Nishitani, T.
Osaka J. Math.
26 (1989) 71–88

UNE CONDITION NECESSAIRE POUR LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES

TATSUO NISHITANI

(Reçu le 10 juillet 1987)

1. Introduction

Soit L un opérateur différentiel sur $C^\infty(\Omega, \boldsymbol{C}^N)$ où Ω est un ouvert dans $\boldsymbol{R}^{d+1}$ de coordonnées locales $x=(x_0, x_1, \cdots, x_d)$. Soit $t(x)\in C^\infty(\Omega)$, $dt(x)\neq 0$ dans Ω, réelle. Nous disons que L est hyperbolique en $\hat{x}\in\Omega$ par rapport à $t(x)$ si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1.1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} e^{-\lambda t(x)} L(e^{\lambda t(x)} u)\colon C^\infty(\Omega, \boldsymbol{C}^N)\to C^\infty(\Omega, \boldsymbol{C}^N)$ est surjective en $\hat{x}$,

il existe un voisinage $\omega\subset\Omega$ de $\hat{x}$ et une constante ε

(1.2) positive tels que L soit un isomorphisme sur

$$E_\tau = \{v\in C^\infty(\omega, \boldsymbol{C}^N);\, v = 0 \quad \text{dans} \quad t(x)<t(\hat{x})+\tau\}$$

pour tout τ, $|\tau|<\varepsilon$.

Nous disons que L est fortement hyperbolique en $\hat{x}\in\Omega$ par rapport à $t(x)$ si pour tout opérateur Q d'ordre 0 sur $C^\infty(\Omega, \boldsymbol{C}^N)$, $L+Q$ est hyperbolique par rapport à $t(x)$ en $\hat{x}$.

Fixons une base de $\boldsymbol{C}^N$ et des coordonnées (x, ξ) dans le fibré cotangent $T^*\Omega$ et désignons par $L(x, \xi)$ et $L_1(x, \xi)$ le symbole entier et le symbole principal de L respectivement:

$$L(x, \xi) = L_1(x, \xi)+L_0(x)\,, \quad L_1(x, \xi) = \sum_{i=0}^{d} A_j(x)\,\xi_j\,, \tag{1.3}$$

$A_j(x)$, $L_0(x)$ étant des matrices carrées d'ordre N et d'éléments dans $C^\infty(\Omega)$. On désigne par $h(x, \xi)$ le déterminant de $L_1(x, \xi)$ qui est une fonction sur $T^*\Omega$.

Nous étudions des conditions nécessaires pour l'hyperbolicité de L en $\hat{x}$. Si L est hyperbolique en $\hat{x}$, alors $h(x, \xi)$ est un polynôme hyperbolique par rapport à $dt(x)$ près de $\hat{x}$, c'est-à-dire, les zéros τ de $h(x, \xi+\tau dt(x))$ sont réels pour tout $\xi\in T^*_x\Omega\backslash 0$, x étant près de $\hat{x}$ (Théorème de Lax-Mizohata). Par suite, nous supposerons, dans cette note, l'hyperbolicité de $h(x, \xi)$ par rapport à $dt(x)$ près de $\hat{x}$.

Quand toutes les caractéristiques $\rho\in T^*_{\hat{x}}\Omega\backslash 0$ de h sont simples, en supposant (1.1), L est strictement hyperbolique et donc fortement hyperbolique en $\hat{x}$. Cela nous amène à nous intéresser aux caractéristiques multiples ρ de h sur $\hat{x}$. Il faut remarquer que si $L_1(x, \xi)$ est symétrique (ou bien symétrisable) près de $\hat{x}$, alors L est fortement hyperbolique en $\hat{x}$ même dans le cas où se trouvent les caractéristiques multiples sur $\hat{x}$. D'ailleurs si $h(x, \xi)$ est effectivement hyperbolique (pour la définition, voir si-dessous) en chaque caractéristique multiple sur $\hat{x}$, alors L est fortement hyperbolique en $\hat{x}$ bien que $L_1(x, \xi)$ n'y soit pas symétrisable en général (voir [8]). Ces faits nous complique la tâche de formuler des conditions nécessaires pour l'hyperbolicité de L. Dans cette note nous donnons une condition nécessaire simple en caractéristique multiple ρ sur $\hat{x}$ pour que L soit hyperbolique en $\hat{x}$.

Notons que pour des systèmes à caractéristiques de multiplicité constante, quelques conditions nécessaires sont obtenues, voir [11], [13] et leurs reférences.

Suivant [3] nous posons

$$\mathcal{L}(x, \xi) = L^s(x, \xi)\, {}^{co}L_1(x, \xi) - \frac{i}{2}\, \{L_1, {}^{co}L_1\}(x, \xi)\,,$$

où

$$L^s(x, \xi) = L_0(x) + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{d} (\partial_{x_j} \partial_{\xi_j} L_1)(x, \xi)\,,$$

$$\{L_1, {}^{co}L_1\} = \sum_{j=0}^{d} \{\partial_{\xi_j} L_1\, \partial_{x_j}({}^{co}L_1) - \partial_{x_j} L_1\, \partial_{\xi_j}({}^{co}L_1)\}$$

et ${}^{co}L_1(x, \xi)$ désigne la matrice des cofacteurs de $L_1(x, \xi)$. Nous remarquons que $\mathcal{L}(\rho)$ est indépendante de choix de coordonnées symplectiques et de base de $\boldsymbol{C}^N$ modulo $L_1(\rho)T$ avec T une matrice carrée d'ordre N. C'est-à-dire, $\mathcal{L}(\rho)$ est un élément de $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)/L_1(\rho)\,\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)$ (cf. [2], [10]).

Soit $F_h(\rho)$ l'application hamiltonienne de h en ρ (voir [4], [5]) et posons

$$\mathrm{Tr}^+ h(\rho) = \sum \mu_j\,,$$

où $\{i\mu_j\}$ sont des valeurs propres de $F_h(\rho)$ se trouvant sur l'axe imaginaire positif, répétées selons leurs multiplicités. On dit que h est effectivement hyperbolique en ρ si $F_h(\rho)$ admet des valeurs propres non nulles réelles. Formulons maintenant la condition (H) en caractéristique multiple ρ:

il existe une constante réelle α avec $|\alpha| \leqq 1$ telle qu'on ait

$$(H) \qquad \mathcal{L}(\rho) + \alpha\,\mathrm{Tr}^+ h(\rho)\, I = 0$$

dans $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)/L_1(\rho)\,\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)\,,$

où I désigne l'application d'identité. Cela est un analogue de la condition d'Ivrii-Petkov-Hörmander (voir [4], [5]). Nous remarquons que cette condition est indépendante de coordonnées symplectiques locales dans $T^*\Omega$ et de base locale de $\boldsymbol{C}^N$, puisque l'est aussi $\mathrm{Tr}^+ h(\rho)$. Le résultat suivant est énoncé dans [7], [9].

Théorème 1.1. *Supposons que L soit hyperbolique en $\hat{x}\in\Omega$ par rapport à $t(x)$. Si h n'est pas effectivement hyperbolique et le rang de L_1 est égal à $N-1$ en une caractéristique multiple $\rho\in T^*_{\hat{x}}\Omega\backslash 0$, alors la condition (H) est vérifiée en ρ.*

Dans le cas où ρ est une caractéristique double et $F_h(\rho)$ est nilpotente, alors la condition (H) se réduit à la condition de Levi.

Du théorème 1.1, il résulte:

Corollaire 1.1. *Supposons que L soit fortement hyperbolique en $\hat{x}$ par rapport à $t(x)$. Alors il existe un voisinage U de $\hat{x}$ tel que h soit effectivement hyperbolique ou bien le rang de L_1 soit au plus $N-2$ en chaque caractéristique multiple sur $T^*U\backslash 0$.*

REMARQUE 1.1. Dans le cas où $d=1$ et par conséquent $\mathrm{Tr}^+ h(\rho)=0$, le théorème 1.1 montre que la condition

$$\mathcal{L}(\rho)=0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)/L_1(\rho)\,\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)$$

est nécessaire pour que L soit hyperbolique en $\hat{x}$ sous les même hypothèses que celles du théorème 1.1. Ce résultat était montré par Koutev et Petkov [6].

REMARQUE 1.2. Dans le cas où toutes caractéristiques de h sont au plus doubles, concernant l'inverse de corollaire 1.1, quelques résultats se trouvent dans [8], [9].

Lemme 1.1. *Soit $\rho\in T^*_{\hat{x}}\Omega\backslash 0$ une caractéristique de multiplicité supérieur à 2. Supposons que le range de $L_1(\rho)$ soit égal à $N-1$. Alors pour que L soit hyperbolique en $\hat{x}$ par rapport à $t(x)$, il est nécessaire que*

$$\mathcal{L}(\rho)=0$$

dans $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)/L_1(\rho)\,\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)$.

Si la multiplicité de ρ est supérieur à 2, on a toujours $\mathrm{Tr}^+ h(\rho)=0$. Donc dans ce cas-là, le théorème 1.1 résulte du lemme 1.1. Alors, pour démontrer le théorème 1.1, on peut supposer que ρ soit une caractéristique double.

Dans §3, nous démontrons le théorème 1.1 et dans §4, on donne une preuve du lemme 1.1. Dans les sections suivantes, par un changement, si nécessaire, de base de $\boldsymbol{C}^N$ et de coordonnées x sur Ω on suppose que

$$t(x)=x_0\,, \quad A_0(x)=-I_N\,,$$

où I_N est la matrice unité d'ordre N. Aussi on se sert des notations $x=(x_0, x')$, $\xi=(\xi_0, \xi')=(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_d)$.

2. Préliminaires

Considérons le symbole du système du premier ordre:

$$L(x, \xi) = -\xi_0 + \sum_{i=1}^{d} A_j(x)\, \xi_j + B(x)\,,$$

et soit $h(x, \xi)$ le déterminant de $L_1(x, \xi)$. Soit, d'autre part, $\rho=(0, \hat{\xi}) \in T_0^* \boldsymbol{R}^{d+1} \backslash 0$ une caractéristique de multiplicité $r(r \geqq 2)$ de $h(x, \xi)$. Supposons que le rang de $L_1(0, \hat{\xi})$ soit $N-1$. Donc, par un changement de coordonnées x, conservant la première composante x_0, on peut supposer que $\rho=(0, e_d)$ où $e_d=(0, \cdots, 0, 1)$. Cela implique

$$L_1(\rho) = A_d(0)\,.$$

Puisque ρ est une caractéristique de multiplicité r, il existe $N(x)$, une matrice carrée d'ordre N inversible d'éléments C^∞ près de l'origine telle qu'on ait (par exemple, voir [12])

$$\text{(2.1)} \quad N(x)^{-1} A_d(x)\, N(x) = \operatorname{diag}(A(x), G(x)) + O(|x|^k) \quad (|x| \to 0,\ k\text{: grand})\,,$$

$A(x)$, $G(x)$ étant matrices carrées d'ordre r et $N-r$ telles que

$$A(0) = J(0, r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dét } G(0) \neq 0\,.$$

D'après Arnold [1], on peut trouver une matrice $\tilde{N}(x)$, C^∞, inversible près de l'origine telle que $\tilde{N}(x)^{-1} A(x)\, \tilde{N}(x)$ soit de la forme

$$\text{(2.2)} \qquad J(0, r) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_r(x), \cdots, a_1(x) \end{bmatrix} + O(|x|^k) \quad (|x| \to 0,\ k\text{: grand})\,.$$

D'autre part il découle de l'hyperbolicité de $h(x, \xi_0, 0, \cdots, 0, \xi_d)$ près de $\hat{x}=0$ par rapport à dx_0 que (voir [4], [5])

$$\text{(2.3)} \qquad a_j(x) = O(|x|^j) \quad (|x| \to 0)\,.$$

Désormais nous supposerons que $\rho=(0, e_d)$ et

$$A_d(x) = \operatorname{diag}(A(x), G(x)) + O(|x|^k),\ A(x) = J(0, r) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_r(x), \cdots, a_1(x) \end{bmatrix}$$

avec dét $G(0) \neq 0$. On posera

$$A(x, \xi') = \sum_{j=1}^{d} A_j(x)\, \xi_j = (A_{ij}(x, \xi'))_{1 \leq i, j \leq 2} = (a_{ij}(x, \xi'))_{1 \leq i, j \leq N}\,,$$

$$L_1(x, \xi) = (L_{ij}(x, \xi))_{1 \leq i, j \leq 2} = (m_{ij}(x, \xi))_{1 \leq i, j \leq N}\,,$$

où (A_{ij}), (L_{ij}) représentant une partition de A, L_1 en blocs correspondant à (2.1). Ici on remarque que

$$A_{11}(x, \xi') = \tilde{A}_{11}(x, \xi'')+A(x)\,\xi_d+O(|x|^k)\,\xi_d\,,$$
$$A_{22}(x, \xi') = \tilde{A}_{22}(x, \xi'')+G(x)\,\xi_d+O(|x|^k)\,\xi_d\,,$$
$$A_{12}(x, \xi') = \tilde{A}_{12}(x, \xi'')+O(|x|^k)\,\xi_d,\ A_{21}(x, \xi') = \tilde{A}_{21}(x, \xi'')+O(|x|^k)\,\xi_d,$$

où $\xi''=(\xi_1, \cdots, \xi_{d-1})$.

Dans cette section nous travaillons avec des coordonnées et la base de $\boldsymbol{C}^N$ ci-dessus. D'abord nous avons le lemme suivant vu que

$$L_1(\rho) = \operatorname{diag}(J(0, r), G(0))\,.$$

Lemme 2.1. *Soit C une matrice carrée d'ordre N. Pour qu'on ait $C=L_1(\rho)T$ avec une matrice T, c'est-à-dire, $C=0$ dans* $\operatorname{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)/L_1(\rho)\operatorname{Hom}(\boldsymbol{C}^N, \boldsymbol{C}^N)$, *il faut et il suffit que la r-ième ligne de C soit nulle.*

Lemme 2.2. *Soit $r\geqq 2$. Alors on a*

$$(-1)^{r-1}\ \text{dét}\ G(0)\,\partial_{x_j}a_{r1}(\rho) = \partial_{x_j}\,\text{dét}\ L_1(\rho) = 0\,,$$
$$(-1)^{r-1}\ \text{dét}\ G(0)\,\partial_{\xi_j}a_{r1}(\rho) = \partial_{\xi_j}\,\text{dét}\ L_1(\rho) = 0\,,$$
$$\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}\,\text{dét}\ L_1(\rho) = (-1)^{r-1}\ \text{dét}\ G(0)\ \{\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}a_{r1}(\rho)-\partial_{\xi_j}a_{r-11}(\rho)\,\partial_{x_j}m_{rr}(\rho)\}\ .$$

Preuve. Les deux premières égalités résultent de (2.3) et

$$L_1(x, \xi) = -\xi_0+\tilde{A}(x, \xi'')+\operatorname{diag}(A(x), G(x))\,\xi_d+O(|x|^k)\,\xi_d\,.$$

Pour montrer la dernière égalité, nous posons

$$\partial_{\xi_j}\,\text{dét}\ L_1(x, \xi) = \sum_{\mu=1}^{N} I_\mu^j(x, \xi)\,,$$

c'est-à-dire, $I_\mu^j(x, \xi)$ est le déterminant de la matrice L_1 dont la μ-ième ligne est remplacée par les dérivées par rapport à ξ_j. Alors, si $\mu\neq r$, $r-1$, on a

$$\partial_{x_j}I_\mu^j(\rho) = \partial_{x_j}I_\mu^j(x, e_d)|_{x=0} = 0\,,$$

car $m_{r-1p}(x, e_d)\,m_{rq}(x, e_d) = O(|x|^2)$ pour tout p, q avec $p\neq q$. Si $\mu=r-1$ on voit que

$$\partial_{x_j}I_{r-1}^j(\rho)=\partial_{x_j}I_{r-1}^j(0, e_d)|_{x=0} = (-1)^{r-2}\ \text{dét}\ G(0)\,\partial_{\xi_j}a_{r-11}(\rho)\,\partial_{x_j}m_{rr}(\rho)$$

et si $\mu=r$

$$\partial_{x_j}I_r^j(\rho) = \partial_{x_j}I_r^j(x, e_d)|_{x=0} = (-1)^{r-1}\ \text{dét}\ G(0)\,\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}a_{r1}(\rho)\,,$$

en effet on a $m_{rp}(x, e_d)=O(|x|^2)$ si $p\neq r$ et $m_{p-1q}(x, e_d)=\delta_{pq}+O(|x|^k)$ pour tout $2\leqq p\leqq r$, $1\leqq q\leqq r$, δ_{pq} étant le symbole de Kronecker, d'où la dernière égalité.

Lemme 2.3. *La r-ième ligne de $\mathcal{L}(\rho)$ est égale à*

$$(-1)^{r-1}\,\text{dét}\,G(0)\,(0,\cdots,0,\{b_{r1}(0)+\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{d}(\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}a_{r1}(\rho)-$$
$$-\partial_{\xi_j}a_{r-11}(\rho)\,\partial_{x_j}m_{rr}(\rho)\},0,\cdots,0)\,,$$

où $B(x)=(b_{ij}(x))_{1\leqq i,j\leqq N}$.

Preuve. Tout d'abord, on remarque que

$${}^{co}L_1(\rho)=\text{diag}((c_{ij}),O),\ c_{1r}=(-1)^{r-1}\,\text{dét}\,G(0),\ c_{ij}=0\quad\text{si}\quad(i,j)\neq(1,r)\,,$$

où O désigne la matrice carrée nulle d'ordre $N-r$. Alors il est clair que la r-ième ligne de $L_s(\rho)\,{}^{co}L_1(\rho)$ est égale à

$$(-1)^{r-1}\,\text{dét}\,G(0)\,(0,\cdots,0,\{b_{r1}(0)+\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{d}\partial_{x_j}\partial_{\xi_j}a_{r1}(\rho)\},0,\cdots,0)\,.$$

Donc il suffit de démontrer que la r-ième ligne de $\{L_1,{}^{co}L_1\}(\rho)$ est égale à

$$(2.4)\qquad (-1)^{r-1}\,\text{dét}\,G(0)\,(0,\cdots,0,\sum_{j=0}^{d}\partial_{\xi_j}a_{r-11}(\rho)\,\partial_{x_j}m_{rr}(\rho),0,\cdots,0)\,.$$

Appliquant le lemme 2.2, il en résulte que

$$r\text{-ième ligne de}\quad \partial_{\xi_j}L_1(\rho)\,\partial_{x_j}({}^{co}L_1)(\rho)=0\,.$$

En effet, (i,j)-élément de ${}^{co}L_1(x,e_d)$ est de l'ordre $O(|x|^2)$ si $(i,j)\neq(1,r)$. Puis, d'après (2.3) et lemme 2.2, on voit que r-ième ligne de $\partial_{x_j}L_1(\rho)\,\partial_{\xi_j}({}^{co}L_1)(\rho)$ est:

$$(-1)^r\,\text{dét}\,G(0)\,(0,\cdots,0,\partial_{\xi_j}a_{r-11}(\rho)\,\partial_{x_j}m_{rr}(\rho),0,\cdots,0\,).$$

Cela montre (2.4).

Maintenant, en posant

$$L_{11}(x,\xi)=\left[\begin{array}{c:ccc} m_{11} & & M & \\ \hdashline m_{r1} & m_{r2} & & m_{rr}\end{array}\right],$$

on introduit le symbole R:

$$R(x,\xi)=\begin{bmatrix}R_{11}(x,\xi) & 0\\ R_{21}(x,\xi') & \xi_d^{r-1}I_{N-r}\end{bmatrix},\quad R_{11}(x,\xi)=\left[\begin{array}{c:cc}\tilde{m}_{r1} & 0 & 0\\ \hdashline \tilde{m}_{r2} & & \\ & \tilde{M}\xi_d & \\ \tilde{m}_{rr} & & \end{array}\right],$$

où $R_{21}(x,\xi')=-G(x)^{-1}\tilde{A}_{21}(x,\xi'')\,\xi_d^{r-2}$ et $\tilde{m}_{rj}$ désigne le cofacteur de m_{rj} de la matrice L_{11} multiplié par $(-1)^{r-1}$ en sorte que $\sum_{j=1}^{r} m_{qj}\,\tilde{m}_{rj}=(-1)^{r-1}\,\delta_{qr}$ dét L_{11} et $\tilde{M}$ désigne la matrice des cofacteurs de M en sorte que $M\tilde{M}=$dét M. On note que les éléments de $R(x, \xi)$ sont homogènes de degré $r-1$ en ξ. On va étudier $K(x, D)$ définie par

$$(2.5)\qquad K(x, D) = L(x, D)\,R(x, D),\ K(x, D) = (K_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}=(k_{ij})_{1\leq i,j\leq N}\,.$$

Lemme 2.4. *On voit que*

$$\textit{la } r\textit{-ième ligne de } \mathcal{L}(\rho) = (-1)^{r-1}(0, \cdots, 0, \text{dét } G(0)\,k^s_{r1}(\rho), 0, \cdots, 0)$$

où k^s_{r1} désigne le symbole sous-principal de $k_{r1}(x, D)$.

Preuve. On désigne par $\sigma_r(k_{r1})$, $\sigma_{r-1}(k_{r1})$ les parties homogènes de degré r, $r-1$ en ξ respectivement de $k_{r1}(x, \xi)$, le symbole de $k_{r1}(x, D)$. Alors un calcul symbolique nous donne

$$(2.6)\qquad \sigma_r(k_{r1})\,(x, \xi) = \sum_{j=1}^{r} m_{rj}(x, \xi)\,\tilde{m}_{rj}(x, \xi)+c_r(x, \xi)+O(|x|^k)\,d_r(x, \xi)\,,$$

où $c_r(x, \xi)$, $d_r(x, \xi)$ sont homogènes de degré r en ξ et de plus $c_r(x, \xi)$ est de degré au plus $r-2$ en ξ_d. On a de la même façon

$$(2.7)\qquad \sigma_{r-1}(k_{r1})\,(x, \xi) = b_{r1}(x)\,\tilde{m}_{r1}(x, \xi)+c_{r-1}(x, \xi)+O(|x|^k)\,d_{r-1}(x, \xi)\,,$$

où $c_{r-1}(x, \xi)$ est de degré au plus $r-2$ en ξ_d. D'autre part on a

$$\partial_{x_j}\,\partial_{\xi_j}\,\sigma_r(k_{r1})\,(\rho)=\partial_{x_j}\,\partial_{\xi_j}\,m_{r1}(\rho)\,\tilde{m}_{r1}(\rho)+\partial_{\xi_j}\,\tilde{m}_{rr}(\rho)\,\partial_{x_j}\,m_{rr}(\rho)\,,$$
$$\partial_{\xi_j}\,\tilde{m}_{rr}(\rho) = (-1)\,\partial_{\xi_j}\,a_{r-11}(\rho)\,,\quad \tilde{m}_{r1}(\rho) = 1\,;$$

en effet $\tilde{m}_{rj}(\rho)=0$ si $j\neq 1$, $\partial_{x_i}\,\tilde{m}_{rj}(\rho)=0$ pour tout i, j et $\partial_{x_i}\,m_{rj}(\rho)=0$ pour tout i, j si $j\neq r$. Cela implique

$$k^s_{r1}(\rho) = \{b_{r1}(0)+\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{d}(\partial_{x_j}\,\partial_{\xi_j}\,m_{r1}(\rho)-\partial_{\xi_j}\,m_{r-11}(\rho)\,\partial_{x_j}\,m_{rr}(\rho))\}\,.$$

Vu lemme 2.3, on a le résultat.

Lemme 2.5. *Le symbole principal de $K_{21}(x, D)$ est de la forme*

$$C(x, \xi)+O(|x|^k)\,D(x, \xi)\,,$$

où $C(x, \xi)$ est une $(N-r)\times r$ matrice dont les éléments sont homogènes de degré r, au plus $r-2$, au moins 1 en ξ, ξ_d, ξ'' respectivement.

Preuve. Nous nous rappelons que $\sigma_r(K_{21})\,(x, \xi)=\tilde{A}_{21}(x, \xi'')\,R_{11}(x, \xi)+(-\xi_0\,I_{N-r}+\tilde{A}_{22}(x, \xi'')+G(x)\,\xi_d)\,R_{21}(x, \xi')+O(|x|^k)\,D_r(x, \xi)$ et $R_{11}(x, \xi)=\xi_d^{r-1}I_r+\tilde{R}_{11}(x, \xi)$ où les éléments de $\tilde{R}_{11}(x, \xi)$ sont de degré au plus $r-2$ en ξ_d. Alors on a le lemme vu la définition de $R_{21}(x, \xi)$.

Dans ce qui suit, on pose

$$\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_0, \tilde{\nu}_1, \cdots, \tilde{\nu}_d) = ((r-1)/r, 1/2, \cdots, 1/2, 1).$$

Lemme 2.6. *Soit $r \geqq 3$. Alors on a avec des constantes réelles c non nulle et $\mu > 0$*

$$k_{r1,\lambda}(y, \eta) = k_{r1}(\lambda^{-\tilde{\nu}_0 s} y_0, \cdots, \lambda^{\tilde{\nu}_0 s} \eta_0, \cdots) =$$
$$= (-1)^{r-1} \lambda^{(r-1)s} (\text{dét}\, G(0))^{-1} \{c\eta_0^r + (-1)^{r-1} b_{r1}(0)\, \text{dét}\, G(0)\, \eta_d^{r-1} + O(\lambda^{-\mu s})\}.$$

Lemme 2.7. *Soit $r=2$ et soient $\tilde{Q}'$, Q' les formes quadratiques correspondantes aux hessiens en ρ de h, $\sigma_2(k_{21})$ respectivement. Alors on a*

$$\tilde{Q}(y, \eta) = -Q(y, \eta)\, \text{dét}\, G(0), \quad \text{Tr}^+ h(\rho) = \text{Tr}^+ \sigma_2(k_{21})(\rho)\, |\text{dét}\, G(0)|,$$

où $\tilde{Q}(y, \eta)$, $Q(y, \eta)$ sont les formes quadratiques $\tilde{Q}'(y, \eta)$, $Q'(y, \eta)$ dont les termes contenant y_d sont supprimées.

Preuves des lemmes 2.6 *et* 2.7. Provisoirement dans cette preuve, désignons par $\mathring{K}(x, \xi)$, $\mathring{L}(x, \xi)$ et $\mathring{R}(x, \xi)$ les symboles principals des $K(x, D)$, $L(x, D)$ et $R(x, D)$ respectivement. Nous faisons un changement asymptotique de variables:

$$y_j = \lambda^{\tilde{\nu}_j s} x_j, \quad 0 \leqq j \leqq d.$$

Soient $\mathring{K}_\lambda(x, \xi)$, $\mathring{L}_\lambda(x, \xi)$ et $\mathring{R}_\lambda(x, \xi)$ les images de $\mathring{K}(y, \eta)$, $\mathring{L}(y, \eta)$ et $\mathring{R}(y, \eta)$ par ce changement de variables. En tenant compte de l'égalité

$$\text{dét}\, \mathring{K}_\lambda(y, \eta) = \text{dét}\, \mathring{L}_\lambda(y, \eta)\, \text{dét}\, \mathring{R}_\lambda(y, \eta),$$

il est facile de voir que

$$\mathring{K}_\lambda(y, \eta) = \left[\begin{array}{c:c} \sigma_r(K_{11})_\lambda(y, \eta) & O(\lambda^{(r-1/2)s}) \\ \hdashline O(\lambda^{(r-1/2-1/r)s}) & G(0)\, \eta_d^r \lambda^{rs} + O(\lambda^{(r-1/r)s}) \end{array}\right] \tag{2.8}$$

d'après le Lemme 2.5 et le fait $\sigma_r(K_{12})(x, \xi') = (\tilde{A}_{12}(x, \xi'') + O(|x|^k)\xi_d)\, \xi_d^{r-1}$. Quant à $\sigma_r(K_{11})_\lambda(y, \eta)$ nous nous rappelons que $\sigma_r(K_{11})(x, \xi) = L_{11}(x, \xi) R_{11}(x, \xi) + L_{12}(x, \xi') R_{21}(x, \xi')$. Alors il résulte de la définition de $R_{11}(x, \xi)$ que $\sigma_r(k_{j1}) = 0$ si $j \neq r$. Donc on a

$$\sigma(K_{11})_\lambda(y, \eta) = \left[\begin{array}{c:c} O(\lambda^{(r-1)s}) & \eta_d^r \lambda^{rs} I_{r-1} + O(\lambda^{(r-1/r)s}) \\ \hdashline \sigma_r(k_{r1})_\lambda(y, \eta) & O(\lambda^{(r-1/r)s}) \end{array}\right]. \tag{2.9}$$

En effet, modulo un terme de degré au plus $r-1$ en ξ_d, on a $M(x, \xi)\tilde{M}(x, \xi)\xi_d = \xi_d\, \text{dét}\, M(x, \xi) \equiv \xi_d^r I_{r-1} + O(|x|)\, C_r(x, \xi)$ et $\sigma_r(k_{rj}) \equiv O(|x|)\, \xi_d^r$. D'où

$$\text{dét}\, \mathring{K}_\lambda(y, \eta) = (-1)^{r-1} \sigma_r(k_{r1})_\lambda(y, \eta)\, \eta_d^{r(N-1)} \lambda^{r(N-1)s}\, \text{dét}\, G(0) + O(\lambda^{(Nr-1-1/r)s}).$$

D'autre part on a

$$\text{dét}\,\mathring{R}_\lambda(y,\eta)=\lambda^{N(r-1)s}\,\eta_d^{N(r-1)}+O(\lambda^{N(r-1)s-s/2})\,.$$

Remarquons ici que si $r\geqq 3$, d'après l'hyperbolicité de $h(x,\xi)$ par rapport à dx_0 près de $\hat{x}$, on a (cf. [4], [5])

$$\begin{aligned}\text{dét}\,\mathring{L}_\lambda(y,\eta)&=h_\lambda(y,\eta)=h(\lambda^{-\tilde{\nu}_0 s}y_0,\cdots,\lambda^{\tilde{\nu}_0 s}\eta_0,\cdots)=\\&=\lambda^{(N-1)s}\{c\eta_d^{N-r}\,\eta_0^r+O(\lambda^{-\mu s})\}\,,\ (\mu>0,\ c\neq 0)\,,\end{aligned}\tag{2.10}$$

où $c=(r!)^{-1}(\partial^r h/\partial\xi_0^r)\,(\rho)$. Si $r=2$, on obtient

$$\text{dét}\,\mathring{L}_\lambda(y,\eta)=h_\lambda(y,\eta)=\tilde{Q}(y,\eta)\,\eta_d^{N-2}\,\lambda^{(N-1)s}+O(\lambda^{(N-2)s+s/2})\,.\tag{2.11}$$

Alors il en résulte que

$$\sigma_r(k_{r1})_\lambda(y,\eta)=(-1)^{r-1}\,c\lambda^{(r-1)s}\,\eta_0^r(\text{dét}\,G(0))^{-1}+O(\lambda^{(r-1)s-\mu s})\quad(\mu>0)$$

lorsque $r\geqq 3$. Vu (2.7), on a

$$\sigma_{r-1}(k_{r1})_\lambda(y,\eta)=b_{r1}(0)\,\lambda^{(r-1)s}\,\eta_d^{r-1}+O(\lambda^{(r-1)s-\mu s})\quad(\mu>0)$$

d'où

$$\begin{aligned}k_{r1,\lambda}(y,\eta)&=(-1)^{r-1}\,(\text{dét}\,G(0))^{-1}\,\lambda^{(r-1)s}\{c\eta_0^r+(-1)^{r-1}\,b_{r1}(0)\,\text{dét}\,G(0)\,\eta_d^{r-1}\}+\\&\quad+O(\lambda^{(r-1)s-\mu s})\quad(\mu>0)\,.\end{aligned}$$

Ensuite considérons le cas où $r=2$. En posant

$$\sigma_2(k_{21})_\lambda(y,\eta)=\lambda^s\,Q(y,\eta)+O(1)\,,$$

$$h_\lambda(y,\eta)=\tilde{Q}(y,\eta)\,\eta_d^{N-2}\,\lambda^{(N-2)s}+O(\lambda^{(N-2)s+s/2})\,,$$

on obtient

$$\tilde{Q}(y,\eta)=-Q(y,\eta)\,\text{dét}\,G(0)\,.$$

En même temps, cela donne

$$\text{Tr}^+\sigma_2(k_{21})\,(\rho)\,|\,\text{dét}\,G(0)\,|=\text{Tr}^+h(\rho)\,.$$

3. Démonstration du théorème 1.1

Le démonstration se constitue de construire une solution asymptotique dépendante d'un paramètre λ qui contredit une inégalité qui découle de (1.2), lorsque λ tend vers l'infini. Nous cherchrons une solution pour $L(x,D)$ de la forme

$$R(x,D)\,u\,.$$

C'est-à-dire, on construit une solution asymptotique pour $K(x, D)$. Le changement de variables asymptotique d'Ivrii et Petkov [5] nous permet de considérer $K(x, D)$ comme s'il est égal à $\mathrm{diag}(k_{21}(x, D), Q(x) D_d^2)$ où $Q(x)$ est une matrice carrée inversible d'ordre $N-1$. Cela étant mis, la construction de notre solution se réduit à celle de $k_{21}(x, D)$. Alors on peut suivre le raisonnement de Hörmander [4].

Désormais on désigne par $O(\lambda^p)$ un opérateur différentiel matriciel dont les éléments sont des opérateurs scalaires à coefficients C^∞ uniformément bornés dans C^∞ lorsque λ tend vers l'infini après multipliées par λ^{-p}. Supposons que $h(x, \xi)$ ne soit pas effectivement hyperbolique en $\rho=(0, e_d)$, alors, vu le lemme 2.7, $k_{21}(x, \xi)$ n'est non plus effectivement hyperbolique en ρ. De plus, (2.7) montre que

$$\sigma_1(k_{21})(\rho) = b_{21}(0)\,.$$

Donc en suivant le théorème 1.4.9 de [4] (plutôt la preuve du théorème 1.5.1 de [4]), on peut trouver un changement de coordonnées conservant la première composante x_0 et un changement de variables asymptotique,

$$\begin{gathered} y_j = \lambda^{s/2+\nu_j} x_j\,, \quad j=0, 1, \cdots, d-1\,, \quad y_d = \lambda^s x_d\,, \\ K_\lambda(y, D) = K(\lambda^{-s/2-\nu_0}, \cdots, \lambda^{-s} y_d, \lambda^{s/2+\nu_0} D_0, \cdots, \lambda^s D_d) \end{gathered}$$

tel que $k_{21,\lambda}(y, D)$ soit de la forme:

$$k_{21,\lambda}(y, D) = \lambda^s\{Q^\infty(yD_d, D, \lambda)+b_{21}(0)\,D_d+O(\lambda^{-k})\} \tag{3.1}$$

$Q_\infty(y, \eta, \lambda)$ étant l'une des formes suivantes (voir p. 141 de [4]):

a) $Q_\infty(y, \eta, \lambda) = Q'(y', \eta')-\eta_0^2+2\eta_0 L_0(y', \eta')\,,$

b) $Q_\infty(y, \eta, \lambda) = Q'(y', \eta')+2c\eta_0\,\eta_1+2\lambda^{-1}\eta_0 L_0(y', \eta')+\lambda^{-2}(y_1^2-\eta_0^2+2b\eta_0 y_1)\,,$

c) $Q_\infty(y, \eta, \lambda) = Q'(y', \eta')+\eta_1^2+2\eta_1 L_1(y', \eta')+2\lambda^{-1}\eta_0(cy_1+L_0(\eta_1, y', \eta'))\,,$

reprenant la notation de [4]. Ici on note qu'on peut prendre s aussi grand qu'on voudra, et pour cet s assez grand, on peut prendre k grand comme on veut.

Ensuite nous prenons

$$\begin{gathered} \Lambda = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, I_{N-2}\right), \quad W_\lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda^{s/4}, I_{N-1})\,, \\ V_\lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda^{-s}, \lambda^{-2s-p}, \lambda^{-2-q}\,G(0)^{-1}) \end{gathered}$$

et étudions

$$\tilde{K}_\lambda = W_\lambda\,\Lambda K_\lambda\,W_\lambda^{-1}\,V_\lambda\,.$$

Si on prend $p=p(\nu_j)$, $q=q(\nu_j)\in \boldsymbol{Z}$ convenablement, on a, vu (2.8), (2.9) et (3.1),

$$\tilde{K}_\lambda = \left(\begin{array}{c:c:c} Q_\infty(yD_d, D, \lambda)+b_{21}(0)\,D_d+ & O(\lambda^{p(1,2)-s/4}) & \\ +O(\lambda^{-k}) & & O(\lambda^{p(1,3)-s/4}) \\ O(\lambda^{p(2,1)-s/4}) & D_d^2+O(\lambda^{p(2,2)-s/4}) & \\ \hdashline O(\lambda^{p(3,1)-s/4}) & O(\lambda^{p(3,2)-s/4}) & D_d^2\, I_{N-2}+O(\lambda^{p(3,3)-s/4}) \end{array}\right).$$

Puis suivant [4], nous prenons E_λ comme

$$E_\lambda = \exp\{i\lambda^2(y_d+\langle Ey, y\rangle/2)+i\lambda\varphi(y)\},$$

où E est une $(d+1)\times(d+1)$ matrice constante symétrique satisfaisant $\operatorname{Im} E \geqq O$ et $Ee_d=0$, et $\varphi(y)$ une fonction, toutes les deux seront déterminées suivant [4]. Maintenant on considére

$$H_\lambda = E_\lambda^{-1}\,\tilde{K}_\lambda\, U_\lambda\, E_\lambda = (h_{ki})_{1\leq k,i\leq N}\,, \quad U_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda^{-3}, \lambda^{-4}, \lambda^{-4}\, I_{N-2})$$

avec

$$h_{ki} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j}\, h_{ki}^{(j)}(y, D) \tag{3.2}$$

qui signifie que, pour tout entier m, on a

$$h_{ki} - \sum_{j=0}^{m} \lambda^{-j}\, h_{ki}^{(j)}(y, D) = O(\lambda^{-m-1})\,.$$

Ici on a évidemment

$$\begin{aligned} h_{11} &= \lambda^{-3}\, E_\lambda^{-1}\{Q_\infty(yD_d, D, \lambda)+b_{21}(0)\, D_d\}\, E_\lambda+O(\lambda^{-k+1})\,, \\ h_{ii} &= 1+O(\lambda^{-1}),\, i = 2, \cdots, N\,, \\ h_{ij} &= O(\lambda^{q(i,j)-s/4}),\ q(i,j)\in \boldsymbol{Z},\ i \neq j\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En se servant de notations Λ, R, c_0 dans [4] on a

$$h_{11}^{(0)} = i\Lambda\varphi\,, \quad h_{11}^{(1)}=\Lambda+c_0\,, \quad h_1^{(12)} = R\,,$$

où Λ, R sont des opérateurs d'ordre 1, Λ: dépendant de E et R: dépendant de E et de φ, c_0 étant une fonction dépendante de E et de φ (voir pp. 144–145 de [4]). Puisque $\{q(i,j)\}$ ne dépendent pas de s, on peut prendre s suffisamment grand qu'on ait

$$k-1\geqq 0,\ h_{ij}^{(0)} = h_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j\,. \tag{3.4}$$

Nous cherchons une solution asymptotique pour H_λ qui est le produit de E_λ et de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}\, v_n(y) \quad \text{avec} \quad v_n(y) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^n(y)\, R_j\,,$$

où R_j est le vecteur unité dans $\boldsymbol{R}^N$ dont la j-ième composante est égale à 1 et

$\sigma_j^n(y)$ sont des fonctions scalaires qui sont à être déterminée. On introduit

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}^n = {}^t(\sigma_2^n, \cdots, \sigma_N^n)\,, \\
&\tilde{h}^{(n)} = (h_{12}^{(n)}, \cdots, h_{1N}^{(n)})\,, \quad \hat{h} = -{}^t(h_{21}^{(n)}, \cdots, h_{N1}^{(n)})\,, \\
&H^{(0)} = -\{(h_{ij}^{(0)})_{2\leq i,j\leq N} - I_{N-1}\}\,, \quad H^{(n)} = -(h_{ij}^{(n)})_{2\leq i,j\leq N},\ n\geqq 1.
\end{aligned}$$

Vu (3.4) on a

$$\tilde{h}^{(0)} = \tilde{h}^{(1)} = 0\,, \quad \hat{h}^{(0)} = \hat{h}^{(1)} = 0\,, \quad H^{(0)} = 0\,. \tag{3.5}$$

Nous allons résoudre l'équation suivante

$$H_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} v_n = 0\,.$$

En égalant le coefficient de λ^{-m} à 0, cet équation se réduit à

$$\sum_{p=0}^{m} h_{11}^{(m-p)} \sigma_1^p + \sum_{p=0}^{m-2} \tilde{h}^{(m-p)} \tilde{\sigma}^p = 0,\ m = 0, 1, \cdots, \tag{3.6}$$

$$\tilde{\sigma}^m - \sum_{p=0}^{m-2} \hat{h}^{(m-p)} \sigma_1^p - \sum_{p=0}^{m-1} H^{(m-p)} \tilde{\sigma}^p = 0,\ m = 0, 1, \cdots\,. \tag{3.7}$$

Nous prenous $\tilde{\sigma}^0 = \tilde{\sigma}^1 = 0$. Ce choix s'adapte à (3.7) d'après (3.5). Ensuite nous démontrons que les systèmes (3.6), (3.7) se réduisent à une série d'équations pour $\sigma_1^n(\,n=0, 1, \cdots)$. On pose

$$H(j_0, \cdots, j_p) = \tilde{h}^{(j_0-j_1)} H^{(j_1-j_2)} \cdots H^{(j_{p-1}-j_p)}\,, \quad H(j_0, j_1) = \tilde{h}^{(j_0-j_1)}\,,$$

et désignons par $\sum (s; j_0, \cdots, j_p)$ la somme

$$\sum_{j_0=0}^{s-2} \sum_{j_1=0}^{j_0-1} \cdots \sum_{j_p=0}^{j_{p-1}-1}.$$

Alors vu (3.7) on a par récurrence

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{m-2} \tilde{h}^{(m-p)} \tilde{\sigma}^p = \sum_{s=0}^{q} \sum (m; p, j_0, \cdots, j_s)\, H(m, p, j_0, \cdots, j_{s-1}) \times \\
\times \hat{h}^{(j_{s-1}-j_s)} \sigma_1^{j_s} + \sum (m; p, j_0, \cdots, j_q)\, H(m, p, j_0, \cdots, j_q)\, \tilde{\sigma}^{j_q}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

pour tout q, $q \geqq 0$. De (3.5) il résulte que

$$H(m, p, j_0, \cdots, j_q)\, \tilde{\sigma}^{j_q} = 0 \quad \text{pour} \quad q \geqq m-3$$

pour le choix $\tilde{\sigma}^0 = \tilde{\sigma}^1 = 0$. On définit les opérateurs différentiels $\{P_j^{(m)}\}$ par

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{m-3} \sum (m; p, j_0, \cdots, j_s)\, H(m, p, j_0, \cdots, j_{s-1})\, \hat{h}^{(j_{s-1}-j_s)} \sigma_1^{j_s} = \\
&= \sum_{j=0}^{m-3} P_j^{(m)} \sigma_1^{m-3-j}\,, \quad m = 3, \cdots,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{m-2} \tilde{h}^{(m-p)} \tilde{\sigma}^p = \sum_{j=0}^{m-3} P_j^{(m)} \sigma_1^{m-3-j} . \tag{3.10}$$

Par conséquent, l'équation (3.6) se réduit à l'équation en σ_1^n ($n=0, 1, \cdots$). Rappelons qu'un point essentiel de la preuve du théorème 1.5.1 de [4] est le fait que $P_j^{(m)}$ ne dépend pas de m. On l'examinera.

Lemme 3.1. *On a*

$$P_j^{(k)} = P_j^{(j+3)} \quad \textit{pour} \quad k \geqq j+3, \ \ j \geqq 0 .$$

Preuve. De (3.9) on voit

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-2} P_j^{(m+1)} \sigma_1^{m-2-j} &= \sum_{s=0}^{m-2} \sum (m+1; p, j_0, \cdots, j_s) H(m+1; p, j_0, \cdots, j_{s-1}) \hat{h}^{(j_{s-1}-j_s)} \sigma_1^{j_s} \\ &= \sum_{s=0}^{m-3} \sum (m+1; p, j_0, \cdots, j_s) H(m+1, p, j_0, \cdots, j_{s-1}) \hat{h}^{(j_{s-1}-j_s)} \sigma_1^{j_s} + \\ &+ \sum (m+1; p, j_0, \cdots, j_{m-2}) H(m+1, p, j_0, \cdots, j_{m-3}) \hat{h}^{(j_{m-3}-j_{m-2})} \sigma_1^{j_{m-2}} = I + II .\end{aligned}$$

Ici il résulte de (3.5) que

$$II = H(m+1, m-1, m-2, \cdots, 1) \hat{h}^{(1)} \sigma_1^0 = 0 .$$

D'autre part, vu (3.5) on obtient

$$\begin{aligned}I &= \sum_{s=0}^{m-3} \sum (m; p, j_0, \cdots, j_{s-1}) \sum_{j_s=-1}^{j_{s-1}-1} H(m, p, j_0, \cdots, j_{s-1}) \hat{h}^{(j_{s-1}-j_s)} \sigma_1^{j_s+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{m-3} P_j^{(m)} \sigma_1^{m-2-j} + R^m \sigma_1^0 .\end{aligned}$$

Cela implique

$$P_j^{(m)} = P_j^{(m+1)} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq j \leqq m-3, \quad m \geqq 3 . \tag{3.11}$$

Maintenant on suppose que

$$P_j^{(k)} = P_j^{(j+3)} \quad \text{pour} \quad k = j+3, \cdots, i, \quad j \geqq 0 . \tag{3.12}$$

De (3.11) avec $m=i$, on a

$$P_j^{(i+1)} = P_j^{(i)} .$$

Cela démontre que

$$P_j^{(k)} = P_j^{(j+3)} \quad \text{pour} \quad k = j+3, \cdots, i+1, \quad j \geqq 0 .$$

Par récurrence on a le résultat.

Lemme 3.2. *Il existe des opérateurs différentiels* $\{\hat{P}_k\}$ *tels qu'on ait*: (3.6) *et* (3.7) *se réduit à*

$$\sum_{j=0}^{m} \hat{P}_j \sigma_1^{m-j} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.13}$$

où $\hat{P}_0 = h_{11}^{(0)}$, $\hat{P}_1 = h_{11}^{(1)}$, $\hat{P}_3 = h_{11}^{(2)}$. *Plus précisément, si* σ_1^n ($n=0, 1, \cdots$) *vérifient* (3.13) *alors* $\tilde{\sigma}^n$ ($n=0, 1, \ldots$) *dans* (3.7) *et* σ_1^n ($n=0, 1, \cdots$) *satisfont automatiquement à* (3.6).

Preuve. D'après le lemme 3.1 et (3.10), on peut écrire

$$\sum_{p=0}^{m-2} \tilde{h}^{(m-p)} \tilde{\sigma}^p = \sum_{j=0}^{m-3} P_j^{(m)} \sigma_1^{m-3-j} = \sum_{j=3}^{m} P_{j-3}^{(m)} \sigma_1^{m-j} = \sum_{j=3}^{m} P_j \sigma_1^{m-j}$$

où on a posé $P_j = P_{j-3}^{(m)} = P_j^{(j)}$ ($j \geqq 3$). En posant

$$P_0 = P_1 = P_2 = 0, \quad \hat{P}_j = h_{11}^{(j)} + P_j, \quad j = 0, 1, \cdots,$$

l'équation (3.6) se réduit à (3.13).

La dernière étape de la preuve du théorème 1.1.

D'abrod nous nous rappelons qu'on a

$$h_{11} = \lambda^{-s-3} E_\lambda^{-1} k_{21,\lambda} E_\lambda, \quad \hat{P}_0 = h_{11}^{(0)}, \quad \hat{P}_1 = h_{11}^{(1)}, \quad \hat{P}_2 = h_{11}^{(2)}.$$

Si on suppose qu'on ait:

$$k_{21}^s(\rho) + \mathrm{Tr}^+ k_{21}(\rho) < 0$$

alors, on peut trouver une matrice E et une fonction $\varphi(y)$, suivant la preuve du théorème 1.5.1 dans [4], telles que pour tous entiers ν, μ on ait: $\Lambda\varphi$ s'annule à l'ordre ν en 0, $\mathrm{Im}\,(i\lambda^2(y_d + \langle Ey, y\rangle/2) + i\varphi(y)) \geqq C\lambda\,|y|^2$ près de l'origine lorsque $y_0 \leqq 0$ et (3.13) se résout pour $m=0, 1, \cdots, \mu$ avec $\sigma_1^0(0) \neq 0$ modulo $O(|y|^\nu)$. Donc pour tout entier κ on peut choisir une somme partielle $\sum_{n=0}^{\tilde{\kappa}} \lambda^{-n} v_n(y) = v_\lambda^{\tilde{\kappa}}(y)$ en sorte que

$$v_0(0) \neq 0, \quad H_\lambda E_\lambda v_\lambda^{\tilde{\kappa}} = O((\lambda^{-1} + |y|)^\kappa) \quad \text{lorsque} \quad \lambda^{-1} + |y| \to 0.$$

Ici on note que

$$H_\lambda = E_\lambda^{-1} W_\lambda \Lambda K_\lambda(y, D) W_\lambda^{-1} V_\lambda U_\lambda, \quad K_\lambda(y, D) = L_\lambda(y, D) R_\lambda(y, D),$$
$$R_\lambda E_\lambda = \lambda^{s+2} E_\lambda \{I_N + O(\lambda^{-\hat{k}})\}, \quad (\text{avec } \hat{k} > 0).$$

Donc la solution asymptotique

$$R_\lambda(y, D) W_\lambda^{-1} V_\lambda U_\lambda E_\lambda v_\lambda^{\tilde{\kappa}}$$

pour $L_\lambda(y, D)$ montre que $L(x, D)$ ne vérifie pas (1.2). Ce qui démontre que la condition

$$k_{21}^s(\rho)+\mathrm{Tr}^+k_{21}(\rho)\geqq 0$$

est nécessaire pour que L soit hyperbolique en $\hat{x}=0$ par rapport à $t(x)=x_0$. En remplaçant ξ' par $-\xi'$ il en résulte que la condition

$$-k_{21}^s(\rho)+\mathrm{Tr}^+k_{21}(\rho)\geqq 0\,,$$

aussi nécessaire. D'où on a

$$-\mathrm{Tr}^+k_{21}(\rho)\leqq k_{21}^s(\rho)\leqq \mathrm{Tr}^+k_{21}(\rho)\,. \tag{3.14}$$

Cela est équivalent à dire qu'il existe un nombre réel α avec $|\alpha|\leqq 1$ tel qu'on ait

$$k_{21}^s(\rho)\ \text{dét}\ G(0)+\alpha\ \mathrm{Tr}^+k_{21}(\rho)\ \text{dét}\ G(0)=0\,.$$

En tenant compte de lemmes 2.4 et 2.7, on voit que cette condition est équivalente à

$$\text{la deuxième ligne de}\quad \mathcal{L}(\rho)+\alpha\ \mathrm{Tr}^+h(\rho)\,I=0\,,$$

avec un nombre réel α, $|\alpha|\leqq 1$. Alors le lemme 2.1 démontre la nécessité de la condition (H).

4. Preuve du lemme 1.1

Dans cette section on désigne par $L_\lambda(y, D)$, $R_\lambda(y, D)$ et $K_\lambda(y, D)$ les opérateurs obtenus de $L(x, D)$, $R(x, D)$ et $K(x, D)$ par le changement de variables asymptotique de la section 2.

Nous suivons le raisonnement d'Ivrii et Petkov [5]. En supposant $\mathcal{L}(\rho)\neq 0$, nous construisons une solution asymptotique u_λ pour L_λ de la forme

$$u_\lambda=R_\lambda\, w_\lambda$$

qui contredit une inégalité qui découle de (1.2). Prenons

$$\Lambda=\mathrm{diag}\left(\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 1\\ \hdashline 0 & I_{r-2} & 0\\ \hdashline 1 & 0 & 0\end{array}\right], I_{N-r}\right),\quad T_\lambda=\mathrm{diag}\,(I_r,\, \lambda^{1/r-1/2}I_{N-r})\,,$$

$$W_\lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda^\varepsilon, I_{N-1})\,,\quad V_\lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda^{-(r-1)s}, \lambda^{-rs}I_{r-1}, \lambda^{-rs}G(0)^{-1})\,,$$

où ε est une constante telle que $0<\varepsilon<1/r$. Nous étudions l'opérateur

$$W_\lambda\,\Lambda T_\lambda\, K_\lambda\, T_\lambda^{-1}\, W_\lambda^{-1}\, V_\lambda=(\tilde{k}_{ij})_{1\leqq i,j\leqq N}\,.$$

Vu (2.8), (2.9) et lemme 2.5, on a

$$\tilde{k}_{ij}(y, D, \lambda)=\hat{k}_{ij}(y, D)+\lambda^{-\varepsilon(i,j)}\,r_{ij}(y, D, \lambda) \tag{4.1}$$

avec $\varepsilon(i, j)>0$ où

$$
\begin{aligned}
&\hat{k}_{11}(y, D) = (-1)^{r-1}\{cD_0^r+(-1)^{r-1}\, b_{r1}(0) \text{ dét } G(0)\, D_d^{r-1}\} \,, \\
&\hat{k}_{ii}(y, D) = D_d^r,\ 2\leqq i\leqq N,\ \hat{k}_{ij}(y, D) = 0 \quad \text{si} \quad i\neq j
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

et les coefficients de $r_{ij}(y, D, \lambda)$ sont bornés dans C^∞ quand $\lambda\to\infty$. Des lemmes 2.1, 2.2 et 2.3, il résulte que $\mathcal{L}(\rho)\neq 0$ est équivalent à $b_{r1}(0)\neq 0$, en effet

$$\partial_{x_j}\partial_{\xi_j} \text{ dét } L_1(\rho) = 0\,.$$

Alors on peut prendre γ en sorte qu'on ait

$$c\gamma^r+(-1)^{r-1}\, b_{r1}(0) \text{ dét } G(0) = 0\,, \quad \operatorname{Im}\gamma<0\,.$$

Avec cette γ, E_λ est donnée par

$$E_\lambda = \exp\,\{i\lambda y_d+i\gamma\lambda^{(r-1)/r}\, y_0\}\,.$$

Ensuite nous considérons

$$H_\lambda = E_\lambda^{-1}\, W_\lambda\, \Lambda K_\lambda\, W_\lambda^{-1}\, V_\lambda\, U_\lambda\, E_\lambda = (h_{ij})_{1\leq i,j\leq N}\,,$$

où

$$U_\lambda = \operatorname{diag}\,(\lambda^{-(r-2+1/r)}, \lambda^{-r}\, I_{r-1}, \lambda^{-r}\, I_{N-r})\,.$$

Vu (4.1) et (4.2), en prenant s suffisamment grand, nous obtenons

$$h_{ij}(y, D, \lambda) = \hat{h}_{ij}(y, D)+\lambda^{-1/r}\, \tilde{h}_{ij}(y, D, \lambda)\,,$$

où les coefficients de $\tilde{h}_{ij}(y, D, \lambda)$ sont bornés dans C^∞ quand $\lambda\to\infty$. Ici on note que

$$\hat{h}_{11}(y, D) = (-1)^{r-1}\, cr\gamma^{r-1}\, D_0\,, \quad \hat{h}_{ii}(y, D) = 1 \quad 2\leqq i\leqq N\,. \tag{4.3}$$

Maintenant nous considérons l'équation suivante

$$H_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} v_n\, \lambda^{-n/r} = 0 \quad \text{avec} \quad v_n(y) = \sum_{\mu=1}^{N} \sigma_\mu^n(y)\, R_\mu\,.$$

Cette équation s'écrit

$$\{\hat{h}_{ii}\, \sigma_i^n+ \sum_{\mu=1}^{N} \tilde{h}_{i\mu}\, \sigma_\mu^{n-1}\} = 0\,, \quad 1\leqq i\leqq N, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{E}_i$$

où on a posé $\sigma_i^n=0$ si $n<0$. En posant

$$\sigma_i^0 = 0 \quad \text{pour} \quad 2\leqq i\leqq N\,,$$

on peut résoudre $(E)_i$ avec $\sigma_1^0=\sigma_1^0(y')\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ où $\sigma_1^0(y')=1$ près de $y'=0$.

Nous remarquons que chaque $\sigma_1^n(y, \lambda)$ $(n\geqq 1)$ sera obtenu par l'intégration en y_0

et par conséquent $\sigma_i^n(y, \lambda)$ sont bornées dans $C^\infty([-\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}]\times \boldsymbol{R}^d)$ quand $\lambda \to \infty$. Finalement on a

$$L_\lambda(R_\lambda W_\lambda^{-1} V_\lambda U_\lambda) E_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} v_n \lambda^{-n/r} = 0 .$$

Si on note que

$$R_\lambda E_\lambda = \lambda^{(r-1)(s+1)} E_\lambda \{I_N + O(\lambda^{-\mu})\} \quad (\mu > 0) ,$$

la série formelle

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} R_\lambda E_\lambda W_\lambda^{-1} V_\lambda U_\lambda v_n \lambda^{-n/r}$$

donne une solution asymptotique pour L_λ dont une somme partielle démontre que (1.2) ne vérifie pas.

Références

[1] V.I. Arnold: *Matrices depending on parameters,* Uspehi Math. Nauk, **26** (1971), 101–114.

[2] R. Berzin et J. Vaillant: *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples,* J. Math. Pures et appl. **58** (1974), 165–216.

[3] Y. Demay: *Le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques doubles,* C.R. Acad. Sc. Paris, **278** (1974), 771–773.

[4] L. Hörmander: *The Cauchy problem for differential equations with double characteristics,* J. Analyse Math. **32** (1977), 118–196.

[5] V. Ja. Ivrii et V.M. Petkov: *Necessary conditions for the Couchy problem for non strictly hyperbolic equations to be well posed,* Russian Math. Surveys, **29** (1974), 1–70.

[6] N.D. Koutev et V.M. Petkov: *Sur les systèmes régulièrement hyperboliques du premier ordre,* Ann. Sofia Univ. Math. Fac. **67** (1976), 375–389.

[7] T. Nishitani: *On strong hyperbolicity for first order systems,* Proc. Japan Acad. **61** (1985), 193–196.

[8] T. Nishitani: *Système effectivement hyperbolique,* Calcul d'opérateurs et fronts d'ondes, 108–132, ed., J. Vaillant, Travaux en cours, **29**, Hermann, Paris, 1988.

[9] T. Nishitani: *On strong hyperbolicity of systems,* Hyperbolic Equations, 102–114, Research Notes in Math. **158**, ed., F. Colombini and M.K.V. Murthy, Longman, 1987.

[10] V.M. Petkov: *Sur la condition de Levi pour des systèmes hyperboliques de multiplicité variable,* Serdica Bulg. Math. Publ. **3** (1977), 309–317.

[11] V.M. Petkov: *Necessary conditions for the Cauchy problem for nonsymmetrizable hyperbolic systems to be well-posed,* Trudy Sem. Petrovski, **1** (1975), 211–236.

[12] W. Wasow: Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Interscience Publishers, New York, 1965.

[13] H. Yamahara: *On the Cauchy problems for weakly hyperbolic systems,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **12** (1976), 493–512.

Department of Mathematics
College of General Education
Osaka University