水の波とソリトン

基礎工学部　角　谷　典　彦（豊中 4490）

ここ2, 3年間に, SpringerのTopics in current physicsや, Solid-state sciencesのシリーズ, その他に“ソリトン”を表題とする本が相次いで刊行され, 一方国内でも物理学会誌（1981年11月号）や数理科学（1980年5月号）にソリトン特集が組まれ, 今やソリトン花ざかりの観がある。たまたま非線形波動の仕事をしている筆者のところに, 長谷田編集委員長が「ソリトンについて何か書け」という注文をされたのはそのせいではないかと思っている。一方,「低温センターだより」は阪大オリジナルをモットーにされ, 必ずしも“国内外の早耳情報や新しい展開の解説”などは期待されてはいないようである（1981年7月号編集後記）。実際, 最近のソリトン界の進展の速さと広がりはあれよあれよというわけで, 素人どころか筆者にも到底フォローできない様相を呈している。そこで, ここではソリトンのプロトタイプを生みだした水の波を例にとり, よく言われる“非線形性と分散性とが釣合ってソリトンになる”というのはどういうことかというお話を簡単にさせて頂こうと思う。

自然界におこる波動現象のうちで“水の波”ほどおなじみのものはないであろう。音は目に見えないし, 光が波だといわれても素人は困惑する。これにくらべて水の波は毎日風呂桶で観察できるし, 池に小石を投げてもよい。海岸にでかければ, いつでもよせてはかえす波がある。時には津波となってわれわれを襲うこともある。今から約150年程前, スコットランドのScott-Russelがたまたま運河でみつけ, 馬に乗って追いかけたという孤立波（これが今日ソリトンと呼ばれる波の最初の発見である！）もまた水の波の1つの現われである。

重力や表面張力を復元力とする水（水に限らず一般の液体でもよい）の波は上記のように身近な現象ではあるが, いざまともに解析しようとするとなかなか面倒である。それは水面のもりあがりという未知の境界に対する非線形の境界値問題になるからで, 完全流体の渦なし流という理想的な場合を考えても大変厄介であり, 厳密解の得られた例は殆んどない。もちろん多くの波動系と同様, 波の振幅 a が波長 λ や水深 H にくらべて充分小さいとして線形近似を行えば, その分散関係式（正弦波を仮定したときの波数 k と角振動数 ω の関係。線形化すれば調和分解が可能であり, 正弦波を仮定することができる。“重ね合わせ”で任意の波形が得られるからである）は容易に求まり,

$$\omega = \sqrt{\left(1+\frac{\sigma k^2}{\rho g}\right)\ gk\tanh\ (kH)}$$

で与えられる（この式の天下りはお許し願いたい）。ただし, ρ は水の密度, g は重力加速度, σ は表面張力を表わす。$\sigma k^2/(\rho g)$ は重力に対する表面張力の相対効果を与える。従って, 波長 $\lambda(=2\pi/k)$ が $\lambda_m \equiv 2\pi\sqrt{\sigma/(\rho g)}$（水の場合約1.7 cm）にくらべて充分長い波に対しては表面張力の影響は無視でき, いわゆる重力波になる。更に波長が水深にくらべて充分長い場合, すなわち $kH \ll 1$ の場合には, $\tanh(kH)$ を展開すれば,

$$\omega = \sqrt{gH}\ \ k\left\{1-(kH)^2/6+\cdots\cdots\right\}$$

となり，浅水重力波になる。これは，最低次の近似で，ω が k に比例する無分散の波であり，その比例定数である位相速度 $C(=\omega/k)$ は $\sqrt{gH}$ で与えられ，浅いところ程遅くなる。遠浅の海岸にうちよせる波の波頭線が海岸線にほぼ平行になるのはこのためである（屈折の法則を思い出して頂きたい）。展開の第2項は有限深さによる弱い分散効果を与え，波長が短くなる（k が大きくなる）につれてその位相速度が減少することを示している。

一方，振幅が有限になって，a/H が無視できなくなると，波速 C は $\sqrt{gH}$ の代りに，実効的な深さとして $H+h$（h は局所的な水面のもりあがりで，有限とはいってもHにくらべては小さいとする）をとった $C=\sqrt{g(H+h)}$ となる。こうなると，もりあがったところ（$h>0$）ではくぼんだところ（$h<0$）より伝播速度が速いために，波の前面がけわしくなって“つったち”遂にはくだけて行く。これも遠浅の海岸でよく見られる現象である。ところが，ここで上記の分散効果が共存すればどうなるであろうか。波がけわしくなりつったつというのは，波数空間でみれば，高波数の成分がつぎつぎに励起されることを意味する。一方(線形近似によれば)高波数の波ほど分散がよく効く。分散が効くということは，(k,ω) 面の分散関係の曲線が原点を通る直線からずれることを意味し，それだけ k の大きい成分は励起されにくくなる。従って，弱い非線形の場合，有限振幅の効果による波のつったちと，それをおさえようとする分散の効果がうまく釣合うと，波は全体として波形を変えず一定速度で伝わる可能性がでてくる。実際，Korteweg と de Vries(1895)は，$a/H\simeq(kH)^2\equiv\varepsilon$（$\varepsilon$ は小さいが有限）の条件をみたすとき，水面のもりあがり h が，x 方向に速さ $C=\sqrt{gH}$ で進む系からみたとき

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\alpha h\frac{\partial h}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=0$$

で記述できることを示した（K－dV方程式）。ただし $\alpha=3C/(2H)$，$\beta=CH^2/6$，t は時間。ここで一定速度で波形を変えずに進行する波があるかどうかを調べるために，

$$h(x,t)=h(\xi),\quad \xi=x-\Lambda t,\quad \Lambda:\text{定数}$$

とおくと，K－dV方程式は2度積分できて，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+V(h)=E,\quad V(h)\equiv\frac{\alpha}{6\beta}h^3-\frac{\Lambda}{2\beta}h^2+Fh$$

を得る。ただし，E，F は積分定数。これは非調和ポテンシャル $V(h)$ のもとで運動する全エネルギー E の単位質点の運動と等価であり，h は一般に Jacobi の楕円関数 cn で表わされる周期解（cn にちなんでクノイダル波と呼ぶ）となり，確かに定常進行波が可能となる。とくに，その周期無限大の極限（E，F を適当にえらぶことに相当する）として，つぎの孤立波解：

$$h = A\,\mathrm{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{\alpha A}{12\beta}}\left(x-\frac{\alpha A}{3}t\right)\right\},\quad A：定数$$

を得る。これだけなら別にどうということはなく，約９０年前にKortewegとde Vries自身がこの解を既に求めており，約150年も前にScott-Russelが“自然界”で見つけていたのである！

それが今日各方面から注目されているのは何故だろうか。まずGardnerとMorikawa（1960）が彼らの名で呼ばれる変換を導入してK－dV問題を“近代化”し，無衝突プラズマ中の磁気音波もまた同じ方程式で支配されることを示し，つづいてZabuskyとKruskal（1965）が，この孤立波が極めて安定で，非線形相互作用にもかかわらず，その個性（波形や速さ）を失わず，あたかも粒子のような側面を持つことを数値的に見出し“ソリトン”という新概念を導入した（solitaryと粒子の接尾語－onの組合せ。日本語ならさしずめ“孤立子”というところか）。そのわずか2年後にGardnerら（1967）が逆散乱法によってK－dV方程式の初期値問題を解析的に解く処方箋を与え，ソリトンがSchrödinger演算子の束縛状態に対応することを見出し，ひきつづきLax(1968)がこれを数学的により一般的な形に定式化するのに成功した。一方，種々の特異摂動法の発展によって，一見無関係にみえるいろんな分野（流体力学，プラズマ物理，非線形光学，格子力学，電子回路網等）の複雑な非線形波動系が，ある状況の下で，比較的簡単な発展方程式（K－dV方程式はその1つの典型である）に帰着できることが相次いで明らかになって来た。しかも，その結果として得られる発展方程式のかなりのもの（現在では少くとも３０種といわれる）が前記の逆散乱法その他によって厳密に解け，いずれもソリトンを解として持つことが判明して来たのである。これらの方程式に特長的なことは，いずれも無限個の保存量をもつ完全可積分な系になっているということである。

かくして，ソリトンこそ非線形波動系の不変の要素であり，あとはそれを基礎にして一般論が展開できるとする向きもあるが，これは楽観的な物理屋の“線形思考”のくせであるように思われる。たしかに，ソリトンは今迄に見つかった非線形波動のタイプとしては著しい特性を持つものではあるが，同時に，水の波の例でみたように，ソリトンが現われるのは“ある特定の条件”が満たされる時であって，筆者にはソリトンというのは一種の“層流状態”に対応しているように思える。この意味で，これも最近やかましいカオスが“乱流状態”に対応するように思うが如何なものであろうか。こう簡単にきめつけると，楽観的な流体屋の悪いくせだと叱られそうである。以上いささか旧聞に属する話題で，かつオリジナリティのないお話になってしまったがお許し頂きたい。