対して余裕をもった発注をすることが必要になる.

### 5.6 補修部品在庫モデル

本節では, 購入されたある製品群がある期間たった時点で, 部品交換が発生する状況について考える. 交換部品の発生確率を  $p(t)$  ( $t$ 期の補修部品発生確率) とし, ある製品の特定補修部品の交換率が不確定としてファジィ数とする. さらに保管費用や, 品切れ費用のような機会損失も不確定とし, ファジィ数で表わす. このような条件下で, 費用最小なる

最適補修部品在庫量を求めるモデルである. このモデルの特徴は, 上記の3つのファジィ数を用いていること, 最適補修部品在庫量が理論的に一つの式で表現できることである.

以下補修部品在庫モデルの概念を示す. まず, 補修部品が各期間毎に発生する確率は図示すると, 図5.1のように表わすことができる [44].

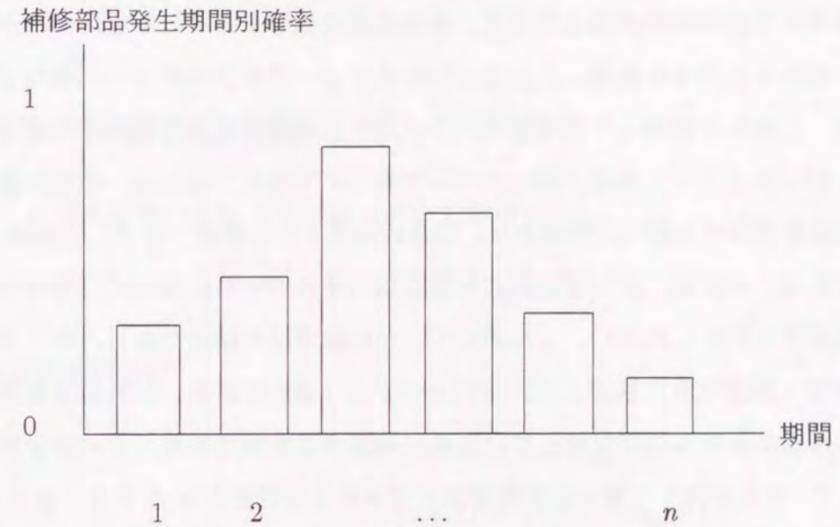


図5.1 補修部品発生確率

この分布は類似商品の補修部品発生確率を, ある期間データ収集して度数分布にしたものである. モーターサイクルの例で検証してみると図5.1のようなほぼ一定の形の分布になる. 補修部品在庫を期初に一括発注した場合の  $j$ 期の在庫は(5.1)式で表現できる.

$$\bar{u}(j) = \bar{u}(j-1) - \bar{r} \sum_{i=1}^n q_i \cdot p(j-i+1) \tag{5.1}$$

ここで

- $q_i$ : 第  $i$ 期の生産量
- $\bar{u}(j)$ : 第  $j$ 期の補修部品期間別在庫量
- $n$ : 生産打ち切り時点
- $p(t)$ :  $t$ 期の製品群の補修部品発生期間別確率
- $\bar{r}$ : ある製品の特定部品の補修部品交換率

すなわち,  $j$ 期の在庫量は,  $j-1$ 期の在庫量から, 生産開始から打ち切り時点までの生産量に  $j$ 期までの特定補修部品の交換数量の総計を減じたものである.

補修部品交換率は生産した製品のうち, どれだけ補修部品交換が発生するかを示しているが, 不確定であるとしてファジィ数  $\tilde{r}$  で表した. つぎに補修部品の在庫量は生産打ち切り時点での発注量に依存し,  $n$ 時点の在庫量はこの時点での補修部品発注量になる. 本モデルでは, ここで最適な補修部品発注量を考える. 補修部品を保管するには, 倉庫スペース, 倉庫の賃貸料, 棚卸しにかかる経費, 入出庫にかかるフォークリフトのリース料など様々な経費がかかる. これらを総称して保管料といい, 様々な経費の合算であり, 不確定な値であるのでファジィ数として, 在庫1個あたりに換算し  $\tilde{a}$  で表す. さらに, 品切れ費用はユーザが補修部品を要求する際に, 在庫がない場合の損失として想定できる. これは, 保管費より不確定である. 例えば, ユーザが他社製品を購入するかもしれないし, 当社のサービスの悪さを流布するかもしれない. したがって, その費用は不確定である. そこでこの品切れ費用を在庫1個あたりに換算して, やはりファジィ数  $\tilde{c}$  で表す. 在庫保管費用と, 品切れ費用は補修部品をある期間保管している間に発生する費用であり, その総費用が問題になる. ここで, 予め発注して置いた補修部品がゼロになる時期を  $n^*$  とする. また, 補修部品保管打ち切り時期  $m$  とすると, (5.2) 式のような関係式が成り立つ.

$$n \leq n^* \leq m \quad (5.2)$$

次に, 保管打ち切り時期の在庫をゼロとする場合, 各期の在庫量を  $\bar{u}(j)$  とすると, (5.3) 式のような関係がある.

$$u(j) = \bar{u}(j) + u(n^*) \quad (5.3)$$

総費用については 保管費用, 品切れ費用の和として表わせるので (5.4) 式になる.

$$\tilde{f}(n^*) = \tilde{a} \sum_{j=1}^{n^*} \bar{u}(j) + \tilde{c} \sum_{j=n^*+1}^m \bar{u}(j) \quad (5.4)$$

(5.4) 式の右辺の第1項は総保管費用を, 第2項は総品切れ費用を表す. したがって本モデルの求めるべき解は, 総費用  $\tilde{f}(n^*)$  を最小にする最適補修部品在庫量  $\bar{u}(0)$  であり, (5.4) 式を最小にする各期の在庫を求めることと等しい.

従来の研究との相違は, 補修部品発生率, 在庫保管費用, 品切れ費用がいずれもあいまいな条件下で, 最適補修部品在庫量を求めるところである. 次に3つのファジィ数がそれぞれ, 総費用にどの位影響を与えるかを判定する問題を考える. どのファジィ数の予測精度を上げることが, 総費用を最小にする上で有効かを知る手がかりになる. 各ファジィ数の1単位当たりの変位量が, 結果の変位量にどれだけ影響するかを定量的に求めれば, これらの判断が可能となる.

## 5.7 補修部品在庫モデルの解法

(5.1) 式から, (5.5) 式で定義される  $s_j$  を用いると,

$$s_j = \sum_{i=1}^n q_i \cdot p(j-i+1) \quad (5.5)$$

(5.6) 式を得る.

$$\bar{u}(n) = \bar{u}(0) - \tilde{r} \cdot s_n$$

$$\bar{u}(n+1) = \bar{u}(n) - \tilde{r} \cdot s_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\bar{u}(m-1) = \bar{u}(m-2) - \tilde{r} \cdot s_{m-1}$$

$$\bar{u}(m) = \bar{u}(m-1) - \tilde{r} \cdot s_m \quad (5.6)$$

ここで  $m$  期に在庫が丁度ゼロになるとすると, (5.6) 式は (5.7) 式となる.

$$\begin{aligned}
 u(m) &= 0 \\
 u(m-1) &= \tilde{r} \cdot s_m \\
 u(m-2) &= \tilde{r}(s_m + s_{m-1}) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 u(0) &= \tilde{r} \sum_{j=n}^m s_j \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

すなわち,  $\bar{u}(j)$  と  $u(j)$  の違いは(5.6)式と(5.7)式に示すように, (5.6)式が  $m$  期以前に在庫が品切れを起こすことを想定した  $j$  期の在庫量を, (5.7)式は  $m$  期まで品切れが起きない場合の在庫量を示す. (5.7)式は在庫が各期でゼロにならない, すなわち品切れが起らないと仮定したときの在庫量を計算している. しかし, 多少品切れを起こしても総費用が最小になることを容認すると, (5.3)式から分かるように(5.7)式の各項から,  $u(n^*)$  を引くと(5.8)式になる.

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(m) &= -u(n^*) \\
 \bar{u}(m-1) &= \tilde{r} \cdot s_m - u(n^*) \\
 \bar{u}(m-2) &= \tilde{r}(s_m + s_{m-1}) - u(n^*) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \bar{u}(0) &= \tilde{r} \sum_{j=n}^m s_j - u(n^*) \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

このとき  $n^*$  期で在庫がゼロになり, それ以降品切れを起こす. この状態は(5.9)式となる.

$$\bar{u}(m) \leq \bar{u}(m-1) \leq \dots \leq \bar{u}(n^*) = 0 \leq \dots \leq \bar{u}(n+1) \leq \bar{u}(n) \leq \bar{u}(0) \tag{5.9}$$

定理5.4

(5.4)式の総費用を最小にする補修部品発注量は, (5.10)式を満足する  $n^*$  を用いて(5.11)式のように求まる.

$$n^* = \tilde{c} \cdot (m+n-1) / (\tilde{a} + \tilde{c}) / (n-1) \tag{5.10}$$

$$\bar{u}(0) = \tilde{r} \sum_{j=n}^m s_j - u(n^*) \tag{5.11}$$

証明

(5.4)式から分かるように  $u(n^*)$  が大きくなれば, (5.4)式の右辺第1項の総保管費用が単調減少するが, 第2項の総品切れ費用が単調増加する. 逆に  $u(n^*)$  が小さくなれば, (5.4)式の第1項が単調増加し, 第2項が単調減少する. したがって, 保管費用, 品切れ費用の和である総費用は,  $u(n^*)$  について下に凸の関数になり, 第1項, 第2項の関数の交点が総費用最小の最適解になる. (5.4)式を満たす  $n^*$  は, 期間を  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{c}$  で逆比例配分する期の分岐点であり, (5.4)式を最小にすることが分かる. したがって, (5.4)式の第1項と第2項が等しくなる  $n^*$  期は(5.10)式で求まる. 初期発注量は,  $n^*$  期で在庫がゼロになる発注量であるから, (5.11)式になることが分かる. Q.E.D.

5.8 数値例

モデルと解法の数値例を示す. ある製品の生産量を表5.1に補修部品発生確率分布を表5.2に示す.

表5.2 生産量

	1期	2期	3期
生産量	2000	4000	1000

表5.3 補修部品発生確率

	$n+1$ 期	$n+2$ 期	$n+3$ 期	$n+4$ 期	$n+5$ 期
補修部品発生確率	0.1	0.4	0.2	0.2	0.1

ここで補修部品交換率 $\tilde{r}$ %を三角型ファジィ数 $\tilde{N}(4, 5, 6)$ とし, 生産打ち切り時点 $n$ は3期とする. 保管費用 $\tilde{a}$ 円/個, 品切れ費用 $\tilde{c}$ 円/個は補修部品交換率と同様に三角型ファジィ数とし,  $\tilde{N}(5, 10, 15)$ ,  $\tilde{N}(20, 30, 40)$ とする.  $m$ は補修部品交換率と生産量の各期の設定から8期となる. 次に(5.5)式から $s_j$ を求めると表5.3のようになる.

表5.3 各期の $s_j$ 一覧

	4期	5期	6期	7期	8期
$s_j$	2100	1600	1200	600	100

さらに在庫量を(5.7)式から求めると表5.4のようになる.

表5.4 補修部品交換率と在庫量 $u(j)$ の一覧

	3期	4期	5期	6期	7期	8期
4%	224	140	76	28	4	0
5%	280	175	95	35	5	0
6%	336	210	114	42	6	0

つぎに, (5.10)式から在庫をゼロにする $n^*$ 期を求める.

$$\tilde{N}(20, 30, 40) \cdot (8 - 3 + 1) = (n^* - (3 - 1)) \cdot (\tilde{N}(5, 10, 15) + \tilde{N}(20, 30, 40))$$

$$\tilde{N}(20, 30, 40) \cdot 6 = (n^* - 2) \cdot \tilde{N}(25, 40, 55)$$

$$(n^* - 2) = \tilde{N}(2.18, 4.5, 9.6)$$

$$n^* = \tilde{N}(4.18, 6.5, 11.6)$$

ここで数値を切り上げて

$$n^* = \tilde{N}(5, 7, 12)$$

として $n^*$ が求まる. さらに(5.10)式, 表5.4から補修部品発注量 $\bar{u}(0)$ を求める. ただし, 8期で補修部品保存期間が打ち切りなので12期は計算しない.

$$\begin{aligned} \bar{u}(0) &= \tilde{N}(4, 5, 6) \cdot \sum_{j=3}^8 s_j - u(n^*) \\ &= \tilde{N}(4, 5, 6) \cdot 5600 - u(\tilde{N}(5, 7, 12)) \\ &= \tilde{N}(148, 275, 336) \end{aligned}$$

以上の結果を(5.4)式に代入すると総費用は以下のとおりになる.

5期で品切れになる場合は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(5) &= \tilde{N}(5, 10, 15) \cdot \tilde{N}(212, 265, 318) + \tilde{N}(20, 30, 40) \cdot \tilde{N}(196, 245, 294) \\ &= \tilde{N}(1060, 2650, 4770) + \tilde{N}(3920, 7350, 11760) \\ &= \tilde{N}(4980, 10000, 16530^{***}) \end{aligned}$$

となる.

7期で品切れになる場合は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(7) &= \tilde{N}(5, 10, 15) \cdot \tilde{N}(452, 565, 678) + \tilde{N}(20, 30, 40) \cdot \tilde{N}(4, 5, 6) \\ &= \tilde{N}(2260, 5650, 10170) + \tilde{N}(80, 150, 240) \\ &= \tilde{N}(2340^*, 5800^{**}, 10410) \end{aligned}$$

となる.

ここで解を検討すると, 次のようになる. なお, 初期発注量は(5.11)式で求める.

1. 最も小さい総費用は7期まで補修部品を保管し, 補修部品交換率4%で220個の発注をする場合で, 保管料5円/個, 品切れ20円/個のとき, 総費用は2,340円になる. (\*の解)
2. 中間の総費用は, 7期まで補修部品を保管し, 補修部品交換率5%で275個発注をし, 保管料5円/個, 品切れ30円/個の場合で, 総費用は5,800円になる. (\*\*の解)

3. 最大の総費用は, 5期まで補修部品を保管し, 補修部品交換率7%で222個発注をし, 保管料15円/個, 品切れ40円/個の場合で総費用は16,530円になる. (\*\*\*)の解)

ここで, 補修部品発生率, 保管費用, 品切れ費用の単位当たりの変化量が解に及ぼす影響を検討する. 定理5.2から本例題では, 5期, 7期に品切れが発生する場合に, 補修部品交換率, 保管費用, 品切れ費用の順に(5.4)式の総費用に影響する. 保管費用10円, 品切れ費用30円で計算すると補修部品交換率が1%違うと表5.5の結果を得る. このことから, 補修部品交換率の予測精度, 保管費用の計算, 品切れ費用の計算の順で, 予測及び計算精度を上げていかなければならないことが分かる.

表5.5 補修部品交換率の総費用への影響度

	計算式	総費用の変位
5期	$10 \times 53 + 30 \times 47$	1940円
7期	$10 \times 113 + 30 \times 1$	1160円

## 5.9 おわりに

第5.2節では, 機会損失をファジィ数とし, 5.6の補修部品在庫問題の補修部品交換率, 保管費用, 品切れ費用にファジィ数としモデルを構築し, 効果的解法を示した. 従来のモデルと解法では, 品切れ, 保管費用が確定として最適解を求めている. 不確定状況下で適用する場合は, 複数の条件を設定し, それぞれの解を比較検討する必要がある. 本章のモデルでは, 不確定な条件をファジィ概念化し, モデル構築するため, 最適解が直接求めることができる.

本章では, 第4章までの研究のように解法が多段階の手順になることを想定したが, 定理5.2, 5.3, 5.4のように簡単な数式で, 論理的に解けることが分かった. さらに, 補修部品在庫問題では, 各ファジィ数の変化が総費用に与える影響度も算出できた. 今後は, 発注する補修部品のリードタイムが総費用に与える影響について, 研究することを考えている.

## 第6章

### 結論

本研究では, 現実の生産管理システムの諸問題から, 以下の基本的問題を取り上げた.

- (1) 不足時間, 人員構成を考慮した人員配分計画
- (2) 資源制約, 納期が不確定下でのスケジューリング
- (3) 需要, 資源制約が不確定下での生産計画
- (4) 保管, 機会損失費用が不確定下での購入計画

(1),(3)の問題は, 制約条件, 目的関数が確定状況下では数理計画法の多制約ナップサック問題として研究されている[21],[45]. (2)の生産スケジューリングは, 黒田[46]によって概観し, 大別されている. (4)は決定論的在庫モデルで, 児玉[31]によって概観されている. しかし, これらはいずれも制約条件, 目的関数が確定状況下での研究であり, 需要を確率変動[31]と扱う研究が一部にある. 本研究では, 生産管理システムの代表的問題である(1)~(4)の問題について, 現実的な観点で, 制約条件, 目的関数を設定し, これらが不確定な場合について数理モデルを構築し, 効果的解法を示した.

以下, 第2章から第5章までのモデルと解法から得られた結論を要約する. 第2章「不足時間, 人員構成比率を考慮した人員配分計画」では, 不足時間, 人員構成が意思決定者の主観によって決める不足時間満足度, 構成比率満足度が, 許容される範囲のなかで, 両者どちらかの最小満足度の最小値を最大化するモデルである. モデルはファジィ理論のメ

ンバシッパ関数を導入して構築した。解法はまず意味ある解の存在条件を判定し、次に初期値をモデルに代入し、満足度の最小値を示す職場に配分人員をひとりひとり増やしていくことで、オリジナルな解法になった。初期値の計算で配分できなかった配分可能人員を割り付けるだけの計算手間で、解を求めることが可能になった。また、ある企業の職場で、本論文のモデルと解法を適用したところ、稼働率が7%向上した。なお、不足時間満足度、人員構成比率満足度をともに考慮したモデルでは、マックス・ミニ解を得る手順が複雑になった。今後の課題としては、さらに数理モデルを工夫し、効率的に解けるようにすることが考えられる。

第3章「資源制約、納期が不確定でのスケジューリング」では、各期間でジョブに割り当てることができる資源の制約量があり、各ジョブの納期が不確定状況下でのスケジューリング方法を示した。 $m$ 機械のオープンショップスケジューリング問題では、資源制約、実行可能時間の満足度の最小値を最大化する問題としてのモデル化と解法を提案した。その解法とは、特別なネットワーク上での最大フロー問題[付録B.2]を解くということを利用したものである。二機械多目的スケジューリング問題は、各ジョブ処理開始時間と終了時間に関する満足度の最小値を最大化するモデルである。ジョブの先行関係をグラフで表し、極大両立マッチング[3]を求めることで、解を導き出した。従来のスケジューリングの研究では、本来不確定である条件を、複数の確定した条件と考え、最適解を選択する方法で最適化している。このような方法では問題が大規模になり、時間がかかる上に多目的問題に対応できない。本章のモデルは、不確定状況をモデル化しているため、非劣解を直接求めることができる。今後は、実用性が高い不確定状況下でのジョブショップスケジューリング[51]に数理解法を導入することが課題である。

第4章「需要、資源制約が不確定下での生産計画」では、注文数量、生産能力、在庫量が不確定下で、意思決定者の主観でこれらの制約条件の許容範囲に幅を持たせ、そのバランス状態をメンバシッパ関数による満足度という尺度に置き換え、数理モデル化した。注文数量の達成状況によって決まる利益を目的関数とし、最大化するアルゴリズムを示した。整数計画法などの従来のモデルでは、不確定状況を扱うと制約条件、目的関数の規模が大規模になるが、本章のモデルではシンプルなモデルとその解法を構築した。今後は、解法の中で在庫判定の手順がやや複雑なので、さらに簡単に解が得られるよう、解法を改良す

ることが課題である。

第5章「保管、機会損失費用が不確定下での購入計画」では、部品発注の問題を取り上げ、部品保管、品切れ費用の不確定状態を許容範囲に応じたメンバシッパ関数で定義し、数理モデル化した。総費用を最小にするための解法では、品切れによる機械損失と、保管費のそれぞれの費用がバランスする対象期間が、最適解になることを導き出した。従来の確定状況下のモデルでは、不確定性を複数条件で構成して解を算出するため、時間がかかる上に状況の変化に対応できない。本章のモデルでは直接、不確定性を取り入れているため、比較的早く妥当な解を求まることができた。今後の課題は、より実用的な不確定状況下での多段階生産・在庫システムの研究である[51]。

以上のように、本論文では、不確定な制約条件下で、人員配分、スケジューリング、生産計画、部品購入量を決めるモデルを構築した。いずれも不確定状況をファジィ集合のメンバシッパ関数で表した数理モデルである。解法は、高速でオリジナルなものである。したがって、現実の生産計画の立案において、基礎的な貢献ができると思われる。不確定状況下では、従来の定性的で、場当たりの生産計画作成が、本研究の成果の適用で、妥当な解が少ない計算手間で、求めることができ、効率的な意思決定に役立つと思われる。

さらに、不確定状況下の生産管理システム研究の今後の展開では、様々なタイプの多段階生産・在庫モデルとして数理的モデルと解法の構築が必要と考える。特に、多段階生産・在庫管理モデルに最も影響を与える不確定状況としては、市場変化を考えなければならないので[56]、本研究成果が現実の複雑な生産計画の立案に役立ち、この成果の適用分野が、さらに拡大することが期待できる。

## 謝 辞

本研究は大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻において行ったものである。著者が本論文をまとめるまでにいたったのは、あらゆる機会を捉えて、終始懇切なる御指導、御助言、それに激励を頂きました本学大学院工学研究科教授 石井博昭先生に、深く感謝の意を表すと共に、厚く御礼申し上げます。

本学産業科学研究所教授 豊田順一先生、本学大学院工学研究科教授 伊東一良先生、増原宏先生、同助教授 大中幸三郎先生には、本論文作成にあたり細部にわたり御指導頂き、貴重な御助言を頂きましたこと、心より御礼申し上げます。

神戸学院大学教授 塩出省吾先生、龍谷大学助教授 多田実先生、本学大学院工学研究科講師 斎藤誠慈先生、流通科学大学講師 伊藤健先生には、研究の遂行、並びに研究に対する姿勢について多大なる御指導、御助言を頂きました。ここに深く感謝致します。

本学大学院工学研究科 片桐英樹氏には、在学時より、論文作成にご助力頂きましたこと、厚く御礼申し上げます。また著者の研究活動に対し、様々な御助言を頂きました、並びに貴重な御意見を頂きました本専攻石井研究室に、深く感謝致します。

著者に研究活動の契機を与え、御助言を頂いた早稲田大学教授 吉本一穂先生に心より御礼申し上げます。

最後に、著者の研究活動を陰で支えてくれる家族に、心より感謝いたしております。

## 付 録

### A ファジィ理論の基礎

#### A.1 ファジィ集合と拡張原理

人間の主観等における“あいまいさ”を定量的に解析するために, Zadeh はファジィ集合 [29] を提案した. 従来の集合は, ある要素がその集合に属するか, 属さないかを 1 と 0 によって表す 2 値論理であったが, ファジィ集合はメンバシップ関数を用いることにより, 次のような無限多値論理に対応するものとして定義される.

**定義 A.1 (ファジィ集合)** 全体集合  $X$  に対して, 順序対集合

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

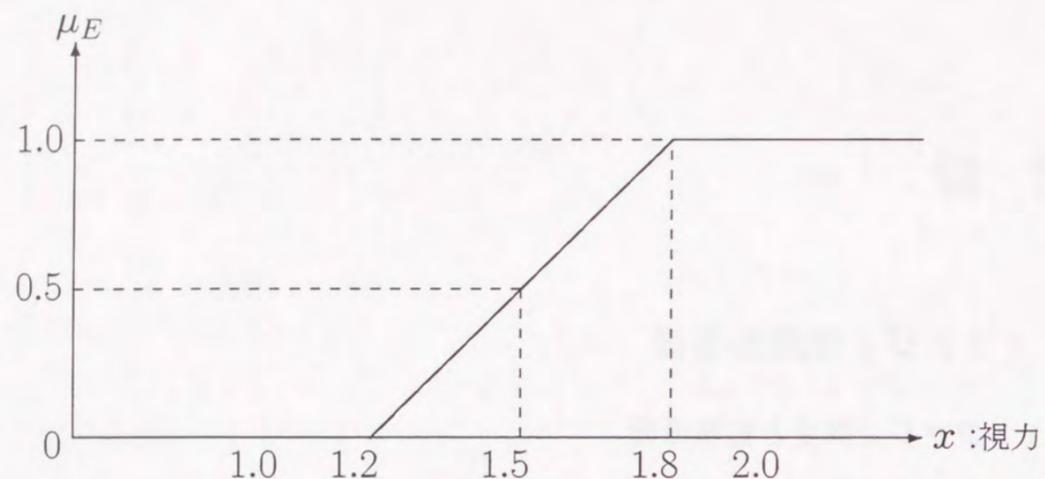
を  $X$  におけるファジィ集合  $A$  とする.  $\mu_A(x)$  はファジィ集合  $A$  のメンバシップ関数と呼ばれ,  $x \in X$  が  $A$  に属する度合い, 帰属度を示し,  $X$  から  $[0, 1]$  への写像である.

ここで,  $\mu_A(x)$  を

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in X) \\ 0 & (x \notin X) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

のような特性関数  $c_A(x)$  に置き換えれば,  $A$  はクリस्प集合 [29] となるため, ファジィ集合はクリस्प集合を一般化したものと解釈できる.

**例 A.2** “視力の良い人”というファジィ集合  $E$  について, その特性を決定するメンバシップ関数として, 例えば図 A.1 のようなものが考えられる.

図 A.1 ファジィ集合  $E$  のメンバシップ関数  $\mu_E$ 

ファジィ集合がクリस्प集合の一般化であることに加え、集合間の演算についてもファジィ集合への拡張が成されており、以下のように定義している。

## 定義 A.3

- (1) 2つのファジィ集合
- $A, B$
- が等しい

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (\forall x \in X) \quad (\text{A.2})$$

- (2) 2つのファジィ集合
- $A, B$
- について、
- $A$
- が
- $B$
- の部分集合

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (\forall x \in X) \quad (\text{A.3})$$

- (3) 2つのファジィ集合
- $A, B$
- の交わり

$$A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (\text{A.4})$$

- (4) 2つのファジィ集合
- $A, B$
- の結びは

$$A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (\text{A.5})$$

- (5) ファジィ集合
- $A$
- の補集合

$$A^c \Leftrightarrow \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (\text{A.6})$$

ファジィ集合とクリस्प集合を関連づける概念として、 $\alpha$ -レベル集合と呼ばれるクリस्प集合が次のように定義される。

**定義 A.4 ( $\alpha$ -レベル集合)** 全体集合  $X$  におけるファジィ集合  $A$  について、 $A$  のメンバシップ関数  $\mu_A(x)$  が任意の実数  $\alpha \in [0, 1]$  以上となるような  $x \in X$  のクリस्प集合を  $\alpha$ -レベル集合  $A_\alpha$  という。

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (\text{A.7})$$

**例 A.5** 例 A.2 におけるファジィ集合  $E$  の  $\alpha$ -レベル集合は

$$E_{1.0} = \{x \mid x \geq 1.8\}$$

$$E_{0.5} = \{x \mid x \geq 1.5\}$$

$$E_0 = \{x \mid x \geq 0\}$$

ファジィ集合に対しては台、高さが定義されており、それぞれ以下のようなものである。

$$\text{supp}(A) = A_0 \setminus \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0\} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{hgt}(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad (\text{A.9})$$

ファジィ集合の高さが1のとき、そのファジィ集合は正規であるという。また、正規でないファジィ集合も  $\text{hgt}(A)$  で  $\mu_A(x)$  を割ることにより正規化することができる。

$\alpha$ -レベル集合を定義することにより、ファジィ集合を通常の数学体系で取り扱うことが可能となるが、クリस्प集合間の数学的関係（写像）をファジィ集合に拡張した概念として拡張原理が存在する。

**定義 A.6 (拡張原理)** 写像  $f: X \rightarrow Y$  ( $X, Y$  はクリस्प集合) に関して、 $X$  におけるファジィ集合  $A$  の  $f$  による像  $f(A)$  は、 $Y$  におけるファジィ集合として次のようなメンバシップ関数によって定義される。

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \mu_A(x) & (f^{-1}(y) \neq \phi) \\ 0 & (f^{-1}(y) = \phi) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

## A.2 ファジィ数とその演算

全体集合  $X$  が例 A.2 のように単集合であるとき、ファジィ数が以下のように定義される。

**定義 A.7 (ファジィ数)** 実数の集合を全体集合として定義される正規かつ凸ファジィ集合で、 $\alpha$ -レベル集合が閉区間となるものをファジィ数といい、通常、メンバシップ値が 1 となる要素は唯一であるとする。ただし、凸ファジィ集合とは、その  $\alpha$ -レベル集合が凸となるものである。

また、ファジィ数には正負の概念があり、

$$\mu_M(x) = 0 \quad (\forall x < 0) \Rightarrow \text{ファジィ数 } M \text{ は正 } (M > 0)$$

$$\mu_M(x) = 0 \quad (\forall x > 0) \Rightarrow \text{ファジィ数 } M \text{ は負 } (M < 0)$$

とされる。

$R^1$  上に拡張原理を適用すれば、2項演算  $*$  を 2つのファジィ数  $M, N$  の 2項演算  $\odot$  に拡張することができ、そのメンバシップ関数は

$$\mu_{M \odot N}(z) = \sup_{z=x*y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \quad (\text{A.11})$$

となる。特に、2項演算として四則演算については、2つのファジィ数  $M, N$  の和、差、積、商については次のようになる。

$$\text{加法 } M \oplus N: \mu_{M \oplus N}(z) = \sup_{z=x+y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \quad (\text{A.12})$$

$$\text{減法 } M \ominus N: \mu_{M \ominus N}(z) = \sup_{z=x-y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \quad (\text{A.13})$$

$$\text{乗法 } M \otimes N: \mu_{M \otimes N}(z) = \sup_{z=x*y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \quad (\text{A.14})$$

$$\text{除法 } M \oslash N: \mu_{M \oslash N}(z) = \sup_{z=x \div y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \quad (\text{A.15})$$

しかし、各々のファジィ数のメンバシップ関数が複雑になると、これらを実際に求めることは非常に困難である。そこで、ファジィ数の演算を計算機を用いて効率よく行うため、Dubois と Prade は  $L$ - $R$ ファジィ数を導入した。

**定義 A.8 ( $L$ - $R$ ファジィ数)** 次のようなメンバシップ関数に制限されるファジィ数  $M$  を  $L$ - $R$ ファジィ数と呼ぶ。

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & (x \leq m, \alpha > 0) \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & (x \geq m, \beta > 0) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

ただし、 $L, R$  は以下の条件を満たすよう定義される型関数である。

- $L(x) = L(-x), R(x) = R(-x)$

- $L(0) = R(0) = 1$

- $L(x), R(x)$  は  $[0, \infty)$  で非増加

また、 $m$  は平均と呼ばれ、パラメータ  $\alpha, \beta$  はメンバシップ関数の横方向への拡がりを表し、これらによって  $L$ - $R$ ファジィ数は

$$M = (m, \alpha, \beta)_{LR} \quad (\text{A.17})$$

と表記される。

**例 A.9** (A.17) の  $L$ - $R$ ファジィ数  $M$  は、例えば図 A.2 で示されるメンバシップ関数によって制限される。

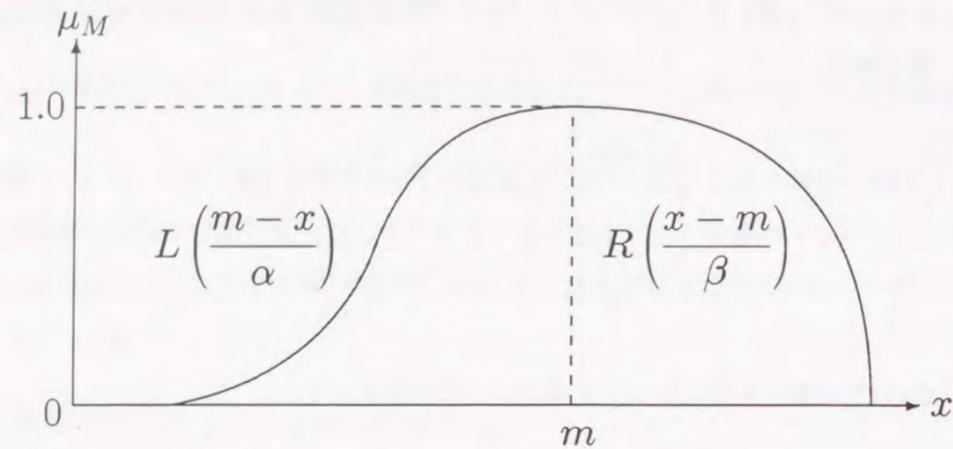


図 A.2  $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$  のメンバシップ関数  $\mu_M$

$L$ - $R$ ファジィ数の基本演算に関して、加法、減法に対する次のような公式がDuboisらによって示された。

$$\text{加法: } (m, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR} \quad (\text{A.18})$$

$$\text{減法: } (m, \alpha, \beta)_{LR} \ominus (n, \gamma, \delta)_{RL} = (m-n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR} \quad (\text{A.19})$$

これらは拡張原理からも明らかである。

$L$ - $R$ ファジィ数の基本演算に関する公式からもわかるように、ファジィ数は演算を繰り返すことにより、一般的にその拡がりが増加し続けてゆくため、平均の値があまり意味をもたない“あいまいさの爆発”と呼ばれる観測困難な状態に陥ることがある。この問題はシステム設計において非常に重要な設計目標となるが、常識的に、あいまいなデータを合成することによりファジィ性の少ないデータは得られず、ファジィ理論における永遠の課題とされている。

## B ネットワーク計画問題

### B.1 グラフ

グラフ  $G(V, E)$  とは点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  の集合  $V$  (誤解の恐れがなければ、単に  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  と表現することもある) と、 $V$  に属する2点を接続する枝の集合  $E$  から構成されるものであり、 $v_i$  と  $v_j$  を接続する枝を  $e_{ij}$  と表記し、 $v_i$  と  $v_j$  は隣接しているという。このとき、グラフ  $G_s(V_s, E_s)$  ( $V_s \subseteq V, E_s \subseteq E, E_s \subseteq V_s \times V_s$ ) はグラフ  $G$  の部分グラフと呼ばれる。

また、枝に方向性が与えられていて、 $e_{ij}$  と  $e_{ji}$  が区別される場合、特にそれらをアークと呼ぶ。枝集合としてアーク集合が用いられるグラフを有向グラフといい、無向グラフと区別する。以降、単にグラフというときは、無向グラフを指すものとする。さらに、同じ2点間に2本以上の枝が存在するものを多重枝、そのグラフを多重グラフという。2点を接続するのではなく、両端点が同一の点となるような枝を自己ループといい、自己ループや多重枝が存在しないようなグラフを単純グラフと呼ぶ。

グラフ理論において中心的役割をなす経路とは、ある2点間において、複数の点を連続的に接続する枝の列である。すなわち、ある点から他の点への道を表す。また、有向グラフにおける経路は、それを構成する全アークの方向が一致している場合に限る。同一点を2度以上通らない経路は単純経路、最初と最後の点が等しい経路、つまりサイクル中に同一の点を含まないものを閉路とそれぞれ呼んでいる。点  $v_i$  から  $v_j$  への経路が存在すれば、 $v_i$  から  $v_j$  へ到達可能であるといい、グラフ内の任意の2点間が到達可能なものを連結グラフ、そうでないものを非連結グラフと呼ぶ。

閉路を含まない連結グラフは木と呼ばれ、いろいろなデータ構造を解析する基礎となり、最小の連結グラフであるという点でも重要な概念である。木に関する性質として、次のようなものが知られている。

**性質 B.1** 木は少なくとも2つの終点(ここでは、接続する枝が一つの点を指す)をもつ。

ある連結グラフ  $G$  の部分グラフについて、 $G$  と共通の点集合により構成される木を  $G$  のスパニング・ツリーという。 $G$  のスパニング・ツリーは一意的ではなく複数存在し、そ

の数については次の定理が成り立つ。

**定理 B.2** 単純グラフ  $G(V, E)$  のスパニング・ツリーは高々  $|V|^{|V|-2} = n^{n-2}$  個である。  $|V|$  は点の数を指す。

## B.2 最大流問題

多くの現実的な物の流れを扱う問題や、他の組合せ最適化問題がネットワーク流量問題として定式化される。例えば、ネットワーク中の各点を供給点、中継点、需要点に対応させる物流問題などが挙げられる。このような問題の解法を考える際に、重要かつ基本となる問題として最大流問題がある。

有向グラフ  $G(V, A)$  があり、各アーク  $a_{ij}$  には  $i$  から  $j$  の方向に流すことのできる物質の最大量として容量 (capacity)  $c_{ij}$  が与えられているとする。このとき、ある点  $v_s$  から他のある点  $v_t$  へ流すことのできる最大流量を求める問題を考える。[13]  $v_s$  はソース、 $v_t$  はシンクと呼ばれる。アーク  $a_{ij}$  を流れる流量を  $f_{ij}$  とすると、すべてのアークについて

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij} \quad (\text{B.1})$$

であり、 $v_s, v_t$  を除いて、

$$\sum_j f_{ji} = \sum_j f_{ij} \quad (\text{B.2})$$

が成立するものとする。すなわち、ある点において物質が停留することはなく、流入量と流出量は等しいという“Kirchhoffの流量保存則”が成り立つ。また、ソースとシンクについては

$$\begin{cases} \sum_j f_{sj} - \sum_j f_{js} = v \\ \sum_j f_{tj} - \sum_j f_{jt} = -v \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

である。

このとき、最大流問題は次のように表すことができる。

$$\text{P}_{n1}: \text{目的関数 } v \rightarrow \text{最大化} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{制約条件 } \sum_j f_{sj} - \sum_j f_{js} = v \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_j f_{tj} - \sum_j f_{jt} = -v \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_j f_{ji} = \sum_j f_{ij} \quad (i \neq s, t) \quad (\text{B.7})$$

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij} \quad (\text{B.8})$$

問題  $\text{P}_{n1}$  の最適解、すなわち最大流量、およびその流量パターンを求める際に有用な最大流-最小切断定理を示す。点集合  $V$  を部分集合  $X (v_s \in X)$  とその補集合  $\bar{X} (v_t \in \bar{X})$  に分割したとき、 $X$  と  $\bar{X}$  の各々に属する点間の全アークにより、切断集合  $(X, \bar{X})$  が形成される。この切断集合に対して、以下のように容量  $C(X, \bar{X})$  を定義する。

$$C(X, \bar{X}) = \sum_{\{i, j | v_i \in X, v_j \in \bar{X}\}} c_{ij} \quad (\text{B.9})$$

**定理 B.3 (最大流-最小切断定理)** 整数のアーク容量をもつ任意のネットワークに対して、ソースからシンクへの最大流量は、ソースとシンクを分離する最小切断集合の容量に等しい。

### 証明

ある切断集合  $(X, \bar{X}) (v_s \in X, v_t \in \bar{X})$  を考える。

$$C(X, \bar{X}) = \sum_{\{i, j | v_i \in X, v_j \in \bar{X}\}} c_{ij} \geq \sum_{\{i, j | v_i \in X, v_j \in \bar{X}\}} f_{ij} \quad (\text{B.10})$$

$v_s \in X, v_t \in \bar{X}$  であり、 $\{i, j | v_i \in X, v_j \in \bar{X}\}$  に関して和を考えるので

$$\sum_{\{i, j | v_i \in X, v_j \in \bar{X}\}} f_{ij} = v \quad (\text{B.11})$$

すなわち、

$$C(X, \bar{X}) \geq v \quad (\text{B.12})$$

である。(B.12) は任意の流量パターンと切断集合に対して成立するので、

$$(\text{最大流量}) \leq (\text{最小切断})$$

となる。したがって、 $C(X, \bar{X}) = v$  となる切断集合  $(X, \bar{X})$ 、および流量の対が存在すれば、本定理が成立する。

このような対を実際に生成する。任意の流量パターンを考える。この流量パターンから  $V$  の部分集合  $X_0$  を、以下のルールに従って生成する。

(a)  $v_s \in X_0$ (b)  $v_i \in X_0$ で  $f_{ij} < c_{ij}$ なら  $v_j \in X_0$ (c)  $v_i \in X_0$ で  $f_{ji} > 0$ なら  $v_j \in X_0$ (a), (b), (c)のルールで  $X_0$ に属さない点は  $\bar{X}_0$ に属する.

この手続きに対して, 2つのタイプの結果が考えられる.

(i)  $v_t \in \bar{X}_0$ ;  $t$ までルールを適用できなかったのであるから, これは  $X_0$ から  $\bar{X}_0$ へのすべてのアークに対して, (b)  $f_{ij} = c_{ij}$ で, 逆に  $\bar{X}_0$ から  $X_0$ へは, (c)  $f_{ji} = 0$ であることを意味する. したがって,

$$\sum_{\{i, j | v_i \in X_0, v_j \in \bar{X}_0\}} f_{ij} = \sum_{\{i, j | v_i \in X_0, v_j \in \bar{X}_0\}} c_{ij} \quad \text{かつ} \quad \sum_{\{i, j | v_i \in \bar{X}_0, v_j \in X_0\}} f_{ji} = 0$$

である. これにより, 総流量は  $C(X_0, \bar{X}_0)$ と等しい.(ii)  $v_t \in X_0$ ; これはルール(a), (b), (c)によって  $v_s$ から  $v_t$ までアークの列を拡張してゆけること, すなわち  $v_s$ から  $v_t$ への経路が存在することを示している. この経路を  $v_s, \dots, v_i, v_j, \dots, v_t$ とすると, この経路上のすべてのアークはルール(b), (c)を満足する.

(b)のときは

$$f_{ij} < c_{ij}$$

であるから,  $v_i$ から  $v_j$ へ流量を追加することができる. この種のアークを前向きのアーク (forward arc) という.

(c)のときは

$$f_{ji} > 0$$

であるから, 現在の流れ  $f_{ij}$ を削減し,  $v_i$ から  $v_j$ へ別のアークに迂回させることができる. この種のアークを後ろ向きのアーク (backward arc) という.

このような経路は流量増加経路と呼ばれ, 次のように流量を追加できる.

$$\varepsilon_1 = \min \{ \text{残差 } c_{ij} - f_{ij} \mid \text{すべての前向きのアーク } a_{ij} \}$$

$$\varepsilon_2 = \min \{ f_{ji} \mid \text{すべての後ろ向きのアーク } a_{ij} \}$$

$$\varepsilon = \min (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

とし, 前向きのアークに対しては  $\varepsilon$ だけ流量を追加し, 後ろ向きのアークに対しては  $\varepsilon$ だけ流量を削減する.この改訂後の流量パターンに対して, 再びルール(a), (b), (c)を適用して  $X_1$ を決定し, 場合(i)が起こるまで続ける.  $\varepsilon$ が正整数であることから, 流量は必ず1は増加するので, 有限解のステップで場合(i)が起こる. すなわち, 最大流量を得る.**系 B.4** 現在の流量パターン  $(f_{ij})$ は,  $(f_{ij})$ に関して流量増加経路が存在しなければ最大流量を与える.直感的に, ネットワークに流すことのできる最大流量は各アークの容量による制約を受け, 必ずどこかネックとなる部分が生じるはずであり, さらにそのネックとなる部分のアーク容量の和が最大流量と等しくなると思われる. このことが定理B.3としてFordとFulkerson[13]によって構成的に証明され, 彼等はこの定理に基づき, 問題  $P_{n1}$ を解くための効率的アルゴリズムを与えた.

## 参考文献

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ulman: Data Structures and Algorithms, Addison Wesley Publishing(1983).
- [2] 浅居 喜代治 編: ファジィ経営科学入門, オーム社 (1992).
- [3] R. G. Busacker and T. L. Saaty: Finite Graphs and Networks An Introduction with Applications, McGraw-Hill(1965).
- [4] M. S. Bazaroa and J. J. Jarvis: Linear Programming and Network Flows, John Wiley & Sons(1977).
- [5] R. Bellman: Dynamic Programming, Princeton University Press(1957).
- [6] G. E. P. Box and G. M. Jenkins: Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-Day(1970).
- [7] J. R. Brown, "The Sharing Problem", Operations Reserach, **27**(1979)324-340.
- [8] S. Chanas and W. Kolodziejczyk, "Maximum Flow in a Network with Arc Capacities", Fuzzy Sets and Systems, **8**(1982)139-151.
- [9] S. Chanas and W. Kolodziejczyk, "Integer Flows in a Network with Fuzzy Capacity Constraints", Networks, **16**(1986)17-31.
- [10] G. B. Dantzig: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press(1963).
- [11] G. B. Dantzig, "Linear Programming under Uncertainty", Management Science, **1**(1955)197-206.
- [12] L. R. Ford, Jr., and D. R. Fulkerson, "Maximal Flow through a Network", Canadian Journal of Mathematics, **8**(1956)399-404.

- [13] L. R. Ford, Jr., and D. R. Fulkerson: Flows in Networks, Princeton University Press(1962).
- [14] N. Furukawa, "A Parametric Total Order on Fuzzy Numbers and A Fuzzy Shortest Route Problem", Optimization, 10(1994)367-377.
- [15] 古川 長太: ファジィ最適化の数理, 森北出版(1999).
- [16] M. Fujii, T. Kasami and K. Ninomiya, "Optimal Sequencing of Two Equivalent Processors", SIAM J. Appl. Math., 17(1969)784-789.
- [17] M. R. Garey and D. S. Johnson, "Two-Processor Scheduling with Start-Time and Deadlines", SIAM J. Comput., 6(1977)416-426.
- [18] H. Greenberg: Integer Programming, Academic Press(1976).
- [19] J. Harrington, Jr.: Computer Integrated Manufacturing, Industrial Press(1973).
- [20] R. Hohzaki and K. Iida, "An Integer Resource Allocation Problem with Cost Constraint", Journal of Operations Research Society of Japan, 41(1998)470-482.
- [21] 茨木 俊秀: 最適化プログラミング, 岩波書店(1991).
- [22] T. Ichimori, H. Ishii and M. Tada, "Optimal Sharing", Mathematical Programming, 23(1982)341-348.
- [23] 池上 敦子, 丹羽 明, "ナース・スケジューリングに有効なアプローチ", 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌, 41(1998)572-588.
- [24] 伊理 正夫: ネットワーク理論, 日科技連出版社(1976).
- [25] H. Ishii, M. Tada and T. Masuda, "Two Scheduling Problem with Fuzzy due-dates", Fuzzy Sets and Systems, 46(1992)339-347.
- [26] H. Ishii and M. Tada, "Single Machine Scheduling with Fuzzy Precedence Relation", European Journal of Operational Research, 87(1995)284-288.

- [27] H. Ishii and T. Konno, "A Stochastic Inventory Problem with Fuzzy Shortage Cost", European Journal of Operations Research, 106(1998)90-94.
- [28] 伊藤 健, "様相性に基づくファジィ最適化問題に関する研究", 大阪大学工学部博士論文(1996).
- [29] A. Kaufman and M. M. Gupta: Introduction to Fuzzy Arithmetic theory and Application, Van Nostrand Reinhold, New York(1985).
- [30] A. Kaufman and M. M. Gupta: Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Elsevier Science(1988).
- [31] 北原 貞輔, 児玉 正憲: ORによる在庫管理システム, 九州大学出版会(1982).
- [32] 今野 勤, 石井 博昭, "人員配分問題へのファジィ理論の応用(1)", 1992年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集(1992)76-77.
- [33] 今野 勤, 石井 博昭, "製造業における配分問題へのファジィ理論の応用", 第4回RAMPシンポジウム論文集(1992)125-144.
- [34] 今野 勤, 石井 博昭, "生産計画作成問題へのファジィ理論の応用", 1993年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集(1993)132-133.
- [35] 今野 勤, 石井 博昭, "ファジィ人員配分問題", 日本ファジィ学会誌, 7(1995)624-629.
- [36] 今野 勤, 石井 博昭, "人員構成を考慮したファジィ人員配分問題", 日本ファジィ学会誌, 7(1995)630-636.
- [37] 今野 勤, 石井 博昭, "ファジィ実行可能時間をもつスケジューリング問題", 生産スケジューリング・シンポジウム'95論文集(1995)181-186.
- [38] 今野 勤, 石井 博昭, "生産管理モデルへのファジィ理論の応用", 京都大学数理解析研究所講究録947(1996)44-56.

- [39] 今野 勤, 石井 博昭, "需要予測と生産量の決定問題", 日本生産管理学会誌, 3(1996)36-40.
- [40] T. Konno and H. Ishii, "Fuzzy Production Planning Problem", Proceedings 2 of the 14th International Conference on Production Research, Osaka, Japan(1997)1494-1497.
- [41] T. Konno and H. Ishii, "Two-Machines Scheduling Problem with Fuzzy Allowable Time Constraint", Journal of Operations Research Society of Japan, 41(1998)487-491.
- [42] T. Konno and H. Ishii, "An Open Shop Scheduling Problem with Fuzzy Allowable Time and Fuzzy Resource Constraint", Fuzzy Sets and Systems, 109(2000)141-147.
- [43] 今野 勤, 石井 博昭, "需要、生産能力、在庫量が不確定下での生産計画", 日本ファジィ学会誌(投稿中).
- [44] 今野 勤, 石井 博昭, "不確定状況下でのパーツ購入計画", 日本ファジィ学会誌(投稿中).
- [45] 今野 浩, 鈴木 久敏 編: 整数計画法と組合せ最適化, 日科技連(1982).
- [46] 黒田 充, "生産スケジューリングの現状と研究動向", 日本ファジィ学会誌, 8(1998)784-794.
- [47] J. Munkres, "Algorithms for assignment and transportation problems", SIAM J., 10(1962)196-210.
- [48] 西田 俊夫: ファジィ集合とその応用, 森北出版社(1978).
- [49] 日本ファジィ学会 編: ファジィOR, 日刊工業新聞社(1993).
- [50] 増井 忠幸, 百合本 茂: ORによる生産流通システムの設計, 槇書店(1988).
- [51] 村松 林太郎: 生産管理の基礎, 国元書房(1979).

- [52] 村田 忠彦, 石淵 久生, 玄 光雄, "重要度を考慮した多目的スケジューリング問題の定式化", 日本ファジィ学会誌, 11(1999)512-520.
- [53] 長野 弘志, 宮崎 茂次, "勤務に対する嗜好の個人差を考慮した看護婦スケジューリング", 日本経営工学会論文誌, 47(1996)143-149.
- [54] C. D. Pegden, ed al.: Introduction to Simulation Using SIMAN(2nd.ed.), McGraw-Hill, New York(1995).
- [55] 坂和 正敏: ファジィ理論の基礎と応用, 森北出版社(1989).
- [56] 坂和 正敏, 加藤 浩介, 溝内 竜士, "ファジィパラメータを含む大規模多目的線形計画問題に対する対話型意思決定", 日本ファジィ学会誌, 7(1995)612-623.
- [57] 坂和 正敏, 西崎 一郎, 植村 芳雄, "建材メーカーにおける生産・輸送問題に対するファジィ計画と利益およびコスト配分一事例研究一", 日本ファジィ学会誌, 11(1999)503-511.
- [58] T. J. Schriber: Simulation Using GPSS, John Wiley & Sons., New York(1974).
- [59] M. Tada, "Studies on Fuzzy Combinatorial Optimaization", 京都大学工学部博士論文(1994).
- [60] 高桑 宗右衛門: CIM生産システムのシミュレーション最適化一理論と実践一, コロナ社(1994).
- [61] D. Werra. et al., "A Preemptive Open Shop Scheduling Problem with One Resource", Operations Research Letters, 10(1991)9-15.

### 著者発表論文

- (1) 今野 勤, 石井 博昭, "ファジィ人員配分問題", 日本ファジィ学会誌, 7巻, 3号(1995) 524-629.
- (2) 今野 勤, 石井 博昭, "人員構成を考慮したファジィ人員配分問題", 日本ファジィ学会誌, 7巻, 3号(1995) 630-636.
- (3) H. Ishii and T. Konno, "A Stochastic Inventory Problem with Fuzzy Shortage Cost", European Journal of Operational Research, 106, 1(1998) 90-94.
- (4) T. Konno and H. Ishii, "Two-Machines Scheduling Problem with Fuzzy Allowable Time Constraint", Journal of Operations Research Society of Japan, 41,1(1998) 487-491.
- (5) T. Konno and H. Ishii, "An Open Shop Scheduling Problem with Fuzzy Allowable Time and Fuzzy Resource Constraint", Fuzzy Sets and Systems, 109(2000)141-147.
- (6) 今野 勤, 石井 博昭, "需要、生産能力、在庫量が不確定下での生産計画", 日本ファジィ学会誌 (投稿中) .
- (7) 今野 勤, 石井 博昭, "不確定状況下でのパーツ購入計画", 日本ファジィ学会誌 (投稿中) .

