Title	Nonlinear partial differential equations modeling chemotaxis and self-gravitating fluids
Author(s)	高橋, 亮
Citation	大阪大学, 2009, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/54258
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【17】

氏　　　　　　名	高橋　　亮（たかはし　りょう）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　２３４４４　号
学 位 授 与 年 月 日	平成21年12月16日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第４条第１項該当 基礎工学研究科システム創成専攻
学　位　論　文　名	Nonlinear partial differential equations modeling chemotaxis and self-gravitating fluids （走化性及び自己重力作用流体をモデル化する非線形偏微分方程式）
論 文 審 査 委 員	（主査） 教　授　鈴木　　貴 （副査） 教　授　名和　範人　　教　授　会田　茂樹

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、走化性及び自己重力作用流体をモデル化する二つの非線形偏微分方程式の解の性質、特に解の爆発に関連する性質を研究する。

自己相互作用流体の方程式について、弱解の構成・弱解のヘルダー連続性の証明・臨界指数の決定がなされ、方程式の指数が臨界である場合において、有限時間内爆発が起こるか否かを特徴付ける Blowup threshold の決定・ε正則性の証明・爆発集合の構造解析がなされる。方程式は退化放物型であるため、弱解を構成する必要がある。これはある近似方程式の極限を考えることにより達成される。弱解のヘルダー連続性の証明は線形放物型不等式の理論が適用されることに幾分の新規性があろう。臨界指数の決定において、劣臨界指数の場合に弱解は時間大域的に存在する一方、臨界指数及び優臨界指数の場合は有限時間内爆発が起こりうることが証明される。Blowup threshold は方程式の変分構造に由来する自由エネルギーの減少及び質量保存則から導出される半線形楕円型方程式の量子化エネルギーによって特徴付けられる。 Trudinger-Moser 型の不等式、自由エネルギーと二次モーメントとを結び付ける関係式を用いることにより Blowup threshold の存在が証明される。方程式に付随する Newton ポテンシャルの decay の緩さが評価において障害となるが、これを上手く分解することによりε正則性が証明される。爆発集合はタイプⅠとタイプⅡの二つに分けられ、この分類は方程式のＯＤＥパートに由来する。方程式の指数が臨界であるとき、方程式及び質量はスケール不変性を持つ。この性質に着目することにより、タイプⅡ爆発点が有限であることが証明される。再びスケール不変性に注目することにより、ある種の示唆を含んだ形で爆発集合の構造解析が行われる。

本論文で研究される走化性の方程式は E. F. Keller と L. A. Segel により提案されたものである。単純化された Keller-Segel 系はすでによく研究されている。本論文ではそれを摂動させ、かつ非線形境界条件が課せられた、より一般化されたものを扱う。まずは古典解の時間局所的一意存在が一般次元において証明される。証明方法は縮小写像の原理を用いた標準的なものである。次に空間次元が２である場合に焦点をあて、有限時間内爆発が起こるときに領域の内部における爆発点が有限であることが示される。

論文審査の結果の要旨

本論文は自己相互作用粒子の平均場方程式と走化性方程式に関する基本定理の証明を与えるとともに，極めて興味深い解の性質を数学的に解明したものである．その成果の一部はすでに数編の学術論文として発表され，中でも自己相互作用粒子平均場方程式の質量量子化の研究は国際的な注目を集めているところである．対象となる非線形偏微分方程式は最近天体物理学研究においてカイネティック方程式から導出されたもので，自己相互作用粒子の平均場の運動を，粒子配分から規定されるエントロピーを基づく局所エントロピー最大原理と，統計集団により定まる定温または定エネルギー条件を要請することで数学的に閉じた系として得られるものである．このとき自己相互作用はポテンシャルを用いて積分形で記述することで非線形性のひとつの要因である非局所項として実現されて，系は単独の放物型方程式として縮約される．さらにこの方程式は全質量保存とヘルムホルツ自由エネルギーの減少という二つの物理法則を実現する．ボルツマンエントロピーを用いる場合は粒子密度に対するポアソン方程式から定まるポテンシャルの勾配に関わるスモルコフルキー方程式が得られ，臨界的変分構造とスケーリング不変性から空間2次元の場合には量子化する爆発機構が予想される．実際，比較定理等は適用できないものの，変分構造やスケーリングを用いた階層的議論，すなわち爆発解析によってこの事実を数学的に証明することができる．これに対して高次元の場合にはツァリスエントロピーを用いることで，空間2次元のスモルコフルキー・ポアソン方程式に対応する全質量保存，自由エネルギー減少，臨界的変分構造，スケーリング不変性をもつ方程式が得られる．しかしこの方程式では，2次モーメントが全質量ではなく自由エネルギーと関係するという変分構造の違いから，2次元の場合と平行する議論を展開することができない．一方技術的には主要部である拡散項がポーラスメディア型に退化するため解の正則性や一意性が仮定できないという重大な問題も生ずる．また全空間で議論するためポテンシャルの遠方での減衰が不足することも多くの研究者を悩ませてきたところである．本論文ではこのような困難な状況の下で，解の時間局所存在，爆発条件などの基本的事項の確認から始めて，最終的には常微分方程式のレートより早く爆発するII型爆発点の有限性を示したものである．すでに空間2次元場合には全爆発点の有限性が示されているところではあるが，同時に全ての爆発点がII型であることもわかっており，本論文は対応する結果を本質的に異なる高次元の状況下で示したものといえる．その一方で発表された一連の学術論文はそれぞれ完結したもので，中途の結果も重要であるばかりでなく，それらの結果をさらに深めることで次に進むという形態をとっている．従ってこれまでの研究の深化の状況から申請者はすでに自身の研究の方向を確立しているものと判断される．以上から本論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める．