The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	浮遊型宇宙ロボットによる物体捕捉のための計測と制御
Author(s)	升谷, 保博
Citation	大阪大学, 1995, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3105001
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

浮遊型宇宙ロボット による物体捕捉のための計測と 制御

升谷 保博

大阪大学大学院 基礎工学研究科

1995 年 4 月

論文要旨

宇宙では地上と異なり，ロボットがその作業対象とともに無重力空間に浮遊して互いに自由な状態で作業を行う形態が一般的である．本論文では，これを“浮遊型宇宙ロボット”と呼び，その基本的な作業である“物体捕捉”を実行するために必要な計測や制御の手法を提案する．

まず，ロボットの作業対象である剛体が浮遊状態で回転しており，その幾何学的パラメータも慣性パラメータも未知な場合について，運動の様子を撮影した画像の時系列のみからその運動の動力学的な特性を推定し，それに基づいて姿勢を予測する手法を提案する．すなわち，画像より得られた角速度ベクトルの時系列を入力とし，オイラーの運動方程式の解を記述するために必要な動力学パラメータと参照座標を推定する．この手法の性能は，実際の画像処理における量子化や差分近似の影響を考慮した計算機シミュレーションによって評価される．

次に，ロボットの動作に伴う反力でそのベースの位置や姿勢が変動することに着目し，浮遊型宇宙ロボットの手先の位置決め問題について考察する．具体的には，ロボットを運動量と角運動量が保存される剛体多体系としてモデル化し，その運動学や動力学の汎用的な導出手順を明らかにした後，一般化ヤコビ行列を用いた転置ヤコビ行列制御を提案する．これは，ベース上のセンサで観測された手先の偏差を関節のアクチュエータへ直接フィードバックする方法であり，目標状態の漸近安定性をリヤプノフ法により示す．さらに，一般化ヤコビ行列の代わりに地上用のヤコビ行列を用いる妥当性や，回転変換を用いた特性の改善などについて議論する．

最後に，浮遊型宇宙ロボットを人間が遠隔操作する場合を想定し，ベースの変動によるカメラの視野の変化が操作性に及ぼす影響を調べるために，計算機によるシミュレータ作成し，指令値の補正方法の点から考察した結果を述べる．

目 次

1 序論 **1**
1.1 本研究の目的 1
1.2 本研究の背景 3
1.2.1 浮遊型宇宙ロボットの動向 3
1.2.2 従来の研究 5
1.3 本論文の構成と概要 6

2 画像に基づく未知浮遊物体の運動推定 **9**
2.1 はじめに 9
2.2 運動パラメータ 11
2.3 剛体の運動方程式 13
2.3.1 オイラーの運動方程式 13
2.3.2 動力学パラメータ 14
2.3.3 オイラーの運動方程式の解 14
2.3.4 姿勢の表現 17
2.3.5 ハーポルホード 18
2.4 動力学的特性の推定 19
2.4.1 非対称モデル 19
2.4.2 非周期モデル 24
2.4.3 軸対称モデル 25
2.4.4 単軸回転モデル 26
2.4.5 統合アルゴリズム 26
2.5 おわりに 29

3 計算機シミュレーションによる運動推定の評価 **31**
3.1 はじめに 31
3.2 剛体の 3 次元回転運動の例 31
3.3 角速度の抽出 36
3.4 運動の種類の表現 44
3.5 推定性能の評価 47
3.6 結果と検討 49

3.6.1 条件 49
3.6.2 前処理の影響 50
3.6.3 解像度との関係 59
3.6.4 特徴点の数との関係 63
3.6.5 運動の速さとの関係 66
3.6.6 まとめ 71
3.7 おわりに 71

4 浮遊マニピュレータのモデル化 73
4.1 はじめに 73
4.2 運動学 75
4.3 系の運動量と角運動量 77
4.4 一般化ヤコビ行列 79
4.5 動力学 80
4.6 おわりに 82

5 浮遊マニピュレータの転置ヤコビ行列制御 83
5.1 はじめに 83
5.2 制御則 84
5.3 安定性に関する議論 84
5.4 シミュレーション 88
5.5 おわりに 93

6 近似ヤコビ行列を用いた制御 95
6.1 はじめに 95
6.2 一般化ヤコビ行列の短所 95
6.3 安定領域に関する数値的な解析 95
6.4 シミュレーション 99
6.5 おわりに 99

7 転置ヤコビ行列制御の回転変換を用いた特性改善 103
7.1 はじめに 103
7.2 回転変換行列を用いた特性改善 103
7.3 シミュレーション 106
7.4 おわりに 106

8 浮遊型ロボットの遠隔操作 109
8.1 はじめに 109
8.2 シミュレーション システム 112
8.2.1 動力学モデル 112
8.2.2 描画モデル 114

8.3 実験 114
8.4 数学モデルによる遠隔操作性の評価 118
8.5 おわりに 122

9 結論 **123**

謝辞 **127**

参考文献 **129**

関連論文 **133**

A 運動パラメータの推定に用いた方法 **137**

B オイラーの運動方程式の求解とハーポルホード の表現 **141**
B.1 オイラーの運動方程式の求解 141
B.2 ハーポルホードの表現 143

C ヤコビの楕円関数 **147**

D $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$の波形のパラメータ推定 **151**
D.1 フーリエ変換 151
D.2 スペクトル分析 152
D.3 非線形最小二乗法 153

E 2 次方程式 (2.38) について **155**

F ベースの姿勢およびその角速度の表現 **159**

G 直鎖状マニピュレータの一般化ヤコビ行列導出手順と演算回数 **161**
G.1 定数 161
G.2 変数 163
G.3 関数 164
G.4 準備 164
G.5 算出手順 165
G.6 演算回数 167

図 目 次

1.1 3 steps of capturing task by a free-floating space robot 3

2.1 Motion parameters 11
2.2 Computation of angular velocity from motion parameter 12
2.3 Geometrical interpretation of the solution 13
2.4 Poinsot's ellipsoid and parameters of dynamics 14
2.5 Geometrical interpretation in case of symmetric distribution 16
2.6 Coordinate frames 17
2.7 Z-X-Z Euler angles 18
2.8 Herpolhode curve 19
2.9 Invariable plane 20
2.10 Waveform of $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$ 20
2.11 Reference frame 23
2.12 Flow of data in the estimation procedures 28

3.1 V-shape object 32
3.2 Coordinate frame for the V-shape object and its inertial moment ellipsoid and polhode 33
3.3 Example of motion of asymmetric rigid body (part 1) 34
3.4 Example of motion of asymmetric rigid body (part 2) 35
3.5 Geometry for simulation 36
3.6 Example of image of feature points 39
3.7 Example of extracted angular velocity 40
3.8 Time sequence of squared magnitude of angular velocity vectors 40
3.9 Spector distribution of the example 41
3.10 Result of the non-linear least square fitting 41
3.11 Theoretical herpolhode curve 42
3.12 Herpolhode for extracted angular velocity 42
3.13 Time sequence of angle χ of the herpolhode 43
3.14 Variation of inertial ellipsoid 45
3.15 Relationship among the coordinate frames 48
3.16 Geometrical interpretation of Euler's equation for various e and s_α 49

3.17 Condition of simulations 50
3.18 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$) 54
3.19 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (from true $\{R_i\}$) 54
3.20 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (from images) . 54
3.21 Maximal prediction error in the orientation: Θ (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$) 55
3.22 Maximal prediction error in the orientation: Θ (from true $\{R_i\}$) 55
3.23 Maximal prediction error in the orientation: Θ (from images) 55
3.24 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$) 56
3.25 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (from true $\{R_i\}$) 56
3.26 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (from images) 56
3.27 Distribution of period T for e and s_α 57
3.28 Distribution of amplitude $\beta - \gamma$ for e and s_α 57
3.29 Time sequence of squared magnitude of angular velocity vectors in case that $e = 0.9$ and $s_\alpha = -0.8$ 58
3.30 Spector distribution of the example in case that $e = 0.9$ and $s_\alpha = -0.8$ . . 58
3.31 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (resolution: 1024) 61
3.32 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (resolution: 512) 61
3.33 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (resolution: 256) 61
3.34 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (resolution: 1024) 62
3.35 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (resolution: 512) 62
3.36 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (resolution: 256) 62
3.37 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (40 feature points) 64
3.38 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (20 feature points) 64
3.39 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (10 feature points) 64
3.40 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (40 feature points) . . . 65
3.41 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (20 feature points) . . . 65
3.42 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (10 feature points) . . . 65
3.43 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.1$) 67
3.44 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.2$) 67
3.45 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.4$) 67
3.46 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.8$) 68
3.47 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 1.6$) 68
3.48 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ ($\beta = 0.1$) 69
3.49 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ ($\beta = 0.2$) 69
3.50 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ ($\beta = 0.4$) 69
3.51 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ ($\beta = 0.8$) 70
3.52 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ ($\beta = 1.6$) 70

4.1 Free-floating robot with a mother ship 74
4.2 Model of a free-floating space manipulator system 75

4.3 Multi rigid body system 76
4.4 Planar 2-link space manipulator model 81
4.5 Manipulability ellipsoid of each tip position 81

5.1 Block diagram of the control scheme 85
5.2 6 DOF manipulator mounted on spacecraft 90
5.3 Results of the simulations (every 3 seconds) 91
5.4 Time histories of the norms of endtip's deviations 92
5.5 Time history of the angular acceleration of the base 93

6.1 Stable region for each mass ratio 98
6.2 Behavior in the stable region (every 10 seconds) 100
6.3 Behavior in the unstable region (every 10 seconds) 101

7.1 Geometrical interpretation of the stable condition 104
7.2 Modification of the deviation vector of endtip 105
7.3 Results of normal and improved TJC (every 3 seconds) 107

8.1 Concept of teleoperated free-floating robots 110
8.2 Classification of moving visual system 111
8.3 Block diagram of the simulation system 112
8.4 Dynamics model 113
8.5 Graphics model 113
8.6 Optical system for stereo vision 115
8.7 Mean and standard deviation of settling time of each method 117
8.8 Resolving of velocity command of end tip 119
8.9 Difference between commanded and actual velocities 120
8.10 Comparison of three indexes 121

A.1 Motion parameters 137

B.1 Perpendicular ζ from the origin O on the tangent of herpolhode 144
B.2 Relations of ρ-ω and ζ-η 145
B.3 Radius ρ and perpendicular η from O' on the invariable plane 146

C.1 Jacobi's Elliptic Function 149
C.2 Complete elliptic integral of the first kind 150

D.1 Parabolic curve for major spector 152

E.1 Parabolic curve $f(\xi)$ in case that $C_2 > 0$ 156
E.2 Parabolic curve $f(\xi)$ in case that $C_2 < 0$ 157

G.1 Coordinate frames on space manipulator 162
G.2 Link parameters 162
G.3 Constant parameters on each link 162

表 目 次

3.1 Condition of simulation 37
3.2 Estimation model used for each condition (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$) 53
3.3 Estimation model used for each condition (from true $\{R_i\}$) 53
3.4 Estimation model used for each condition (from images) 53
3.5 Estimation model used for each condition (resolution 1024) 60
3.6 Estimation model used for each condition (resolution 512) 60
3.7 Estimation model used for each condition (resolution 256) 60

6.1 Numerical complexities in computing the generalized and fixed-base Jacobians ($6 \times n$ matrices) 96
6.2 Physical parameters of 2 DOF planar space manipulator model 99

G.1 Numerical complexities in computing the Generalized and Fixed-base Jacobians ($6 \times n$ matrices) 167

第 1 章

序論

1.1 本研究の目的

人類の長年の夢であった宇宙活動は，開拓時代から開発時代へ移行し，その成果として，通信，放送，気象，GPS などの人工衛星による “位置” を利用したサービスを多くの人が享受できるようになった．今後，さらに多くの人へ安価にこれらのサービスを提供したり，“環境” や “物質” や “エネルギ” の面でのサービスを実現するには，宇宙活動の様々な質的および量的な拡大や転換が必要である．

人工衛星は，これまで多くが 1 個または数個を単位にロケットにより打ち上げられ，寿命が尽きるとそのまま放置されていた．中には，些細なトラブルで，最初からあるいは本来の寿命に至る前に使えなくなるものも少なからずあった．古くなったり故障した衛星は，新たな衛星の打ち上げの障害になる．特に，有効な位置に限りがある静止軌道では深刻な問題になりつつある．また近年，人工衛星の残骸などからなるスペースデブリ (宇宙塵) もその数の増加が衛星軌道上の安全を脅かしている．スペースデブリは小さな破片でも速度が大きいと，大きな事故を引き起こす．さらに，スペースデブリと衛星が一度衝突して破壊を起こすと，その破片が拡散して連鎖反応を起こすおそれもある [1]．このような問題を根本的に解決するには，人工衛星の修理や回収，スペースデブリの除去を行う必要がある．

一方，衛星軌道を利用した永続的で大規模なサービスを提供するためには，拠点となる宇宙基地や宇宙プラットフォーム等の大型の構造物を建造せねばならない．すなわち，複数の打ち上げによってユニットを搬送し，軌道上で展開組み立てが行われることになる．また，これらの構造物を保守点検したり，推薬補給や機器交換をしたり，各拠点間で物資を輸送することが必要となる．

以上の様な要求に応えるため，これまでスペースシャトルによって様々な実用的あるいは実験的なミッション (任務) が行われてきた．しかし，スペースシャトルは，経済的な軌道上のサービスを行うために再利用可能なように設計されたはずであるが，その打ち上げ費用は，開発当初予想の 10 倍にも達している．この問題に対処するには，物資の補給や交換，衛星の捕獲や回収や曳航，構造物の組み立てや修理や点検などを含む新しい宇宙インフラストラクチャの構築が必要となってきている．

また，従来のそれらのミッションのほとんどは，宇宙飛行士による船外活動か，スペースシャトルのマニピュレータによる遠隔操作によって行われてきた．しかし，人間を軌道上に派遣し生命を維持するには高いコストがかかる．これを避け，単純作業や危険な作業から人間を解放するためには，できるだけ人間が介在せず自律的にミッションを遂行するシステムが必要となる．特に，人間に代わって多様な作業を器用に遂行することのできるロボットは，将来の宇宙活動において必要不可欠な存在である．

特に日本では，このような状況とともに，有人宇宙開発技術の立ち遅れから，得意の自動化技術やロボット技術を活かし，ロボットを中心とした無人の宇宙開発に的を絞る必要性が指摘されている [2].

衛星軌道上のロボットには様々な形態が考えられるが，ロボットマニピュレータによる作業遂行のための計測や制御の観点からこれを分類すると，

1. 作業対象とロボット本体の関係が固定
2. 作業対象とロボット本体の関係が自由

の 2 つに分けることができる．

前者は，例えば，ほとんどの IVA(Intra-Vehicle Activity: 船内活動) ロボットの場合や，軌道の構造物上でその上に載った物体を作業対象とするような場合に相当する．これは地上の通常のロボットの場合と同じなので，従来の技術をそのまま適用できる．

一方，後者は，例えば，EVA(Extra-Vehicle Activity: 船外活動) ロボットで故障した衛星やデブリを回収したり，物資を軌道上で受渡しする場合に相当する．対象とロボット本体は無重力状態で浮遊して互いに自由な関係にあり，これは地上のロボットでは起こりえなかった宇宙独特の状況である．以下では，このような形態で活動するロボットを特に “浮遊型 (宇宙) ロボット” と呼ぶことにする．

“浮遊型ロボット” の典型的な作業の 1 つに “浮遊物体の捕捉” がある．この作業は，対象とロボットがランデブ (近接しての航行) 状態に入った後，以下のようなステップで実行されるであろう (**Fig. 1.1**).

1. 対象を観測し，その形状と運動 (位置，姿勢，速度，角速度等) を認識する．
2. マニピュレータを対象に接近させる．
3. マニピュレータを対象と接触させ把持し相対運動を止める (この段階は複数の腕で行われるかもしれない).

このとき，各ステップで考慮すべき問題を以下に列挙する．

1. 地上では，ほとんどの場合ロボットの作業対象はロボット本体に対して静止しているか，一定の拘束を受けた単純な運動しかしていない．ところが，無重力状態では，物体は一般的な 3 次元の並進や回転運動をしている可能性がある．例えば，外力を受けない剛体の回転運動だけを考えても，質量分布が非対称な場合にはその挙動は大変複雑である．自律システムでは，作業を計画するために，視覚センサなどからの情報に基づいて，その物体の形状や運動を認識できなければならない．

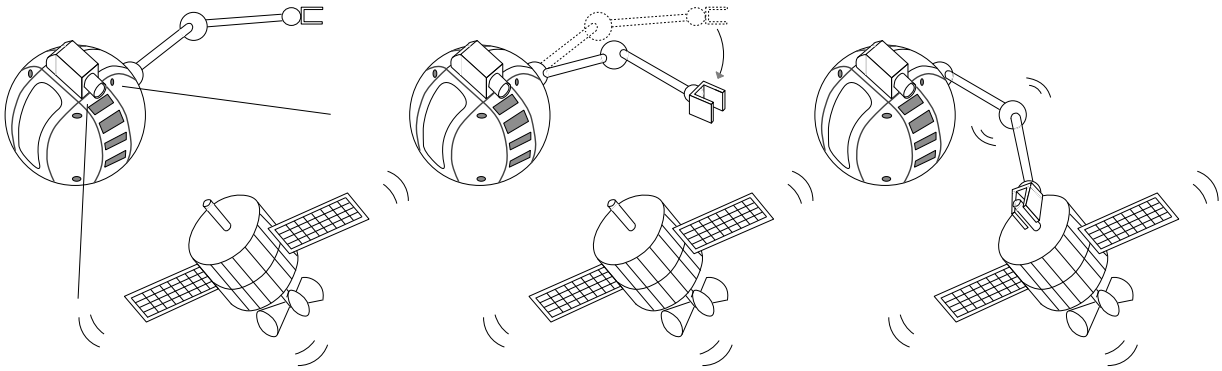


Fig. 1.1 3 steps of capturing task by a free-floating space robot

2. 地上の場合と異なり，マニピュレータは空間に固定されたベースを持っていない．このため，マニピュレータの動作反力で，ベースである宇宙船の位置や姿勢が変動してしまい，マニピュレータの手先の制御に影響を及ぼす．その対策として，慣性ホイールやスラスタを用いて常に反力を打ち消してベースの位置や姿勢を保つという手段もあるが，それでは推薬や電池の消耗が大きくなるか，それを避けるためにマニピュレータをゆっくりと動かせば，せっかくのロボットの機動性を損なうことになる．また，一度に計測制御する状態量は少ない方が安全である．したがって，ベースの位置や姿勢の変動があっても関節のみを駆動して作業が遂行できる，新たな運動制御，軌道生成，作業計画などの手法が必要である．

3. 物体を捕捉して両者が自由な関係から固定された関係へ遷移する際には，衝突を伴う過程の制御が必要となる．これをうまく行わなければ，対象やロボット自身が破損したり，不要な相対運動が生じて，二度と捕捉できないような状態に陥る可能性がある．

以上は，地上では考えられなかった宇宙固有の問題であるとともに，宇宙環境における他の作業にも共通した基本的な問題でもある．本研究では，ロボットマニピュレータ本体とその作業対象がお互いに浮遊した状態で作業を行う “浮遊型宇宙ロボット” の実現を目指し，上記の基本問題を解決する計測や制御の手法について検討する．

1.2 本研究の背景

1.2.1 浮遊型宇宙ロボット の動向

1970 年代の初めから宇宙ロボットに関する様々な提案がなされているが，いずれも構想検討の段階にとどまっていた．

はじめて実用化された宇宙ロボットは，スペースシャトルの RMS(Remote Manipulator System) である．これは，6 自由度全長 15.3m の大型マニピュレータアームで，1981 年の

シャトルの第 2 回のテストフライトで動作確認が行われた後，人工衛星の捕獲や修理，大型構造物の組み立て実験などの様々なミッションを行ってきた．しかし，このマニピュレータは人間の EVA と置き換わる器用な手ではなく，クレーンや足場の様な役割を担って，EVA と組み合わされて使われている．また，その操作は，基本的には船内の乗組員が，ジョイスティックによって位置や速度レベルの指令を与えており，自律性は乏しい．EVA との協同ではあるが，回転する衛星の回収ミッションも何度か行われている．ただし，RMS の自重が 400kg に対してシャトルの重量は約 70t と大きく，アームの反力がシャトル本体の位置や姿勢に及ぼす影響は非常に小さい．

スペースシャトルの RMS で，宇宙活動におけるロボット技術の有用性が強く認識され，1980 年代には多くの宇宙ロボットシステムが計画された．その中で “浮遊型ロボット” としては，NASA の OMV や日本の OSV 等がある [3] [4]．

NASA の OMV(Orbital Maneuvering Vehicle) は，推進装置やドッキング機構を備えた軌道上の輸送システムであるが，7 自由度の 2 本のアームを有する FTS(Flight Telerobot Servicer) のモジュールと組み合わせて，宇宙ロボットとしての機能も備えている．これは，当初 1993 年に初フライトが予定されていた．

一方，軌道上作業機 OSV(Orbital Servicing Vehicle) は，日本の宇宙開発事業団が構想を提案したもので，軌道上のプラットフォームに様々なサービスを提供することを目的としており，推進装置，ドッキング機構，および 2 本のマニピュレータを有している．

ところが，その後のアメリカの財政緊縮で宇宙関連の予算が大幅に削減され，ほとんどの宇宙ロボット計画が中止されることになった．また，日本の OSV も計画は進んでいないようである．1980 年代の各種宇宙ロボット構想では，ロボット技術を過大評価していたと言われており [5]，また，本来ミッションを遂行するための 1 つの手段でしかないロボット技術が，ニーズが絞り込めずにそれ自体が目的になってしまい方向を見失ったのではないかと考えられる．

そのような中で，1993 年 5 月にスペースシャトル内でドイツの DLR の責任下でロボット実験 ROTEX が実施された [6]．この実験は，環境の整えられたシャトルの与圧室内で行われたとはいうものの，数々の宇宙ロボット技術を実証した点で非常に意義深い．この実験の中には，マニピュレータによる回転する浮遊物体の捕捉も含まれていた．

1980 年代の構想に比べて，ROTEX や現在進行中の計画は，技術的に確実なものから実証していく姿勢で行われていると思われる．

1997 年に H-II ロケットで打ち上げられる日本の技術試験衛星 7 号 (ETS-VII) では，ランデブドッキングおよび宇宙ロボットの基礎技術を習得するための実験が予定されている [7]．また，日本の宇宙科学研究所では，再利用可能な科学衛星 SFU(Space Flyer Unit) の 2 回目のミッションで，ターゲット衛星のマニピュレータによる回収実験を予定している [8]．これらは，順調に進めば世界初の浮遊型宇宙ロボットのミッションとなる予定で，多くの宇宙ロボット計画が中止された中で貴重な存在である．

また，NASA と ESA においても，1997 年の実施に向けて，自動ランデブキャプチャーミッション ARC の共同計画が進行中である．あるいは，机上研究ではあるが，ESA が行った GSV(Geostationary Service Vehicle) の検討は，静止軌道上で商業衛星にサービスを行う宇宙ロボットの実現可能性と経済効果を厳しく評価したもので，具体性のある議論が大

変興味深い．

1980 年代の華やかな宇宙ロボット計画がことごとく中止され，現在進行中の計画は小規模で堅実な線を狙ったものばかりである．しかし，だからといって，宇宙ロボットの必要性が否定された訳ではなく，現時点では投資に比べて実用的な有用性に乏しいと判断されているということだけであろう．先に述べたように，近未来の衛星軌道インフラストラクチャの実現には，宇宙ロボット技術は必要不可欠であり，それを見据えて基礎技術を着実に発展させていかなければならない．

1.2.2 従来の研究

宇宙ロボットが自律的に作業を行うためには，まず画像などの情報に基づいて作業対象の状態を認識できなければならない．この問題を扱った研究の多くは，宇宙ロボットの作業対象は人工衛星などのように既知の物体であると想定して，画像から抽出されたエッジ [9] や領域 [10] や輪郭 [11] の情報をあらかじめ持っているモデルと照合して，物体の位置と姿勢を同定することを論じている．また，認識が確実になるように，形状や配置を工夫したマーカを物体上に張り付ける方法も考案されている [12][13][14]．

対象が運動している場合には，画像の時系列から各時刻の位置や姿勢を精度良く推定することが必要である．Tanabe らは，等速直線，等角速度運動を仮定したモデルに基づいてカルマンフィルタを用いる方法を提案している [11]．一方，下地らや永松らは，オイラーの運動方程式をモデルとしたカルマンフィルタによって，物体の位置姿勢とその速度を推定する方法を提案している [13][14]．また，先に述べた ROTEX の浮遊物体の捕捉実験でもカルマンフィルタが用いられている [15]．これらの方法は，対象の慣性パラメータや慣性主軸と画像上の特徴として用いる幾何パラメータの関係がわかっている場合には大変有効である．しかし，未知の物体に対しては，カルマンフィルタのモデルの状態量の数が多くなりすぎるので，適用は困難であろう．

一方，コンピュータビジョンの分野では，2 次元に投影された画像の時系列から，被写体の 3 次元的な形状や運動を認識することは重要な課題の 1 つであり，古くから多くの研究が行われている [16][17]．また，距離画像から物体の運動を決定する研究も行われている [18]．そこで求めようとしているのは対象の運動の幾何学的なパラメータであるが，さらにそれを利用して高次の運動の解釈をする研究も行われている [19]．しかし，運動の動力学的な特性にまで踏み込んだものはほとんどないようである．

浮遊型宇宙ロボットの場合，マニピュレータの手先を慣性座標系 (静止座標系) に関して位置決めする問題も重要である．マニピュレータの動作反力によるベースの位置姿勢の変動を考慮しなければならないため，ベースが固定された従来の地上のマニピュレータの場合とは異なる，新しいモデリングや制御の枠組が必要となる．

ベースつまり衛星や宇宙機の姿勢制御用のスラスタを用いず，無重力空間に浮遊している系に外力が作用しない場合には，系全体の運動量と角運動量が保存される．Vafa らは，運動量が保存される系に対して “仮想マニピュレータ (Virtual Manipulator)” という概念を提案した [20]．これは，系の質量中心で慣性空間に固定されたベースを持ち，手先が実際

と一致する仮想的なマニピュレータで，各リンクの質量配分より決定される．これを用いれば，マニピュレータの関節角と手先の位置を論じるのに便利であり，特に手先の可到達範囲を考えるのに都合がよい．しかし，手先位置を制御するためには，ベースの姿勢も制御する必要がある．また，梅谷らは角運動量の保存則も利用して，マニピュレータの動作反力による手先の変動分も加味した手先の速度と関節の速度を関係付ける “一般化ヤコビ行列” を提案し [21]，分解速度制御やマニピュレータ特性解析などに用いた [22][23]．また，Longman らは保存則を用いた定式化をを行い，ベースのアクチュエータでマニピュレータの動作反力を補償する方法を提案した [24]．

運動量と角運動量の保存則を系の拘束条件として捉えると，運動量の保存則は系全体の質量中心が不変となるホロノミックな拘束であるが，角運動量の保存則は時間に関して積分不可能な非ホロノミックな拘束となる．つまり，n 関節の浮遊マニピュレータは，n 個の入力に対してベースの姿勢を加えた $n+3$ 個の状態を持つ非ホロノミックな系となる．この特性により，ベース固定の場合とは異なり，手先の位置はその瞬間の関節変位の関数としては表現できず，その時刻までの全ての時間履歴に依存することになる．したがって，手先の目標位置が与えられた場合に，それを実現する関節変位を幾何学的に決めることは不可能であり，したがって，手先位置決め制御を関節変位空間に置き換えて考えることはできない．しかし，見方を変えれば，関節変位がある初期状態から目標状態へ至る経路によってベースの姿勢は様々に変化することになる．非ホロノミックな系への興味も手伝ってか，この性質を利用した様々な軌道生成の手法が提案されている [20] [25] [26] [27] [28] [29]．しかし，これらの手法で得られたのは，目標となる関節変位の時間軌道だけである．いずれの手法のモデルもマニピュレータの慣性パラメータに依存しており，パラメータの同定誤差や制御上の誤差をどのように克服するかという問題が残る．ベースの運動を含めた系の動力学モデルから関節の入力トルクを計算する分解加速度制御 [30] [31] は，サーボ問題にまでは踏み込んでいるが，やはり同様の問題を残している．また，浮遊マニピュレータの実際の運用を考えると，制御に用いる観測値はマニピュレータの手先かベース上で得られることが望ましいが，このことを考慮せずに，慣性空間に対するベースの位置姿勢やその速度まで必要とする制御則が多いようである．

1.3 本論文の構成と概要

本論文は以下のように構成されている．

第2章では，作業対象となる浮遊物体が回転運動をしている場合に，それを撮影した画像の時系列から運動を推定する方法について述べる．従来提案されている手法は，対象物体の幾何パラメータや慣性パラメータが既知であることを前提としており，これを利用したパターン照合やカルマンフィルタによって物体の姿勢や角速度を推定していた．それに対して，本研究では全く未知の物体を対象とした運動推定を行う．画像の変化から抽出された物体の角速度の時系列より，オイラーの運動方程式の解を記述するために必要な参照座標系と 4 つのパラメータを推定する．これによって，運動の予測が可能となる．

第3章では，**第2章**で提案した運動推定の性能を評価するために，計算機によって様々なバリエーションの運動の画像を作りシミュレーション実験を行う．剛体の一般的な自由回転運動のバリエーションを 3 つのパラメータで表現し，多様な条件下でパラメータの推定と運動の予測の精度がどのように変化するかを調べ，提案する手法の有効性と限界について検討を行う．

第4章では，ベースが浮遊するマニピュレータを関節で結合された剛体多体系としてモデル化し，その運動学と動力学を明らかにする．モデルの導出の過程において，運動量と角運動量の保存則を導入し，これによってマニピュレータの動作反力によるベースの変動を定式化する．また，ベースが固定された従来の地上のマニピュレータとの対比を示し，梅谷らが提案する浮遊マニピュレータの一般化ヤコビ行列を従来のヤコビ行列から導出する汎用的な表現法を提案する．さらに，外力アクチュエータを用いない場合には，関節変位を一般化座標とする系の運動方程式が，地上の場合と同じ形式で表現できることを示す．

第5章では，マニピュレータの動作反力によってベースが変動する場合，そのベース上に搭載されたカメラなどによるセンサ情報をフィードバックして，マニピュレータの手先を慣性空間に指定された点へ位置決めする制御則を提案する．この制御則では，ベース座標系で計測された手先の偏差に一般化ヤコビ行列の転置を乗じて各関節の入力を得る．制御入力の決定には，ベースの位置姿勢の計測は不要で，複雑な逆動力学の計算も必要としない．また，フィードバックによって構成される閉ループ系の目標状態における漸近安定性をリアプノフ法を用いて証明する．さらに，衛星に搭載された 6 自由度のマニピュレータを想定した計算機シミュレーションにより，制御則の有効性を示す．

第6章では，**第5章**で提案した制御則において，宇宙用ヤコビ行列の代わりに，地上用の従来のヤコビ行列を用いた場合の安定性や系の挙動について検討する．一般化ヤコビ行列は，従来のヤコビ行列に比べて導出の計算が複雑であり，さらに系の慣性パラメータを必要とする．したがって，これを従来のヤコビ行列で代用できるならば，そのメリットは大きい．本章では，2 次元のモデルに対して，安定解析の数値例と動力学的なシミュレーション例を示し，近似の妥当性について検討する．

第7章では，**第5章**で提案した制御則を適用した場合に手先が目標点に向かう経路を改善するため，回転変換を用いる方法を提案する．**第5章**の制御則は，ある目標点に対する位置決め制御のためのもので，目標点に到達する軌道を指定することはできない．動力学的な干渉によって目標点に至る経路は湾曲しがちである．そこで，センサで計測された偏差に適切な回転変換を施すことにより，系の安定性を損なうことなく経路を直線に近づける方法について述べる．

第8章では，マニピュレータの動作反力でベースが変動する宇宙ロボットを人間が遠隔操作するシミュレーション実験を行い，その操作性について議論する．浮遊マニピュレータのベースに搭乗しているか，あるいはそこに搭載されたカメラ映像を見ている人間がマニピュレータの位置や速度の制御ループに介在する場合，ベースの変動は視覚系の視野の変化を引き起こし，操作者を惑わせる．このような現象を定量的に評価するために行った立体視のコンピュータ画像を用いたシミュレーションの結果について説明するとともに，速度指令を生成する場合に，視野の変化による座標系の変動の影響を数値的に評価する方法について提案する．

最後に，第9章では，本研究で得られた成果をまとめ，今後の研究課題について述べる．

第 2 章

画像に基づく未知浮遊物体の運動推定

2.1 はじめに

ロボットが自律的に作業を行うために必要とされる技術の一つに作業環境の認識がある．マニピュレータで物体を捕捉するため，画像などの情報に基づいてその物体の位置や姿勢あるいは運動を認識する状況を考える．地上では，ほとんどの場合，対象物体は静止しているか，何らかの拘束下で運動しているのに対して，宇宙では，物体は何にも拘束されずに空間に浮遊して 3 次元的に運動している可能性がある．例えば，対象を剛体に限定しても，その回転運動は回転軸が時間的に変動する複雑なものであり，認識は容易ではない．

宇宙空間における物体の位置や姿勢の推定の問題を扱った研究の多くは，ロボットの作業対象を人工衛星などのように既知の物体であると想定して，画像から抽出されたエッジ [9] や領域 [10] や輪郭 [11] の情報をあらかじめ持っているモデルと照合する方法を論じている．また，認識が確実になるように，形状や配置を工夫したマーカを物体上に張り付ける方法も考案されている [12][13][14].

対象が運動している場合には，画像の時系列から各時刻の位置や姿勢を精度良く推定することが必要である．Tanabe らは，等速直線，等角速度運動を仮定したモデルに基づいてカルマンフィルタを用いる方法を提案している [11]．3 次元の回転運動の扱いは面倒であるが，宇宙空間では，物体には重力や空気抵抗が働かないので，剛体の運動は外力が作用しないオイラーの運動方程式を用いて純粋にモデル化することができる．したがって，これを積極的に利用するべきである．下地らや永松らは，オイラーの運動方程式をモデルとしたカルマンフィルタによって，物体の位置姿勢とその速度を推定する方法を提案している [13][14]．また，1993 年に行われたドイツの宇宙ロボット実験 ROTEX の浮遊物体の捕捉実験でもカルマンフィルタが用いられている [15]．これらの方法は，対象の慣性パラメータや慣性主軸と画像中の特徴として用いる形状のパラメータの関係がわかっている場合には大変有効である．

しかし，以上のどの方法も，デブリ (宇宙塵) のような全く未知の物体や，既知ではあっても破損・変形などによりパラメータが変化してしまった物体を扱うには全く無力である．将来，宇宙活動が拡大した際には，ロボットは様々な物体を扱わなければならないだろう．

したがって，形状パラメータや慣性パラメータが全く与えられていない未知物体に対しても，画像などの情報から位置や姿勢や運動を推定し，さらに未来の値を予測する技術を確立する必要がある．

一方，コンピュータビジョンの分野では，2 次元に投影された画像の時系列から，被写体の 3 次元的な形状や運動を認識することは重要な課題の 1 つであり，古くから多くの研究が行われている [16][17]．また，オプティカルフローや距離画像から物体の運動を決定する研究も行われている [18]．そこで求めようとしているのは，“運動パラメータ” と呼ばれる対象の運動の幾何学的なパラメータであるが，さらにそれを利用して高次の運動の解釈をする研究も行われている．例えば，浅田らは，物体の運動を簡潔に表現できる座標系を見つけて，シーン中の物体の階層的な記述を行う方法を提案している [19]．また，新井らは，フーリエ変換を用いて複数軸周り回転運動を認識することを試みている [32]．しかし，運動の動力学的な特性にまで踏み込んだものはほとんどないようである．その中で，Weng らは，質量分布の対称な剛体の角運動量が保存される場合の運動を仮定して，画像情報から運動を推定する巧みな方法を提案している [33]．

剛体の質量分布が非対称な場合には，外力が作用しないオイラーの運動方程式の解は，楕円関数を用いて表現される複雑なものとなるが，これは力学の古典的な問題であり，その表現法はすでに 100 年以上も前に完成している．ただし，それは，剛体のパラメータと初期条件が与えられた場合に，その解をいかに表現するかということである．ところが，今ここで取り上げる問題は，剛体の運動の様子を眺めることによって，運動の予測に必要な剛体のパラメータや運動の条件を求めることであり，方向が全く逆である．

本章では，剛体の無重力下における一般的な回転運動を，視覚情報のみから推定・予測する方法を提案する．対象とする剛体の質量分布は未知であり，一般に非対称であるとする．質量分布が非対称な場合には，その運動は複数の等速回転運動の組合せで表現すことができない．さらに，形状に関しても全く未知であるとする．形状に関する事前の知識がない場合，照合を用いた手法で物体の絶対的な姿勢を同定することができない．しかし，先に述べたコンピュータビジョンの分野の成果を用いると，短い時間間隔で撮影された 2 枚の画像間で特徴点などの対応が取れる場合には，未知の物体であっても，その間の相対的な運動を検出することは可能である．画像の撮影間隔が運動に比べて十分速ければ，運動パラメータの回転成分からその間の平均的な角速度の得ることができる．そこで，このようにして得られた “角速度の時系列” から，オイラーの運動方程式に基づいて，物体の姿勢の時間関数としての記述を得る方法について論じる．

まず，運動を記述するために本質的な “動力学的パラメータ” と “参照座標系” を導入する．力学の成果によれば，オイラーの運動方程式の解は物体座標系で表現されるが，画像から抽出された角速度ベクトルはカメラ座標系で表現されており，これを解の式にそのまま当てはめることはできない．そこで，角速度の大きさの時系列と，角速度ベクトルの端点が描く曲線 (ハーポルホード) を運動の推定の手がかりとする．運動方程式の解を，(1) 非対称，(2) 非周期，(3) 軸対称，(4) 単軸回転の 4 つの場合に分類し，それぞれに応じた推定モデルを用意する．画像から抽出された角速度には，差分近似や画像の量子化に起因する誤差が含まれているが，これを克服するためにフーリエ変換や最小二乗法などを用いる．

以下，**2.2節**では，運動パラメータの推定と角速度の算出について簡単に述べる．**2.3節**

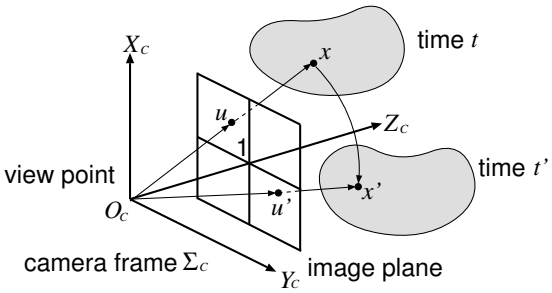


Fig. 2.1 Motion parameters

では，推定の基礎となるオイラーの運動方程式の解の表現について説明する．そして，**2.4 節** で，提案する剛体の “動力学的特性の推定” について述べる．なお，無重力下における剛体の運動は並進と重心まわりの回転に分離できるので，ここでは純粋な回転運動のみを扱うことにする．

2.2 運動パラメータ

運動する物体を撮影した 2 次元の濃淡画像や距離画像，あるいはオプティカルフローから，物体の剛体性を仮定して，3 次元の運動を復元する方法が数多く提案されている．ここでは，その一例 [34] の問題設定を紹介する (詳細は**附章A**に示す).

いま，**Fig. 2.1**に示すように，単眼の透視投影のカメラモデルを考える．カメラ座標系は不動で，その原点はカメラの中心に，$\boldsymbol{Z}_C$軸は光軸に一致しているとする．ここで，一般性を損なわずに，焦点距離は 1 と仮定できる．剛体上のある点 Pの時刻 t, t'における 3 次元位置ベクトルを，それぞれ,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= [x, y, x]^T \\ \boldsymbol{x}' &= [x', y', z']^T\end{aligned}$$

とする．さらに，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{x}'$に対応する撮像面上のベクトルを

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= [u, v, 1]^T = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right]^T \\ \boldsymbol{u}' &= [u', v', 1]^T = \left[\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}, 1\right]^T\end{aligned}$$

とする．

ベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{x}'$の関係は，物体の運動を表す回転変換行列 $R \in \mathbf{R}^{3\times 3}$と並進ベクトル$\boldsymbol{T} \in \mathbf{R}^3$で表現することができる．

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T} \tag{2.1}$$

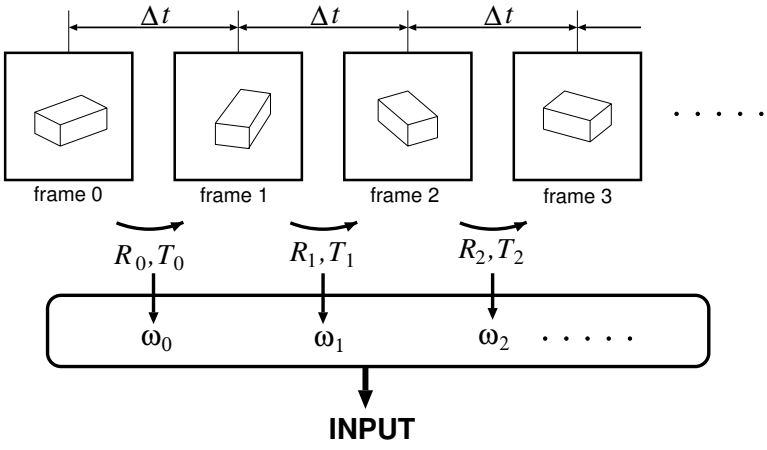


Fig. 2.2 Computation of angular velocity from motion parameter

これを変形すると，

$$\hat{z}'\boldsymbol{u}' = \hat{z}R\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{T}} \tag{2.2}$$

となる．ここで，$\hat{z}$と$\hat{z}'$は時刻 t と t'における点の奥行き (z成分) を並進距離で正規化したものであり，$\hat{\boldsymbol{T}}$は並進方向の単位ベクトルを表す．

$$\hat{z}' = \frac{z'}{|\boldsymbol{T}|}, \quad \hat{z} = \frac{z}{|\boldsymbol{T}|}, \quad \hat{\boldsymbol{T}} = \frac{\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{T}|}. \tag{2.3}$$

剛体上の 8 点以上の点にたいして画像上で対応が得られれば，各点に対する式 (2.2) を連立させて解き，剛体の回転 Rと並進方向$\hat{\boldsymbol{T}}$と各点の相対的な奥行き$\hat{z}$, $\hat{z}'$を求めることができる．

さて，上で得られた回転変換行列 Rを，単位ベクトル$\boldsymbol{\nu}$に沿った軸まわりの角度ϑの回転とする．撮影の間隔$\Delta t = t' - t$ が十分に小さければ，その時間区間における剛体の角速度$\boldsymbol{\omega}$を

$$\boldsymbol{\omega} \approx \frac{\vartheta}{\Delta t}\boldsymbol{\nu} \tag{2.4}$$

で近似することができる．こうして求めた角速度の時系列 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ を剛体の動力学推定の入力とする (**Fig. 2.2**).

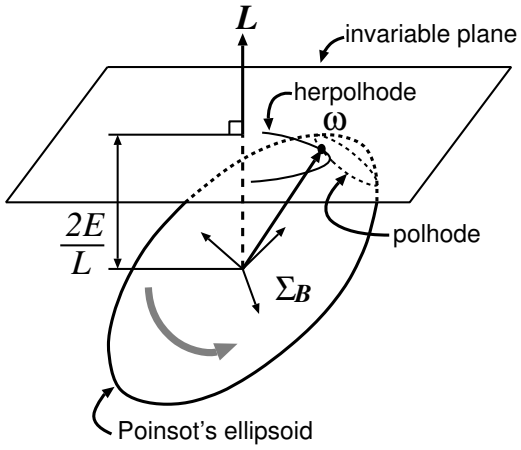


Fig. 2.3 Geometrical interpretation of the solution

2.3 剛体の運動方程式

2.3.1 オイラーの運動方程式

剛体の慣性主軸と一致する物体座標系Σ_Bをとると，外力モーメントが働かない場合は，この座標系で表されたオイラーの運動方程式は

$$\begin{aligned} I_x\frac{d\omega_x}{dt}-(I_y-I_z)\omega_y\omega_z &= 0 \\ I_y\frac{d\omega_y}{dt}-(I_z-I_x)\omega_z\omega_x &= 0 \\ I_z\frac{d\omega_z}{dt}-(I_x-I_y)\omega_x\omega_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．ただし，I_x, I_y, I_z は主慣性モーメント，ω_x, ω_y, ω_zは角速度ベクトルの x, y, z成分である．

対象物体の質量分布が非対称な場合には，運動方程式 (2.5) の解は楕円関数で表される複雑なものになるが，それを幾何学的に解釈することが可能である (**Fig. 2.3**)．運動エネルギを E，角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$と書くことにすると，物体の運動は，物体座標系で表される “ポアンソーの楕円体”

$$\frac{I_x}{2E}x^2+\frac{I_y}{2E}y^2+\frac{I_z}{2E}z^2=1 \tag{2.6}$$

が，中心を空間に固定されて空間的に “不変平面” に接しながら転動していると表現される [35]．この平面は角運動量ベクトルを法線方向とし，楕円体の中心から $2E/|\boldsymbol{L}|$ の距離にある．そして，楕円体の中心から接点へのベクトルがその瞬間の角速度になる．また，楕円体上の角速度ベクトルの軌跡を “ポルホード”，不変平面上の角速度ベクトルの軌跡を “ハーポルホード” と呼ぶ．この幾何学的な解釈は，ここで取り扱う問題の理解ために大変有用である．

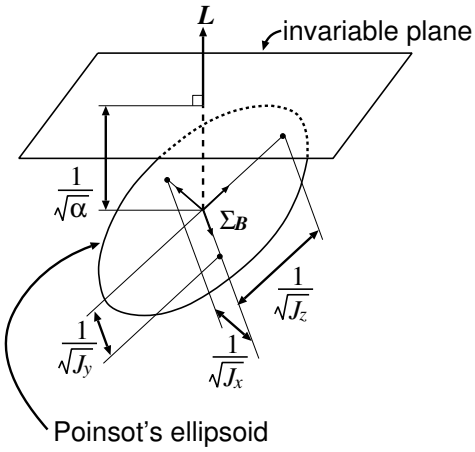


Fig. 2.4 Poinsot's ellipsoid and parameters of dynamics

2.3.2 動力学パラメータ

外力の働かない剛体の運動の場合，視覚情報，つまり幾何学的な情報からだけでは，その慣性パラメータの絶対量を知ることはできない．例えば，並進運動を考えると，等速運動をする物体をいくら観測しても質量を求めることできないのは明らかである．しかし，等速運動をしているので，その速度を推定し，未来の位置を予測することは可能である．回転運動の場合は，慣性モーメントの値を求めることはできないが，上で述べた解の幾何学的な解釈を明らかにすれば，運動を決定することができる．それには，まず次の 4 つのパラメータを求めればよい．

$$J_x = \frac{I_x}{2E} \quad J_y = \frac{I_y}{2E} \quad J_z = \frac{I_z}{2E} \quad \alpha = \frac{|\boldsymbol{L}|^2}{4E^2}$$

以下では，コンピュータビジョンの分野で使われる “運動パラメータ” という用語 (前節で述べた Rと$\boldsymbol{T}$) と区別するために，これらを “動力学パラメータ” と呼ぶことにする．これらのパラメータは，時間の 2 乗の次元を持っており，一種の時定数である．式 (2.5) から，これらのパラメータは以下の関係を満足している．

$$J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 = 1 \tag{2.7}$$

$$J_x^2\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2 + J_z^2\omega_z^2 = \alpha \tag{2.8}$$

これらは，それぞれ，運動エネルギと角運動量の保存則に対応している．**Fig. 2.4**に動力学パラメータと解の幾何学的な解釈との関係を示す．

2.3.3 オイラーの運動方程式の解

以上で述べた動力学パラメータを用いて，オイラーの方程式 (2.5) の解は，次のような 4 つの場合に分けて書くことができる．

- 非対称 ($Jx \neq J_y$ かつ $J_y \neq J_z$ かつ $J_z \neq J_x$)
- 非周期 ($J_y = \alpha$)
- 軸対称 ($J_x = J_y$)
- 単軸回転 ($J_x = J_y = J_z$，または $J_x = \alpha$，または $J_z = \alpha$)

ここで，J_yは 3 つの主慣性モーメントのうちの中間の値のものとする (つまり $J_x > J_y > J_z$ か $J_x < J_y < J_z$).

非対称の場合

質量分布が非対称な場合，つまり，主慣性モーメントの値が 3 つとも異なる場合には，

$$\begin{array}{lll} \alpha < J_y & \text{ならば} & J_x > J_y > J_z \\ \alpha > J_y & \text{ならば} & J_x < J_y < J_z \end{array}$$

として，解は以下のように表現できる．

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sqrt{\frac{\alpha - J_z}{J_x(J_x - J_z)}}\,\mathrm{cn}(k, \lambda t - \delta) \\ \omega_y &= \sqrt{\frac{\alpha - J_z}{J_y(J_y - J_z)}}\,\mathrm{sn}(k, \lambda t - \delta) \\ \omega_z &= \sqrt{\frac{J_x - \alpha}{J_z(J_x - J_z)}}\,\mathrm{dn}(k, \lambda t - \delta) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\lambda = \mathrm{sgn}(J_z - J_x)\sqrt{\frac{(J_y - J_z)(J_x - \alpha)}{J_x J_y J_z}} \tag{2.10}$$

$$k = \sqrt{\frac{(\alpha - J_z)(J_x - J_y)}{(J_y - J_z)(J_x - \alpha)}} \tag{2.11}$$

ここで，$\mathrm{sgn}(*)$ は引数の符号を返す関数である．また，$\mathrm{sn}(k,*), \mathrm{cn}(k,*), \mathrm{dn}(k,*)$ は $k \in [0,1]$ を母数とするヤコビの楕円関数であり，sn と cn の周期は $4K(k)/\lambda$，dn の周期はその半分である．ここで $K(k)$ は，第 1 種完全楕円積分である (**附章C**参照)．この解の導出方法を**附章B**に示す．

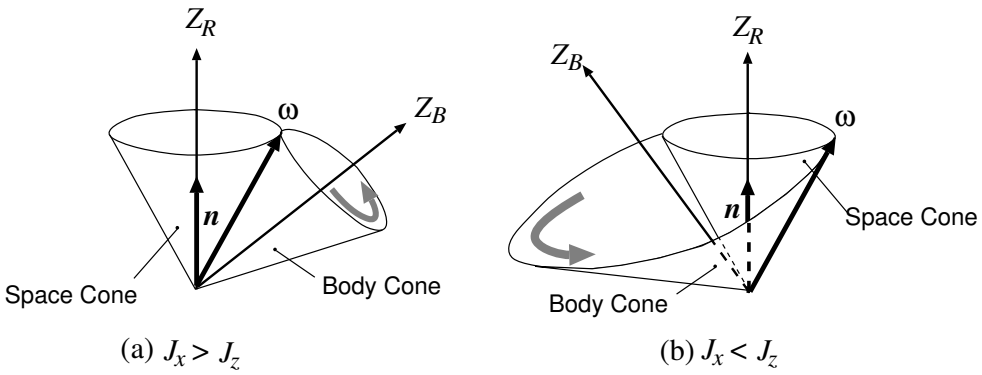


Fig. 2.5 Geometrical interpretation in case of symmetric distribution

非周期の場合

角運動量が特殊な値を取る場合 ($|\boldsymbol{L}| = 2EI_y$，つまり，$\alpha = J_y$) には，以下のような非周期な解となる．

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sqrt{\frac{\alpha - J_z}{J_x(J_x - J_z)}}\,\mathrm{sech}(\lambda t - \delta) \\ \omega_y &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh(\lambda t - \delta) \\ \omega_z &= \sqrt{\frac{J_x - \alpha}{J_z(J_x - J_z)}}\,\mathrm{sech}(\lambda t - \delta) \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここで，λは式 (2.10) で与えられる．また，$\mathrm{sech}(*) = 1/\cosh(*)$ である．この場合，$t \to \infty$ において，${}^B\boldsymbol{\omega}$は $[0, \pm 1/\sqrt{\alpha}, 0]^T$ に収束する．これは，$\boldsymbol{Y}_B$周りの単軸回転を意味する．

軸対称の場合

対称軸を$\boldsymbol{Z}_B$とする．つまり，$J_x = J_y$である．この時，解は

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sqrt{\frac{\alpha - J_z}{J_x(J_x - J_z)}}\cos(\lambda t - \delta) \\ \omega_y &= \sqrt{\frac{\alpha - J_z}{J_x(J_x - J_z)}}\sin(\lambda t - \delta) \\ \omega_z &\equiv \sqrt{\frac{J_x - \alpha}{J_z(J_x - J_z)}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\lambda = \frac{J_z - J_x}{J_x}\omega_z \tag{2.14}$$

となる．この解は，**Fig. 2.5**に示すように，空間に固定された円錐の周りを物体とともに動く円錐が滑べらずに転がっていると幾何学的に解釈できる．

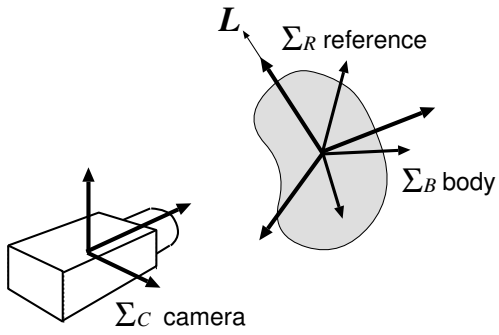


Fig. 2.6 Coordinate frames

単軸回転の場合

$J_x = J_y = J_z$ または $J_x = \alpha$ か $J_z = \alpha$ の場合には，$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ であり，つまり角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$は不変である．このような状態を代表する解として，ここでは，

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0 \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= 1/\sqrt{\alpha} \end{aligned} \tag{2.15}$$

を用いることにする．

2.3.4 姿勢の表現

次に，カメラ座標系Σ_Cとは別に，物体の姿勢を表すために都合の良い中間座標系として，空間に固定された参照座標系 Σ_R を定める (**Fig. 2.6**)．参照座標系 Σ_R に対する物体座標系 Σ_B の姿勢を表現するにはオイラー角を用いる (**Fig. 2.7**)．図中の$\boldsymbol{Z}_R$, $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{z}''$まわりの回転角をそれぞれ，ϕ, θ, ψとする．このとき，座標系Σ_BからΣ_Rへの変換を行う回転行列${}^R R_B$は以下のように表される．

$${}^R R_B = \begin{bmatrix} C_\psi C_\phi - C_\theta S_\phi S_\psi & -S_\psi C_\phi - C_\theta S_\phi C_\psi & S_\theta S_\phi \\ C_\psi S_\phi + C_\theta C_\phi S_\psi & -S_\psi S_\phi + C_\theta C_\phi C_\psi & -S_\theta C_\phi \\ S_\psi S_\theta & C_\psi S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

ここで，S_*と C_* はそれぞれ $\sin *$ と $\cos *$ を意味する．さらに，座標系Σ_BのΣ_Rに対する角速度はオイラー角の時間微分の線型結合として表現できる．

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y &= \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{2.17}$$

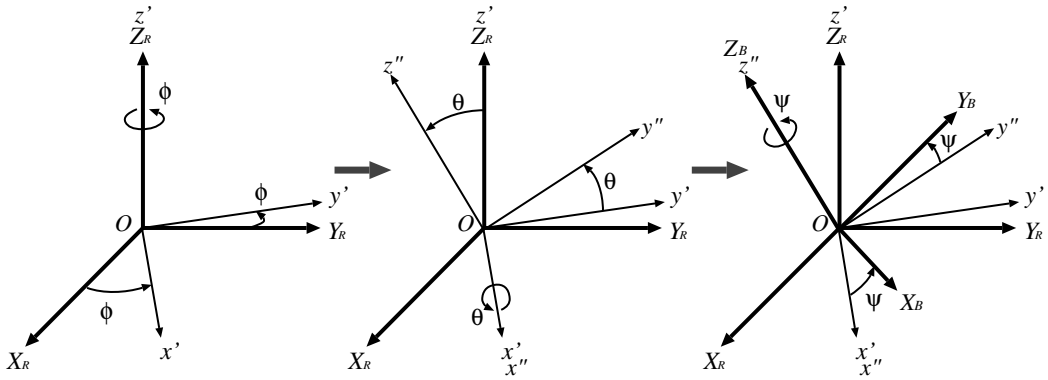


Fig. 2.7 Z-X-Z Euler angles

姿勢の表現を簡潔にするために，参照座標系の$\boldsymbol{Z}_R$軸は角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$の方向に一致させるようにとる．角運動量の成分は座標系Σ_BとΣ_Rに関して，

$$
\begin{aligned}
{}^B\boldsymbol{L} &= 2E[J_x\omega_x, J_y\omega_y, J_z\omega_z]^T && (2.18)\\
{}^R\boldsymbol{L} &= 2E[0, 0, \sqrt{\alpha}]^T && (2.19)
\end{aligned}
$$

であるから，これを${}^R\boldsymbol{L} = {}^R R_B {}^B\boldsymbol{L}$に代入することによって，以下のような関係を得る．

$$
\begin{aligned}
J_x\omega_x &= \sqrt{\alpha}\sin\theta\sin\psi\\
J_y\omega_y &= \sqrt{\alpha}\sin\theta\cos\psi\\
J_z\omega_z &= \sqrt{\alpha}\cos\theta
\end{aligned}
\qquad (2.20)
$$

これを解くと，オイラー角のθとψは，

$$\theta = \cos^{-1}\frac{J_z\omega_z}{\sqrt{\alpha}} \qquad (2.21)$$

$$\psi = \tan^{-1}\frac{J_x\omega_x}{J_y\omega_y} \qquad (2.22)$$

となる．残りのϕは，式 (2.17) より時間微分の形で与えられる．

$$\dot{\phi} = \sqrt{\alpha}\frac{J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2}{J_x^2\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2} \qquad (2.23)$$

2.3.5 ハーポルホード

不変平面上の角運動量ベクトルの軌跡ハーポルホードは，**Fig. 2.8**に示すような極座標 (径ρ, 角度χ) を使って次のように表現できる (**附章B**参照)．図中の$\boldsymbol{m}$は，適当に定めた基

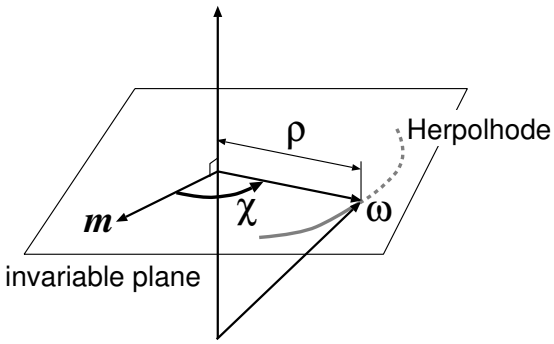


Fig. 2.8 Herpolhode curve

準の方向である．

$$\rho(t) = \sqrt{|\boldsymbol{\omega}|^2 - \frac{1}{\alpha}} \tag{2.24}$$

$$\dot{\chi}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left\{1 + \frac{(J_x-\alpha)(J_y-\alpha)(J_z-\alpha)}{J_xJ_yJ_z(\alpha\,|\boldsymbol{\omega}|^2-1)}\right\} \tag{2.25}$$

2.4 動力学的特性の推定

本節では，角速度の時系列 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ から，動力学パラメータ J_x, J_y, J_z, α と参照座標系Σ_Rを求める手続きについて述べる．

画像から得られる角速度ベクトルは，カメラ座標系に関するものであり，物体座標系の姿勢は未知であるから，運動の推定のために式 (2.9), (2.12), (2.13), (2.15) をそのまま用いることはできない．そこで，角速度の大きさの時系列とハーポルホードを手がかりに動力学的特性の推定を行う．そのために，運動方程式の 4 種類の解に対応する 4 つの推定モデルを用意し，入力されたデータに応じてそれらを使い分ける．画像から得られた角速度ベクトルには種々のノイズが含まれており，場合によっては，真の運動とは異なるモデルを使わなければならない可能性がある．例えば，実際には角速度ベクトルの方向の変化していても，それがノイズ成分に埋もれてしまう場合には，単軸回転として扱う．

最初に，前節で述べた 4 つの場合に対応するモデルを用いた推定手順について説明し，その後でそれらを統合するアルゴリズムについて述べる．

2.4.1 非対称モデル

パラメータ α

角速度ベクトルの終点は常に不変平面上にあることから (**Fig. 2.9**)，角速度ベクトルの時系列 $\{{}^C\boldsymbol{\omega}_i\}$ に対して，平面の式

$$\hat{\boldsymbol{n}}^T\boldsymbol{\omega}_i = 1 \tag{2.26}$$

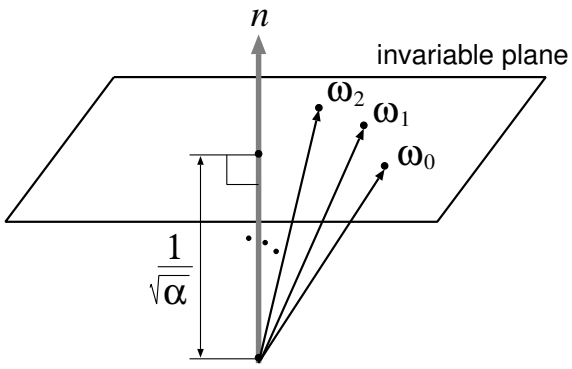


Fig. 2.9 Invariable plane

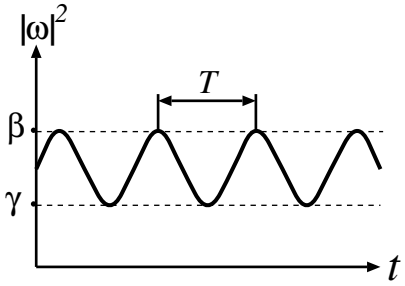


Fig. 2.10 Waveform of $|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$

を当てはめて，$\hat{\boldsymbol{n}} \in \mathbf{R}^3$を最小二乗法で推定する．次に，動力学パラメータ$\alpha$を，

$$\alpha = |\hat{\boldsymbol{n}}|^2 \tag{2.27}$$

より求める．また，後で利用するために，$\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{n}}/\,|\hat{\boldsymbol{n}}|$ を計算しておく．

$|\boldsymbol{\omega}|^2$の周期，最大値，最小値

ベクトルの大きさは座標系に依存しないことに着目する．式 (2.9) から $|\boldsymbol{\omega}|^2$は次のように書くことができる．

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = \beta - (\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}^2(k, \lambda t - \delta) \tag{2.28}$$

$$\beta = \frac{J_x + J_z - \alpha}{J_x J_z} \tag{2.29}$$

$$\gamma = \frac{J_y + J_z - \alpha}{J_y J_z} \tag{2.30}$$

$|\boldsymbol{\omega}|^2$ は周期関数であるから，その時系列を観測することによって，波形の特徴量として

周期 T，最大値β，最小値γを抽出できる (**Fig. 2.10**)．周期 Tは

$$T = \frac{2K(k)}{\lambda} \tag{2.31}$$

とあらわされるので，これと式 (2.10), (2.11), (2.29), (2.30) より，次の関係が成り立つ．

$$2kK(k) = T\sqrt{\beta - \gamma} \tag{2.32}$$

$K(k)$ は kに対して単調増加であるから (**附章C**参照)，この方程式を kについて一意に解くことができ，母数 kを得る．

$|\boldsymbol{\omega}|^2$の波形の特徴抽出は理論的にはこれで十分であるが，ノイズを含む実際のデータを処理するには，もっと工夫が必要である．本研究では，まず，$\{|\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ をフーリエ変換で処理して，周波数スペクトルの主成分の周期 T，振幅，位相を求め，次に，$\{t_i, |\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ に対して以下のようなモデルに当てはめ，非線形最小二乗法によってβ, k, δを同時に求めている．

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = \beta - k^2\lambda^2(k)\,\mathrm{sn}^2(k, \lambda(k)\ t - \delta) \tag{2.33}$$

$$\lambda(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{2K(k)}{T} \tag{2.34}$$

$|\boldsymbol{\omega}|^2$の最小値は

$$\gamma = \beta - k^2\lambda^2(k) \tag{2.35}$$

より求める．

なお，この処理の詳細は**附章D**で述べる．

パラメータ J_x, J_y, J_z

式 (2.29) と (2.30) を解いて，J_xと J_yを J_zについて解くと，

$$J_x = \frac{J_z - \alpha}{\beta J_z - 1} \tag{2.36}$$

$$J_y = \frac{J_z - \alpha}{\gamma J_z - 1} \tag{2.37}$$

となる．これを式 (2.11) に代入すると，次のような 2 次方程式を得る．

$$f(\xi) = C_2\xi^2 + C_1\xi + C_0 = 0 \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= k^2\gamma(\alpha\beta - 1) - (\beta - \gamma) \\ C_1 &= -2\{k^2(\alpha\beta - 1) - \alpha(\beta - \gamma)\} \\ C_0 &= \alpha\{k^2(\alpha\beta - 1) - \alpha(\beta - \gamma)\} \end{aligned} \tag{2.39}$$

ただし，J_zをξで置き換えている．解の判別式を計算すると，方程式 (2.38) は常に 2 実根を持つことがわかる (**附章E**参照)．そこで，それらをξ_1, ξ_2とおく ($\xi_1 < \xi_2$)．

さらに $f(\xi)$ を調べると，常に $f(0) < 0$, $f(\alpha) > 0$, $f'(\alpha) > 0$ を満足することがわかる (**附章E**参照)．このことから，次のようにしてξ_1, ξ_2から J_zを決定する．

$C_2 > 0$ の場合 解の順番は$\xi_1 < 0 < \xi_2 < \alpha$．したがって，$J_z = \xi_1$は棄却され，$J_z = \xi_2$ $(J_x > J_y > \alpha > J_z)$ である．

$C_2 < 0$ の場合 解の順序は $0 < \xi_1 < \alpha < \xi_2$．したがって 2 つの可能性がありうる．これを区別するために，ハーポルホード を調べる．式 (2.25) によれば，

$$\dot{\chi}(t) < 1/\sqrt{\alpha} \quad \text{ならば，} \quad J_z = \xi_1 \quad (J_x > J_y > \alpha > J_z)$$
$$\dot{\chi}(t) > 1/\sqrt{\alpha} \quad \text{ならば，} \quad J_z = \xi_2 \quad (J_x < J_y < \alpha < J_z)$$

である．

Fig. 2.8に示すように，不変平面の法線ベクトル$\boldsymbol{n}$に直交する適当な単位ベクトル$\boldsymbol{m}$を定め，$(I-\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T)\boldsymbol{\omega}_i$と$\boldsymbol{m}$の成す角$\chi_i$を求める．得られた$\chi$の平均的な速度を得るために，$\{t_i, \chi_i\}$をモデル

$$\chi = At + B \tag{2.40}$$

に当てはめて，最小二乗法により A を推定する．この A と $1/\sqrt{\alpha}$ の大小によって解を選択する．

求めた J_zを式 (2.36) と (2.37) に代入して J_xと J_yを得る．これで，動力学パラメータα, J_x, J_y, J_z が全て求まった．

参照座標系 Σ_R

最後に，カメラ座標系Σ_Cに対する参照座標系Σ_Rの姿勢を決定する．

$\boldsymbol{Z}_R$軸は不変平面の法線方向$\boldsymbol{n}$とする．観測時間中に，$|\boldsymbol{\omega}|^2$が最大になる最後の時刻を基準時刻 t_δとする．つまり，

$$t_\delta = \delta/\lambda + jT \tag{2.41}$$

で，jは t_δが観測の最後の時刻 (t_{n-1}) を越えない最大の整数である．式 (2.9) から明らかなように，この時，物体座標系における角速度の$\boldsymbol{Y}_B$成分は 0 であるから，ベクトルは$\boldsymbol{X}_B\boldsymbol{Z}_B$平面に含まれる．参照座標系は，この時刻にベクトルが$\boldsymbol{Z}_R\boldsymbol{Y}_R$平面に含まれるように決める．$\boldsymbol{\omega}$の$\boldsymbol{X}_B$成分と$\boldsymbol{Z}_B$成分をともに正にし，さらに，$\boldsymbol{X}_R$軸周りに$\boldsymbol{Z}_B$が$\boldsymbol{Z}_R$と成す角 (オイラー角の$\theta$) が正 (右ねじ回転) になるようにするために，$\boldsymbol{Y}_R$軸はこの時刻の

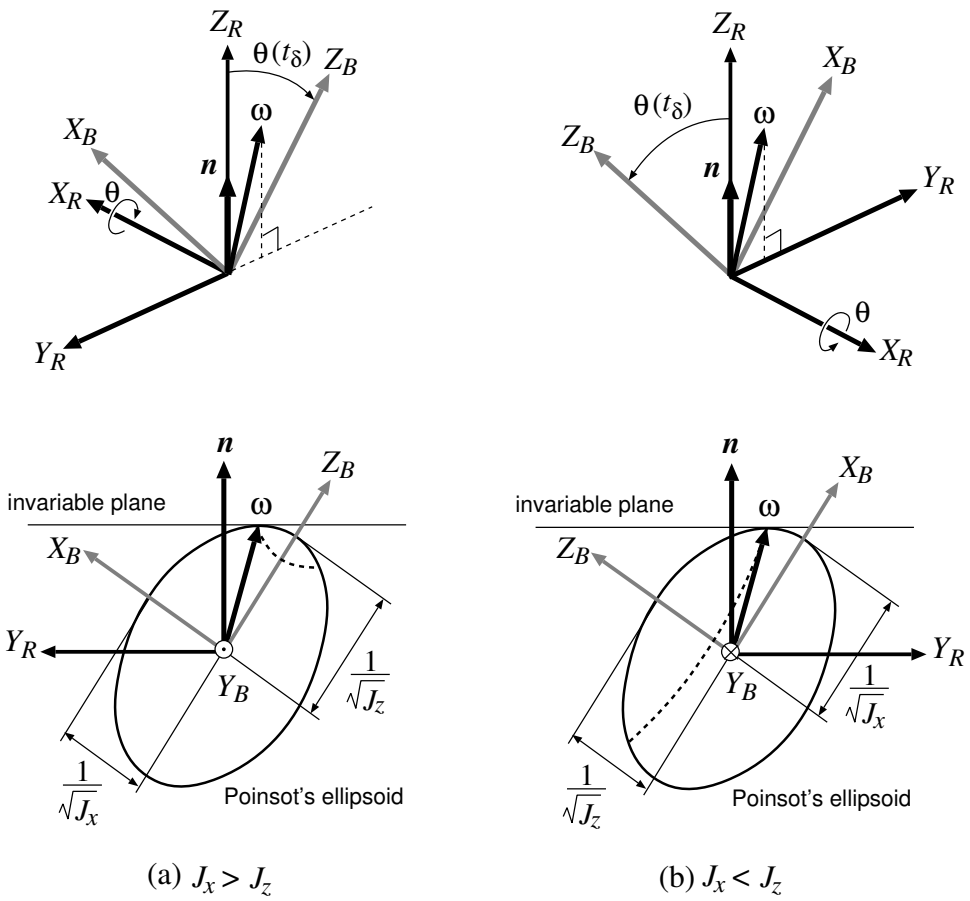
$$\mathrm{sgn}(J_z - J_x)(I - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T)\boldsymbol{\omega}$$

の方向とする (**Fig. 2.11**参照)．$\boldsymbol{X}_R$軸は$\boldsymbol{Y}_R \times \boldsymbol{Z}_R$で求める．

以上より，オイラー角のϕとψは，

$$\phi(t_\delta) = 0 \tag{2.42}$$
$$\psi(t_\delta) = \frac{\pi}{2} \tag{2.43}$$

と決めればよい．これを微分方程式 (2.23) の初期値とする．



(a) $J_x > J_z$ (b) $J_x < J_z$

Fig. 2.11 Reference frame

運動の予測

以上で推定した動力学パラメータと参照座標系を用いれば，式 (2.9) と (2.21), (2.22), (2.23) によって，剛体運動の記述が可能であり，これを用いれば運動を予測できる．

2.4.2 非周期モデル

非周期解において，λが大きく回転軸が速く変化する場合は，回転軸の方向がすぐに収束して一定になるので，そのような状態になってから後述する単軸回転モデルを適用すべきである．一方，λが小さく回転軸がゆっくりと変化する場合や，厳密には周期解であるがその周期が観測時間に比べて長い場合には，次に述べる非周期モデルを用いて推定を行う．

パラメータ α

2.4.1節と同じように求める．

パラメータ λ

式 (2.12) から $|\boldsymbol{\omega}|^2$は

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = \frac{1}{\alpha} + \lambda^2 \ \mathrm{sech}^2(\lambda t - \delta). \tag{2.44}$$

と表される．$\{t_i, |\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ に対して，この式をモデルとして当てはめ，非線形最小二乗法によりλとδを推定する．

参照座標系 Σ_R

このモデルの場合，情報が不足しているため慣性主軸の方向やα以外の動力学パラメータが推定できない．したがって，物体座標系Σ_Bにおける$\boldsymbol{\omega}$の記述を得ることができない．しかし，式 (2.24) と (2.25) より

$$\rho(t) = \lambda \,\mathrm{sech}(\lambda t - \delta) \tag{2.45}$$

$$\dot{\chi}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{2.46}$$

であるから，$\boldsymbol{\omega}$は慣性座標系で時間関数として簡潔に記述できる．そこで，実際の主慣性軸の方向とは無関係に，物体の姿勢が簡潔に表現できる物体座標系と参照座標系を導入する．

$\boldsymbol{Z}_R$軸は不変平面の法線方向$\boldsymbol{n}$とする．時刻 $t_\delta = \delta/\lambda$における $(I - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T)\boldsymbol{\omega}$の方向を$\boldsymbol{X}_R$軸とする．$\boldsymbol{Y}_R$軸は$\boldsymbol{Z}_R \times \boldsymbol{X}_R$で求める．すると，この参照座標系に対する物体座標系の姿勢は，

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(t - t_\delta) \tag{2.47}$$

$$\theta(t) = \lambda \int_0^t \mathrm{sech}\, \lambda\tau \, d\tau \tag{2.48}$$

$$\psi(t) \equiv 0 \tag{2.49}$$

と表される．ここで，$t \to \infty$ で $\theta \to \pi/2$ である．

2.4.3 軸対称モデル

パラメータ α

2.4.1節と同じように求める．

パラメータ J_x, J_y, J_z

このモデルでは，$|\boldsymbol{\omega}|$ と$\dot{\chi}$は一定である．そこで，$\{|\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ の平均を求め，それをβとする．また，ハーポルホードを求め，それを式 (2.40) に当てはめて推定された A を$\dot{\chi}$とする．$J_y = J_x$と式 (2.29) を式 (2.25) に代入して整理すると，

$$\dot{\chi} = \frac{\sqrt{\alpha}}{J_x} \tag{2.50}$$

を得る．これと式 (2.29) より動力学パラメータを算出する．

$$J_x = J_y = \frac{\sqrt{\alpha}}{A} \tag{2.51}$$

$$J_z = \frac{J_x - \alpha}{\beta J_x - 1} \tag{2.52}$$

さらに，λは式 (2.14) で計算する．

参照座標系 Σ_R

$\boldsymbol{Z}_R$軸は不変平面の法線方向$\boldsymbol{n}$とする．質量分布は$\boldsymbol{Z}_B$軸に関して対称なので，$\boldsymbol{X}_B$軸と$\boldsymbol{Y}_B$軸の方向は任意に決めることができる．そこで，観測時間の最初の時刻 $t = t_0$を基準と決め，

$$\delta = \lambda t_0 \tag{2.53}$$

とし，その時のχの方向

$$\chi_0 = At_0 + B \tag{2.54}$$

に $\mathrm{sgn}(J_z - J_x)$ を掛けたものを$\boldsymbol{Y}_R$軸の方向とする．$\boldsymbol{X}_R$軸は$\boldsymbol{Y}_R \times \boldsymbol{Z}_R$の方向にとる．以上を決めると，参照座標系に対する物体座標系の姿勢は次のように表現できる．

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{J_x}(t - t_0) \tag{2.55}$$

$$\theta(t) \equiv \cos^{-1}\frac{J_z\omega_z}{\sqrt{\alpha}} \tag{2.56}$$

$$\psi(t) = -\lambda(t - t_0) + \frac{\pi}{2} \tag{2.57}$$

2.4.4 単軸回転モデル

このモデルでは，情報が不足しているため，それ以外の動力学パラメータを求めることはできない．しかし，運動は単純な固定軸周りの等速回転であるから，運動の記述は容易にできる．この場合，不変平面の推定は数値的に悪条件に陥りやすいので，角運動量ベクトルの方向$\boldsymbol{n}$と動力学パラメータのαは，角速度 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ のベクトルとしての平均$\overline{\boldsymbol{\omega}}$から

$$\boldsymbol{n} = \frac{\overline{\boldsymbol{\omega}}}{|\overline{\boldsymbol{\omega}}|} \tag{2.58}$$

$$\alpha = \frac{1}{|\overline{\boldsymbol{\omega}}|^2} \tag{2.59}$$

で求める．

参照座標系の$\boldsymbol{Z}_R$軸は$\boldsymbol{n}$の方向にとる．$\boldsymbol{Y}_R$の方向は任意であるから，適当に定め，$\boldsymbol{X}_R$軸は$\boldsymbol{Y}_R \times \boldsymbol{Z}_R$の方向とする．

$$\phi(t) \equiv |\overline{\boldsymbol{\omega}}|\, t \quad (= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} t) \tag{2.60}$$

$$\theta(t) \equiv 0 \tag{2.61}$$

$$\psi(t) \equiv 0 \tag{2.62}$$

2.4.5 統合アルゴリズム

実際の画像から抽出された角速度の時系列 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ に基づいて推定を行うには，前節までで述べた 4 つのモデルをデータの特徴に応じて適切に切り替える統合アルゴリズムが必要である．以下にそれを具体的に示す．

外力の働かない剛体の運動では，どのような場合にも角速度ベクトルの端点が不変平面の上にある．そこで，角速度ベクトルの時系列より不変平面 (2.26) を推定する際の標準偏差

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n-3} \sum_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{n}^T \boldsymbol{\omega}_i - 1)^2} \tag{2.63}$$

をデータのばらつきの目安とし，これを基準に場合分けを行う．ただし，$|\boldsymbol{n}| = 1$ である．

以下に統合アルゴリズムの処理の流れを C 言語風に記述する．

運動パラメータ $\{R_i\}$ を推定;
角速度 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ を推定;
不変平面 (2.26) を推定 ($\rightarrow \boldsymbol{n}, \alpha, \sigma_n$);
$\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ のベクトルの平均と標準偏差を計算 ($\rightarrow \overline{\boldsymbol{\omega}}, \sigma_v$);
$\{|\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ をフーリエ変換しスペクトル分析 ($\rightarrow T$など);
if ($\sigma_v < \Theta_{sin}\sigma_n$) {
    $\boxed{\text{単軸回転モデル}}$;
} **else if** (主スペクトルが特定できない) {
    $\boxed{\text{軸対称モデル}}$;
} **else if** ($T > (t_{n-1} - t_0)/N_p$) {
    $\boxed{\text{非周期モデル}}$;
} **else** {
    $\boxed{\text{非対称モデル}}$;
}

$\overline{\boldsymbol{\omega}}$: $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ の平均値
σ_v: $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ の標準偏差
T: $\{|\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ の主スペクトルの周期
σ_n: 不変平面の標準偏差 (2.63)
Θ_{sin}: 単軸回転モデルを判断するためのしきい値
N_p: 観測時間内の許容最大周期数

ここで，Θ_{sin}, N_p は適当に定める．また，フーリエ変換によるスペクトル分析の詳細は**附章D**で述べる．1 番目の **if** 文は，角速度ベクトルの散らばりσ_vと，推定された不変平面の法線方向の成分の散らばりσ_nを比較している．両者の差が小さければ，角速度ベクトルが不変平面に直交していると判断して，“単軸モデル” を用いる．2 番目の **if** 文は，$\{|\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ のスペクトル分析の結果から，角速度の大きさの変動の有無を判断している．主スペクトルが特定できなければ，角速度の大きさは一定と見なして “軸対称モデル” を用いる．3 番目の **if** 文は，観測時間 $(t_{n-1} - t_0)$ を基準にした主スペクトルの周期 Tの長さを判断している．周期が非常に長い場合には，$\{|\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ の周期性を前提とする非対称モデルが役に立たないので “非周期モデル” を用いる．その他の場合は，“非対称モデル” を用いる．

以上の処理のデータの流れを **Fig. 2.12**に示す．上半分は全てのモデルに共通であり，下半分は，処理が最も複雑な “非対称モデル” の場合を表している．

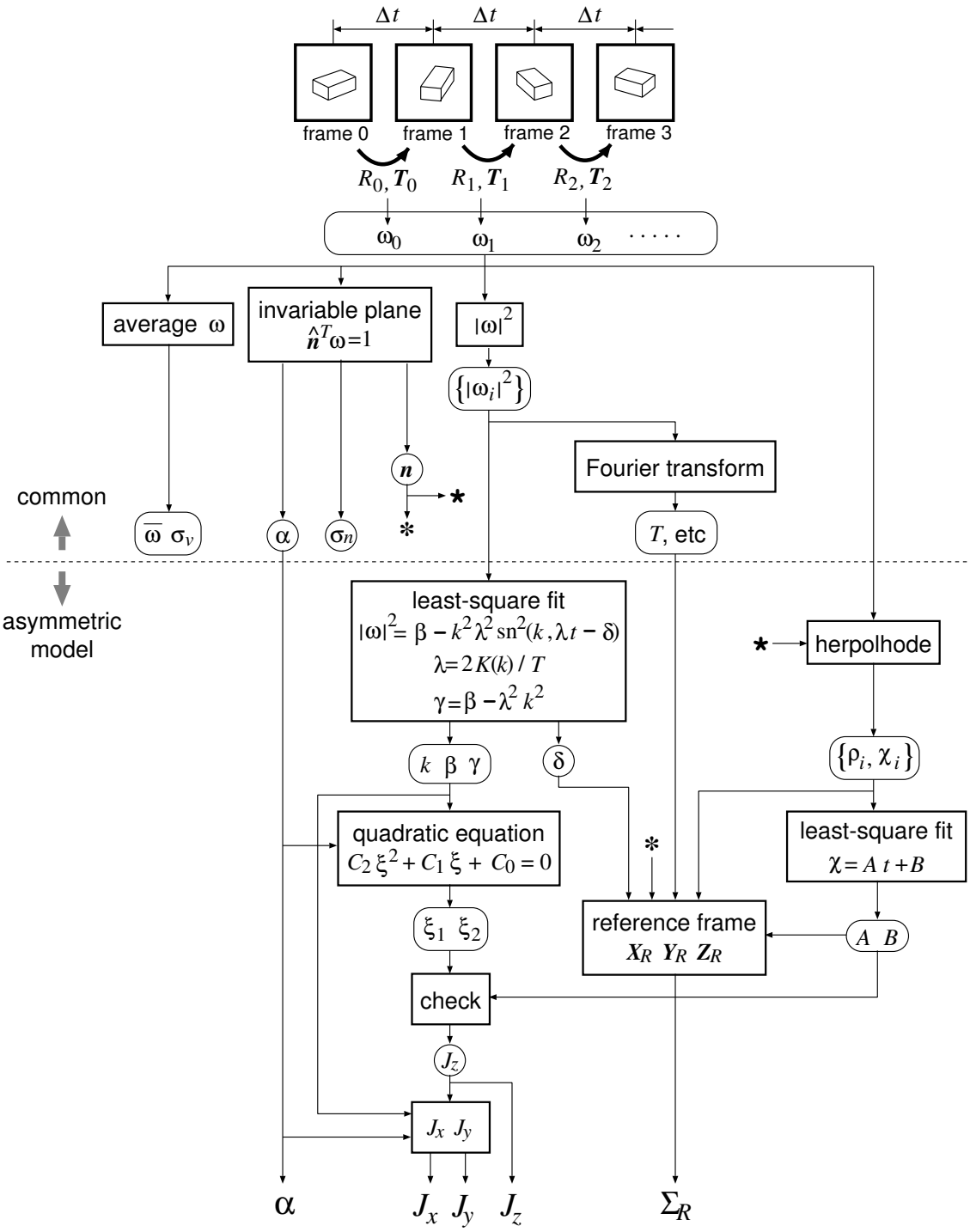


Fig. 2.12 Flow of data in the estimation procedures

2.5 おわりに

本章では，外力を受けずに 3 次元的に回転している剛体を撮影した画像から抽出した角速度ベクトルの時系列から，オイラーの運動方程式に基づいて運動の記述をするための “動力学パラメータ” と “参照座標系” を推定する方法を提案した．対象とする剛体の質量分布は未知であり，一般に非対称でも構わない．オイラーの運動方程式の解を 4 つの場合に分け，角速度の時系列の特徴に応じて，それぞれに対応する推定モデルを用いる．本手法によって，運動の記述が得られれば，未来の運動の予測が可能である．

なお，画像だけからでは，物体の慣性パラメータを知ることはできない．しかし，何らかの方法で物体に小さな衝撃を与えれば，その前後の運動に対して本手法を適用することによって，主慣性モーメントの絶対値を得ることができる．これを実現する実用的な方法を考案することは，今後の課題の一つである．

次章では，本章で提案した運動推定の性能を評価するために，計算機によって様々なバリエーションを持つ運動画像を作り，シミュレーション実験を行う．

第 3 章

計算機シミュレーションによる運動推定の評価

3.1 はじめに

本章では，第2章で提案した剛体の動力学的特性の推定アルゴリズムの有効性を検証するために，計算機シミュレーション実験を行う．最初に，剛体の 3 次元運動の例として，スペースシャトル搭乗員の毛利氏が指摘した “ペンチの不思議な回転運動” を取り上げ，画像から角速度ベクトルを抽出するシミュレーションについて説明する．次に，運動の種類を表現するパラメータと，推定予測性能の評価規範を導入する．実際の画像処理を想定した誤差を含んだデータを入力とし，様々な種類の運動に対して，推定と予測の性能評価を行い，その結果について検討する．

3.2 剛体の 3 次元回転運動の例

スペースシャトルの搭乗員の毛利氏は，宇宙船内における “ペンチの不思議な回転運動” を講演で紹介している．これは，宇宙船内でペンチの取手を開き，先端と取手側を結ぶ軸まわりに回転させると，数回転ほど安定回転していたのに，突然先端と取手が入れ替わって倒立し，そこで数回安定に回転し，また突然にもとの回転に戻る運動を繰り返す現象である [36].

この問題をモデル化する．まず，ペンチを V 字型の剛体として単純化する．その形状は，長さ $2l$の均一な棒が 2 本，角度 2θを成してつなぎ合わされたものとする (**Fig. 3.1**)．図に示すように座標系をとると，座標系は慣性主軸と一致し，質量中心の位置はちょうど各方向の長さの中央になる．この物体の全質量を m とすると，この座標系における質量中心ま

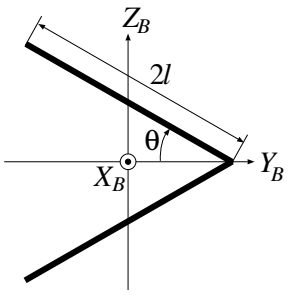


Fig. 3.1 V-shape object

わりの主慣性モーメントの値は,

$$
\begin{aligned}
I_x &= \frac{1}{3}ml^2(1+3\sin^2\theta) \\
I_y &= \frac{4}{3}ml^2\sin^2\theta \\
I_z &= \frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

となる．ここでは，$\theta = \pi/6$ [rad] の場合のシミュレーションを行う．この場合，$I_x : I_y : I_z = 7:4:3$ である．注目している運動は，中間の慣性モーメントを持つ主軸$\boldsymbol{Y}_B$(つまり，ペンチの軸方向) まわりから，わずかにずれた角速度が与えられた場合に顕著に起こる．そこで,

$$
\begin{aligned}
I_x &= 9.42 \quad [\mathrm{kgm}^2] \\
I_y &= 5.38 \quad [\mathrm{kgm}^2] \\
I_z &= 4.03 \quad [\mathrm{kgm}^2] \\
|\boldsymbol{L}| &= 46.3 \quad [\mathrm{kgm/s}] \\
E &= 20.0 \quad [\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2]
\end{aligned}
$$

というパラメータを与えて，オイラーの運動方程式を解く．

結果は，表示の都合上，**Fig. 3.2**に示すような三角形の薄板を用いる．板の上にはペンチの軸方向に中心線が描かれている．同じ図に，座標系の方向を揃えて，ポアンソーの楕円体と，その上の角速度ベクトルの軌跡であるポルホードも示す．方程式を解いた結果を**Fig. 3.3**と **Fig. 3.4**に示す．これは，1 秒毎の姿勢を透視投影変換で表示した 40 秒間分である．毛利氏の指摘するような回転運動が起こっているのがわかる．また，この図では，角運動量ベクトルが Z軸と一致しており，鎖線はその時刻における角速度ベクトルを表している．軸対称の剛体の運動 (**Fig. 2.5**) とは異なり，角速度ベクトルは，その大きさや角運動量ベクトルと成す角度は，時間とともに変化していることがわかる．

この例のように，非対称の剛体の運動は，条件によっては複雑な振舞を見せる．

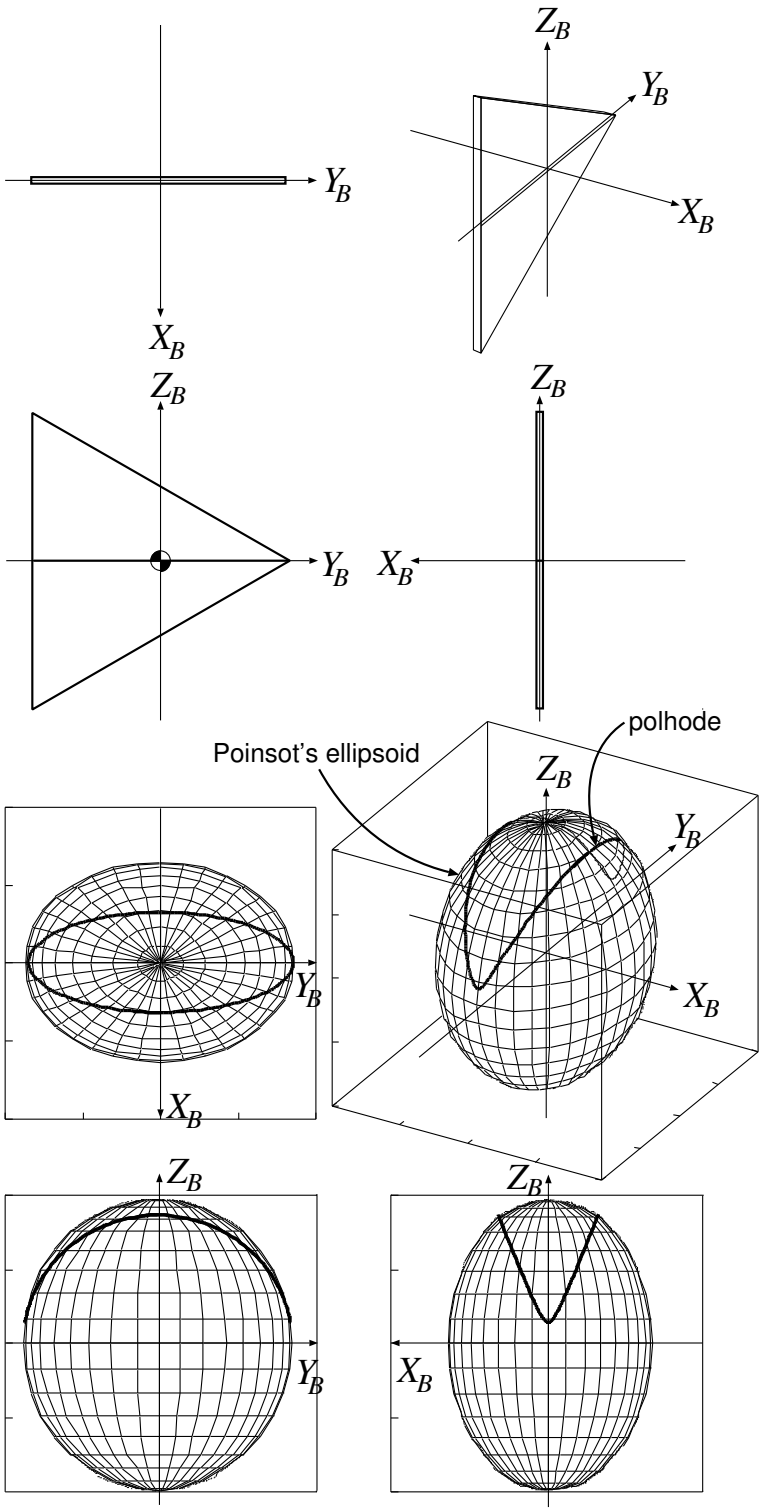


Fig. 3.2 Coordinate frame for the V-shape object and its inertial moment ellipsoid and polhode

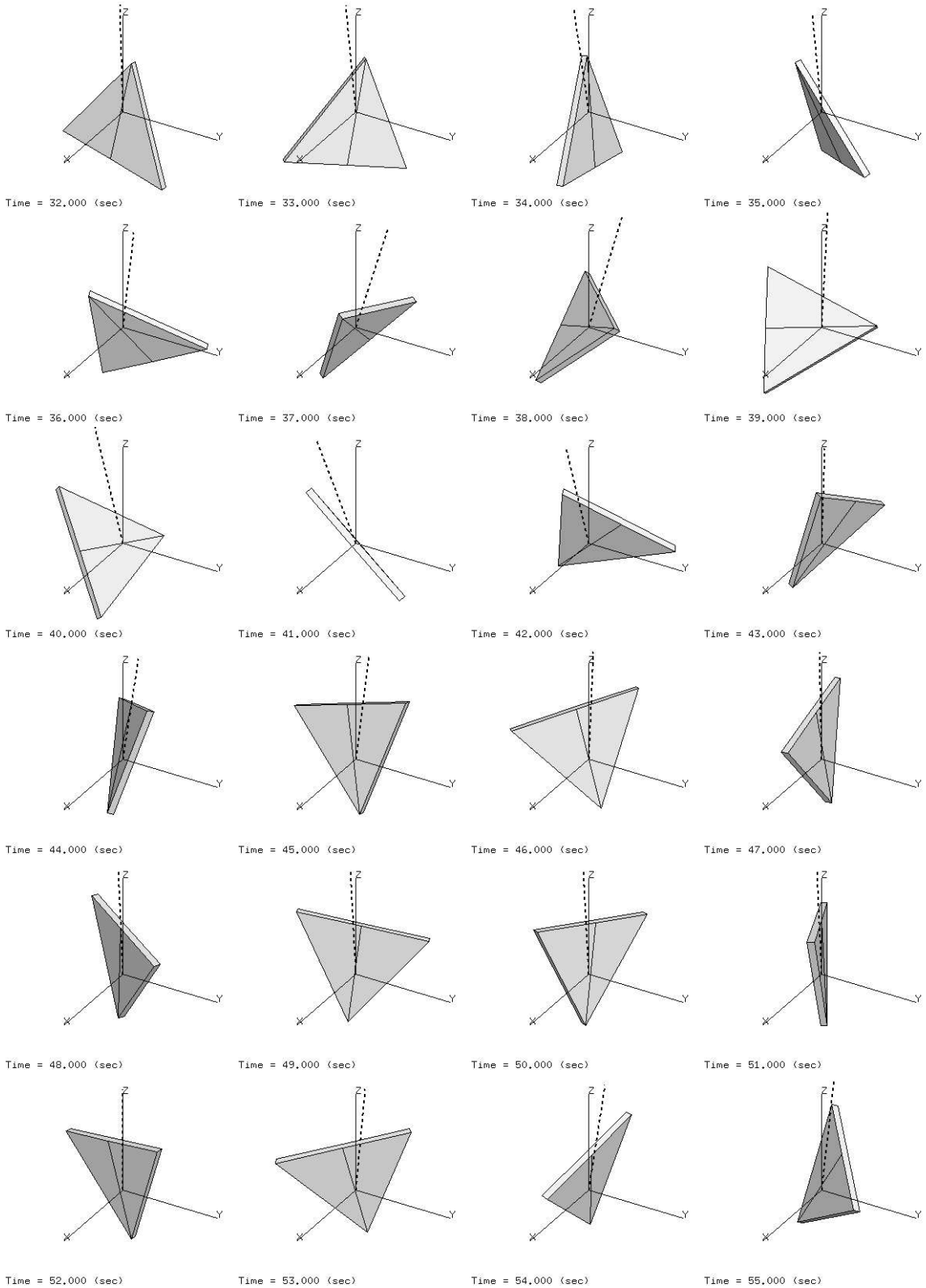


Fig. 3.3 Example of motion of asymmetric rigid body (part 1)

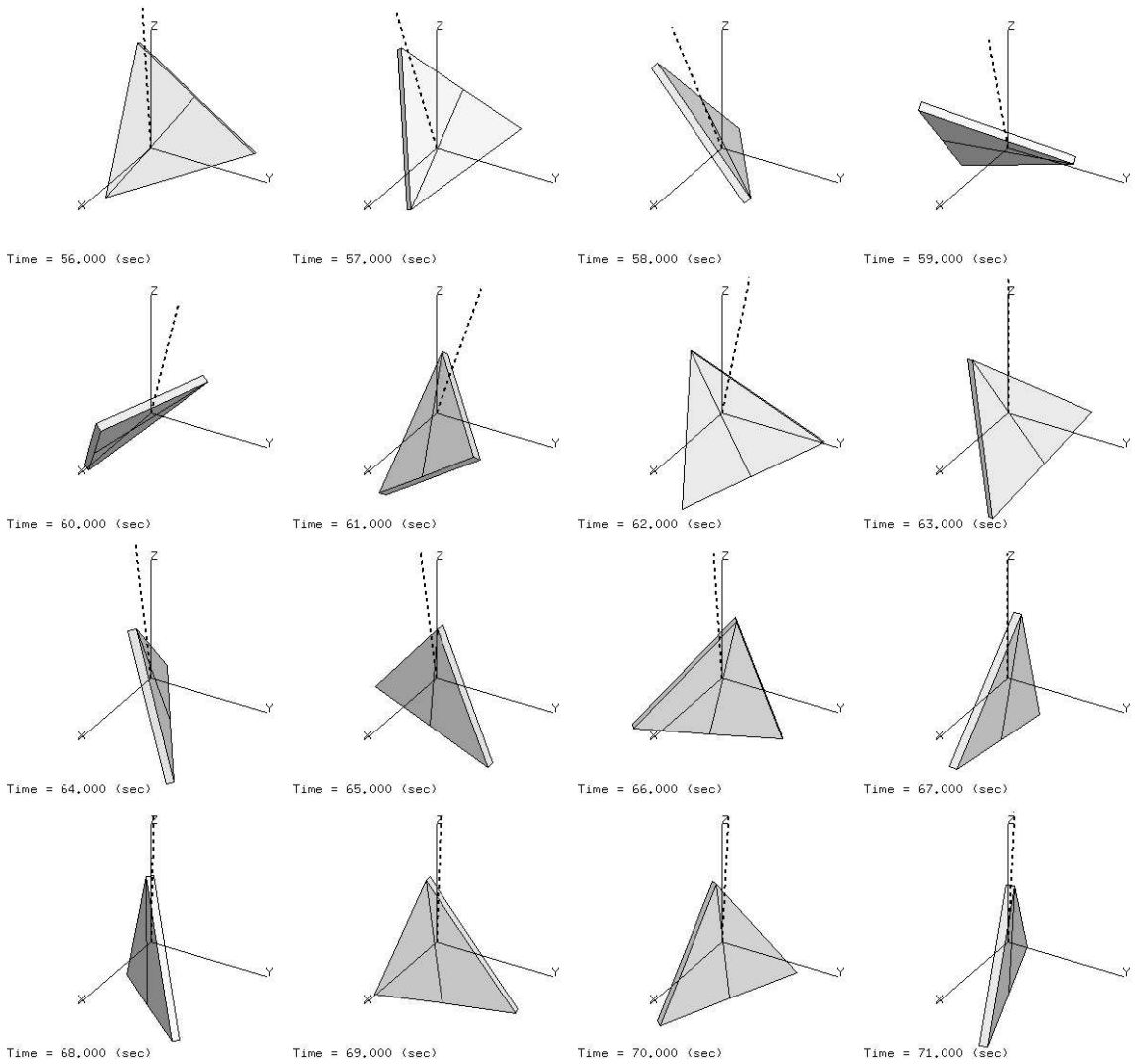


Fig. 3.4 Example of motion of asymmetric rigid body (part 2)

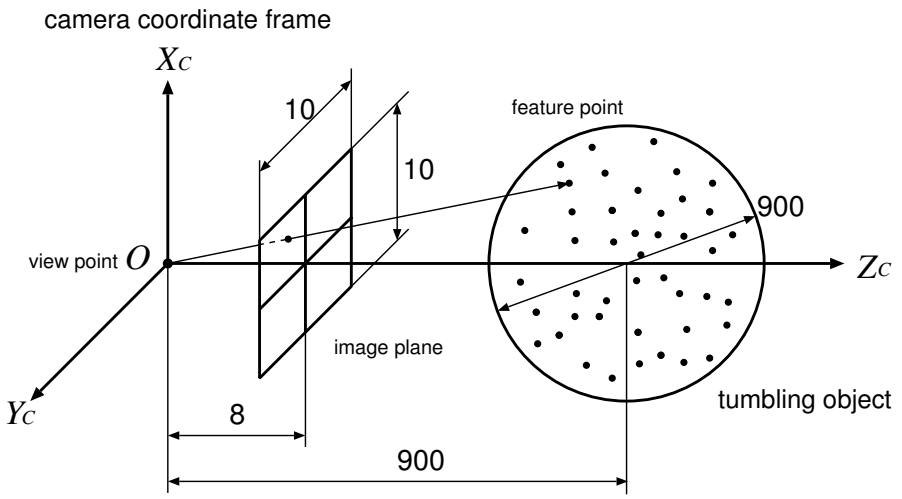


Fig. 3.5 Geometry for simulation

3.3 角速度の抽出

第2章で提案した推定アルゴリズムの前処理として，画像の時系列から剛体の運動パラメータを抽出し角速度の時系列を得る必要がある．画像から剛体の運動パラメータを推定するには様々な方法があるが，本論文では，それには立ち入らず，前処理は 1 つの方法で代表させるだけにとどめる．ここでは，単眼の透視投影で得られた剛体上の特徴点の画像 2 枚から剛体の運動を推定する問題設定で，Weng らの提案する手法 [34] を用いる．処理の詳細は**附章A**で説明する．

実際の処理では，物体を撮影した画像を処理して撮像面上の特徴点の座標を求める．本シミュレーションでは，その代わりに，まず，オイラーの運動方程式をルンゲ-クッタ法で数値的に解いて各時刻の剛体の姿勢を決め，あらかじめ物体座標系に関して与えられた特徴点のカメラ座標系に対関する位置を計算し，それを撮像面に投影したものを使う．さらに，画像をデジタル化する際の解像度を考慮して画像座標を量子化する．

シミュレーションで用いた剛体とカメラの配置を **Fig. 3.5**に示す．剛体は中心が重心と一致している球形で，物体の形状による運動パラメータの抽出性能の差の問題とは分離して調べるために，物体の質量分布が変わっても，敢えて形状は一定のままとする．

物体の表面には一様な乱雑さで特徴点が分布しており，簡単のために，裏側の点も見えているとする．特徴点の撮像面への投影は，ピンホールカメラモデルを用いて計算する．画像は，設定された解像度で$\Delta t = 0.6$ [sec] 間隔で 360 [sec] 間撮影する．2 枚の画像間で特徴点の対応は全て取れると仮定して，シミュレーションの中ではこれは陽に与える．隣接する画像間の運動パラメータを算出し，さらに式 (2.4) で求めた 600 個の$\boldsymbol{\omega}_i$を蓄える．シミュレーション条件をまとめたものを **Table 3.1**に示す．

処理の例として，前節で取り上げた運動を再び用いる．ただし，この場合は物体表面上の特徴点は 10 個で，縦横の解像度は 1024 とする．また，角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$のカメラ座

Table 3.1 Condition of simulation

solving method		Runge-Kutta	
interval of RK method		0.01	[sec]
correspondence of feature points		given	
occlusion		none	
projection model		perspective	
number of camera		1	
focal length	f	8	[mm]
size of image plane	w	10	[mm]
distance of object	d	900	[mm]
diameter of object	D	900	[mm]
resolution		256, 512, 1024	[pixel]
number of feature points		10, 20, 40	
sampling interval	Δt	0.6	[sec]
observation period		360	[sec]
threshold for major spector 1	Θ_{abs}	0.333	
threshold for major spector 2	Θ_{near}	2	
threshold for single-axial model	Θ_{sin}	2.0	
limit of period number	N_p	2.0	

標系に対する方向余弦は,

$$\frac{{}^{C}\boldsymbol{L}}{|{}^{C}\boldsymbol{L}|} = [0.250, -0.433, 0.866]^T$$

である．以上の条件で撮像した各 2 画像間での特徴点の移動の様子 (画像 25 枚分) を **Fig. 3.6** に示す．図では画像間で対応する特徴点を線分で結んで示している．

この特徴点画像の時系列から抽出された角速度ベクトル $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ の最初の 100 秒間を **Fig. 3.7** に示す．このベクトルはカメラ座標系に関して表現されている．図中，マークが抽出された値，曲線が真値である．この図を見ると，カメラ座標系で観測される角速度は，いくつかの周波数成分が混合しており，純粋に周期的ではないことがわかる．

次に，角速度ベクトルの大きさの 2 乗の時系列 $\{|\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ を **Fig. 3.8**に示す．点が推定値，曲線が真値を示している．この量は式 (2.28) に示すように純粋に周期的であり，波形から特徴を抽出するには適している．ただし，前処理の誤差の影響を受けやすいことがわかる．そこで，**附章D**で述べるように，フーリエ変換と非線形最小二乗法でこれを処理する．360 秒間分 600 個のデータに対して，フーリエ変換で処理して得られた周波数領域のスペクトルの分布を **Fig. 3.9**に示す．この結果，$\kappa = 31$ 付近を主スペクトルと判断し，それを初期値として非線形最小二乗法を用いて波形のあてはめを行った結果を **Fig. 3.10**を示す．

一方，不変平面上のハーポルホード曲線の真値の 100 秒間分を **Fig. 3.11**に示す．また，抽出された角速度ベクトルから得られた不変平面上の角速度ベクトルの軌跡を **Fig. 3.12** に示す．これを極座標を用いて動径ρ_iと角度χ_iで示す時，角度の時間的な変化を **Fig. 3.13** に示す．

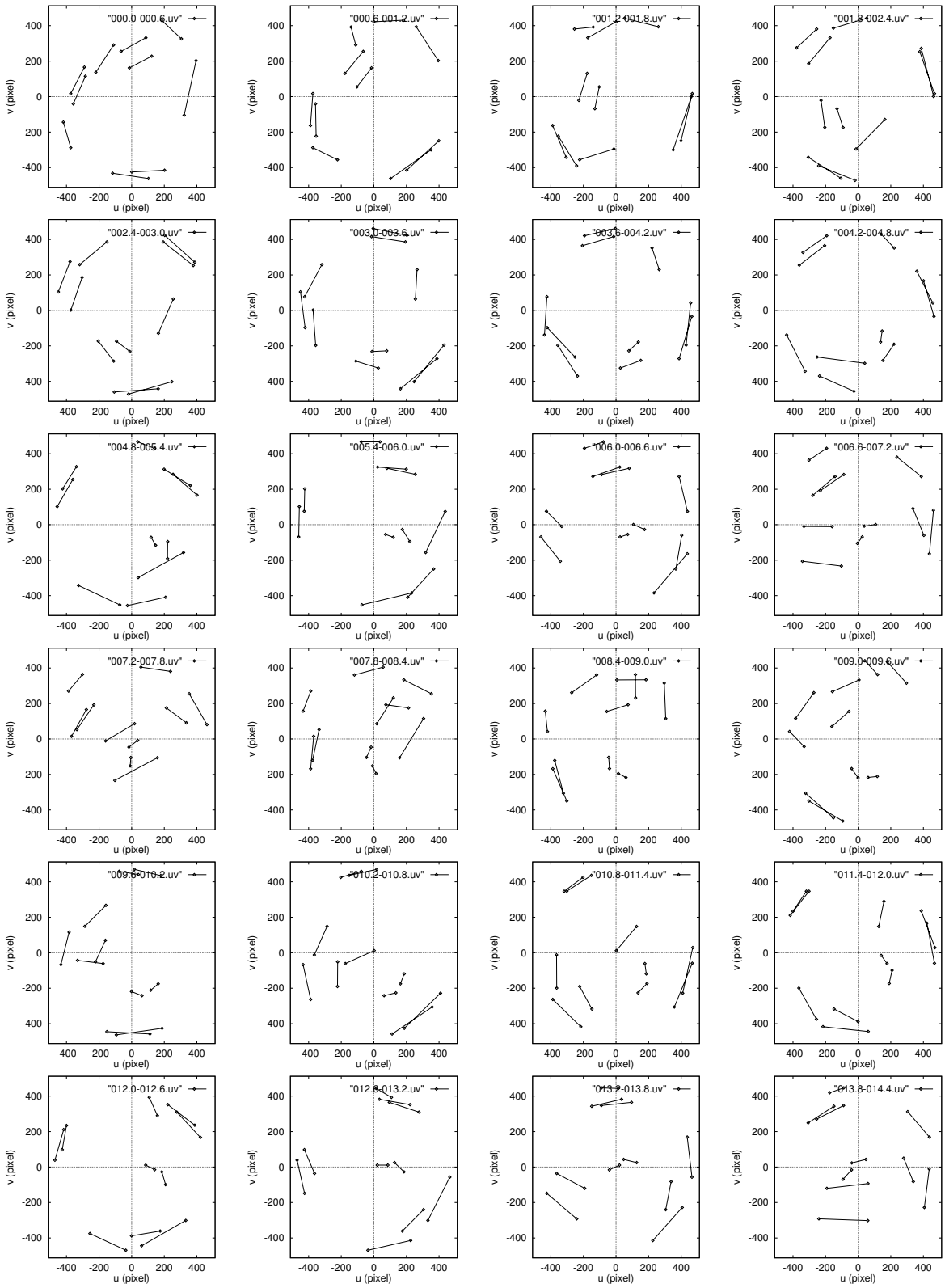


Fig. 3.6 Example of image of feature points

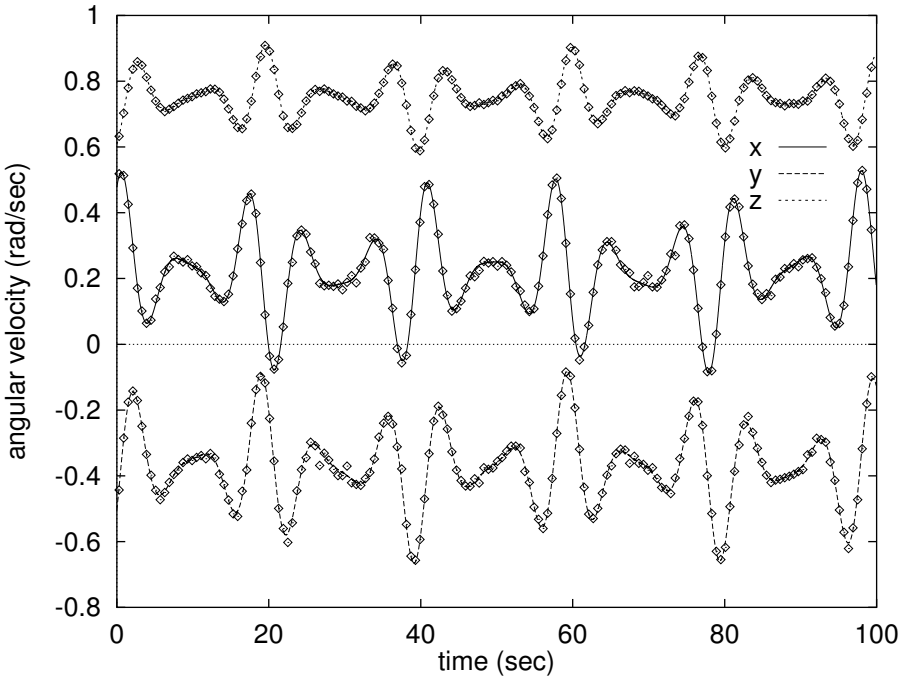


Fig. 3.7 Example of extracted angular velocity

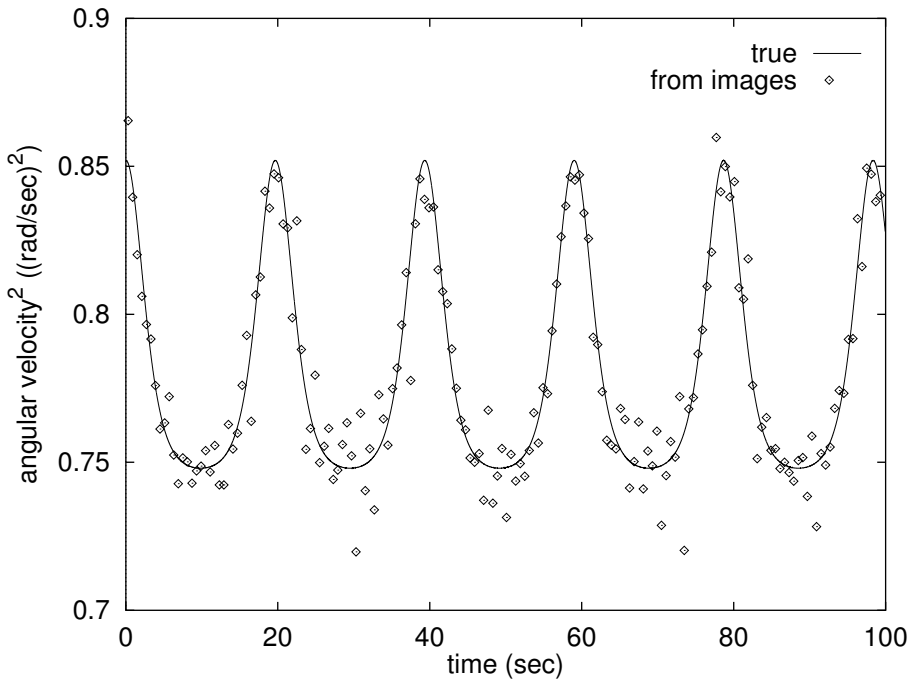


Fig. 3.8 Time sequence of squared magnitude of angular velocity vectors

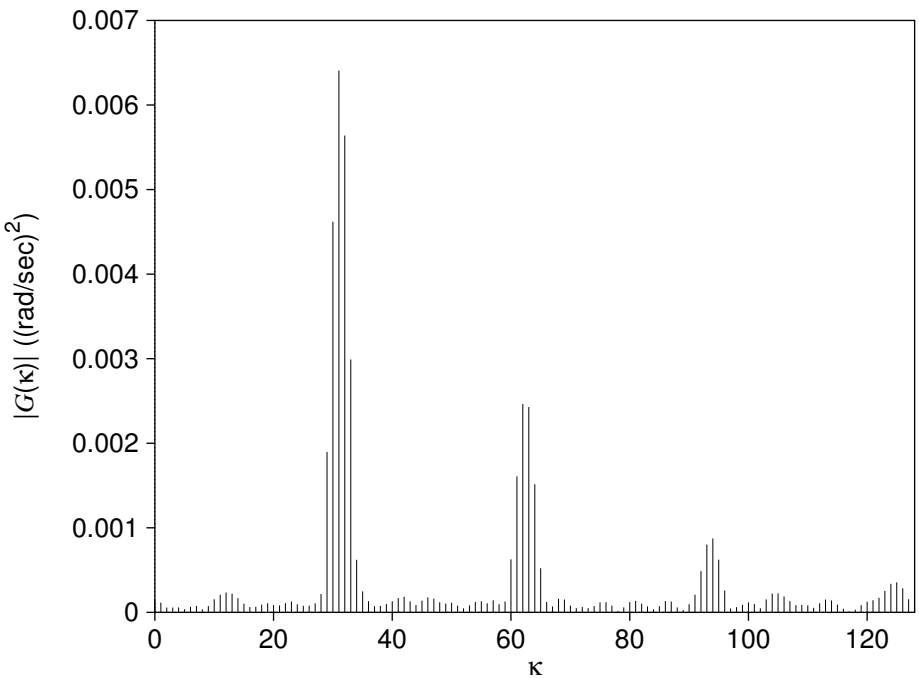


Fig. 3.9 Spector distribution of the example

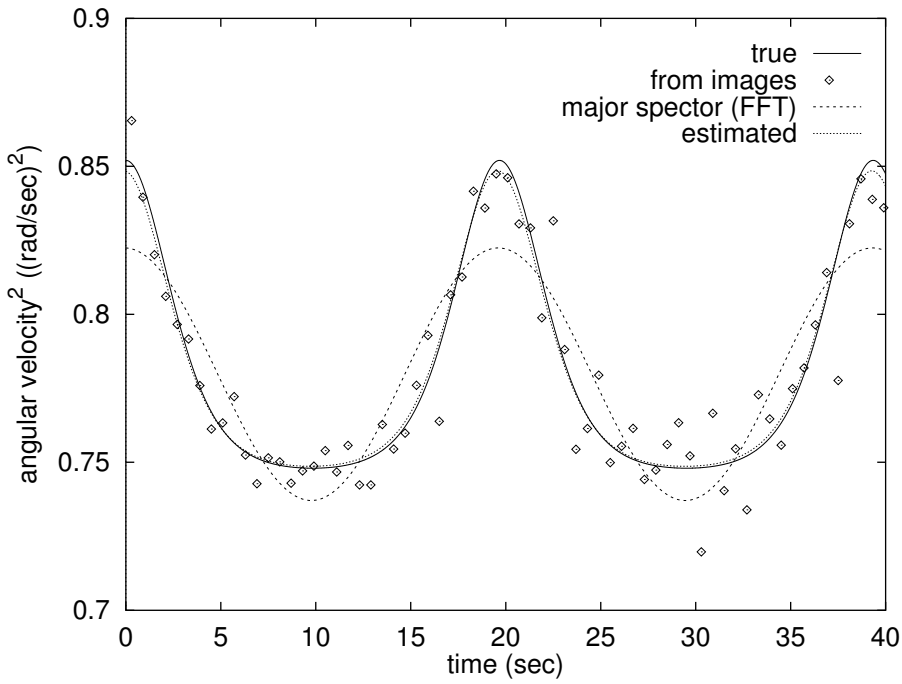


Fig. 3.10 Result of the non-linear least square fitting

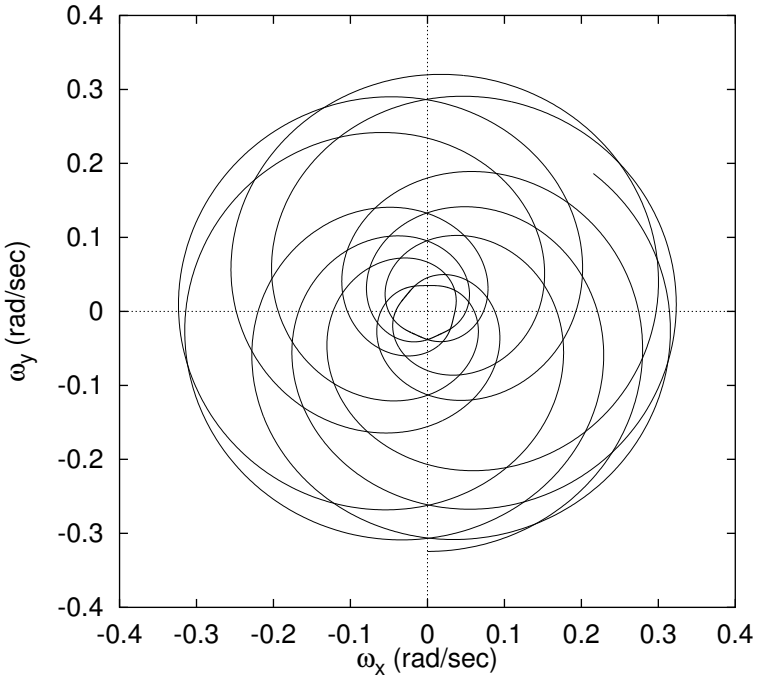


Fig. 3.11 Theoretical herpolhode curve

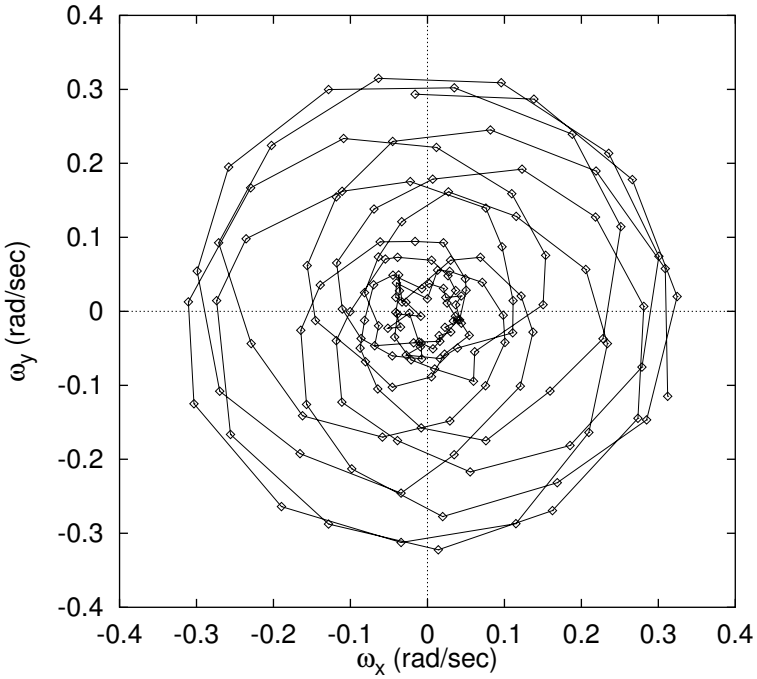


Fig. 3.12 Herpolhode for extracted angular velocity

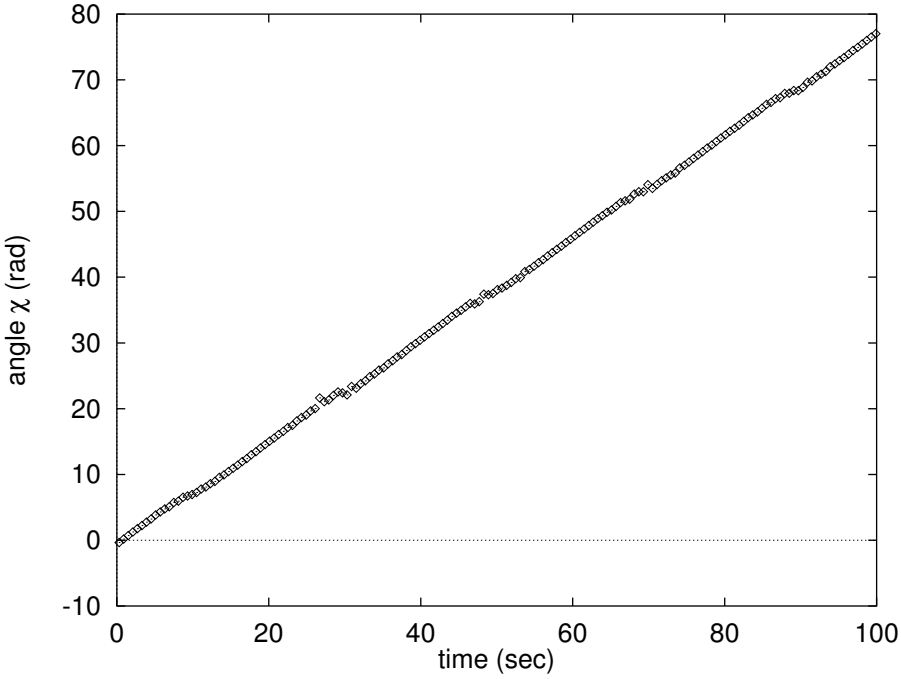


Fig. 3.13 Time sequence of angle χ of the herpolhode

3.4 運動の種類の表現

様々な運動を表現するために，剛体の質量分布および角運動量を関係付ける 3 つのパラメータを導入する．推定においては，角運動量の大きさによって座標軸のとり方切替えていたが ($J_x > J_y > J_z$ か $J_x < J_y < J_z$)，ここで，常に，主慣性モーメントの大きさの順が $I_x > I_y > I_z$となるように，座標系を与える．

(i) 等方度 e

対称の質量分布の等方性を表現するパラメータとして，最小と最大の主慣性モーメントの比をとる．

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_z}{I_x} \qquad (0 \leq e \leq 1) \tag{3.2}$$

e が 1 に近いほど，等方性が高い．

(ii) 対称度 s

質量分布の対称性を表現するパラメータとして，中間の主慣性モーメントの相対的な大きさをとる．

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2I_y - I_x - I_z}{I_x - I_z} \qquad (-1 \leq s \leq +1) \tag{3.3}$$

これは，$I_y \in [I_z, I_x]$ から $s \in [-1, +1]$ への線形変換である．$|s|$ が 1 に近いほど，剛体の対称性が大きい．

慣性モーメントの定義

$$I_x \stackrel{\text{def}}{=} \int (y^2 + z^2)\, d\rho \qquad I_y \stackrel{\text{def}}{=} \int (z^2 + x^2)\, d\rho \qquad I_z \stackrel{\text{def}}{=} \int (x^2 + y^2)\, d\rho \tag{3.4}$$

によれば，

$$I_y + I_z - I_x = \int x^2 d\rho \geq 0 \tag{3.5}$$

であるから，慣性モーメントの間には

$$I_y + I_z \geq I_x \tag{3.6}$$

という関係があることがわかる．等号が成立するのは，薄板の定理が適用される場合に相当する．上の e と s を使ってこの不等式を表すと，

$$s \geq 3 + \frac{2}{e-1} \tag{3.7}$$

または，

$$e \geq 1 + \frac{2}{s-3} \tag{3.8}$$

となる．等方度 e と対称度 s によって，慣性楕円体の形状が変化する様子と，この不等式が表す領域を **Fig. 3.14**に示す．

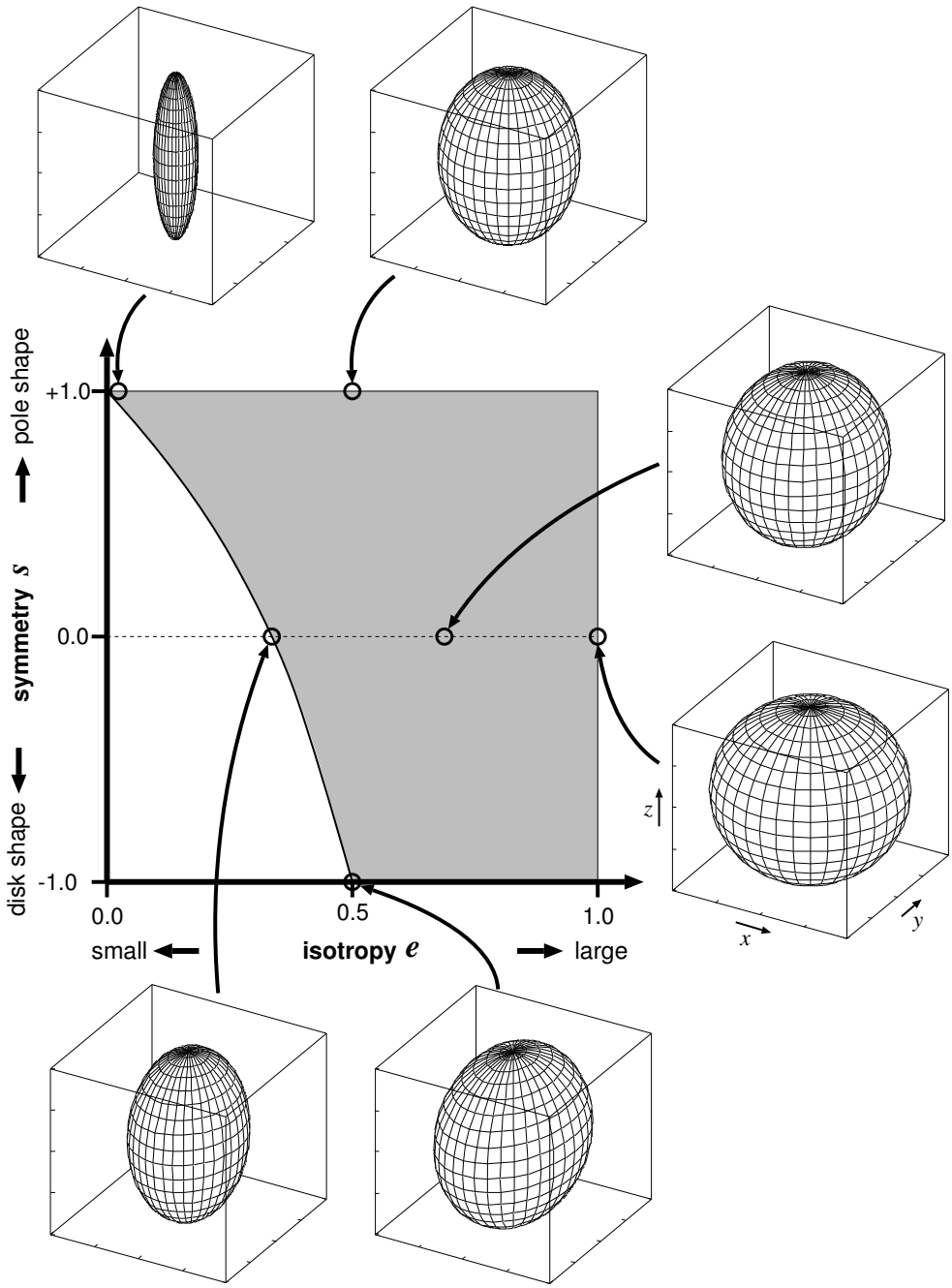


Fig. 3.14 Variation of inertial ellipsoid

(iii) 角運動量の相対値 s_α

角運動量ベクトルの大きさの 2 乗と運動エネルギの比 $|\boldsymbol{L}|^2/(2E)$ は，常に $[I_z, I_x]$ の範囲に存在する．そこで，角運動量の相対値を表現するパラメータとして，以下の s_αを定義する．

$$\begin{aligned} s_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\,|\boldsymbol{L}|^2/(2E) - I_x - I_z}{I_x - I_z} \\ &= \frac{2\alpha - J_x - J_z}{|J_x - J_z|} \qquad (-1 \le s_\alpha \le +1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

これは，$|\boldsymbol{L}|^2/(2E) \in [I_z, I_x]$ から $s_\alpha \in [-1, +1]$ への線形変換である．運動方程式の幾何学的な解釈によると，s_αが大きいとポアンソーの楕円体と不変平面との距離が短い．$|s_\alpha| = 1$ の場合は，質量分布が非対称でも，運動方程式の解は単軸回転となる．

パラメータ e, s, s_αと他の量との関係

以上で定義したパラメータ e, s, s_αを用いて，I_z, I_y, αを表現すると次のようになる．

$$I_z = eI_x \tag{3.10}$$

$$I_y = \frac{1}{2}\{1 + e + s(1-e)\}I_x \tag{3.11}$$

$$|\boldsymbol{L}|^2 = \{1 + e + s_\alpha(1-e)\}I_x E \tag{3.12}$$

また，式 (2.11) によれば，オイラーの運動方程式の解に含まれる楕円関数の母数 kは，上の s と s_αだけの関数として書くことができる．

$$k^2 = \begin{cases} \dfrac{(1-s)(1+s_\alpha)}{(1+s)(1-s_\alpha)} & (|\boldsymbol{L}|^2/(2E) < I_y) \\[2ex] \dfrac{(1+s)(1-s_\alpha)}{(1-s)(1+s_\alpha)} & (|\boldsymbol{L}|^2/(2E) > I_y) \end{cases} \tag{3.13}$$

角速度の絶対的な大きさ

上の 3 つのパラメータだけでは，相対的な運動の割合しか決まらない．そこで，ここでは，画像から運動パラメータを推定する際の条件をそろえるために，角速度の大きさの最大値が等しくなるように決める．式 (2.29) の角速度ベクトルの大きさの 2 乗の最大値βは，パラメータ e と s_αを使って次のように書き直すことができる．

$$\beta = \frac{1 + e - s_\alpha(1-e)}{2e}\,\frac{2E}{I_x} \tag{3.14}$$

したがって，運動エネルギ Eとβ, e, s, s_αが与えられれば，主慣性モーメント I_x, I_y, I_z, と角運動量ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{L}|$ が定まる．

3.5 推定性能の評価

運動推定の有効性を評価するために以下のような評価指標を用いる．

(i) 動力学パラメータの相対誤差

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\left(\frac{|J'_x - J_x|}{J_x} + \frac{\left|J'_y - J_y\right|}{J_y} + \frac{|J'_z - J_z|}{J_z} + \frac{|\alpha' - \alpha|}{\alpha}\right) \tag{3.15}$$

ここで，J'_x, J'_y, J'_z, α'はパラメータの推定値である．ただし，軸対称モデルを用いる場合には，$J'_x = J'_y$であるから，

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{|J'_x - J_{xy}|}{J_{xy}} + \frac{|J'_z - J_z|}{J_z} + \frac{|\alpha' - \alpha|}{\alpha}\right) \tag{3.16}$$

を用いる．ここで，$J_{xy} = (J_x + J_y)/2$ である．また，非周期モデルと単軸回転モデルを用いる場合には，αしか推定できないので，

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\alpha' - \alpha|}{\alpha} \tag{3.17}$$

とする．

(ii) 姿勢の予測誤差の最大値

推定された剛体の運動の特性に基づいて，観測の後，h 秒間の姿勢の予測を行う．非対称モデルの場合は，物体の主慣性軸は推定できるが，座標系の方向は任意性が残る (4 通り)．また，それ以外のモデルでは，主慣性軸を一意に定めることもできない．したがって，シミュレーションモデルの物体座標系と，推定された物体座標系は一致するとは限らない．しかし，未来の姿勢を予測するためには，主慣性軸の方向を知る必要はなく，適当に定めた物体座標系の時間的な変化を記述できれば十分である．そこで，予測開始時刻 t_pから任意の時刻 t への姿勢の相対的な変化をカメラ座標系で表現し，それをシミュレーションモデルと推定モデルとの間で比較する．

座標系間の関係を **Fig. 3.15** に示す．時刻 t における，物体座標系のカメラ座標系に対する姿勢は，

$${}^{C}R_B(t) = {}^{C}R_R\ {}^{R}R_B(t) \tag{3.18}$$

である．時刻 t_pと t の間の姿勢の変化をカメラ座標系で表現する回転変換行列を$\Delta R(t)$ とすると，

$${}^{C}R_B(t) = \Delta R(t)\ {}^{C}R_B(t_p) \tag{3.19}$$

と書ける．したがって

$$\begin{aligned} \Delta R(t) &= {}^{C}R_B(t)({}^{C}R_B(t_p))^T \\ &= {}^{C}R_R\ {}^{R}R_B(t)\ ({}^{R}R_B(t_p))^T\ ({}^{C}R_R)^T \end{aligned} \tag{3.20}$$

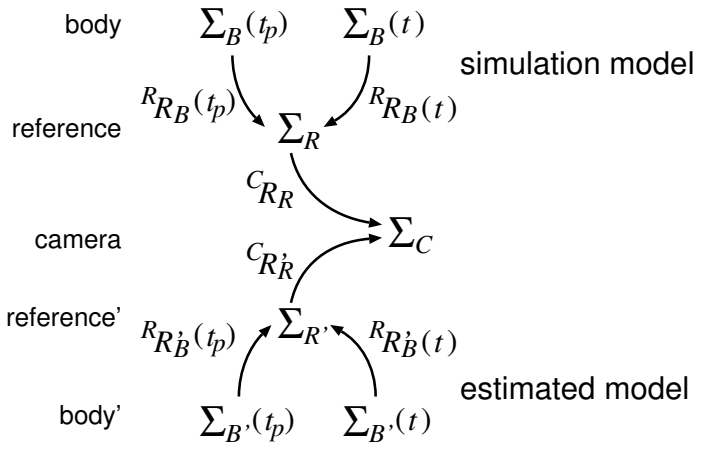


Fig. 3.15 Relationship among the coordinate frames

となる．同様にして，予測値を “′” 付きで示すと，

$$\Delta R'(t) \;=\; {}^C R'_R \; {}^R R'_B(t) \; ({}^R R'_B(t_p))^T \; ({}^C R'_R)^T \tag{3.21}$$

である．時刻 t_p-t 間の相対変化の誤差を回転変換行列 $R_{err}(t)$ で表すことにする．

$$R_{err}(t) = \Delta R'(t) \; (\Delta R(t))^T \tag{3.22}$$

この回転行列 R_{err} と等価な 1 軸回転行列を $R(\boldsymbol{\nu}, \vartheta)$ とする．予測を行う時間区間 $[t_p, t_p + h]$ における回転量ϑの最大値を評価値として用いる．

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in [t_p, t_p + h]} |\vartheta(t)| \tag{3.23}$$

ここでは，$h = 30$ [sec] とする．

(iii) J_z軸の予測誤差の最大値

第2章で述べた方法で推定を行うと，物体座標系の J_zを定めた軸に関する角速度ベクトルの成分 (方向余弦) は常に正である．それに対して，他の 2 つの軸に関する成分は正負を繰り返している．したがって，物体を捕捉するために物体上の 1 点を追尾して把持することを考えると，把持点は J_zの軸の上にとることが望ましい．J_zの軸は，オイラー角のϕとθだけから決まるので，ψの推定が失敗してもその影響を受けない．そこで，J_zの軸の予測値を評価として用いる．

物体座標系からカメラ座標系への回転変換行列を

$${}^C R_B = [{}^C \boldsymbol{X}_B \; {}^C \boldsymbol{Y}_B \; {}^C \boldsymbol{Z}_B] \tag{3.24}$$

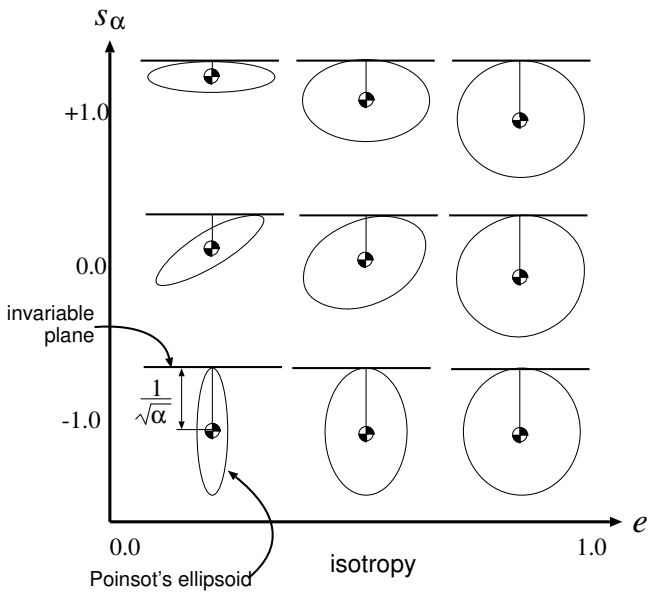


Fig. 3.16 Geometrical interpretation of Euler's equation for various e and s_α

と書くことにすると，予測開始時刻 t_pにおける J_z軸の推定方向はカメラ座標系で${}^C\boldsymbol{Z}'_B(t_p)$である．物体上のこの方向が，時刻 t においてカメラ座標系に対して向く方向は，${}^C\boldsymbol{Z}'_B(t)$と推定されるが，実際には，$\Delta R(t)\ {}^C\boldsymbol{Z}'_B(t_p)$ の方向を向いている．したがって，予測時間中にこの 2 つの方向がなす角度の最大値を評価値とする．

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t\in[t_p,t_p+h]} \cos^{-1}(({}^C\boldsymbol{Z}'_B(t))^T\ \Delta R(t)\ {}^C\boldsymbol{Z}'_B(t_p)) \tag{3.25}$$

3.6 結果と検討

3.4節で定義したパラメータで表現する様々な運動に対して，画像処理の条件などを変えて，運動の推定と予測のアルゴリズムの性能を評価し，検討を行う．

3.6.1 条件

運動を表現する 3 つのパラメータのうち，対称度 s に関しては，最も対称性が乏しい場合が最も厳しい条件であると考えて，$s = 0.0$ に固定する．この場合，式 (3.8) より，$e \geq 1/3$ である．e と s_αを可能な全範囲に変化させ，**3.5節**で定義した評価値の分布を調べる．e と s_α を変化させた時のオイラー運動方程式の解の幾何学的解釈を模式的に表したものを**Fig. 3.16**に示す．

以下の全てのシミュレーションでは，角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$の方向は撮像面に対して垂直とする．また，4 つの推定モデルのうち，非周期モデルは使わなかった．運動の予測は，

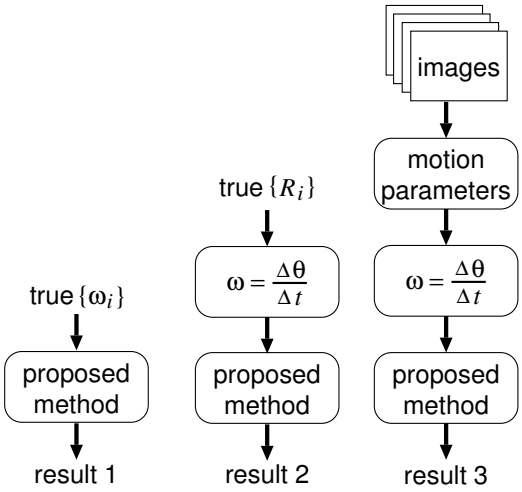


Fig. 3.17 Condition of simulations

360[sec] 間の観測の直後に $h = 30$[sec] 間行う．

この後の節では，次のようなシミュレーションの結果を示し，それに対して検討を行う．

- 前処理の影響 (角速度と運動パラメータの真値からの推定との比較)
- 解像度との関係 (解像度 1024, 512, 256)
- 特徴点の数との関係 (特徴点数 40, 20, 10)
- 運動の速さとの関係 (角速度の 2 乗の最大値$\beta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6$ [(rad/sec)^2]

3.6.2 前処理の影響

推定と予測のプログラムの動作を確認し，画像から角速度を得るまでの前処理の影響を調べるために，以下のようなシミュレーションを行う (**Fig. 3.17**参照)．

1. 角速度の真値を離散化した $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$ を用いる．
2. 運動パラメータの真値を離散化したもの $\{R_i\}$ から式 (2.4) で算出した角速度を用いる．
3. 量子化された特徴点画像から得られた運動パラメータから式 (2.4) で算出した角速度を用いる．画像の縦と横の解像度は 1024，特徴点の数は 20 個，角速度の 2 乗の最大値は$\beta = 0.8$[(rad/sec)^2] とする．

それぞれの条件で，等方度 e を 0.35 から 1.0 まで 0.05 刻みで，角運動量の相対値 s_α を -1.0 から$+1.0$ まで 0.1 刻みで変化させ，計 294 種類の運動に対して推定を行う．

Table 3.2, **Table 3.3**, **Table 3.4**に，各運動に対して用いたモデルの種類を示す．**Fig. 3.18**, **Fig. 3.19**, **Fig. 3.20**に，e-s_αに対する動力学パラメータの相対推定誤差 rの分布を示す．**Fig. 3.21**, **Fig. 3.22**, **Fig. 3.23**に，e-s_αに対する姿勢の予測誤差の最大値Θを示す．**Fig. 3.24**, **Fig. 3.25**, **Fig. 3.26**に，e-s_αに対する J_z軸の方向の予測誤差の最大値Φを示す．

最初に，動力学パラメータの相対推定誤差 rの分布を見る．**Fig. 3.18**によると，角速度の真値から推定した場合の誤差は大変小さいことから，推定のプログラムが基本的に正しく動作していることがわかる．

Fig. 3.20によると，特徴点画像からの推定した場合の誤差は，この条件ではどのような運動に対しても数%以内に収まっている．

誤差が大きいのは，e が小さく s_αが 0 に近い部分である．この傾向は，運動パラメータの真値から推定した **Fig. 3.19**でも同じであることから，これは式 (2.4) の差分近似が原因であることがわかる．このシミュレーションと同じように $s = 0$, $\beta = 0.8[(\mathrm{rad/sec})^2]$ に固定して，e と s_αを変化させた場合の $|\boldsymbol{\omega}|^2$の変動の周期 Tの理論値の分布を **Fig. 3.27**に示す．e が小さくなると周期が小さくなる．さらに，式 (3.13) によれば，s_αが s に近い部分では楕円関数の母数 k が 1 に近く，本章の最初に紹介した “ペンチの不思議な回転運動” と同じような緩急の激しい運動となり，差分近似が不正確になる．グラフを見ると，s_αが 0 に近付くほど誤差が際限なく大きくなる傾向があるが，実際には，母数 kが 1 に近付くと周期 Tが大きくなるので，ある程度のところで，“非対称モデル” から “非周期モデル” や “軸対称モデル” に切替わる．

特徴点画像からの推定と運動パラメータからの推定の違いは e の大きい部分で現れる．**Fig. 3.28**に示した e-s_αに対する $(\beta - \gamma)$ の分布によれば，e が大きいこの部分では，$|\boldsymbol{\omega}|^2$ の変動が非常に小さい．したがって，変動が量子化等に起因するノイズに埋もれてしまって，波形の特徴が取り出せなくなる．この一例として，$e = 0.9$, $s_\alpha = -0.8$ の場合の $|\boldsymbol{\omega}|^2$ の時間的な変化を **Fig. 3.29**に，それをフーリエ変換したスペクトル分布を **Fig. 3.30**に示す (フーリエ変換の定義は**附章D**参照)．実際には角速度の大きさは変化しているが，画像から得られた値の主スペクトルが全く特定できないことがわかる．

Table 3.2と **Table 3.3**を見ると，角速度$\boldsymbol{\omega}$や運動パラメータ Rの真値からの推定では，実際に単軸回転をしている $s = -1, 0, +1$ と $e = 1$ 以外のほとんどの運動で，“非対称モデル” が使われている．一方，**Table 3.4**の特徴点画像からの推定の場合を見ると，実際には $|\boldsymbol{\omega}|^2$が変動している非対称の剛体運動でも，“単軸回転モデル” や “軸対称モデル” が適用されている．これらを用いた場合には，動力学パラメータの値や慣性主軸の方向は完全には求まらない．

次に，姿勢の予測誤差の最大値Θの分布について見る．予測の場合にも，角速度の真値の離散値を用いれば誤差は大変小さい (**Fig. 3.21**)．運動パラメータの真値からの予測 (**Fig. 3.22**) や特徴点画像からの予測 (**Fig. 3.23**) では，推定の場合の傾向と同じで，e が小さく s_α が 0 に近い，運動の緩急の激しい部分で誤差が大きい．また，推定の誤差分布に比べて，e が 1 に近い部分での誤差が激しい．つまり，非対称な剛体の運動に，“軸対称モデル” を適用した場合の予測が思わしくない．

さらに，J_z軸の方向の予測誤差の最大値Φの分布について見る．真値からの予測 (**Fig. 3.24** と **Fig. 3.25**) では，分布の傾向や誤差の大きさは，全体の姿勢の予測の場合とほとんど同じである．ところが，特徴点画像からの予測 (**Fig. 3.26**) では，“軸対称モデル” が適用された運動に対して，予測誤差は小さく評価される．つまり，“軸対称モデル” を使っても，J_z軸の予測ならば，まずまずの結果が得られるということである．この評価を用いると，誤差は最大でおよそ 30[deg] 程度に収まっている．この大きさをどう評価すべきかは用途によるので一概には決められないが，マニピュレータで物体を捕捉する場合ならば，手先効果器の工夫で吸収できる範囲ではないかと思われる．

本アルゴリズムの目的は物体の捕捉であるから，物体上の掴みやすい点に対して評価を行うことは重要であると考え，以下の予測の評価には，全体の姿勢誤差Θは省略して，J_z軸に限定した誤差Φを用いることにする．

Table 3.2 Estimation model used for each condition (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$)

s_α	e 0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
+1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
+0.90	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/
0.00	/	/	/	▽	▽	▽	▽	/	/	/	/	/	▽	/
−0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/
−0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.90	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

O: asymmetric model, ▽: axially symmetric model, /: single rotational model

Table 3.3 Estimation model used for each condition (from true $\{R_i\}$)

s_α	e 0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
+1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
+0.90	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
+0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/
0.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
−0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/
−0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−0.90	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/
−1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

O: asymmetric model, ▽: axially symmetric model, /: single rotational model

Table 3.4 Estimation model used for each condition (from images)

s_α	e 0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
+1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
+0.90	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/
+0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
+0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
+0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
+0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
+0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
+0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
+0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
+0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/
0.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
−0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/
−0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/
−0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
−0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
−0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
−0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
−0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
−0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/
−0.90	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/
−1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

O: asymmetric model, ▽: axially symmetric model, /: single rotational model

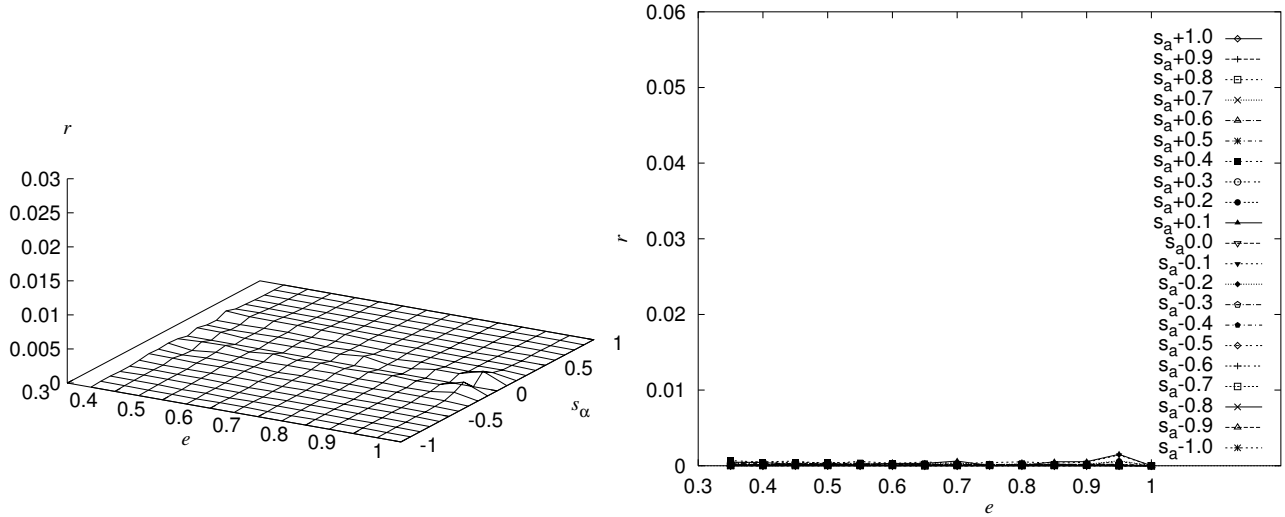


Fig. 3.18 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$)

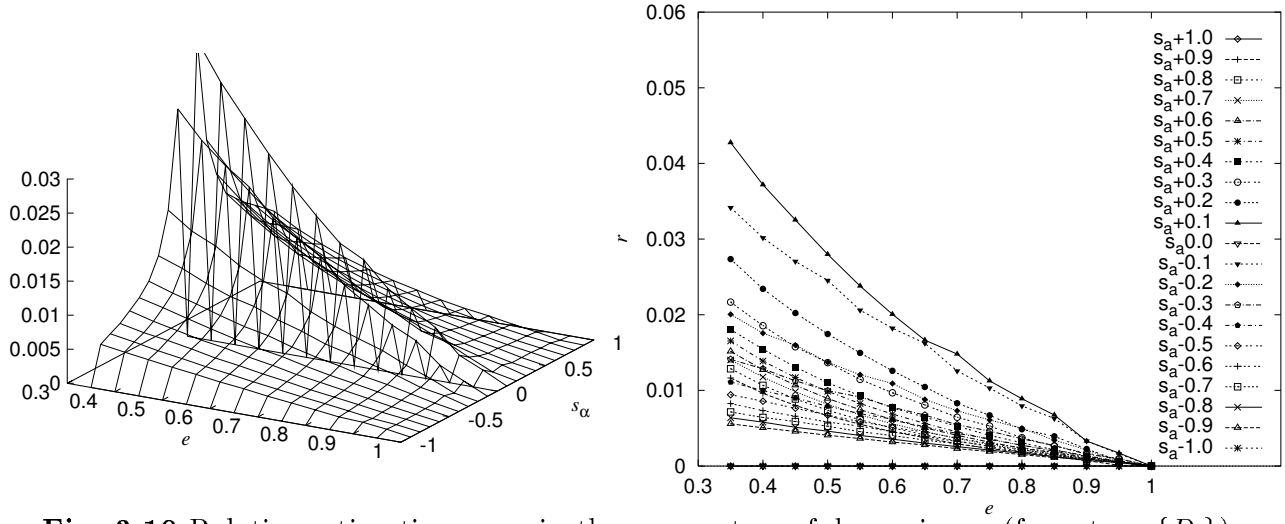


Fig. 3.19 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (from true $\{R_i\}$)

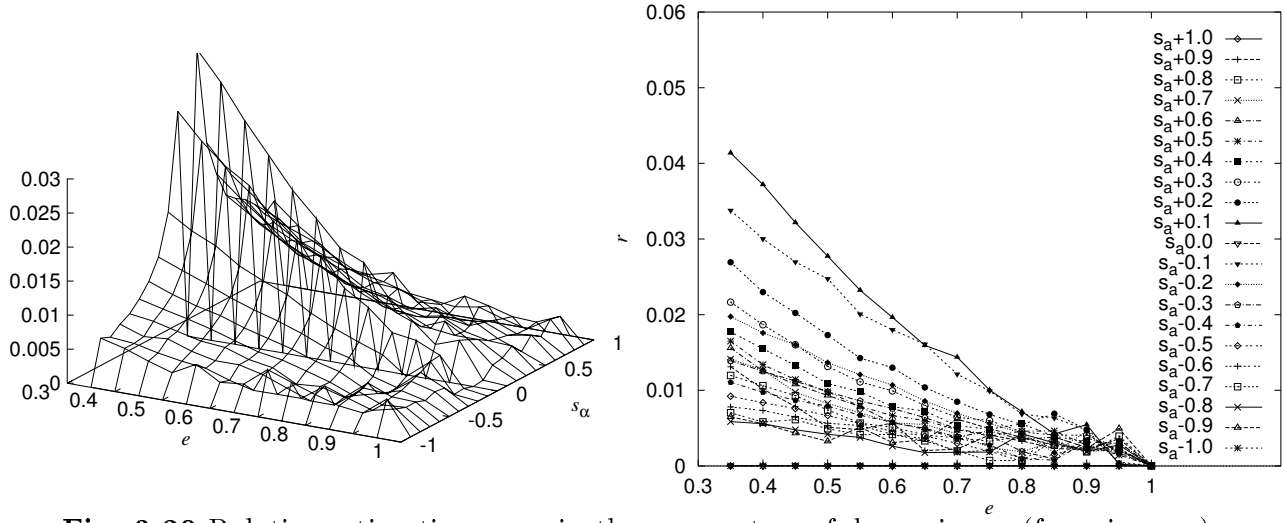


Fig. 3.20 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (from images)

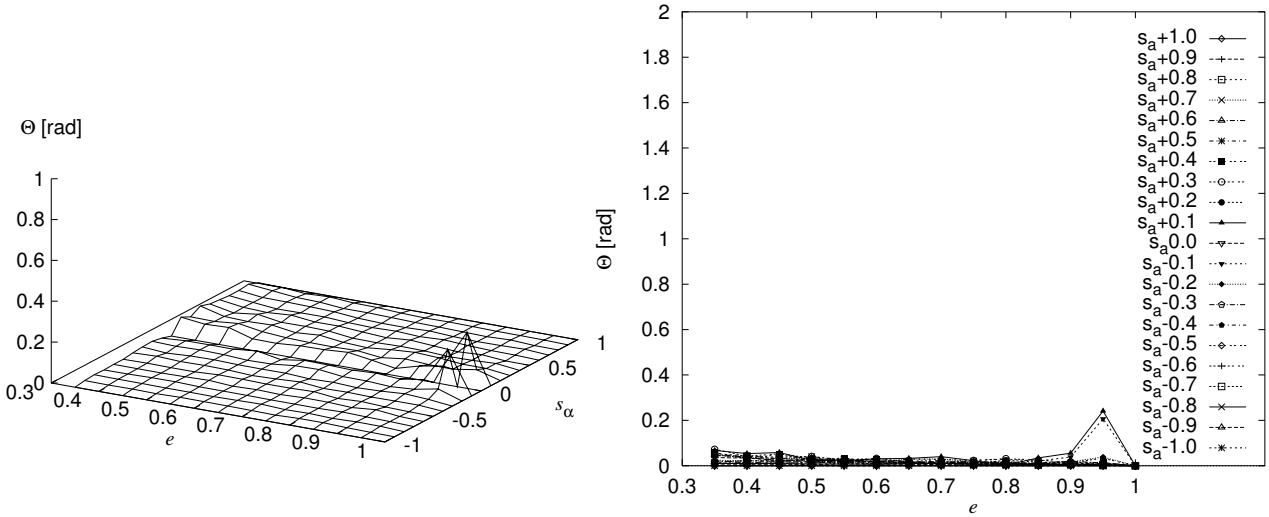


Fig. 3.21 Maximal prediction error in the orientation: Θ (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$)

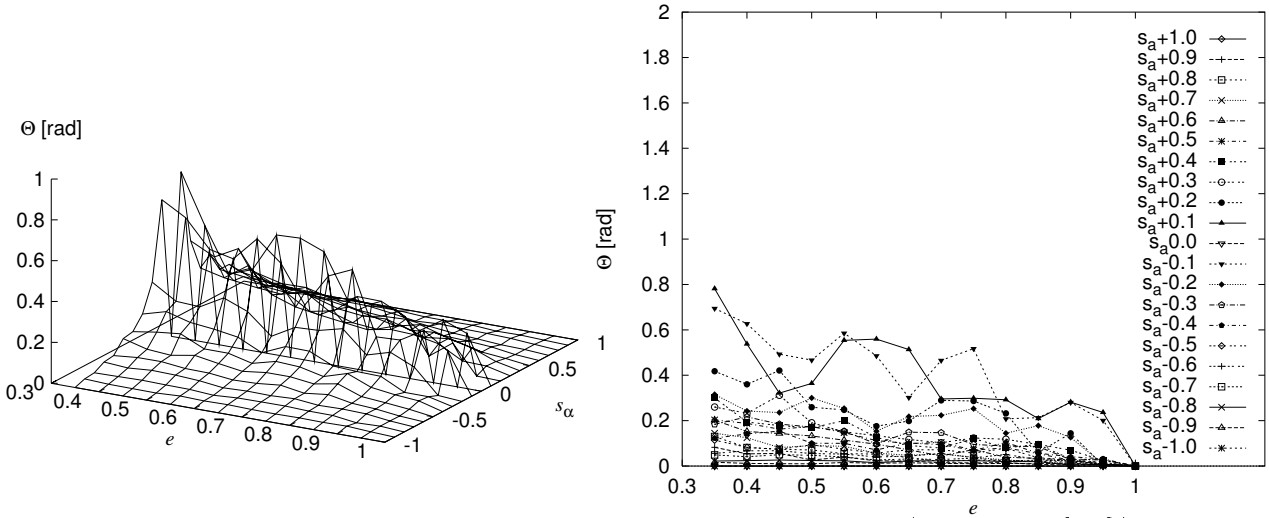


Fig. 3.22 Maximal prediction error in the orientation: Θ (from true $\{R_i\}$)

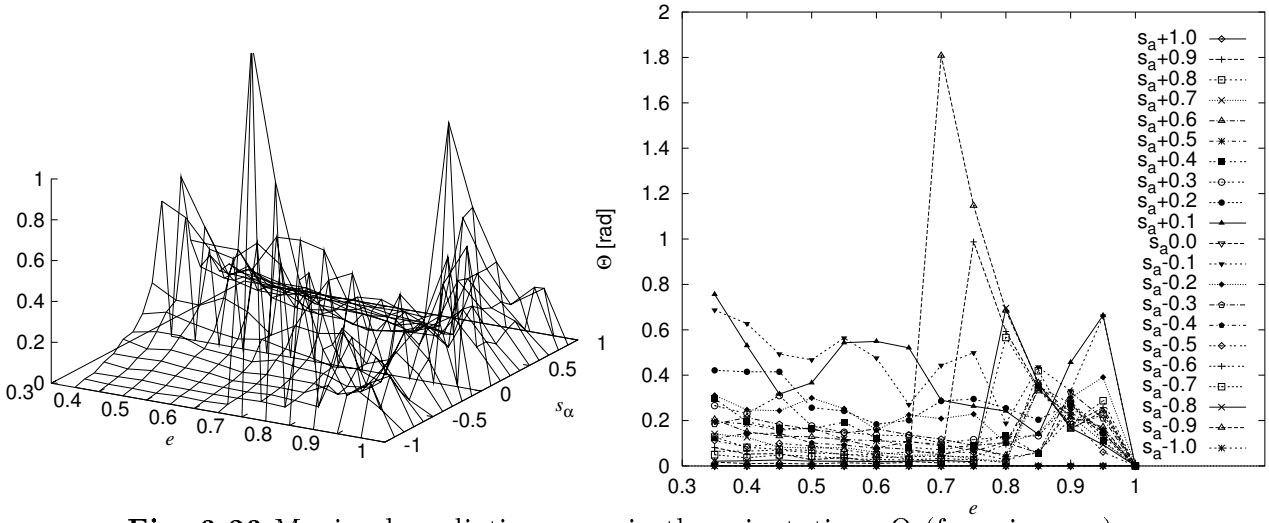


Fig. 3.23 Maximal prediction error in the orientation: Θ (from images)

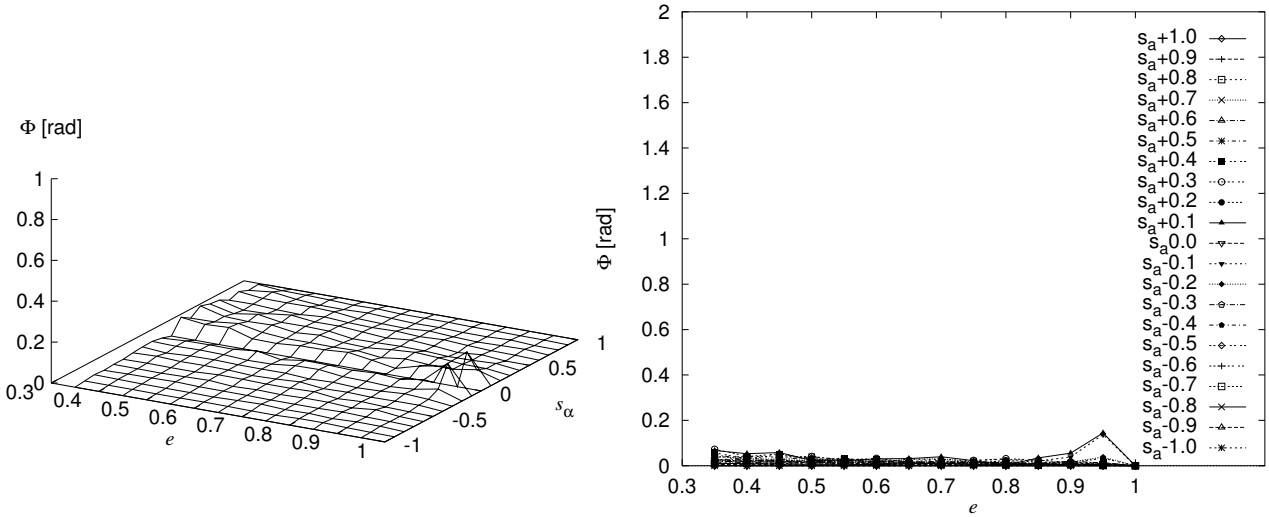


Fig. 3.24 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (from true $\{\boldsymbol{\omega}_i\}$)

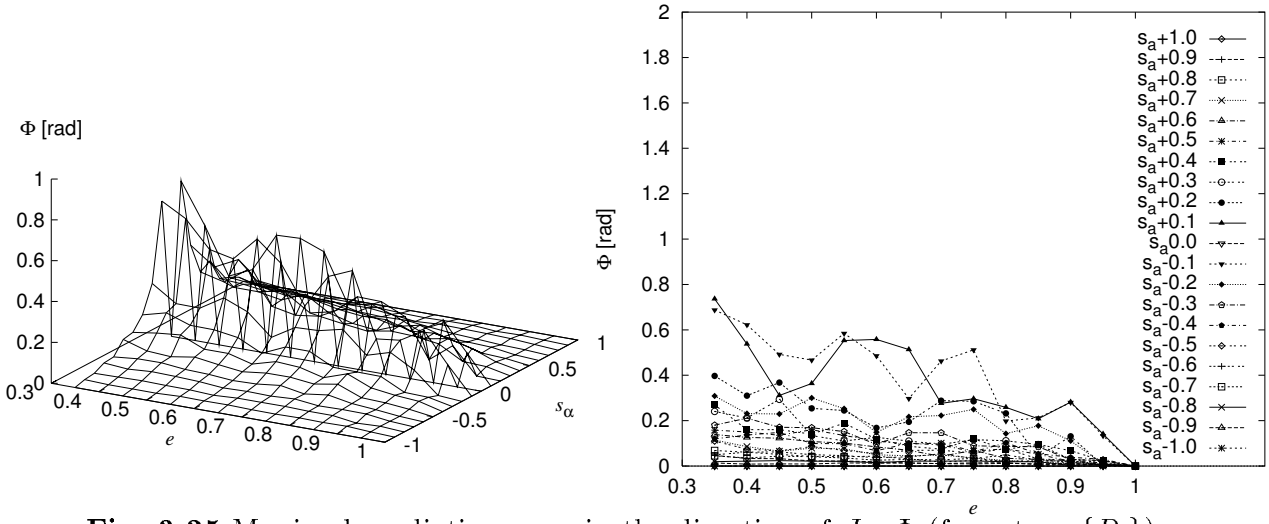


Fig. 3.25 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (from true $\{R_i\}$)

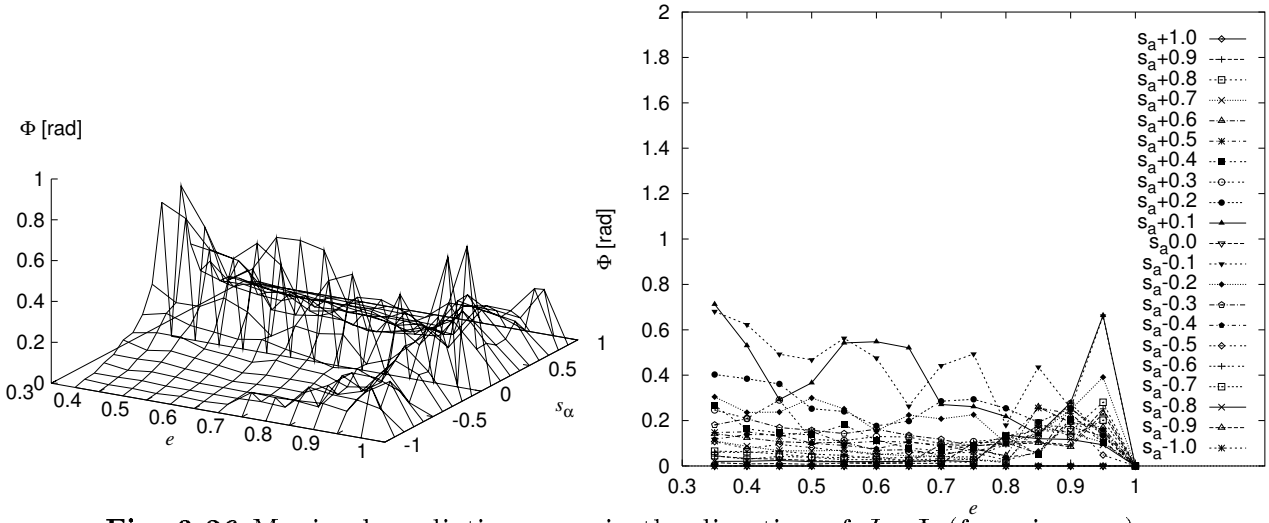


Fig. 3.26 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (from images)

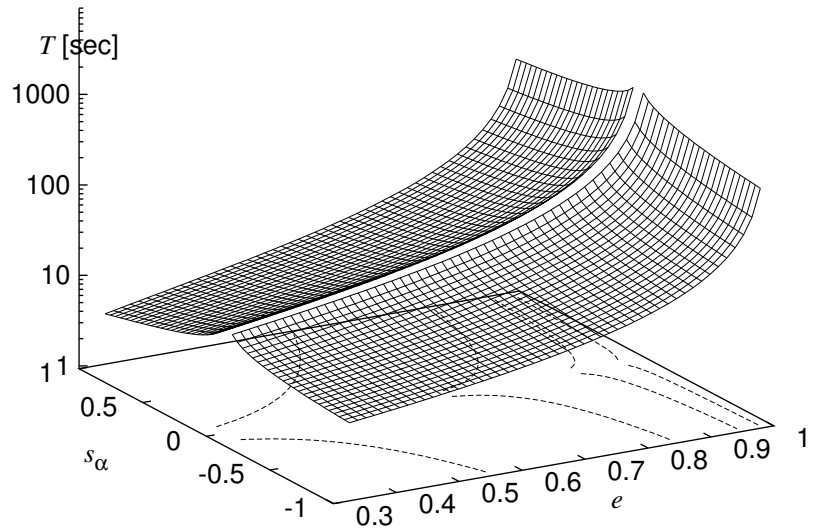


Fig. 3.27 Distribution of period T for e and s_α

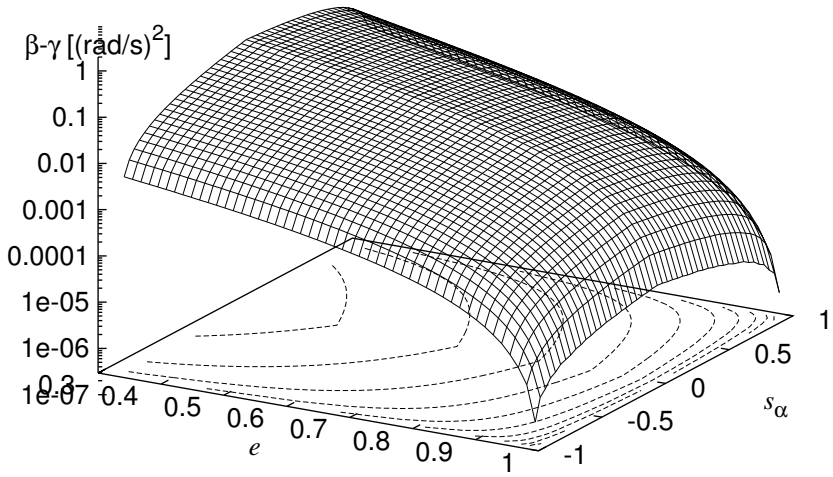


Fig. 3.28 Distribution of amplitude $\beta - \gamma$ for e and s_α

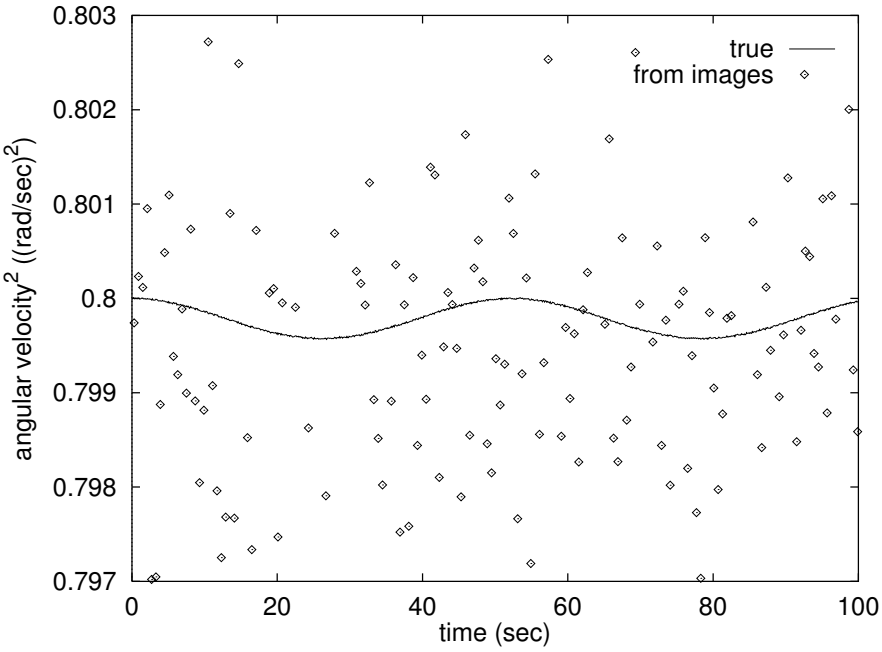


Fig. 3.29 Time sequence of squared magnitude of angular velocity vectors in case that $e = 0.9$ and $s_\alpha = -0.8$

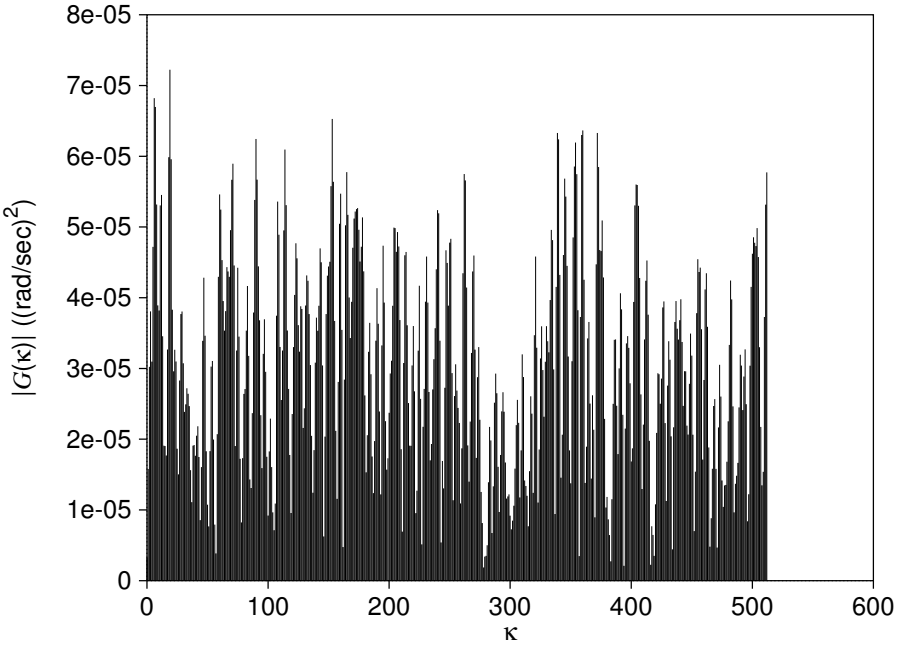


Fig. 3.30 Spector distribution of the example in case that $e = 0.9$ and $s_\alpha = -0.8$

3.6.3 解像度との関係

特徴点画像の取り込みの際の量子化の影響を調べるために，縦と横の解像度を 1024, 512, 256 に変化させてシミュレーションを行う．特徴点の数は 20 個，角速度の 2 乗の最大値は $\beta = 0.8[(\mathrm{rad/sec})^2]$ に固定する．

それぞれの条件で，等方度 e を 0.35 から 1.0 まで 0.05 刻みで，角運動量の相対値 s_α を -1.0 から$+1.0$ まで 0.1 刻みで変化させ，計 294 種類の運動に対して推定を行う．

Table 3.5, **Table 3.6**, **Table 3.7**に，各運動に対して用いたモデルの種類を示す．**Fig. 3.31**, **Fig. 3.32**, **Fig. 3.33**に，e-s_αに対する動力学パラメータの相対推定誤差 rの分布を示す．**Fig. 3.34**, **Fig. 3.35**, **Fig. 3.36**に，e-s_αに対する J_z軸の方向の予測誤差の最大値Φを示す．

Fig. 3.31, **Fig. 3.32**, **Fig. 3.33**の動力学パラメータの相対推定誤差 rの分布を見ると，差分近似に起因する誤差の分布の傾向や大きさは 3 つとも同じだが，解像度が下がると，別の誤差が重畳して，特に，等方度 e が 1 に近い部分でそれが大きい．これは量子化による誤差であり，その大きさはおよそ解像度に反比例している．

Table 3.5, **Table 3.6**, **Table 3.7**によると，解像度が下がるほど，“単軸回転モデル” や “軸対称モデル” の適用される範囲が広がることがわかる．**Fig. 3.34**, **Fig. 3.35**, **Fig. 3.36** を見ると，予測誤差は解像度 512 や 256 ではかなり大きく，これでは実用に耐えないのではないかと思われる．解像度 1024 というのは，通常の画像処理装置のものよりやや高いが，特徴点のサブピクセル処理を行えばその程度の分解能は得ることができる．

Table 3.5 Estimation model used for each condition (resolution 1024)

s_α	e 0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
+1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
+0.90	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/
+0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
+0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
+0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
+0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
+0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
+0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
+0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
+0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/
0.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
−0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/
−0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/
−0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
−0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
−0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/
−0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
−0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/
−0.80	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/
−0.90	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/
−1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

O: asymmetric model, ▽: axially symmetric model, /: single rotational model

Table 3.6 Estimation model used for each condition (resolution 512)

s_α	e 0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
+1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
+0.90	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/
+0.80	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/
+0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/
+0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
+0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
+0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	O	/	/
+0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
+0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
+0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/	/
0.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
−0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	/	/	/
−0.20	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/	/
−0.30	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/	/
−0.40	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
−0.50	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
−0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/
−0.70	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/
−0.80	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/
−0.90	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/
−1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

O: asymmetric model, ▽: axially symmetric model, /: single rotational model

Table 3.7 Estimation model used for each condition (resolution 256)

s_α	e 0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
+1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
+0.90	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/	/	/
+0.80	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/	/
+0.70	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/
+0.60	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/	/	/
+0.50	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	O	/	/	/
+0.40	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/	/
+0.30	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/	/
+0.20	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/	/	/
+0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	/	/	/	/	/
0.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
−0.10	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	/	/	/	/
−0.20	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/	/
−0.30	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/	/
−0.40	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/	/
−0.50	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	/	/	/
−0.60	O	O	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	/	/	/
−0.70	O	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/
−0.80	O	O	O	O	O	▽	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/
−0.90	O	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	/	/	/	/
−1.00	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

O: asymmetric model, ▽: axially symmetric model, /: single rotational model

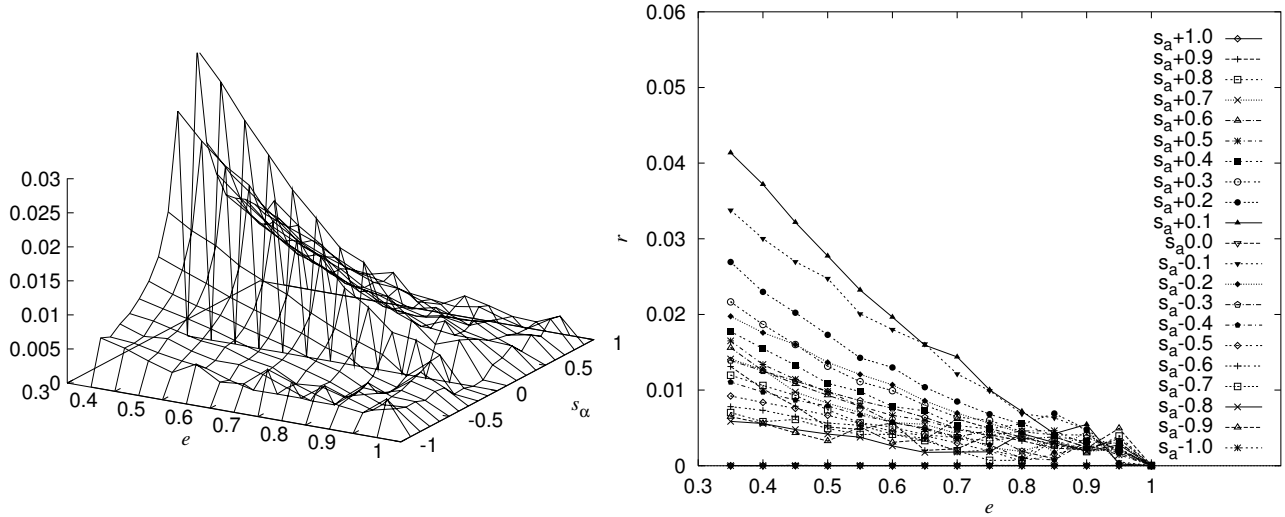


Fig. 3.31 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (resolution: 1024)

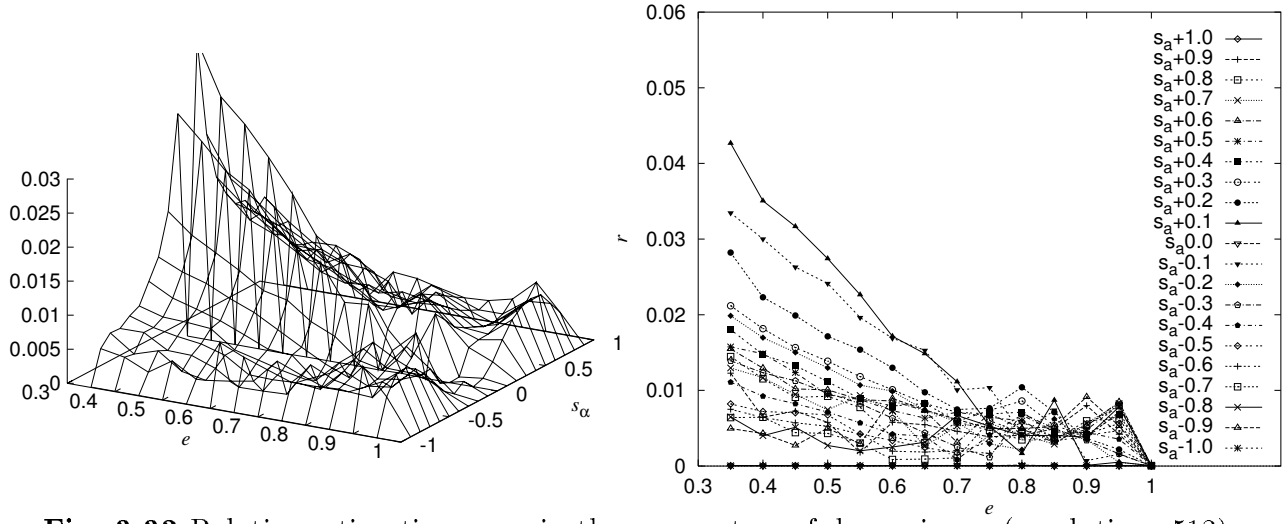


Fig. 3.32 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (resolution: 512)

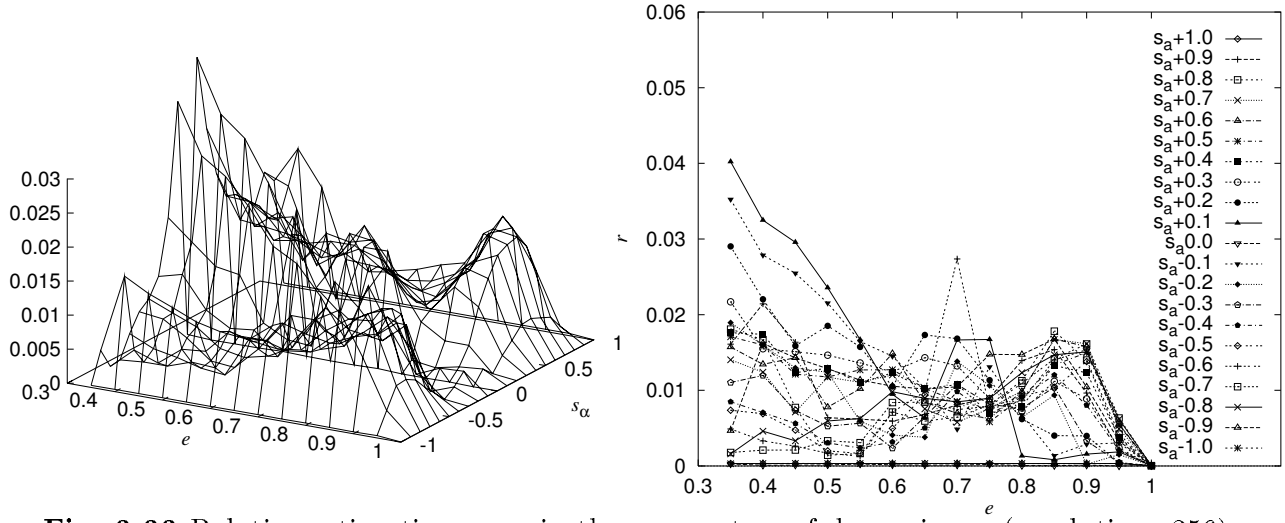


Fig. 3.33 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (resolution: 256)

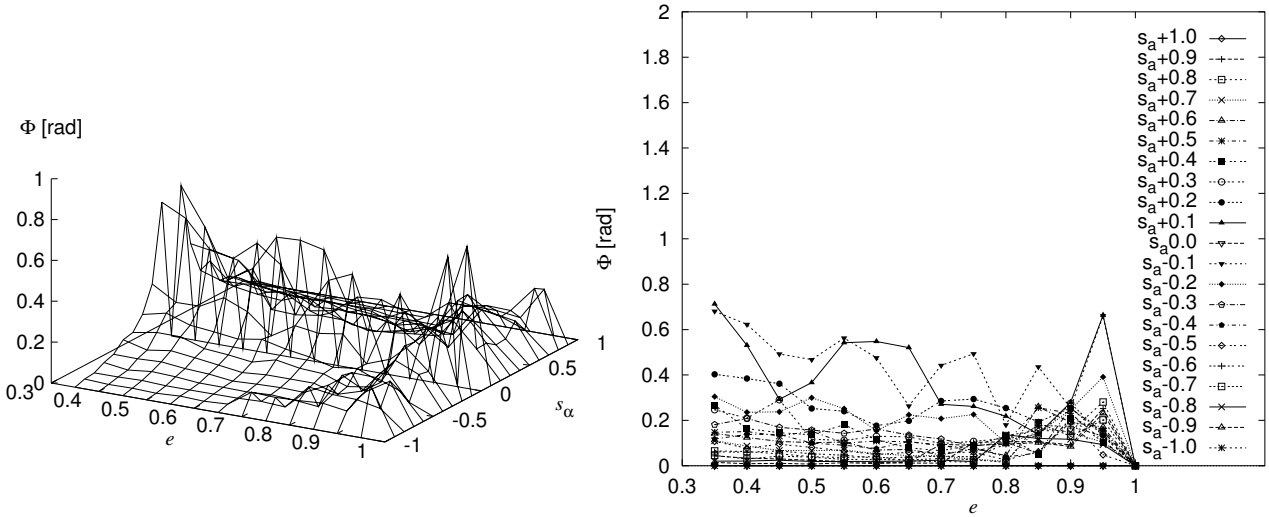


Fig. 3.34 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (resolution: 1024)

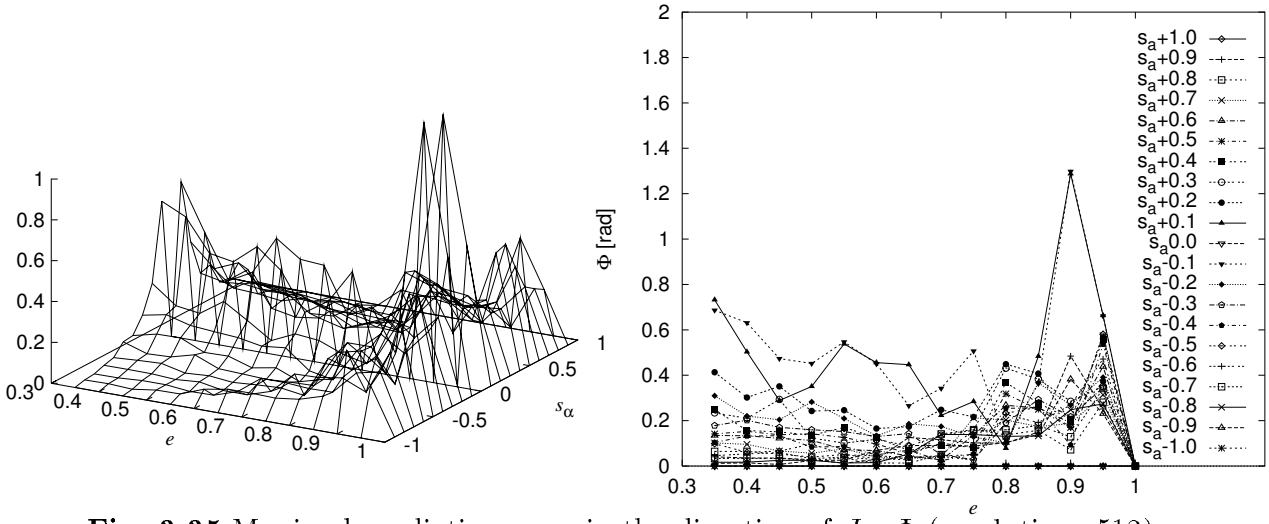


Fig. 3.35 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (resolution: 512)

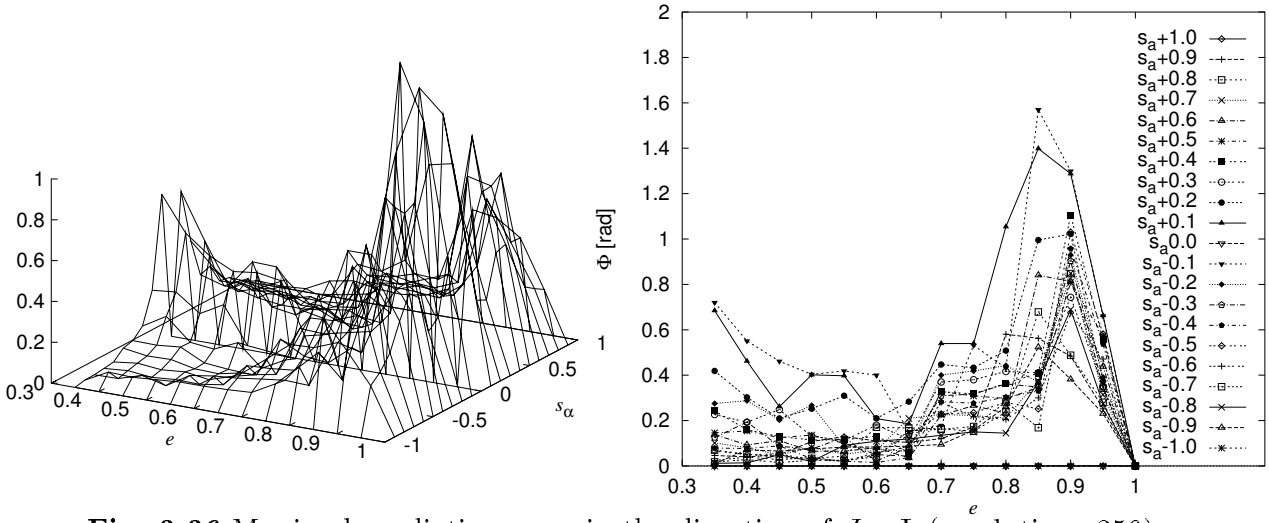


Fig. 3.36 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (resolution: 256)

3.6.4 特徴点の数との関係

運動パラメータを求める特徴点の数の影響を調べるために，特徴点を 40, 20, 10 個に変化させてシミュレーションを行う．画面の解像度は 1024，角速度の 2 乗の最大値は$\beta = 0.8[(\mathrm{rad}/\mathrm{sec})^2]$ に固定する．

それぞれの条件で，等方度 e を 0.35 から 1.0 まで 0.05 刻みで，角運動量の相対値 s_αを -1.0 から$+1.0$ まで 0.1 刻みで変化させ，計 294 種類の運動に対して推定を行う．

Fig. 3.37, **Fig. 3.38**, **Fig. 3.39**に，e-s_αに対する動力学パラメータの相対推定誤差 rの分布を示す．**Fig. 3.40**, **Fig. 3.41**, **Fig. 3.42**に，e-s_αに対する J_z軸の方向の予測誤差の最大値Φを示す．

理論上は特別な場合を除き，特徴点は 8 個で十分であるが，推定と予測の誤差の分布を見ると，特徴点を 10 個にすると，20 個の場合に比べて，e が 1 に近い部分での誤差が増加する．一方，20 個と 40 個の場合を見比べると，それほど大きな差は見られない．特徴点の数を増やしても，ある程度のところで精度の向上が飽和することは容易に予想できるが，どの程度の数が必要か見極めなければならない．

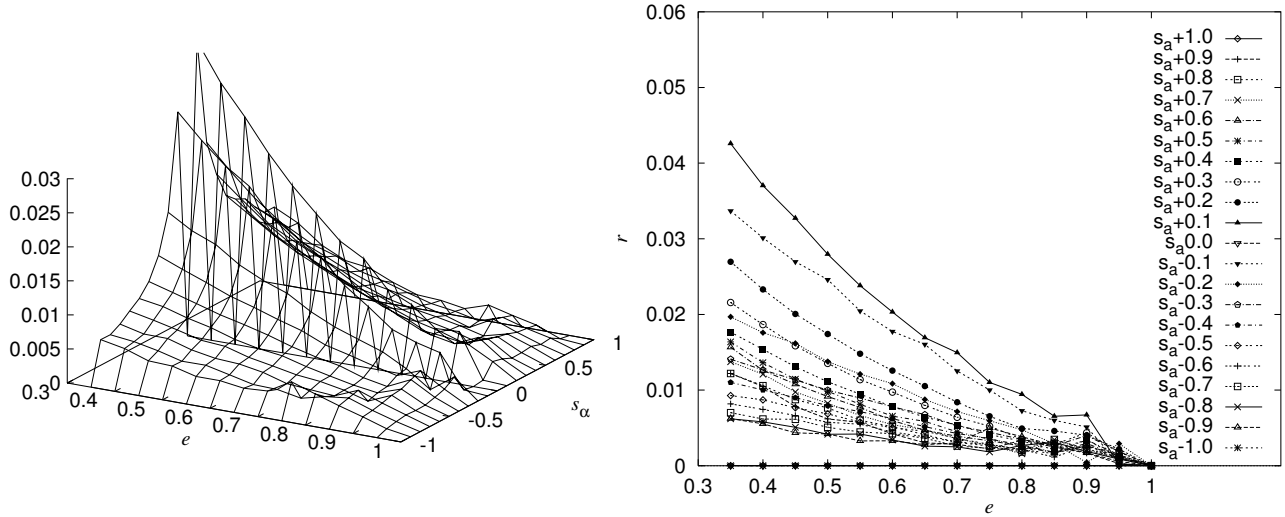


Fig. 3.37 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (40 feature points)

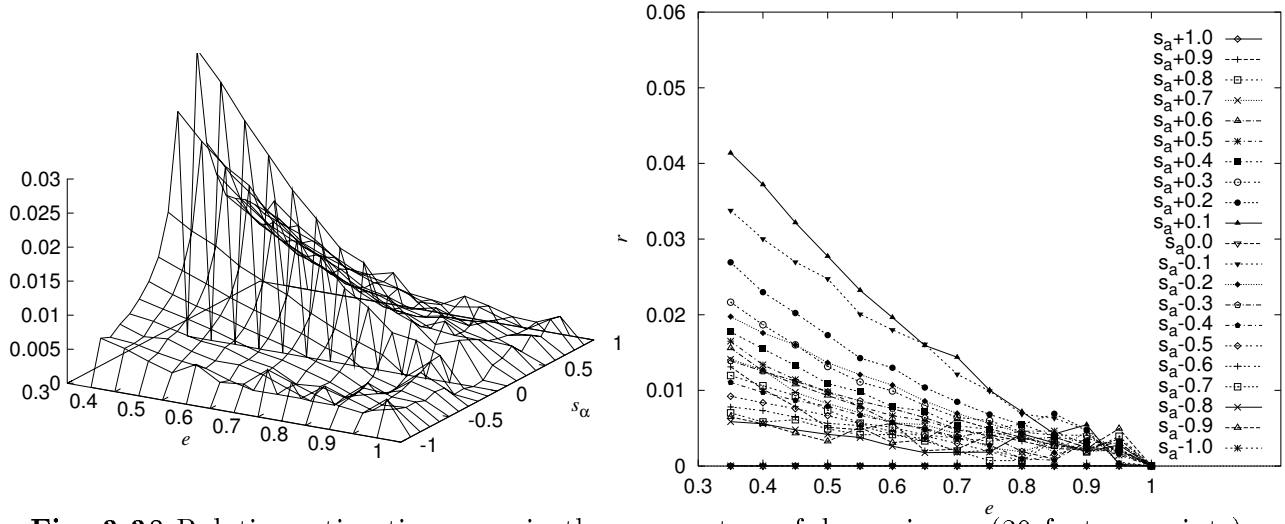


Fig. 3.38 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (20 feature points)

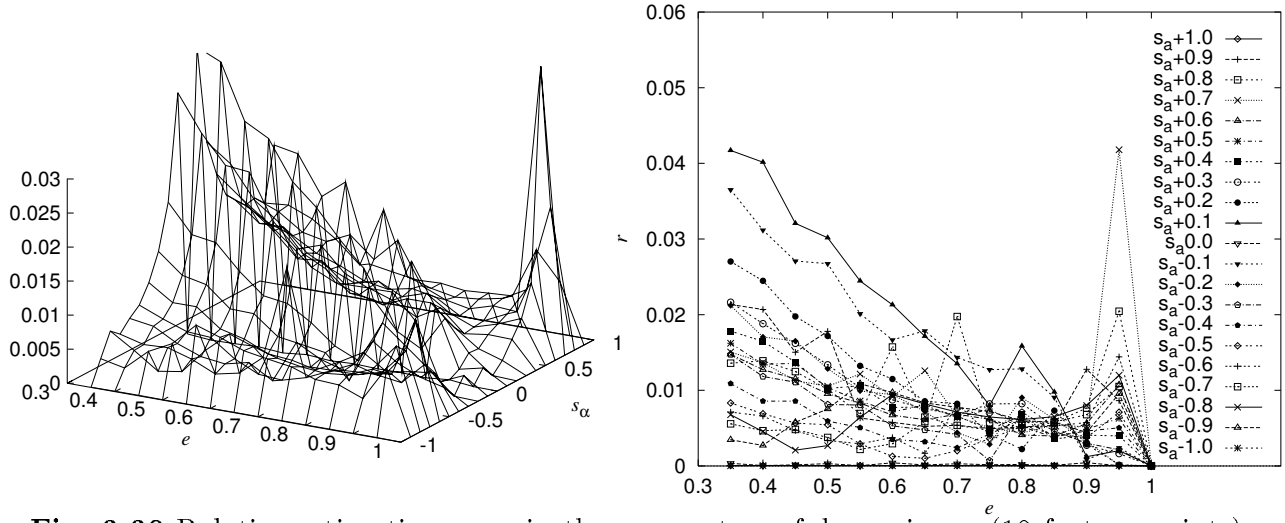


Fig. 3.39 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r (10 feature points)

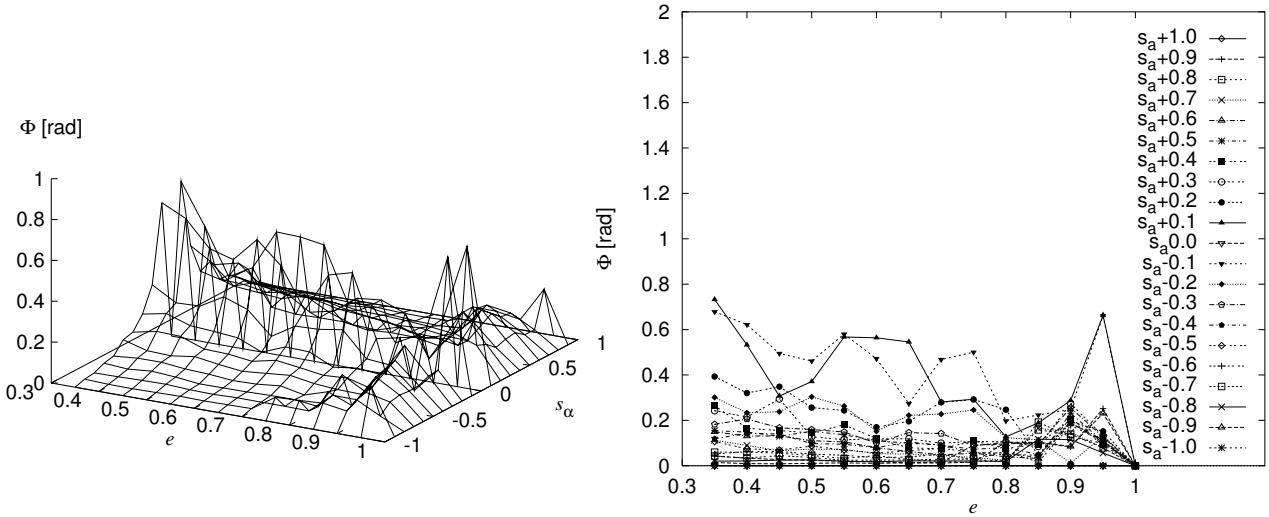


Fig. 3.40 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (40 feature points)

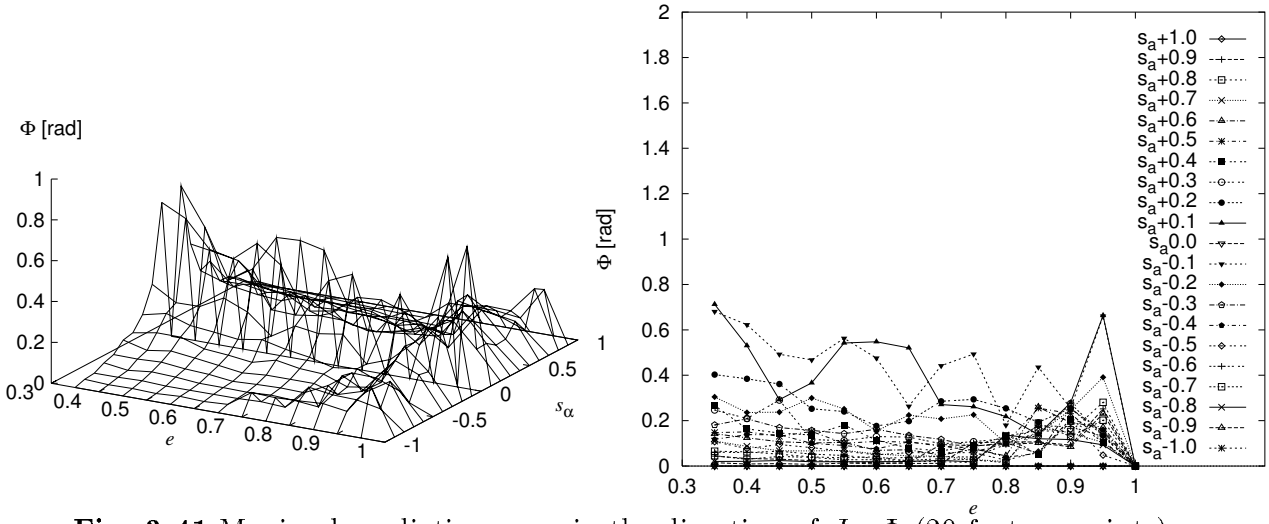


Fig. 3.41 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (20 feature points)

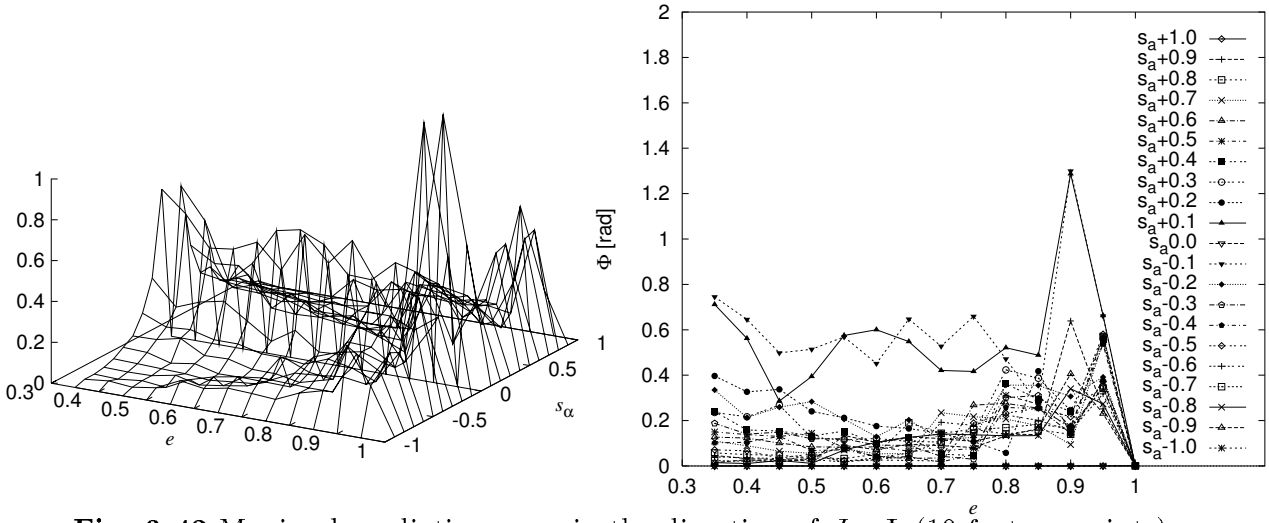


Fig. 3.42 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ (10 feature points)

3.6.5 運動の速さとの関係

全体の運動の絶対的な速さの影響を調べるために，角速度の 2 乗の最大値β を 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6[(rad/sec)^2] に変化させてシミュレーションを行う．画面の解像度は 1024，特徴点の数は 20 個に固定する．

それぞれの条件で，等方度 e を 0.333 と 0.4 から 1.0 まで 0.1 刻みで，角運動量の相対値 s_αを-1.0 から$+1.0$ まで 0.2 刻みで変化させ，計 88 種類の運動に対して推定を行う．

Fig. 3.43〜**Fig. 3.47**に，e-s_αに対する動力学パラメータの相対推定誤差 rの分布を示す．**Fig. 3.48**〜**Fig. 3.52**に e-s_αに対する e-s_αに対する J_z軸の方向の予測誤差の最大値Φを示す．

Fig. 3.43〜**Fig. 3.47**の動力学パラメータの相対推定誤差 r の分布を見ると，運動が速くなると，差分近似に起因する誤差が大きくなり，その大きさはおよそ角速度の大きさの 2 乗に比例していることがわかる．この誤差は，特に e が小さい部分で大きい．一方，速度が小さくなると，量子化に起因する誤差が増加する．これは特に e が大きい部分で大きい．これは，**Fig. 3.43**〜**Fig. 3.47**の J_z軸の方向の予測誤差の最大値Φでも同じ傾向である．

ここでは，取り込むの間隔は常に一定で，運動の速さを変更したが，実際には，ある運動が与えられた場合に，適切な間隔の画像から運動パラメータを求めることが肝心である．

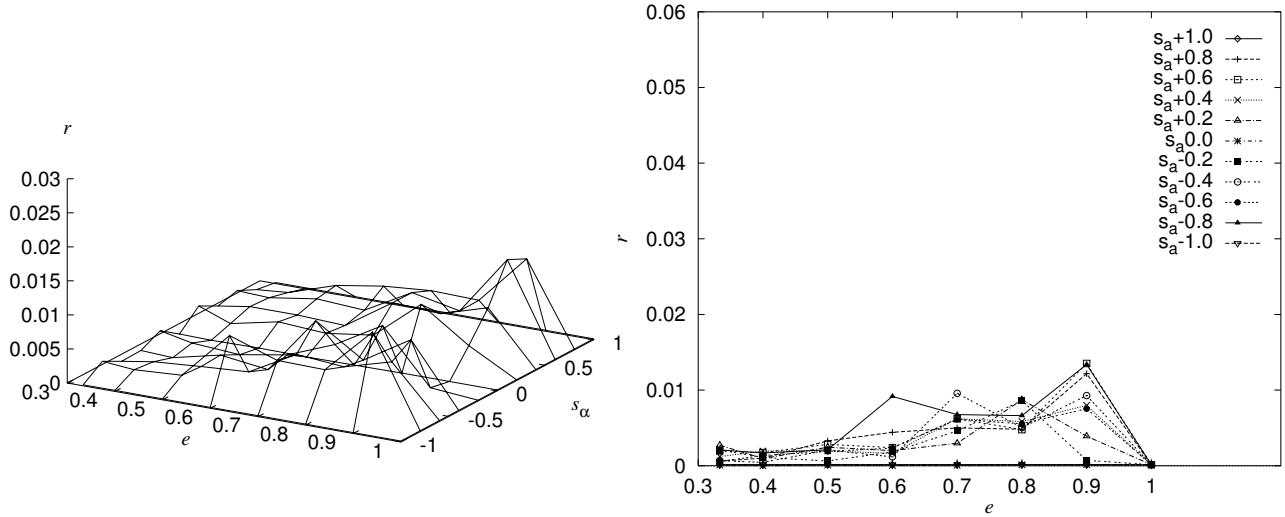


Fig. 3.43 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.1$)

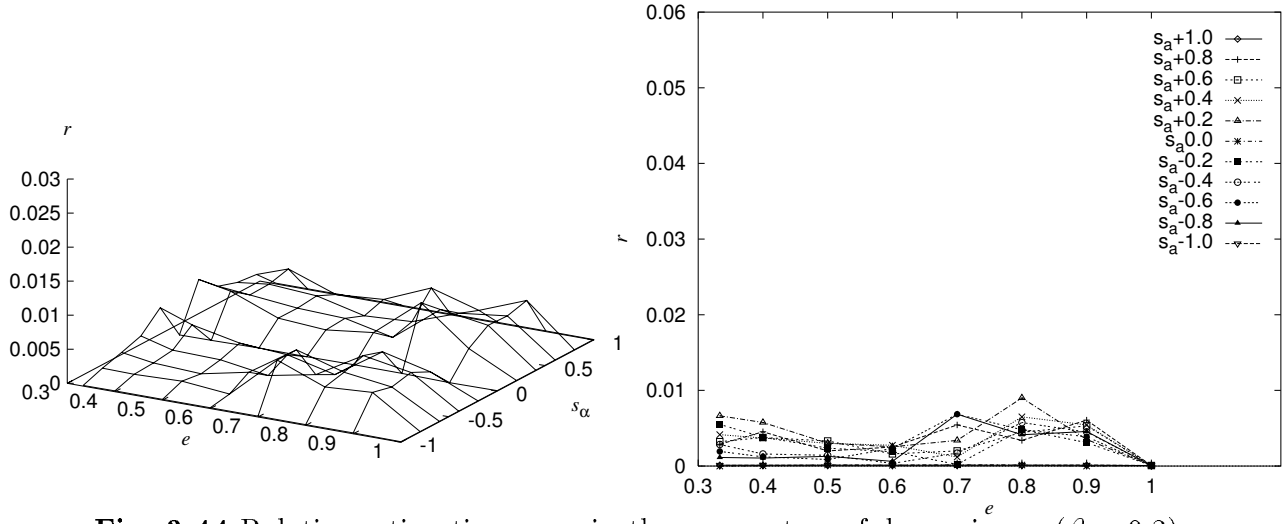


Fig. 3.44 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.2$)

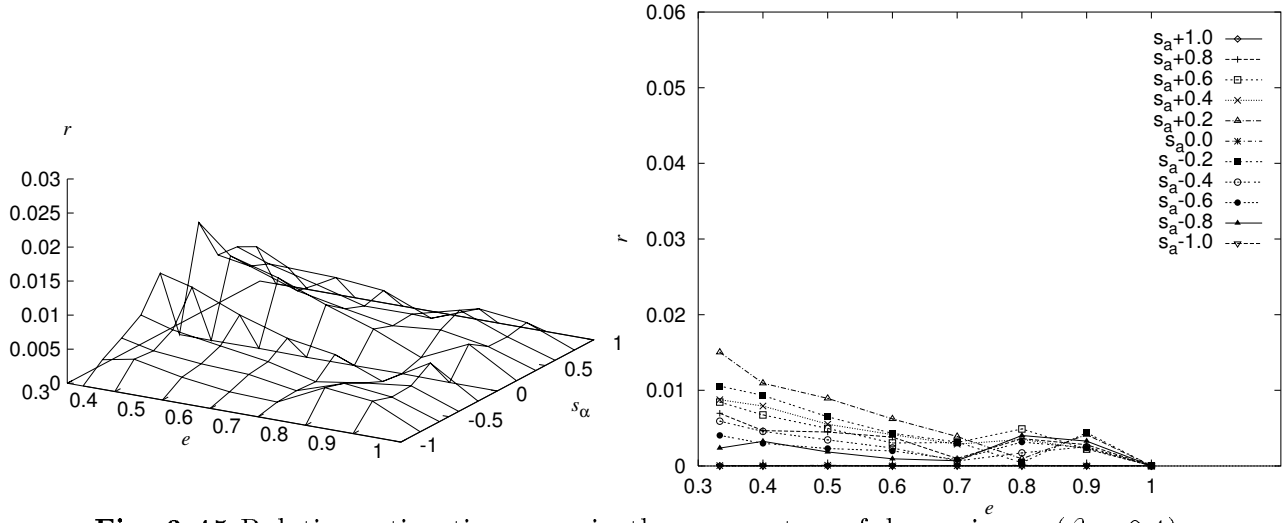


Fig. 3.45 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.4$)

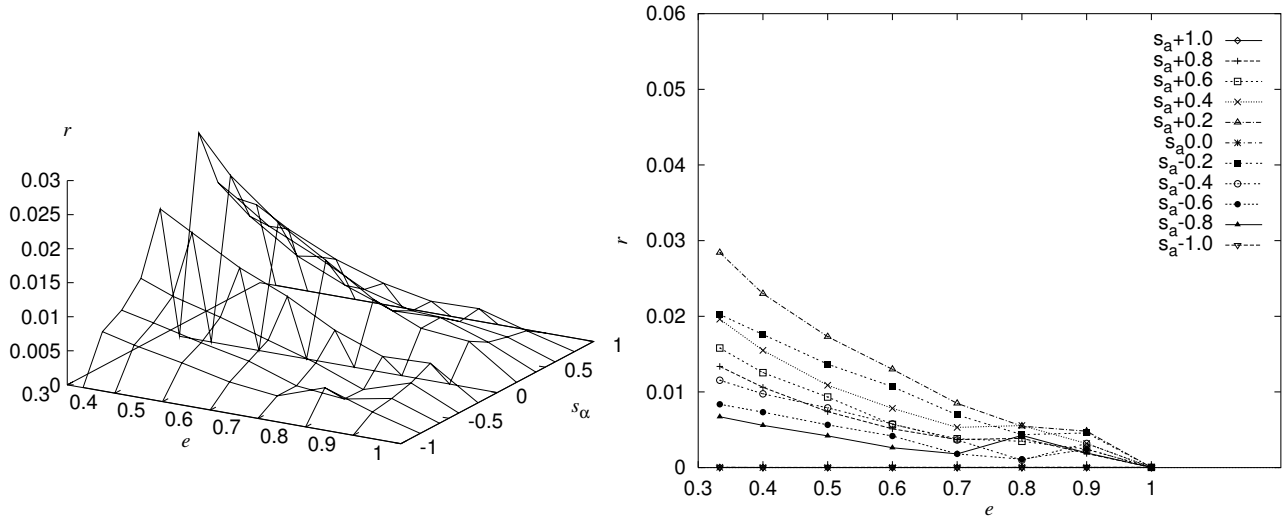


Fig. 3.46 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 0.8$)

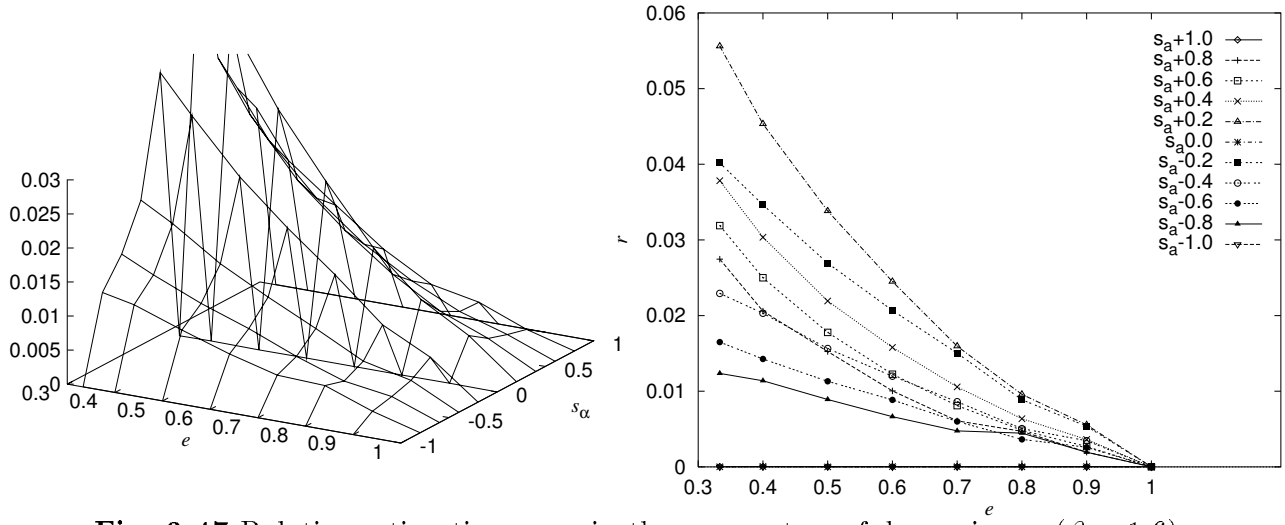


Fig. 3.47 Relative estimation error in the parameters of dynamics: r ($\beta = 1.6$)

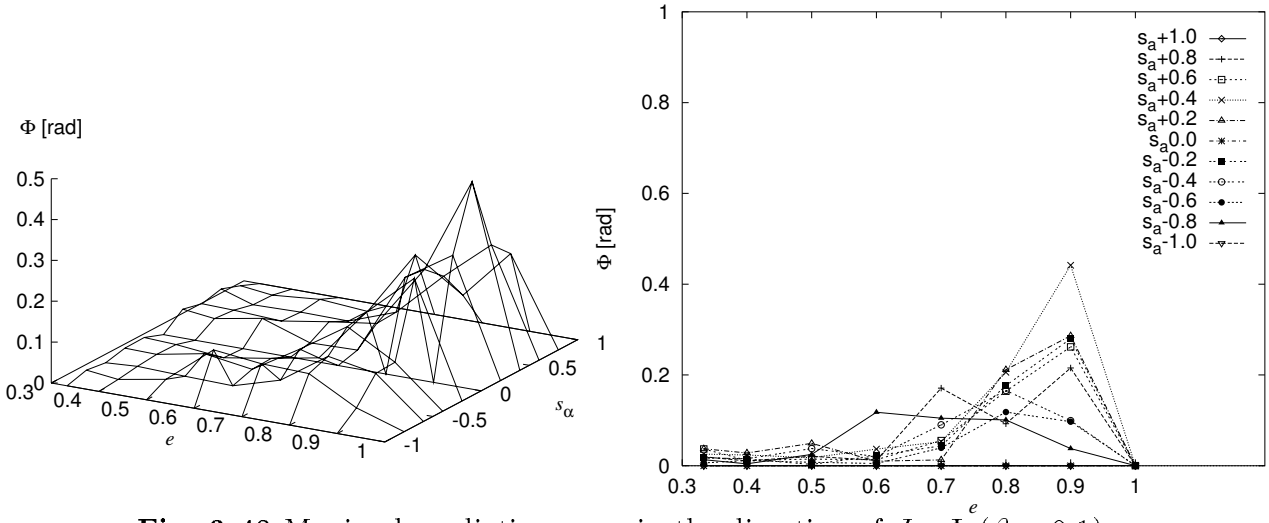


Fig. 3.48 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ $(\beta = 0.1)$

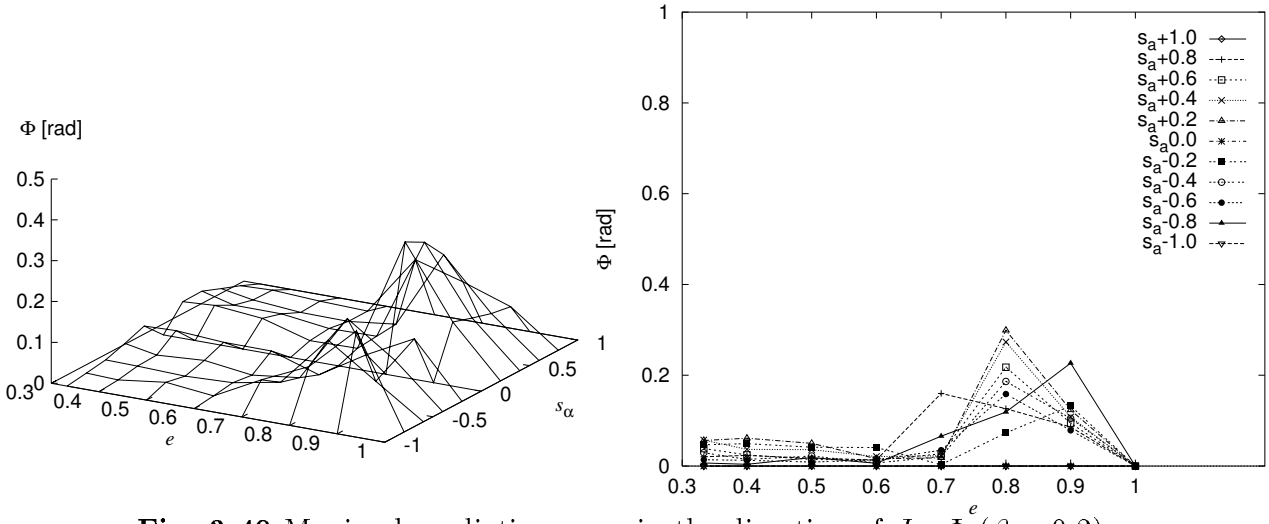


Fig. 3.49 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ $(\beta = 0.2)$

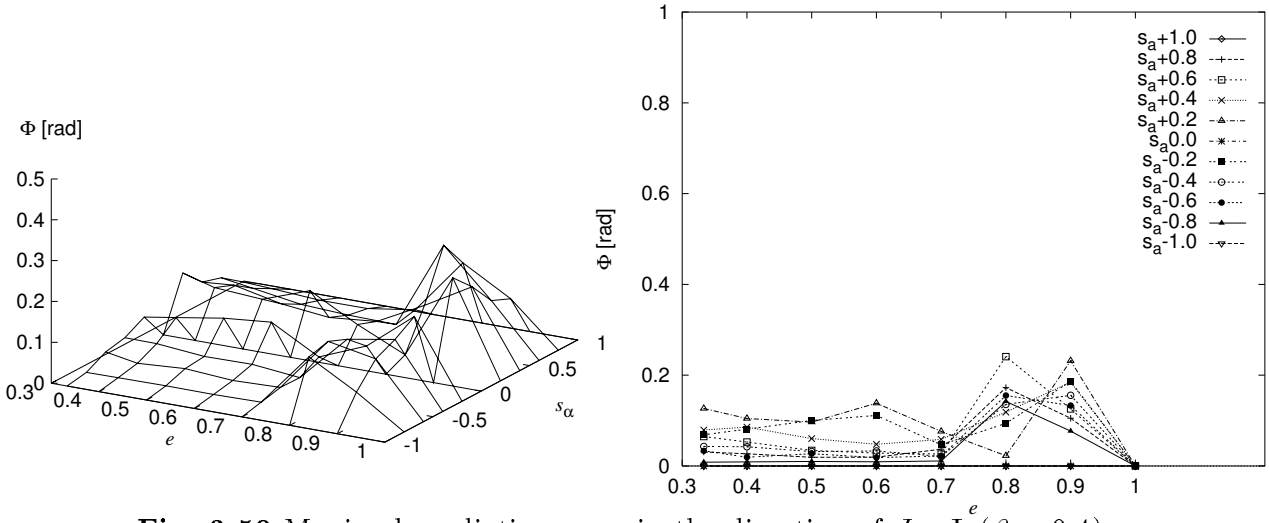


Fig. 3.50 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ $(\beta = 0.4)$

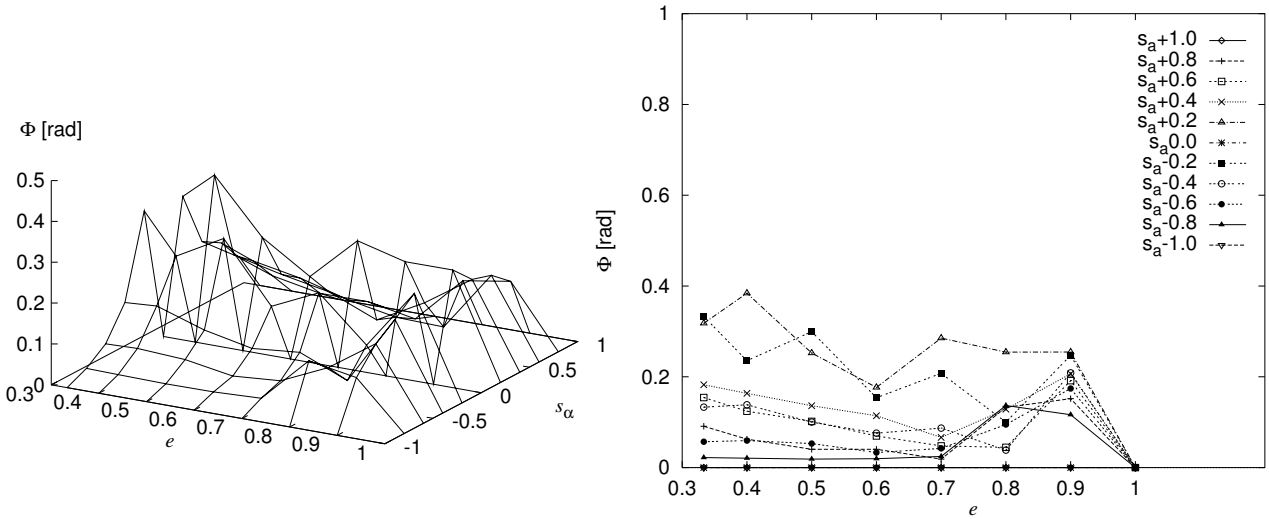


Fig. 3.51 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ ($\beta = 0.8$)

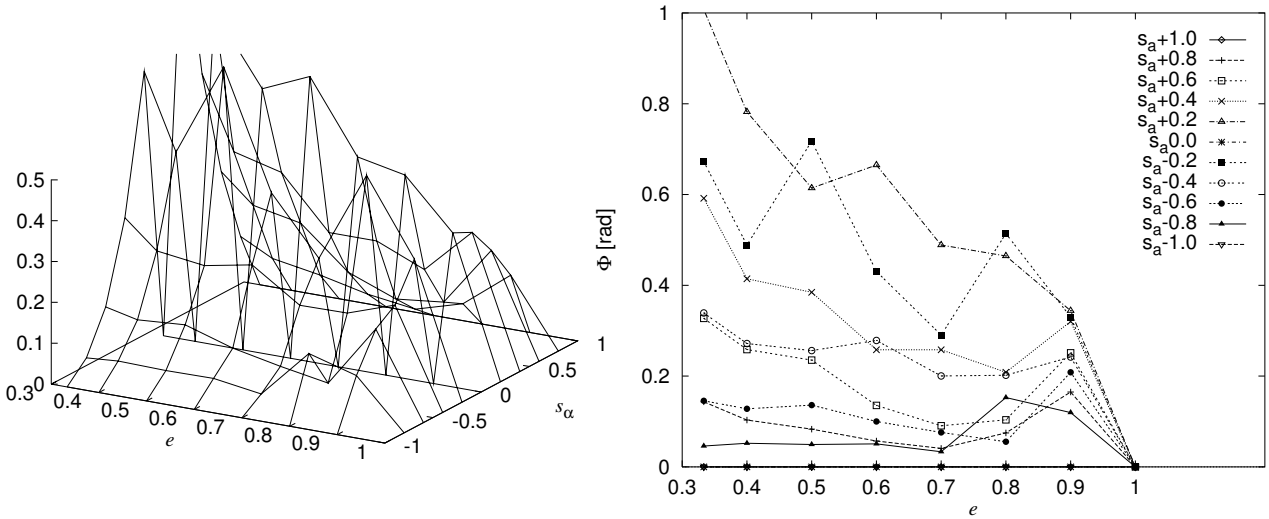


Fig. 3.52 Maximal prediction error in the direction of J_z: Φ ($\beta = 1.6$)

3.6.6 まとめ

以上のシミュレーションにより，提案するアルゴリズムに基づいて作成した推定/予測のプログラムが，画像から角速度を抽出する際に不可避な量子化と差分近似に起因する誤差が存在する場合にも，様々な運動に対して有効に機能することがわかった．

捕捉のための予測には，十分な解像度と特徴点の数が必要であることがわかったが，これは実機においても決して不可能な仕様ではないと考えている．

一方，運動の速さを変化させたシミュレーションにより，運動の速さに応じて適切なサンプリングレートを選ぶことが大変重要であることがわかった．サンプリングレートに対して，運動が速すぎると差分近似に起因する誤差が大きくなり，遅すぎると量子化に起因する誤差が大きくなる．サンプリングレートが可変だとして，観測された運動に応じて，それを適切に変化させる方法を見つけなければならない．また，現在は，画像 2 枚だけから対応をとって運動パラメータを求め，そこから角速度を得ているが，複数の画像からもっと精度良く角速度を推定することが可能ならば，本論文のアルゴリズムの前処理としては，大変有効である．

3.7 おわりに

本章では，剛体の運動と実際の画像処理を想定した計算機シミュレーションによって，**第2章**で提案した剛体の動力学的特性の推定アルゴリズムの処理例を示し，様々な運動に対する推定と予測の性能を調べた．その際に，運動の種類を表現するパラメータと，推定と予測の性能を評価する規範を導入した．シミュレーションの結果によると，推定モデルを切り替えることにより，広い範囲の運動に対してアルゴリズムを適用できることがわかった．一方，性能を低下させる原因も明らかになったので，それを今後の研究の一課題としたい．

第 4 章

浮遊マニピュレータのモデル化

4.1 はじめに

浮遊型宇宙ロボットでは，マニピュレータの手先を慣性座標系 (静止座標系) に関して位置決めする問題が重要である．マニピュレータのベースである衛星や宇宙機は空間に固定されていないので，マニピュレータが動作するとそれに伴う反力でベースの位置や姿勢が変動してしまう．ベースの慣性の小さいマニピュレータではこの変動は無視できず，従来の方法では手先を位置決めすることが困難になる．

ひとつの方法として，ベースに装備されたアクチュエータによってマニピュレータの反力を打ち消すことが考えられる．こうすれば，マニピュレータは従来の方法を用いて制御することができる．通常，宇宙船の位置や姿勢を変更するには，気体を噴射するスラスタや，慣性ホイールの回転速度を変化させるリアクションホイールなどが使われる．しかし，これらのアクチュエータをマニピュレータと併用することは適当ではない．なぜなら，スラスタはオンオフ的な制御しかできず，また，リアクションホイールはマニピュレータの反力に比べて出力が小さいので，併用のためにはこれを非常に大型化するか，マニピュレータの方をゆっくり動かさなければならない．また，推薬や電池の節約のためにはベースのアクチュエータはできるだけ使わない方が良い．通信用のアンテナの指向を保つことや，太陽電池パネルの振動を励起させないことを理由にベースの姿勢を一定に保つことを想定した研究も多いが，それらの制約はせっかくの浮遊宇宙ロボットの機動性を損なってしまうのではないかと思われる．そこで，通信や電力源が必要な場合には，それを受け持つ母船とともに行動し，マニピュレータで作業を行うロボットはベースが変動しても構わないようなミッション形態を考えてはどうだろうか (**Fig. 4.1**).

ベースを駆動するアクチュエータを用いない場合には，衛星軌道上を無重力空間と見なせば，マニピュレータの系には外力が作用しないことになるので，系全体の運動量と角運動量が保存される．これを系の拘束条件として捉えると，運動量の保存則は系全体の質量中心が不変となるホロノミックな拘束であるが，角運動量の保存則は時間に関して積分不可能な非ホロノミックな拘束となる．つまり，n 関節の浮遊マニピュレータは，n 個の入力に対してベースの姿勢を加えた $n+3$ 個の状態を持つ非ホロノミックな系となる．この特

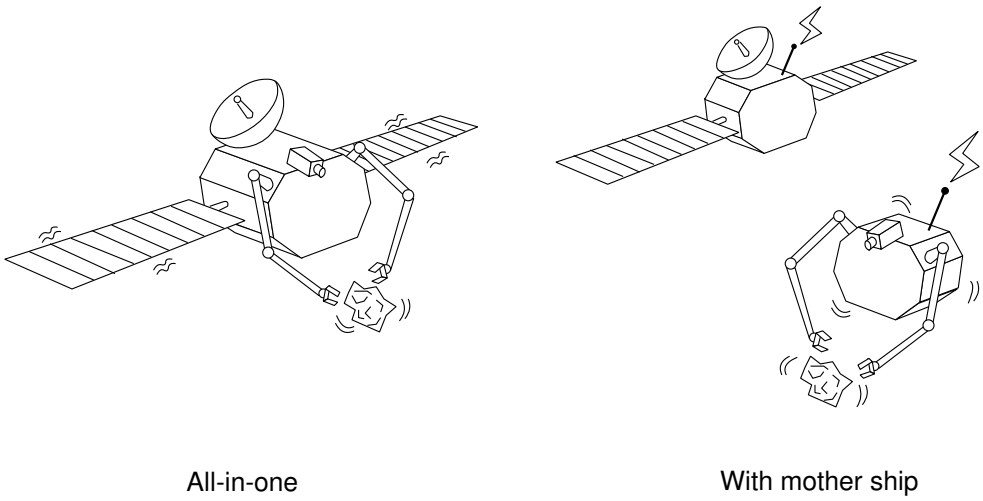


Fig. 4.1 Free-floating robot with a mother ship

性により，ベース固定の場合とは異なり，手先の位置はその瞬間の関節変位の関数としては表現できず，その時刻までの全ての時間履歴に依存することになる．したがって，手先の目標位置が与えられた場合に，それを実現する関節変位を幾何学的に決めることは不可能であり，手先位置決め制御を関節変位空間に置き換えて考えることはできない．つまり，従来地上のマニピュレータで行われているように，関節ごとに独立したフィードバック系を組んでそこにあらかじめ逆運動学を解いた目標値を与える方法では，手先の位置決めを実現できない．

この様な問題に対して，Vafa らは，運動量が保存される系に対して “仮想マニピュレータ (Virtual Manipulator)” という概念を提案した [20]．これは，系の質量中心で慣性空間に固定されたベースを持ち，手先が実際と一致する仮想的なマニピュレータで，各リンクの質量配分より決定される．これを用いれば，マニピュレータの関節角と手先の位置を論じるのに便利であり，特に手先の可到達範囲を考えるのに都合がよい．しかし，手先位置を制御するためには，ベースの姿勢も制御する必要がある．また，梅谷らは角運動量の保存則も利用して，マニピュレータの動作反力による手先の変動分も加味した手先の速度と関節の速度を関係付ける “一般化ヤコビ行列” を提案し [21]，分解速度制御やマニピュレータ特性解析などに用いた [22] [23]．

本章では，ベースが浮遊するマニピュレータを関節で結合された剛体多体系としてモデル化し，その運動学と動力学を明らかにする．モデルの導出の過程において，運動量と角運動量の保存則を導入し，これによってマニピュレータの動作反力によるベースの変動を定式化する．また，従来のベースが固定された地上のマニピュレータとの対比を示し，浮遊マニピュレータの一般化ヤコビ行列を従来のヤコビ行列から導出する汎用的な表現法を提案する．さらに，外力アクチュエータを用いない場合には，関節変位を一般化座標とする系の運動方程式が，地上の場合と同じ形式で表現できることを示す．

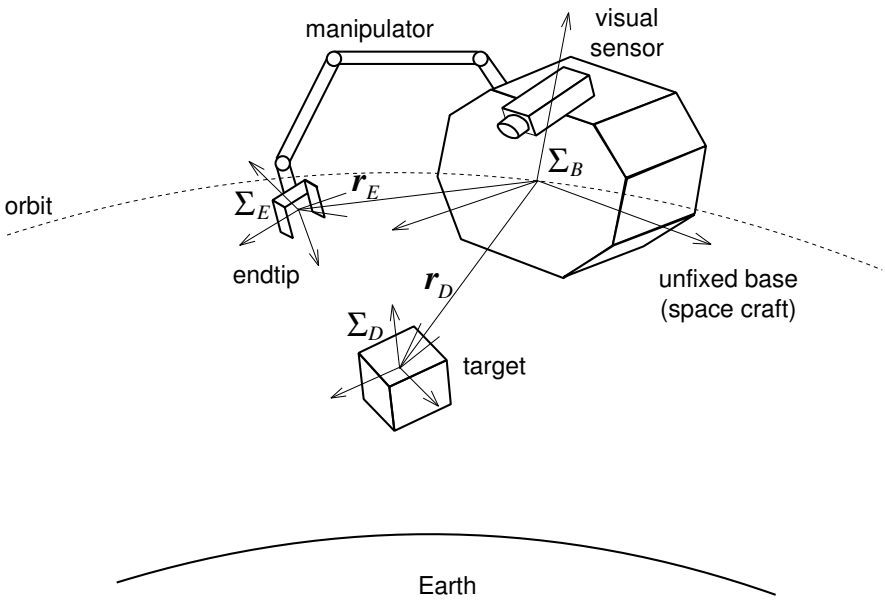


Fig. 4.2 Model of a free-floating space manipulator system

4.2 運動学

Fig. 4.2に示すように，ベースを含めたマニピュレータの系は衛星軌道を回っているが，近似的に無重力状態で浮遊しているとして扱うことにする．ベースおよびマニピュレータは，n 個の関節でツリー構造に結合された $n+1$ 個の剛体としてモデル化する．関節には適当に 1 から n までの番号をつけ，その値を関節変数 $\boldsymbol{q} = [\ q_1, q_2, \cdots, q_n\ ]^T$ で表わす．また，関節の番号とは無関係に剛体には 0 から n までの番号をつけ，その中でベースの番号を B とする．また，剛体 i の質量を m_i，慣性テンソルを I_i とする．

次に，適当な慣性座標系 Σ_I と，ベースと共に動きその質量中心を原点とするベース座標系 Σ_B を定める．慣性座標系 Σ_I に対するベース座標系 Σ_B の姿勢を表現するためにロール角 ϕ ・ピッチ角θ ・ヨー角 ψ を用い，これらをまとめて $\boldsymbol{\phi} = [\ \phi, \theta, \psi\ ]^T$ とする．また，座標系 Σ_B から Σ_I への回転変換行列を ${}^I A_B(\boldsymbol{\phi}) \ \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ で表わす (付録参照)．あるベクトル $\boldsymbol{a} \ \in \mathbf{R}^3$ を座標系Σ_I を基底として定義したものを ${}^I\boldsymbol{a}$，座標系 Σ_B を基底として定義したものを ${}^B\boldsymbol{a}$ と表記すると，両者には

$$ {}^I\boldsymbol{a} = {}^I A_B(\boldsymbol{\phi})\ {}^B\boldsymbol{a} \tag{4.1} $$

なる関係がある．本論文中では，断わりのない限りベクトルはベース座標系Σ_B を基底として表現し，左肩の添字 ‘B’ は省略する．これは，ベース座標系Σ_Bが動かない従来のマニピュレータと対比するためと，**第5章**でベース上のセンサの座標系に基づく制御法を導入するためである．

さて，**Fig. 4.3**で示すように，慣性座標系の原点から剛体 i の質量中心を指す位置ベク

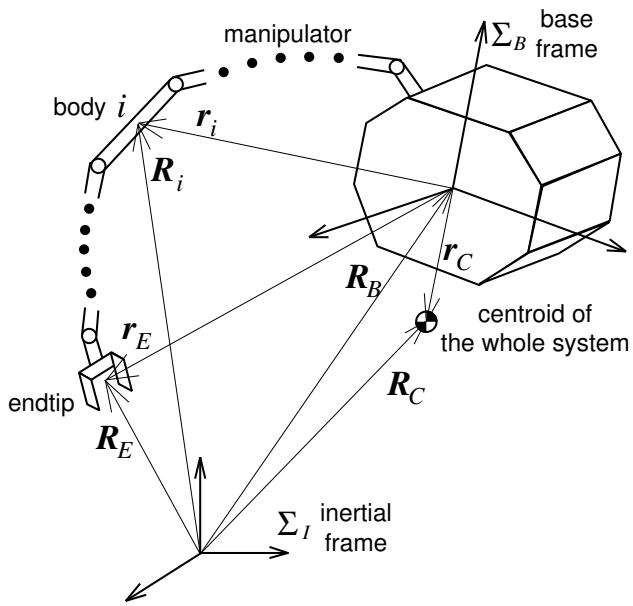


Fig. 4.3 Multi rigid body system

トルを $\boldsymbol{R}_i$ ，ベース座標系の原点から同じ点を指す位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とすると，

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{r}_i \tag{4.2}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{R}_B$ は慣性座標系の原点からベースの質量中心を指す位置ベクトルである．

また，Σ_I を基準とした剛体 i の質量中心の速度 $\boldsymbol{V}_i$ と角速度 $\boldsymbol{\Omega}_i$，Σ_B を基準とした速度 $\boldsymbol{v}_i$ と角速度$\boldsymbol{\omega}_i$ の間には以下のような関係がある．

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{\Omega}_B \times \boldsymbol{r}_i \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_B \tag{4.4}$$

ここで，$\boldsymbol{V}_B$ と $\boldsymbol{\Omega}_B$ は座標系 Σ_I を基準としたベースの速度と角速度である．また，記号 '$\times$' はベクトルの外積を表わす．各剛体に対して，ベースに対する速度と角速度を表現するヤコビ行列を関節変数$\boldsymbol{q}$ の関数として与えることができる [37]．すなわち，剛体 i のヤコビ行列を J_{Li} と J_{Ai} とすると，

$$\boldsymbol{v}_i = J_{Li}(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = J_{Ai}(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.6}$$

と表わされる．

4.3 系の運動量と角運動量

本論文ではスラスタなどの外力アクチュエータを用いない場合を取り扱うので，系全体の運動量と角運動量は保存される．さらに，初期状態では系が静止していると仮定し，したがって，両運動量は零に保たれているとする．

系全体の運動量 $\boldsymbol{P}$ と角運動量 $\boldsymbol{L}$ は次のように定義される．

$$\boldsymbol{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} \{{}^B I_i \boldsymbol{\Omega}_i + m_i \boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{V}_i\} \tag{4.8}$$

ここで，${}^B I_i$ はベース座標系を基底とする剛体 i の慣性テンソルである．次に，系全体の質量中心に関して以下の変数を定義する．

$$m_C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} m_i \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{R}_C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} m_i \boldsymbol{R}_i / m_C \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{r}_C(\boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0,\ i\neq B}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}) / m_C \tag{4.11}$$

$$J_C(\boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0,\ i\neq B}^{n} m_i J_{Li}(\boldsymbol{q}) / m_C \quad \in \mathbf{R}^{3\times n} \tag{4.12}$$

さて，式 (4.7), (4.8) に式 (4.2)〜(4.6) を代入して整理すると以下の様になる．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{L} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} H_V & H_{V\Omega} \\ {H_{V\Omega}}^T & H_\Omega \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_B \\ \boldsymbol{\Omega}_B \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} H_{Vq} \\ H_{\Omega q} \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R}_B \times \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

ただし，

$$H_V \stackrel{\text{def}}{=} m_C U_3 \quad \in \mathbf{R}^{3\times 3} \tag{4.14}$$

$$H_{V\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} -m_C [\boldsymbol{r}_C \times] \quad \in \mathbf{R}^{3\times 3} \tag{4.15}$$

$$H_{Vq} \stackrel{\text{def}}{=} m_C J_C \quad \in \mathbf{R}^{3\times n} \tag{4.16}$$

$$H_\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0,\ i\neq B}^{n} \{{}^B I_i + m_i \,\mathrm{D}(\boldsymbol{r}_i)\} + I_B \quad \in \mathbf{R}^{3\times 3} \tag{4.17}$$

$$H_{\Omega q} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0,\ i\neq B}^{n} \{{}^B I_i J_{Ai} + m_i [\boldsymbol{r}_i \times] J_{Li}\} \quad \in \mathbf{R}^{3\times n} \tag{4.18}$$

である．ここで，U_3 は 3×3 の単位行列である．また，ベクトル$\boldsymbol{r} = [r_x, r_y, r_z]^T$ に対する行列関数 $[\boldsymbol{r}\times]$ と$\mathrm{D}(\boldsymbol{r})$ を次のように定義する．

$$[\boldsymbol{r}\times] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix} \quad \in R^{3\times 3} \tag{4.19}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\boldsymbol{r}) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} [\boldsymbol{r}\times]^T\,[\boldsymbol{r}\times] \\
&= \begin{pmatrix} r_y^2+r_z^2 & -r_xr_y & -r_xr_z \\ -r_xr_y & r_x^2+r_z^2 & -r_yr_z \\ -r_xr_z & -r_yr_z & r_x^2+r_y^2 \end{pmatrix} \quad \in R^{3\times 3}
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

さて，運動量と角運動量は零と仮定したので，式 (4.13) に

$$\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{0} \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{0} \tag{4.22}$$

を代入して，$\boldsymbol{V}_B$ と $\boldsymbol{\Omega}_B$ について解くと，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_B \\ \boldsymbol{\Omega}_B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} H_L(\boldsymbol{q}) \\ H_A(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.23}$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} H_L \\ H_A \end{pmatrix} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} -\begin{pmatrix} H_V & H_{V\Omega} \\ {H_{V\Omega}}^T & H_\Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_{Vq} \\ H_{\Omega q} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} J_C + [\boldsymbol{r}_C\times]H_B^{-1}H_M \\ H_B^{-1}H_M \end{pmatrix} \qquad \in \mathbf{R}^{6\times n}
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

$$H_B \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_\Omega - m_C\,\mathrm{D}(\boldsymbol{r}_C) \qquad \in \mathbf{R}^{3\times 3} \tag{4.25}$$

$$H_M \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_{\Omega q} - m_C\,[\boldsymbol{r}_C\times]J_C \qquad \in R^{3\times n} \tag{4.26}$$

である．行列 H_Ω はベースの質量中心まわりの系全体の慣性テンソルであり，行列 H_B は系全体の質量中心まわりの系全体の慣性テンソルである．慣性テンソル H_B は正定であるから，常に逆行列が存在する．式 (4.23) はマニピュレータの運動 ($\dot{\boldsymbol{q}}$) によってベースがどの様に変動 ($\boldsymbol{V}_B$, $\boldsymbol{\Omega}_B$) するかを表わしている重要な基礎式である．

ここで扱っている系の自由度は関節の n とベースの位置と姿勢の 6 を合わせて $n+6$ である．運動量と角運動量の保存則が成り立つときには，それらを 6 個の拘束条件と見なすことができ，系の運動学的な自由度は n となる．運動量の保存則は，慣性空間における系全体の質量中心 (${}^I\boldsymbol{R}_C$) が不動であることと等価になり，ホロノミックな拘束である．一方，角運動量の保存則に関しては，ベースの角速度 $\boldsymbol{\Omega}_B$ とベースの姿勢の時間微分$\dot{\boldsymbol{\phi}}$ との間に

$$\boldsymbol{\Omega}_B = N(\boldsymbol{\phi})\,\dot{\boldsymbol{\phi}} \qquad N(\boldsymbol{\phi}) \in R^{3\times 3} \tag{4.27}$$

なる関係がある (**附章F**参照)．しかし，この関係と式 (4.23) より得られる

$$N(\boldsymbol{\phi})\,\dot{\boldsymbol{\phi}} = H_A(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.28}$$

を積分して，ベースの姿勢 $\boldsymbol{\phi}$ と関節変数 $\boldsymbol{q}$ の間の時間微分を含まない関係式を得ることはできない．つまり，角運動量の保存則は非ホロノミックな拘束であり，ベースの姿勢は

関節変数の時間的な履歴に依存する．したがって，関節の初期値と最終値が同じでも，その途中の動作パターンによってベースの姿勢の変動は異なる．このため，慣性空間における手先の位置と姿勢も関節変数だけの関数として表現できない．逆に，慣性座標系で手先の目標位置が与えられた場合も，それを実現する関節変位を決めることは不可能である．

以上の考察より，ベースを駆動しない浮遊マニピュレータでは，従来の産業用ロボットの場合とは異なり，手先の位置決め制御を関節空間に置き換えて実行することはできないことがわかる．この問題を克服するために，**第5章**では，視覚センサ等で計測された手先の偏差を各関節に直接フィードバックする制御について述べる．

4.4 一般化ヤコビ行列

次に，手先の速度と関節の速度の関係を求める．手先の速度 $\boldsymbol{V}_E$ と角速度 $\boldsymbol{\Omega}_E$ に関しても式 (4.2)〜(4.6) と同様な関係式が成立つ．

$$\boldsymbol{R}_E = \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{r}_E \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_E &= \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{\Omega}_B \times \boldsymbol{r}_E & (4.30)\\ \boldsymbol{\Omega}_E &= \boldsymbol{\omega}_E + \boldsymbol{\Omega}_B & (4.31)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_E &= J_{Li}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} & (4.32)\\ \boldsymbol{\omega}_E &= J_{Ai}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} & (4.33)\end{aligned}$$

ここで，式 (4.23) を用いて $\boldsymbol{V}_B, \boldsymbol{\Omega}_B, \boldsymbol{v}_E, \boldsymbol{\omega}_E$ を消去すると，以下のような関係式を得る．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_E &= \widehat{J}_L(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} & (4.34)\\ \boldsymbol{\Omega}_E &= \widehat{J}_A(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} & (4.35)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{J}_L &\stackrel{\text{def}}{=} J_L + H_L - [\boldsymbol{r}_E\times]H_A \\ &= J_L - J_C + [(\boldsymbol{r}_E - \boldsymbol{r}_C)\times]\ H_B^{-1}H_M \quad \in \mathbf{R}^{3\times n} & (4.36)\\ \widehat{J}_A &\stackrel{\text{def}}{=} J_A + H_A \\ &= J_A - H_B^{-1}H_M \quad \in \mathbf{R}^{3\times n} & (4.37)\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{r}_E$ はベースに対する手先の位置，J_L と J_A は手先の速度と角速度に対応する通常のヤコビ行列である．また，$\widehat{J}_L$ と $\widehat{J}_A$ はベースの変動を加味した手先の速度と角速度を関節速度に対応させる“一般化ヤコビ行列”である．

式 (4.34)〜(4.37) において，一般化ヤコビ行列 $\widehat{J}_L, \widehat{J}_A$ は，慣性空間に対する手先の速度 $\boldsymbol{V}_E, \boldsymbol{\Omega}_E$ をベース座標系で表わしたものと対応するように定義している．一方，梅谷らの一般化ヤコビ行列の表現 [21] を ${}^I\widehat{J}_L, {}^I\widehat{J}_A$ と書くと，両者には

$$\begin{aligned} {}^I\boldsymbol{V}_E &= {}^I\widehat{J}_L(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} & (4.38)\\ {}^I\boldsymbol{\Omega}_E &= {}^I\widehat{J}_A(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} & (4.39)\end{aligned}$$

$$
{}^{I}\widehat{J}_L(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} {}^{I}A_B(\boldsymbol{\phi})\ \widehat{J}_L(\boldsymbol{q}) \tag{4.40}
$$

$$
{}^{I}\widehat{J}_A(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} {}^{I}A_B(\boldsymbol{\phi})\ \widehat{J}_A(\boldsymbol{q}) \tag{4.41}
$$

なる関係がある．梅谷らの表現を用いると，一般化ヤコビ行列はベースの姿勢$\boldsymbol{\phi}$ にも依存する．

ベース座標系で表わした慣性空間に対する手先の速度は，ベースからは直接観測できないので不自然な表現ではあるが，これに対応する一般化ヤコビ行列は関節変数 $\boldsymbol{q}$ だけの関数となり，通常のヤコビ行列との差異がわかりやすい．例えば，ここで示した導出過程はそのまま一般化ヤコビ行列を従来のヤコビ行列から構成するアルゴリズムとして用いることができる．一例として，**附章G**に n リンクの回転関節で結合された直列型マニピュレータの場合の具体的な導出手順を示す．

また，式 (4.36), (4.37) が示すように，一般化ヤコビ行列は通常のヤコビ行列と付加項の和として表わされ，その付加項には各剛体の質量と慣性モーメントをパラメータとして含む．この付加項の大きさはベースの慣性比によって変化する．つまり，$m_B \to \infty, I_B \to \infty$ のとき，$J_C \to O, \boldsymbol{r}_C \to \boldsymbol{0}, H_B \to \infty$ となるので，ベースの慣性が非常に大きいと，付加項は零になって一般化ヤコビ行列と通常のヤコビ行列は一致することがわかる．

一般化ヤコビ行列と通常のヤコビ行列の特性の比較の一例として，**Fig. 4.4**に示す平面の浮遊型 2 リンクマニピュレータモデルに対する可操作楕円体の分布を **Fig. 4.5**に示す．これは，2 つのヤコビ行列 $J_L(\boldsymbol{q})$, $\widehat{J}_L(\boldsymbol{q})$ についてそれぞれ

$$
\{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\left(J_L^{-1}\right)^T J_L^{-1}\boldsymbol{v} < 1\} \tag{4.42}
$$

$$
\{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\left(\widehat{J}_L^{-1}\right)^T \widehat{J}_L^{-1}\boldsymbol{v} < 1\} \tag{4.43}
$$

と定義される楕円体$\boldsymbol{v}$を，$\boldsymbol{q}$に対応する手先位置に図示したものである (ただし，$q_2 > 0$ と仮定した)．図を見ると，手先がベースから遠いほど，2 つのヤコビ行列の差が大きい．また，関節における速度の限界が等しいとすれば，全領域に渡って一般化ヤコビ行列 (浮遊マニピュレータ) の方が，手先が動きにくい (可操作度が劣る) ということがわかる．

4.5 動力学

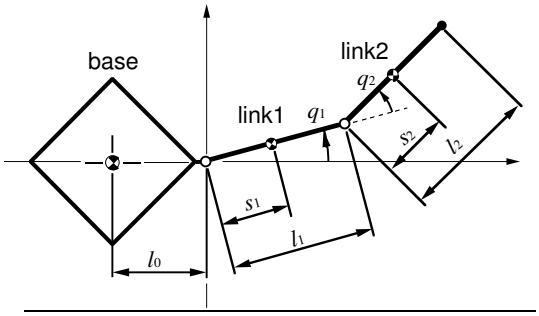
次に，系の運動方程式をラグランジェ法によって導出する．

系全体の運動エネルギ T は各剛体の並進と回転のエネルギの総和として定義される．

$$
T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\{\boldsymbol{\Omega}_i{}^T\ {}^{B}I_i\boldsymbol{\Omega}_i + m_i\boldsymbol{V}_i{}^T\boldsymbol{V}_i\} \tag{4.44}
$$

式 (4.44) に式 (4.3), (4.4) を代入して整理すると，

$$
T = \frac{1}{2}[\ \boldsymbol{V}_B{}^T\ \boldsymbol{\Omega}_B{}^T\ \dot{\boldsymbol{q}}^T\ ]\begin{pmatrix} H_V & H_{V\Omega} & H_{Vq} \\ H_{V\Omega}{}^T & H_\Omega & H_{\Omega q} \\ H_{Vq}{}^T & H_{\Omega q}{}^T & H_q \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_B \\ \boldsymbol{\Omega}_B \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} \tag{4.45}
$$



link		0 (base)	1	2
l_i	[m]	1.75	2.50	2.50
s_i	[m]	0.00	1.25	1.25
m_i	[kg]	2000.00	50.00	50.00
I_i	[kgm^2]	1500.00	26.00	26.00

Fig. 4.4 Planar 2-link space manipulator model

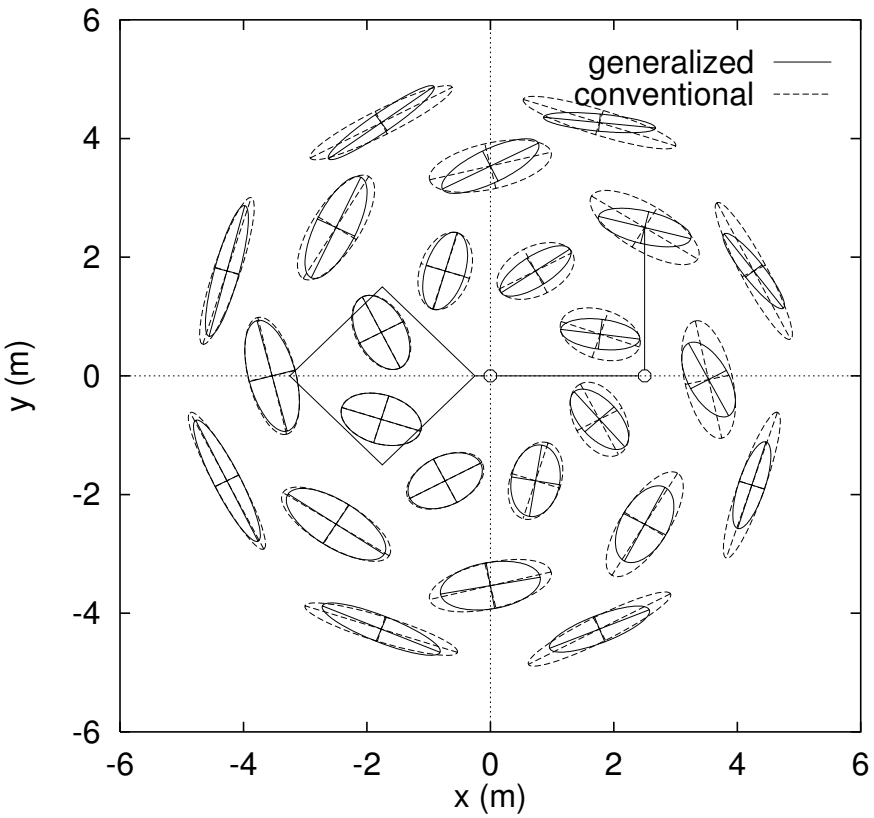


Fig. 4.5 Manipulability ellipsoid of each tip position

となる．ここで，

$$H_q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0,\ i\neq B}^{n} \{ {J_{Ai}}^T\ {}^B I_i J_{Ai} + m_i {J_{Li}}^T J_{Li} \} \qquad \in R^{n\times n} \tag{4.46}$$

はベースが変動しない場合のマニピュレータの慣性行列である [37].

系の運動量と角運動量が零で保存される場合には，関係式 (4.23) が成り立つので，これを式 (4.45) に代入して，

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} \widehat{H} &\stackrel{\text{def}}{=} H_q - (\ {H_{Vq}}^T\ {H_{\Omega q}}^T\ ) \begin{pmatrix} H_V & H_{V\Omega} \\ {H_{V\Omega}}^T & H_\Omega \end{pmatrix}^{-1} nn \begin{pmatrix} H_{Vq} \\ H_{\Omega q} \end{pmatrix} \\ &= H_q - m_C {J_C}^T J_C - {H_M}^T {H_B}^{-1} H_M \qquad \in \mathbf{R}^{n\times n} \end{aligned} \tag{4.48}$$

を得る．慣性行列 $\widehat{H}$ は正定対称で，このような場合にはベースの位置や姿勢に依存しない関節変数 $\boldsymbol{q}$ だけの関数になる．したがって，系のダイナミクスはベースが変動しないマニピュレータと同様に扱うことができる．

無重力空間では重力によるポテンシャルエネルギは存在しないので，ラグランジェ関数は運動エネルギに等しい．関節 i における粘性を c_i とすると，ラグランジェ法により，系の運動方程式は

$$\widehat{H}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\dot{\widehat{H}} + C)\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\{\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H}\ \dot{\boldsymbol{q}}\} = \boldsymbol{\tau} \tag{4.49}$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{diag}\ [\ c_i\ ] \qquad \in R^{n\times n} \tag{4.50}$$

となる．ここで，ベクトル $\boldsymbol{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} [\ \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\ ]$ は各関節のアクチュエータへの制御入力トルクである．

4.6 おわりに

本章では，無重力空間に浮遊するマニピュレータ系の運動学と動力学を明らかにした．この後の章では，これらを用いて浮遊マニピュレータの手先の制御則やその安定性や制御特性，さらに遠隔操作性などについて論ずる．

第 5 章

浮遊マニピュレータの転置ヤコビ行列制御

5.1 はじめに

第4章で述べたように，浮遊マニピュレータの慣性座標系における手先の位置は，その瞬間の関節変位の関数としては表現できない．このため，手先の目標位置が与えられた場合に，それを実現する関節変位は幾何学的に決まらず，手先位置決め制御を関節空間に置き換えて考えることは不可能である．

しかし，見方を変えれば，関節がある初期状態から目標状態へ変位する際に，そのたどる経路によってベースの姿勢は様々に変化することになる．非ホロノミックな系への興味も手伝ってか，この性質を利用した様々な軌道生成の手法が提案されている [20] [25] [26] [27] [28] [29]．例えば，ベースの変動をできるだけ抑える経路を選ぶ方法や，微小な繰り返し運動によってベースの姿勢を変更する方法などが考えられている．しかし，これらの手法で得られるのは，目標となる関節変位の時間軌道だけである．いずれの手法もマニピュレータの慣性パラメータに依存しており，パラメータの同定誤差や制御上の誤差をどのように克服するかという問題が残る．梅谷らは “一般化ヤコビ行列” を分解速度制御に適用しているが [22]，これを軌道追従制御に用いると，系の動特性を無視したことによる速度誤差が位置誤差として累積するという問題点がある．また，Alexander らや Koningstein らは，ベースの運動を含めた系の動力学モデルから関節の入力トルクを計算する分解加速度制御を提案しているが [30] [31]，必要な計算を効率良く行うアルゴリズムが提案 [38][39][40] されているとはいうものの，複雑な処理が必要である．また，浮遊マニピュレータの実際の運用を考えると，制御に用いる観測値はマニピュレータの手先かベース上で得られることが望ましいが，このことを考慮せずに，慣性空間に対するベースの位置姿勢やその速度まで必要とする制御則が多いようである．

本章では，以上のような問題を解決するために，逆動力学の計算を用いずに，センサで観測された手先の偏差を関節アクチュエータの入力へ直接フィードバックする制御則を提案する．これは外部センサの作業系における人工ポテンシャルの考えに基づいており [41][42]，その計算の形式から “転置ヤコビ行列制御” と呼ぶ．この制御則では，ベースに搭載された外部センサが計測した目標物体と手先の位置情報から手先の偏差を求め，その値に一般

化ヤコビ行列の転置を乗じて各関節のアクチュエータへの入力としてフィードバックする．制御に必要なのは関節の変位と速度，および外部センサの情報だけであり，ベース自身の位置と姿勢を計測する必要はない．さらに，ベースは変動しているので，目標は静止していても，センサ座標系においてマニピュレータは動く目標を追従しなければならない．一般に，動点に対する位置決めの漸近安定性を議論することは難しいが，ここでは，ベースとマニピュレータの速度関係式を利用して，閉ループ系の目標状態が漸近安定であることをリヤプノフ法によって証明する．

以下では，この制御則について説明し，その安定性について議論し，計算機シミュレーションによって提案する制御則の有効性を確認する．

5.2 制御則

ここでは，慣性座標系で静止した物体上に与えられた目標の位置と姿勢に対してマニピュレータの手先を収束させることを目標とする．ただし，マニピュレータを作動させる前に，手先の到達できる範囲に目標が入るようにベースの位置と姿勢が配置されており，マニピュレータが動作している間はベースを制御しないものとする．

手先の目標と現在の位置と姿勢から，位置の偏差 $\boldsymbol{e}_p$ と姿勢の偏差$\boldsymbol{e}_o$ および $\boldsymbol{E}_o$ を定義する．

$$\boldsymbol{e}_p \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_D - \boldsymbol{r}_E \quad \in \mathbf{R}^3 \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{e}_o \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_E \times \boldsymbol{X}_D + \boldsymbol{Y}_E \times \boldsymbol{Y}_D + \boldsymbol{Z}_E \times \boldsymbol{Z}_D) \quad \in \mathbf{R}^3 \tag{5.2}$$

ここで添字の '$_D$' と '$_E$' は，それぞれ，目標と現在の手先に関する量を示している．また，ベクトル$\boldsymbol{X}_*, \boldsymbol{Y}_*, \boldsymbol{Z}_*$ は，座標系Σ_*の軸に沿った単位ベクトルである．これらの偏差は宇宙機に搭載された視覚センサなどで得られるデータから決定することができる．

さて，以上のようなベース搭載のセンサの情報を各関節へ入力トルク$\boldsymbol{\tau}$としてフィードバックする制御則を以下に示す．

$$\boldsymbol{\tau} = k_p\ \widehat{J}_L^T(\boldsymbol{q})\ \boldsymbol{e}_p + k_o\ \widehat{J}_A^T(\boldsymbol{q})\ \boldsymbol{e}_o - K_V\ \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.3}$$

ここで，k_p と k_o はそれぞれスカラ値で正の位置と姿勢のゲイン，$K_V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は正定対称な速度ゲインである．式 (5.3) を表わすブロック線図を **Fig. 5.1**に示す．この制御則では，外部センサの計測値に基づいて手先の偏差 $\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_o$ が計算される．次に，これらの偏差にゲイン k_p, k_oと一般化ヤコビ行列の転置 $\widehat{J}_L^T, \widehat{J}_A^T$ を乗じて各関節へフィードバックする．このように制御入力は非常に簡単な計算で導出される．また，制御入力を求める過程でベースの位置と姿勢はいっさい使わないので，これらを常時計測する必要はない．

5.3 安定性に関する議論

人工ポテンシャル [41] という観点から制御則 (5.3) を眺めると，偏差 $\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_o$ に基づくフィードバック項は外部センサの座標系 (ベース座標系) に人為的なポテンシャルエネルギ

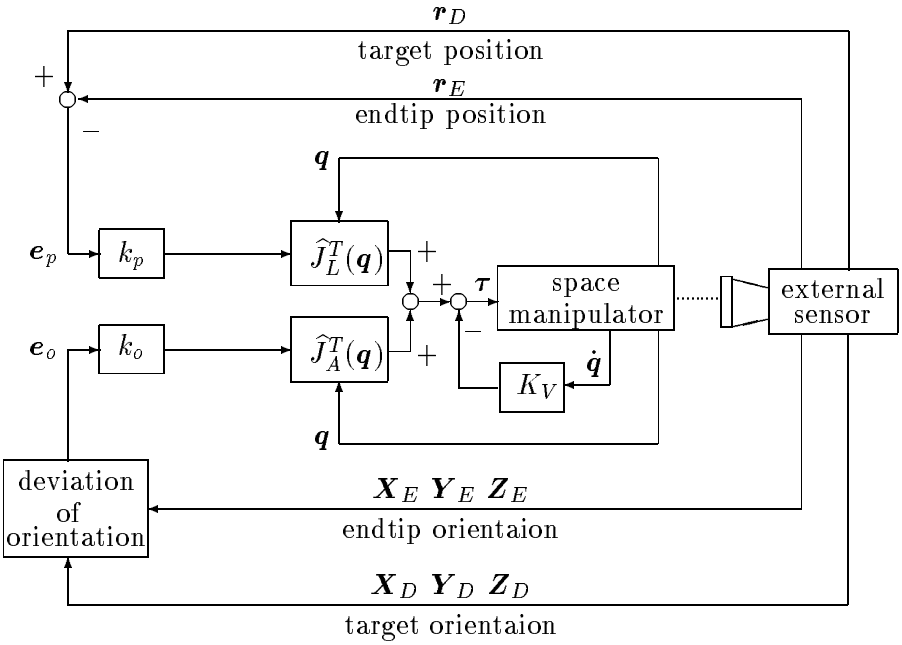


Fig. 5.1 Block diagram of the control scheme

を付加することを意味する．つまり，式 (5.3) の第 1, 2 項はこの人工ポテンシャルよって手先に生じる力をベースの変動分を考慮して関節のトルクに変換したものと見なすことができる．この考え方は，従来の作業座標系に基づくセンサフィードバック制御則と形式的には同じである．しかし，本論文の場合には，ポテンシャルを定義しているセンサ座標系が変動しているため，従来と同様に取り扱うことはできない．換言すれば，本制御則では，マニピュレータ手先はセンサ座標系上で動いている目標を追従しなければならない．一般に，運動する目標に対するグローバルな位置決めの安定性を示すことは難しいが，ここでは，目標物体の見かけの運動がマニピュレータの動作だけに依存しているので，位置決めの安定性を議論できる．

[**定理**] (4.49) と (5.3) で表される閉ループ系において，動作中に

$$\mathrm{rank}(\ \widehat{J}_L^T\ \widehat{J}_A^T\ ) \geq 6 \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{X}_E{}^T\ \boldsymbol{X}_D + \boldsymbol{Y}_E{}^T\ \boldsymbol{Y}_D + \boldsymbol{Z}_E{}^T\ \boldsymbol{Z}_D > -1 \tag{5.5}$$

という条件が満足されるならば，平衡状態

$$\boldsymbol{r}_E = \boldsymbol{r}_D,\ \ \boldsymbol{X}_E = \boldsymbol{X}_D,\ \ \boldsymbol{Y}_E = \boldsymbol{Y}_D,\ \ \boldsymbol{Z}_E = \boldsymbol{Z}_D\ \ \text{かつ}\ \ \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}_n \tag{5.6}$$

は漸近安定である．

この定理は，提案する制御則によって，$t \to \infty$ で手先の位置と姿勢が目標に収束することを意味している．また，条件 (5.5) は，姿勢の偏差 (5.2) が，$\Sigma_D = \Sigma_E$の場合以外は 0 にならないことを保証している．2 つの条件 (5.4) と (5.5) は，ほとんどの場合に成立する．

[証明] 系を表現する状態変数としては，関節の $\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ に加えて，ベースの姿勢 $\boldsymbol{\phi}$ が必要となる．これらをまとめて状態変数ベクトル $\boldsymbol{z}$ とおく．

$$\boldsymbol{z} \stackrel{\text{def}}{=} [\boldsymbol{\phi}^T \ \boldsymbol{q}^T \ \dot{\boldsymbol{q}}^T]^T \qquad \in \mathbf{R}^{2n+3} \tag{5.7}$$

このとき，提案した制御則 (5.3) を含む閉ループ系は，微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) \tag{5.8}$$

で記述される．ここで，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} G(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q}) \ \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \\ \widehat{H}^{-1}(\boldsymbol{q}) \ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix} \in R^{2n+3}, \tag{5.9}$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} -N^{-1} \ H_B^{-1} \ H_M \qquad \in R^{3\times 3} \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} -\dot{\widehat{H}} \ \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\{\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H} \ \dot{\boldsymbol{q}}\} + \boldsymbol{\tau} \quad \in \mathbf{R}^n \tag{5.11}$$

で定義される．

定理を証明するために，次のような姿勢の偏差を別に導入する．

$$\boldsymbol{E}_o \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_D - \boldsymbol{X}_E \\ \boldsymbol{Y}_D - \boldsymbol{Y}_E \\ \boldsymbol{Z}_D - \boldsymbol{Z}_E \end{bmatrix} \qquad \in \mathbf{R}^9 \tag{5.12}$$

次に，リヤプノフ関数の候補として，

$$W(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}k_p \ \boldsymbol{e}_p{}^T \ \boldsymbol{e}_p + \frac{1}{4}k_o \ \boldsymbol{E}_o{}^T \ \boldsymbol{E}_o + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H} \ \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.13}$$

を選ぶ．これは，目標状態の集合

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \ \boldsymbol{z} \ | \ \boldsymbol{r}_E = \boldsymbol{r}_D, \ \ \boldsymbol{X}_E = \boldsymbol{X}_D, \ \ \boldsymbol{Y}_E = \boldsymbol{Y}_D, \ \ \boldsymbol{Z}_E = \boldsymbol{Z}_D, \ \ \dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{0}_n \} \tag{5.14}$$

において零で，それ以外では必ず正になる．集合 $\mathcal{E}$ は状態変数$\boldsymbol{z}$ の空間の孤立した点ではなく，連続した点の集合である．

W の時間微分は，

$$\dot{W} = k_p \ \boldsymbol{e}_p{}^T \ \dot{\boldsymbol{e}}_p + \frac{1}{2}k_o \ \boldsymbol{E}_o{}^T \ \dot{\boldsymbol{E}}_o + \dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H} \ \ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \dot{\widehat{H}} \ \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.15}$$

であり，以下のような関係式

$$\dot{\boldsymbol{q}}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \{ \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H} \ \dot{\boldsymbol{q}} \} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \dot{\widehat{H}} \ \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_p = \boldsymbol{V}_E - [\boldsymbol{\Omega}_B \times] \ \boldsymbol{e}_p \tag{5.17}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_o = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{X}_E \times] \\ [\boldsymbol{Y}_E \times] \\ [\boldsymbol{Z}_E \times] \end{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_E - \begin{pmatrix} [\boldsymbol{\Omega}_B \times] & O & O \\ O & [\boldsymbol{\Omega}_B \times] & O \\ O & O & [\boldsymbol{\Omega}_B \times] \end{pmatrix} \boldsymbol{E}_o \tag{5.18}$$

と一般化ヤコビ行列の関係式 (4.34), (4.35) を用いて，方程式 (5.8) の解軌道に沿った値を求めると，

$$\dot{W} = -\dot{\boldsymbol{q}}^T K_V \dot{\boldsymbol{q}} \quad \leq 0 \tag{5.19}$$

となる．これは状態変数 $\boldsymbol{z}$ に対して準負定である．

リヤプノフ関数の時間微分 $\dot{W}$ が零になるのは $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}_n$ のときで，式 (5.8) より，この集合の中の不変集合の全ての要素は

$$\begin{pmatrix} \widehat{J}_L^T & \widehat{J}_A^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_p \ \boldsymbol{e}_p \\ k_o \ \boldsymbol{e}_o \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_n \tag{5.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{0}_3 \tag{5.21}$$

を満足する．条件 (5.4) より，式 (5.20) は$\boldsymbol{e}_p = \boldsymbol{0}_3$, $\boldsymbol{e}_o = \boldsymbol{0}_3$ と等価である．また，条件 (5.5) より，$\boldsymbol{e}_o = \boldsymbol{0}_3$ は $\boldsymbol{E}_o = \boldsymbol{0}_9$ と等価である．これより，$\dot{W} = 0$ を満足する状態の最大不変集合は集合 $\mathcal{E}$ と一致するので，ラサールの定理より，系 (5.8) において集合 $\mathcal{E}$ は漸近安定である．□

もし，条件 (5.4) と (5.5) が満たされていないと，集合 $\mathcal{E}$ 以外の平衡状態，つまりヤコビ行列の特異状態が存在し，式 (5.8) の解がそこで停留するおそれがある．しかし，たとえ停留したとしても，制御入力 $\boldsymbol{\tau}$ が零になるだけで，ヤコビ行列の逆を解いて速度分解する場合のように制御入力が過大になるようなことはない．実際には，このような状態に陥ったときは，一時的に停留点から抜け出すための入力を付加してやればよい．

物理的な観点からすると，式 (5.3) の位置と姿勢のフィードバック項はセンサー座標系のにおける放物型のポテンシャルから与えられると考えることができる．この考え方によれば，上述とは異なる人工ポテンシャルを導入することによって，系の安定性を損なわずに非線形フィードバックを実現できる．例えば，放物形と円錐形の複合ポテンシャル [42] を導入するには，偏差ベクトルの大きさの上限値 e_{pmax}, e_{omax} を設けて，次のようなポテン

シャル関数を定義する．

$$U \stackrel{\text{def}}{=} U_p + U_o \tag{5.22}$$

$$U_p \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{k_p}{2}\left|\boldsymbol{e}_p\right|^2 & \left|\boldsymbol{e}_p\right| \leq e_{pmax} \\ k_p e_{pmax}\left(\left|\boldsymbol{e}_p\right| - \dfrac{e_{pmax}}{2}\right) & \left|\boldsymbol{e}_p\right| > e_{pmax} \end{cases} \tag{5.23}$$

$$U_o \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{k_o}{4}\left|\boldsymbol{E}_o\right|^2 & \left|\boldsymbol{E}_o\right| \leq \sqrt{2}e_{omax} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}k_o e_{omax}\left(\left|\boldsymbol{E}_o\right| - \dfrac{\sqrt{2}}{2}e_{omax}\right) & \left|\boldsymbol{E}_o\right| > \sqrt{2}e_{omax} \end{cases} \tag{5.24}$$

ただし，$|*|$ はユークリッドノルムを意味する．この複合ポテンシャルを用いることは，偏差 $\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_o$ の代わりに次のような偏差$\overline{\boldsymbol{e}}_p, \overline{\boldsymbol{e}}_o$ を用いることと等価である．

$$\overline{\boldsymbol{e}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \boldsymbol{e}_p & \left|\boldsymbol{e}_p\right| \leq e_{pmax} \\ \dfrac{\boldsymbol{e}_p}{\left|\boldsymbol{e}_p\right|}e_{pmax} & \left|\boldsymbol{e}_p\right| > e_{pmax} \end{cases} \tag{5.25}$$

$$\overline{\boldsymbol{e}}_o \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \boldsymbol{e}_o & \left|\boldsymbol{E}_o\right| \leq \sqrt{2}e_{omax} \\ \dfrac{\sqrt{2}\boldsymbol{e}_o}{\left|\boldsymbol{E}_o\right|}e_{omax} & \left|\boldsymbol{E}_o\right| > \sqrt{2}e_{omax} \end{cases} \tag{5.26}$$

以上の偏差を用いると，入力が過大になることを防ぎ，手先が目標点に至る経路を改善することができる．実際に，次の小節で示すシミュレーションでは，この方法を用いている．

なお以上の偏差を使った場合，以下のリヤプノフ関数によって平衡状態 (5.14) の安定性を証明できる．

$$W = U + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H}\ \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.27}$$

この関数の時間微分は

$$\dot{W} = \dot{\boldsymbol{e}}_p^T \frac{\partial U_p}{\partial \boldsymbol{e}_p} + \dot{\boldsymbol{E}}_o^T \frac{\partial U_o}{\partial \boldsymbol{E}_o} + \dot{\boldsymbol{q}}^T \widehat{H}\ \ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \dot{\widehat{H}}\ \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.28}$$

となるので，前の証明と同じように扱うことができる．

5.4 シミュレーション

前節で提案した制御則の有効性を検証するために，計算機シミュレーションを行なう．シミュレーションに用いるモデルは，**Fig. 5.2**に示すような 2000 [kg] の宇宙船に搭載された 140 [kg] の回転型関節の 6 自由度マニピュレータである．定式化は山田らの方法を参考にした [43]．

結果の一例を **Fig. 5.3**に示す．この図は 3 秒毎の投影像を重ねて表示したもので，手先の姿勢がわかりやすいように手先に直方体を持たせている．慣性座標系で与えられた目標

の位置と姿勢は，3 次元空間で互いに直行する 3 本の線分で示している．直方体の 3 つの辺をこれらの線分に一致させるのが位置決めの目標状態である．

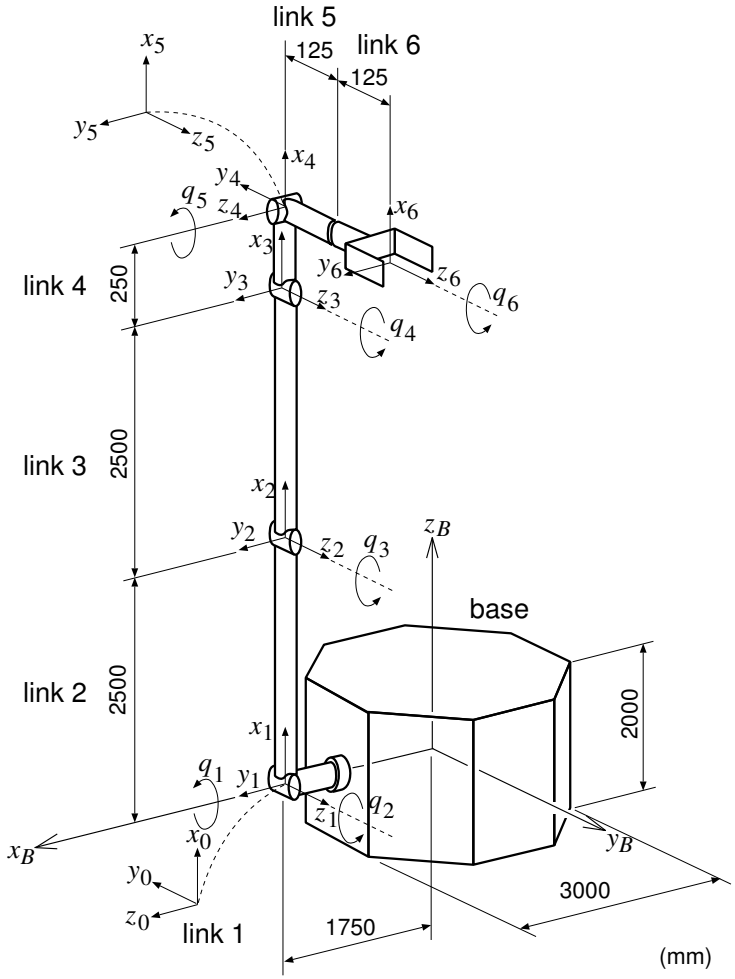
Fig. 5.3 (a) は，ベースの変動を無視して手先の位置決めを関節空間に置き換えて制御した結果である．各関節の目標値は，初期状態で与えられた手先とベースの位置と姿勢に対して逆運動学を解いたもので，その値は動作中変更していない．このような制御法では，ベースの変動により，手先は目標とは異なった点に収束してしまう．この例では，ベースの慣性はマニピュレータ部分に比べてかなり大きいが，それでもその変動は手先の制御において無視することができない．

Fig. 5.3 (b) は，前節で提案した制御則を用いた結果である．初期状態と目標の位置姿勢は (a) と同じで，設定した制御パラメータは以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
k_p &= 75 \quad [\mathrm{N}] \\
k_o &= 100 \quad [\mathrm{Nm}] \\
K_V &= \mathrm{diag}(400, 100, 200, 10, 2, 2) \quad [\mathrm{Nmsec/rad}] \\
e_{pmax} &= 0.2 \quad [\mathrm{m}], \\
e_{omax} &= 0.1
\end{aligned}
$$

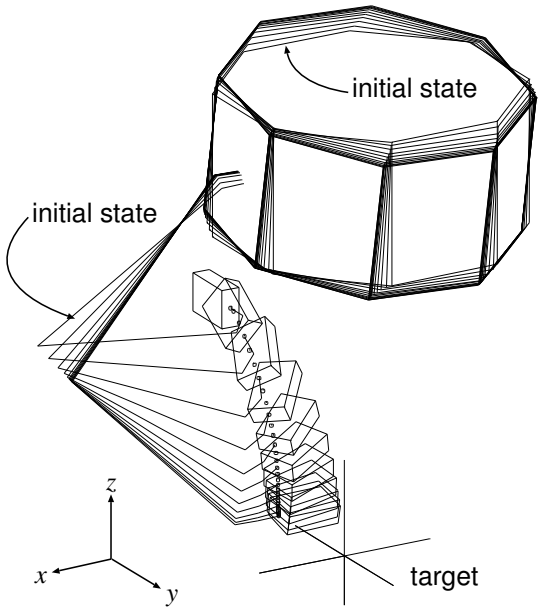
この場合の手先の偏差の大きさ $|\boldsymbol{e}_p|$, $|\boldsymbol{e}_o|$ の時間的な変化を **Fig. 5.4**に示す．手先が目標に収束した時点でのベースの位置変動は，x: 0.01 [m], y: 0.07 [m], z: 0.04 [m] で，姿勢変動は，ロール: 16 [deg], ピッチ: 10 [deg], ヨー: 1 [deg] である．位置変動はわずかであるが，姿勢の変動はこの程度でもベースから離れた手先には大きな影響を及ぼす．しかしながら，このようなベースの変動にも関わらず，手先の位置と姿勢は目標に収束している．

また，動作中の手先の速度と加速度の大きさは，最大でそれぞれ約 0.65 [m/sec], 2.5 [m/sec^2] である．一方，ベースに発生する角加速度を **Fig. 5.5**に示す．これから換算すると，ベースに作用するマニピュレータの反力モーメントは 1 〜 10 [Nm] まで達している．ベースのアクチュエータで姿勢変動を抑えるためには，反力モーメントと同じ大きさのモーメントを発生できなければならない．しかし，この値は現行のリアクションホイールの能力と 10 倍以上の隔たりがあり，この程度の動作速度でもベースの変動を抑えることは難しいことがわかる．逆に，リアクションホイールの能力の範囲内でマニピュレータを動作させようとするならば，作業効率は非常に低下してしまう．したがって，宇宙ロボットの機動性を活用するには，本章で提案したような，ベースが変動しても手先の位置決めの可能な制御則が有用であることがわかる．

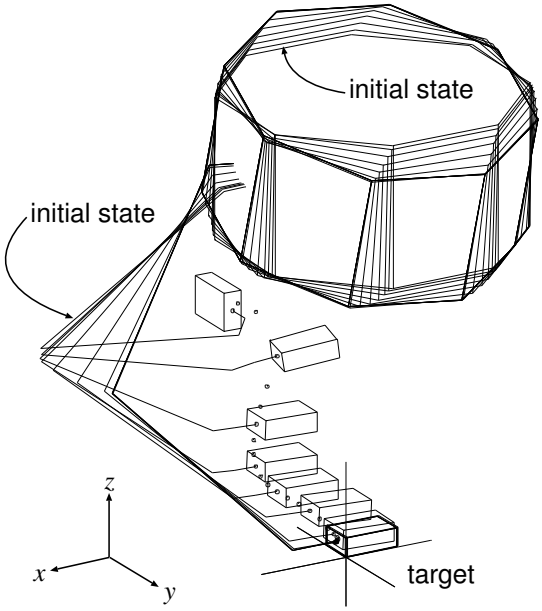


link		0 (base)	1	2	3	4	5	6
m_i	[kg]	2000	20.00	50.00	50.00	10.000	5.000	5.000
I_{ix}	[kgm^2]	1400	0.15	0.25	0.25	0.050	0.025	0.025
I_{iy}	[kgm^2]	1400	0.10	26.00	26.00	0.075	0.025	0.025
I_{iz}	[kgm^2]	2040	0.15	26.00	26.00	0.075	0.019	0.025

Fig. 5.2 6 DOF manipulator mounted on spacecraft

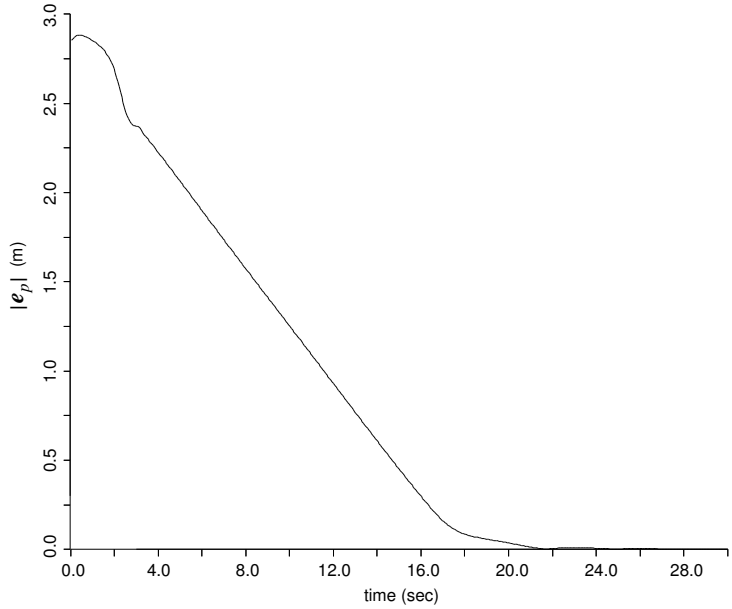


(a) Joint-base PD feedback control

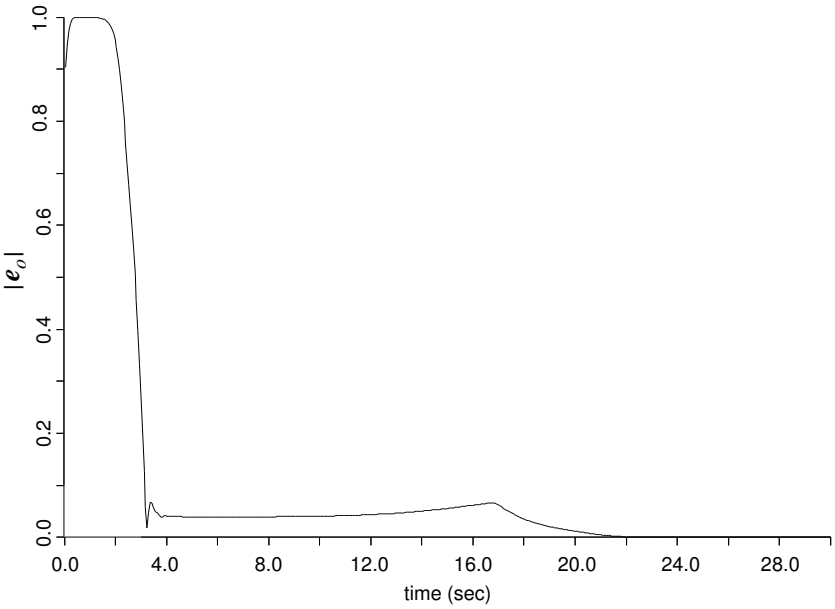


(b) Proposed sensory feedback control

Fig. 5.3 Results of the simulations (every 3 seconds)



(a) Deviation of position



(b) Deviation of orientation

Fig. 5.4 Time histories of the norms of endtip's deviations

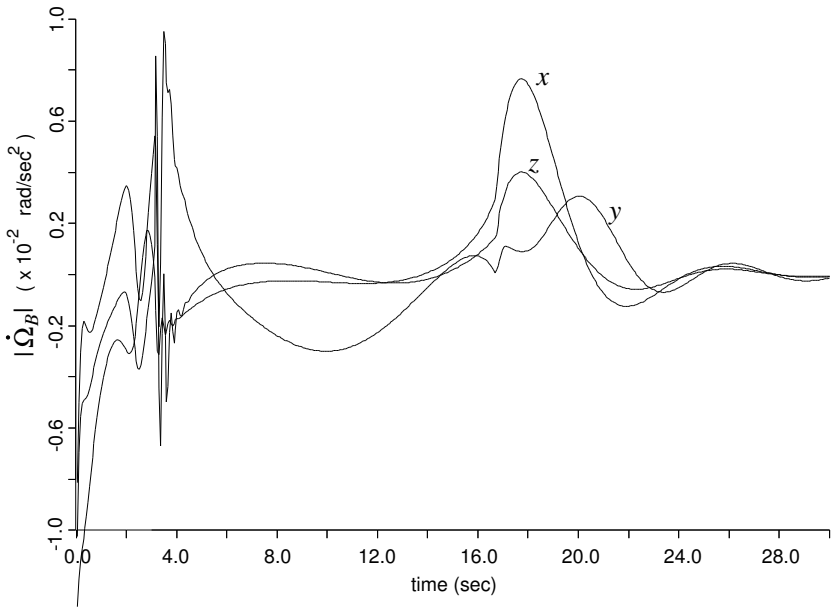


Fig. 5.5 Time history of the angular acceleration of the base

5.5 おわりに

ベースを駆動しない浮遊マニピュレータでは，手先の位置が関節変位の関数として表現できないので，手先の位置決め制御を関節変数の空間に置き換えて扱うことができない．したがって，外部センサの情報を関節へ直接フィードバックする制御が不可欠であり，本章では，これを実現する一手法を提案した．

提案した制御則は，分解加速度制御などと違い，系の逆動力学の計算を必要としない．宇宙においては放熱の悪さや宇宙線の影響を考慮する必要があるので，コンピュータの高密度化と高速化は地上よりかなり遅れている．したがって，簡単な計算で実現できるこの制御則は宇宙用として適している．

また，シミュレーションの結果によれば，マニピュレータに対するベースの重量比が10倍以上あっても，マニピュレータの動作反力によるベースの変動は手先の位置決めに大きな影響を及ぼすことが明らかになった．ベースの姿勢の変動を抑えるために必要なモーメントはかなり大きく，マニピュレータの反力を打ち消しながら制御する方法が適当でないこともわかった．これは，ベースのアクチュエータを使わずに，マニピュレータを制御する方法の有用性を意味している．

第 6 章

近似ヤコビ行列を用いた制御

6.1 はじめに

第5章では，一般化ヤコビ行列を用いた制御則を提案した．しかし，一般化ヤコビ行列は，導出のための計算が複雑で，また各リンクの幾何パラメータだけでなく慣性パラメータにも依存するので，従来のヤコビ行列に比べると使いにくい．そこで，本章では，一般化ヤコビ行列の短所について述べた後，一般化ヤコビ行列の代わりとして従来のヤコビ行列を用いることの可能性について数値例を使って検討する．

6.2 一般化ヤコビ行列の短所

第4章では，従来のヤコビ行列から一般化ヤコビ行列を導出する系統的なアルゴリズムについて論じた．また，その具体例として，**附章G**に n リンクの直列型マニピュレータの場合の具体的な導出手順を載せた．それによると，直列 n リンクマニピュレータの場合の手先の並進と回転の速度に対応する $6 \times n$ のヤコビ行列を計算するために必要な演算の回数は，**Table 6.1**のようになる．これからわかるように，一般化ヤコビ行列を得るための計算量は，従来のそれに比べて格段に多い．これが，一般化ヤコビ行列を用いる短所の一つである．

別の短所は，一般化ヤコビ行列が，マニピュレータ各リンクやベースの慣性パラメータ (質量，慣性テンソル，質量中心の位置) を含んでいることである．このため，一般化ヤコビ行列を求めるには種々の慣性パラメータの同定が必要であり，さらに，ベースの積荷や燃料，手先に把持した物体が変化すると，そのたびに同定をやり直さなければならない．

6.3 安定領域に関する数値的な解析

これらの短所を解決する一つの方法は，一般化ヤコビ行列の代わりに従来のヤコビ行列を使うことである．しかし，そうすると近似的なヤコビ行列を使って制御される系の特性

Table 6.1 Numerical complexities in computing the generalized and fixed-base Jacobians ($6 \times n$ matrices)

	generalized Jacobian	conventional (fixed-base) Jacobian
division	3 (3)	0 (0)
multiplication	$12n^2 + 148n + 19$ (1339)	$30n - 11$ (169)
addition & subtraction	$12n^2 + 126n + 16$ (1204)	$18n - 20$ (88)

$(*)$: in case of $n = 6$

という新たな問題について議論しなければならない．

まず，**第5章**で述べた議論において，一般化ヤコビ行列$\widehat{J}_L$, $\widehat{J}_A$の代わりに，従来のヤコビ行列 J_L, J_Aを用いても

$$\mathrm{rank}(J_L^T \ J_A^T) \geq 6 \tag{6.1}$$

という条件と式 (5.5) が成立するならば，系の平衡点 ($\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = 0$ を満たす$\boldsymbol{z}$) は目標状態以外には存在しないことが容易にわかる．条件 (6.1) が満たされないのは，幾何学的な条件から決まる特異姿勢のときだけであり，これを避けて機構を設計したり，作業計画を行うことは難しいことではない．つまり，転置ヤコビ行列制御では，近似ヤコビ行列を用いてもマニピュレータの手先が目標とは異なる位置に収束してしまうことはない．

次に，平衡点の安定性に関しては，Miyazaki らが一般的なマニピュレータのヤコビ行列を用いたフィードバック制御に対して，ヤコビ行列に誤差が含まれる場合の漸近安定性に関する十分条件を与えている [44]．しかし，その結果を使って，不安定を引き起こす実際的な条件を導くことは困難である．そこで，以下ではそのような範囲をより具体的に評価するために，線形化した閉ループ系の安定領域について解析する．簡単のために，ここでは手先の姿勢の制御は省いて考える．

関節角が $\boldsymbol{q}_D$ に等しい時，手先が目標と一致しているとする．従来のヤコビ行列を使った制御を用い，その非線形な方程式 (4.49) と (5.3) を $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = (\boldsymbol{q}_D, \boldsymbol{0}_n)$ の周りで線形化すると，以下のような微分方程式が導かれる．

$$\widehat{H}_D \ \delta\ddot{\boldsymbol{q}} + K_V \delta\dot{\boldsymbol{q}} + k_p J_D^T \widehat{J}_D \ \delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}_n \tag{6.2}$$

ここで，

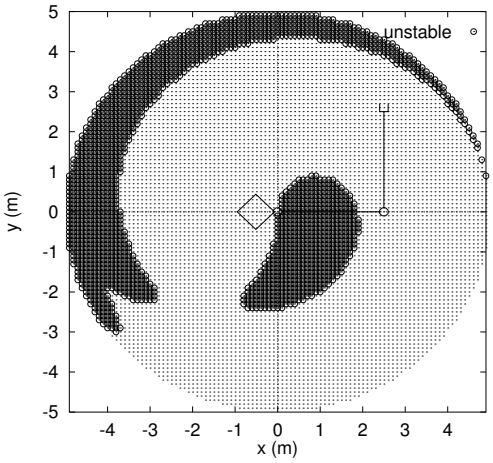
$$\widehat{H}_D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{H}(\boldsymbol{q}_D) \quad J_D \stackrel{\mathrm{def}}{=} J(\boldsymbol{q}_D) \quad \widehat{J}_D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{J}(\boldsymbol{q}_D) \tag{6.3}$$

である．このとき，系 (6.2) の特性方程式の根を調べることによって，目標点$\boldsymbol{q}_D$の安定性を調べることができる．

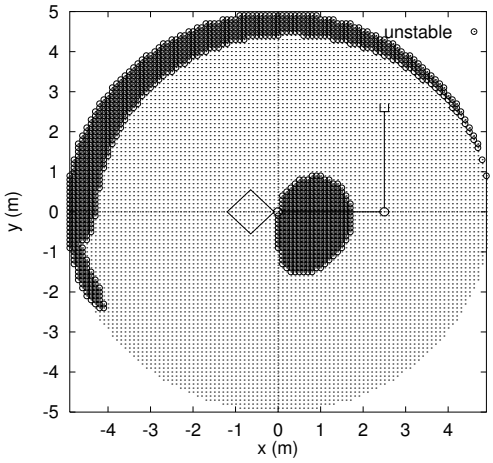
以下では，一つの解析例として，**Fig. 4.4**に示す 2 自由度マニピュレータの平面モデルを用いる．制御パラメータは $k_p = 100$[N], $K_V = \mathrm{diag}(200, 1000)$[Nmsec/rad], とする．式 (6.2) の係数行列$\widehat{H}_D$, J_D, $\widehat{J}_D$は，$\boldsymbol{q}_D$の関数であるから，任意の$\boldsymbol{q}_D$に対して安定性を解析することが可能であり，安定領域を図示することができる．**Fig. 6.1**は，その領域を手先の位置に関して表現したものである．ただし，この領域は，慣性座標系ではなく，ベース座標系に対して表したものである．図では，ベースの大きさに依存して，安定領域がどのように変化するかも示している．ベースの大きさは，マニピュレータの総質量に対するベースの質量の比で表す．ベースの密度は大きさにかかわらず一定で，相似を保って変形すると仮定する．つまり，寸法の比は質量比の 1/3 乗，慣性モーメントの比は質量比の 5/3 乗である．

図に示されているように，質量比が非常に小さい場合は，不安定領域はかなり広い．しかし，実際的な状況を考えると，質量比は 5.0 以上であり，そのような場合には，不安定領域はわずかである．この結果は，提案する制御則に従来のヤコビ行列が利用できることを示唆している．

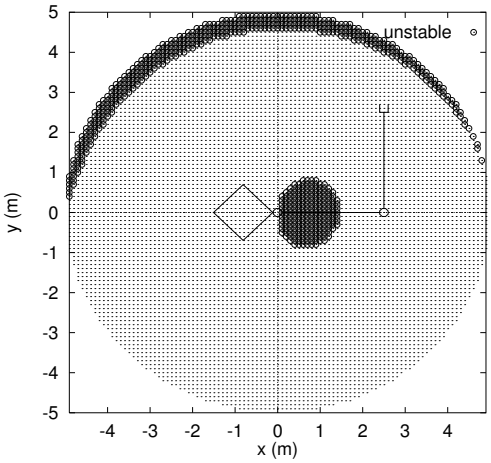
また，別の数値的な解析によれば，ゲイン k_p と K_V は，不安定領域の分布にほとんど影響を及ぼさないこともわかる．



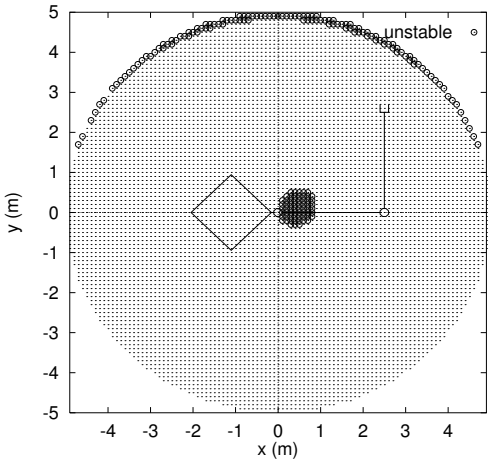
(a) mass ratio = 0.5



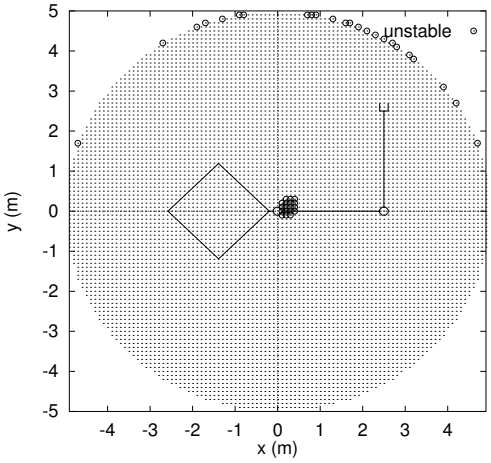
(b) mass ratio = 1



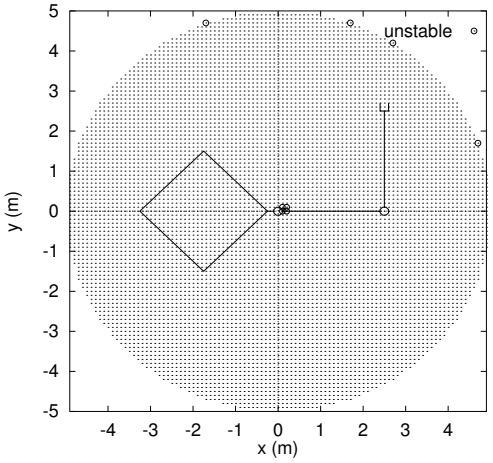
(c) mass ratio = 2



(d) mass ratio = 5



(e) mass ratio = 10



(f) mass ratio = 20

Fig. 6.1 Stable region for each mass ratio

Table 6.2 Physical parameters of 2 DOF planar space manipulator model

link		0 (base)	1	2
l_i	[m]	1.10	2.50	2.50
s_i	[m]	0.00	1.25	1.25
m_i	[kg]	500.00	50.00	50.00
I_i	[kgm^2]	148.82	26.00	26.00

6.4 シミュレーション

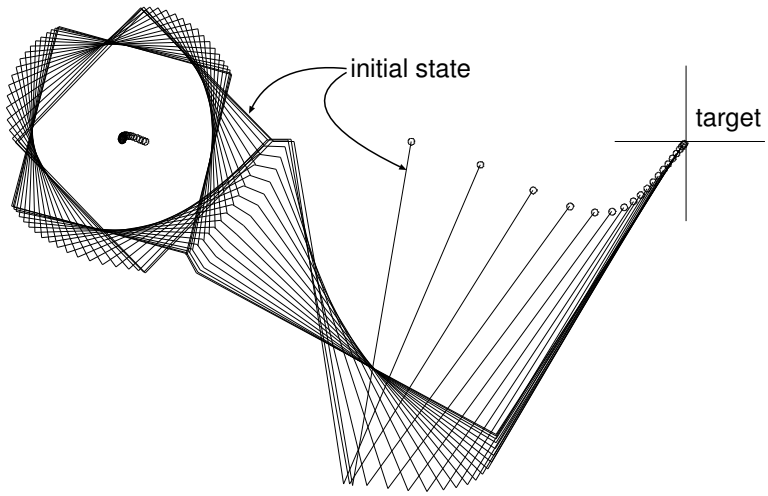
近似的なヤコビ行列を用いた制御系の挙動を議論するために，以下では，一つの解析例として，**Fig. 4.4**に示す 2 自由度マニピュレータの平面モデルのパラメータを **Table 6.2** に変更したものを用いて，シミュレーションを行う．前節の数値的な解析では，線形化したモデルを用いたが，ここでは，元の非線形運動方程式を用いる．制御パラメータは以下のように設定した．

$$
\begin{aligned}
k_p &= 100 \quad [\mathrm{N}] \\
K_V &= \mathrm{diag}(200, 1000) \quad [\mathrm{Nmsec/rad}] \\
e_{pmax} &= 0.1 \quad [\mathrm{m}],
\end{aligned}
$$

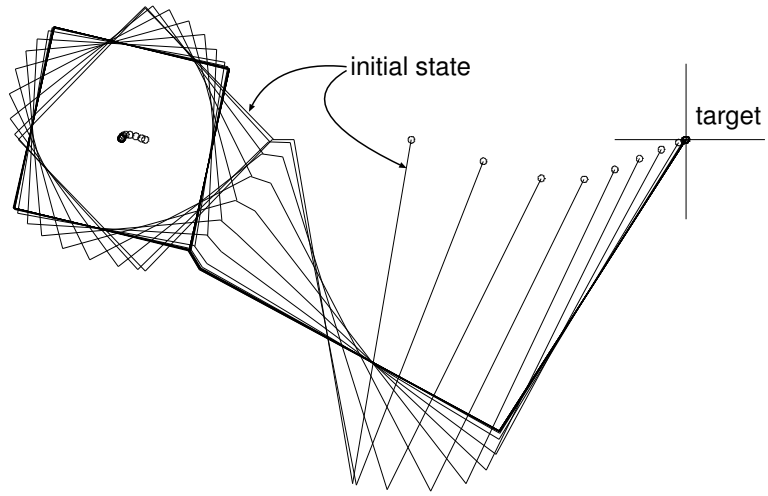
Fig. 6.2は，安定領域における挙動の一例を示している．この場合は，一般化ヤコビ行列 (真値) と従来のヤコビ行列 (近似値) の間に特別な差異は見られない．一方，**Fig. 6.3** は，近似ヤコビ行列を用いた場合に，初期位置が不安定領域に入る場合の挙動の一例を示している．この時，近似ヤコビ行列を用いた結果には興味深い現象が見られる．手先は一度目標から遠ざかるように動いた後，目標に接近している．これは次のように説明できる．初期状態においては系は不安定領域にあったため，手先は目標から外れるような運動を起こす．その運動がベースの姿勢を変化させ，系の状態は不安定領域から脱し，目標に収束する挙動に転じる．目標に収束はするものの，このような動作は望ましくないので，近似ヤコビ行列を用いる時は，不安定領域を考慮して作業空間を設計/計画すべきである．ただし，不安定領域は小さいので，実際にはそれほど大きな問題にはならないものと思われる．

6.5 おわりに

本章では，浮遊マニピュレータの転置ヤコビ行列制御において，一般化ヤコビ行列の代わりに従来の地上用のヤコビ行列を使うことの妥当性を数値例を用いて検討した．これらの結果によれば，マニピュレータとベースの質量比が実際的な場合には，地上用のヤコビ行列が十分実用になることがわかった．ただし，得られた結果はケーススタディの域を出ておらず，今後解析的な手法によってより一般的な検討を進める必要がある．

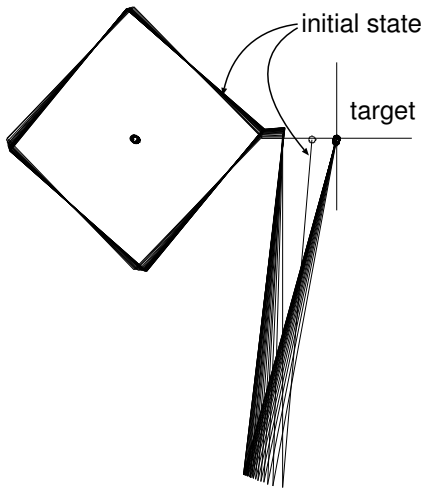


(a) Using the generalized Jacobian

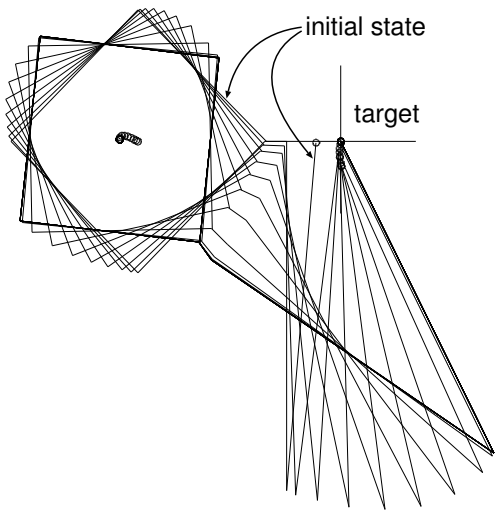


(b) Using the conventional (approximate) Jacobian

Fig. 6.2 Behavior in the stable region (every 10 seconds)



(a) Using the generalized Jacobian



(b) Using the conventional (approximate) Jacobian

Fig. 6.3 Behavior in the unstable region (every 10 seconds)

第 7 章

転置ヤコビ行列制御の回転変換を用いた特性改善

7.1 はじめに

第5章の制御則は，ある点に対する位置決めに対して目標点の漸近安定性を保証しているが，その目標点に到達する軌道を指定することはできない．そのため条件によっては，安定に目標に収束するものの，動力学的な干渉の影響で作業座標空間で手先が目標点に至る経路が湾曲することがある．そこで，本章ではセンサで計測された偏差に適切な回転変換を施すことにより，制御則の簡潔さや系の安定性を損なうことなく経路を直線に近づける方法について述べる．

7.2 回転変換行列を用いた特性改善

簡単のため，この章では手先の姿勢は扱わずに位置のみの制御を考える．このとき，第5章の制御則 (5.3) は

$$\boldsymbol{\tau} = k_P \widehat{J}^T(\boldsymbol{q})\ \boldsymbol{e}_p - K_V \dot{\boldsymbol{q}} \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{e}_p \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_D - \boldsymbol{r}_E$$

となる．この制御則を適用した浮遊マニピュレータの閉ループ系の目標点の漸近安定性は保証されるが，そこへ至る経路は条件によってはかなり湾曲する．これを改善するために次のような制御入力を構成する．

$$\boldsymbol{\tau} = k_P \widehat{J}^T(\boldsymbol{q})\ P\ \boldsymbol{e}_p - K_V \dot{\boldsymbol{q}} \tag{7.2}$$

ここで，$P \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ は時変の回転変換行列である．

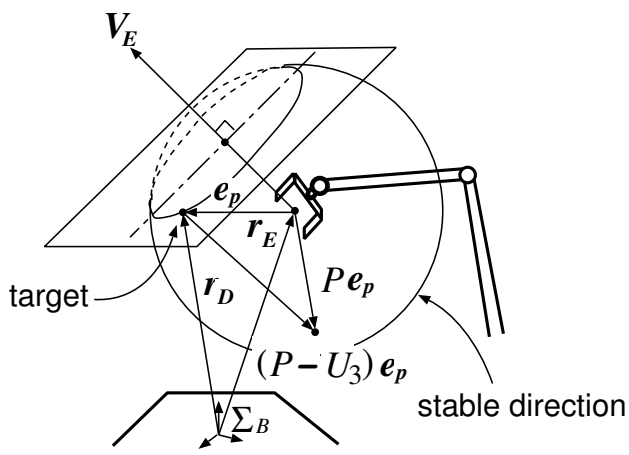


Fig. 7.1 Geometrical interpretation of the stable condition

[定理] マニピュレータの運動方程式 (4.49) に回転変換を施した制御則 (7.2) を適用した閉ループ系の平衡状態$\boldsymbol{r}_E = \boldsymbol{r}_D$, $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ は，以下のような条件が満足されれば，漸近安定である．

$$\boldsymbol{V}_E^T\,(P - U_3)\,\boldsymbol{e}_p \leq 0 \tag{7.3}$$

$$k_p > 0 \tag{7.4}$$

$$K_V = K_V^T > 0 \tag{7.5}$$

ここで，P は$\boldsymbol{r}_D, \boldsymbol{r}_E, \boldsymbol{V}_E$に対して連続であり，$\boldsymbol{r}_E = \boldsymbol{r}_D$または$\boldsymbol{V}_E = 0$ の場合を除いて $\det(P - U_3) \neq 0$ であるとする．

[証明] リヤプノフ関数の候補として

$$W = \frac{1}{2}k_p\boldsymbol{e}_p^T\boldsymbol{e}_p + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\widehat{H}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{7.6}$$

を導入する．$\widehat{H}$は正定であり $k_p > 0$ であるから，この関数は正定である．系の状態方程式の解軌道に沿った Wの時間微分は，**第5章**の式 (5.13) の場合と同様にして，

$$\dot{W} = -\dot{\boldsymbol{q}}^T K_V\dot{\boldsymbol{q}} + k_p\boldsymbol{V}_E^T\,(P - U_3)\,\boldsymbol{e}_p \tag{7.7}$$

となる．条件 (7.3), (7.4), (7.5) を満たせば，$\dot{W}$は状態変数に対して準不定となる．さらに，式 (5.13) の場合と同様にして，平衡状態が漸近安定であることがわかる．□

ここで注目すべきは，条件 (7.3) の意味である．許容される回転変換行列 Pは，マニピュレータの動力学とは無関係に，手先の速度ベクトル$\boldsymbol{V}_E$と偏差ベクトル$\boldsymbol{e}_p$だけから決めることができる．この条件は，2 つのベクトル$\boldsymbol{V}_E$と $(P - U_3)\,\boldsymbol{e}_p$の成す角度が$\pi/2$ 以上である

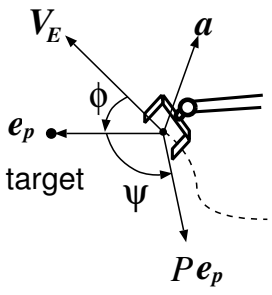


Fig. 7.2 Modification of the deviation vector of endtip

と解釈できる．これを図で表現したものが **Fig. 7.1**である．現在の手先位置を中心とする球面のうち，実線で描かれた部分が許容されるベクトル $(P - U_3)\ \boldsymbol{e}_p$の端点の集合を意味する．球面を 2 つに分けている平面は，目標点$\boldsymbol{r}_D$を通り，その法線方向が速度ベクトル$\boldsymbol{V}_E$と一致するものである．

上述の許容範囲の中で Pを選べば，安定性を損なうことなく平衡点に至る特性を変更することができる．ここでは，目標に至る手先の経路を直線に近くする—手先を直線的に目標へ向かわせる— 修正法を提案する．手先が直線的に目標に向かうということは，偏差ベクトル$\boldsymbol{e}_p$の方向と速度ベクトルの方向が一致するということである．逆に，2 つのベクトルの方向がずれているほど，目標へ向かう経路は湾曲してしまう．そこで，2 つのベクトルの成す角をϕ，共通垂線方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{a}$とし，方向のずれに応じて，偏差ベクトルを$\boldsymbol{a}$回りに回転させる (**Fig. 7.2**)．ただし，その回転量は，安定性を保証する許容範囲を越えないようにする．以上の考えを式で表現すると，Pとして次のような単位ベクトル$\boldsymbol{a}$を軸にある角度ψだけ回転させる変換行列を選ぶことになる．

$$P = R(\boldsymbol{a}, \psi) \tag{7.8}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{V}_E \times \boldsymbol{e}_p}{|\boldsymbol{V}_E \times \boldsymbol{e}_p|} \tag{7.9}$$

$$\psi = \min(\psi^*, 2\pi - 2\phi, \psi_L) \tag{7.10}$$

$$\psi^* = \begin{cases} k_r\phi & (0 \le \phi \le \pi/2) \\ k_r(\pi - \phi) & (\pi/2 \le \phi \le \pi) \end{cases} \tag{7.11}$$

$$\phi = \cos^{-1}\frac{\boldsymbol{V}_E^T \boldsymbol{e}_p}{|\boldsymbol{V}_E|\,|\boldsymbol{e}p|} > 0 \tag{7.12}$$

ここで，k_rは回転に対するゲインである．また，$2\pi - 2\phi$は安定性の条件を満足するための上限であり，ψ_Lは，修正したベクトルが目標と反対の方向を向いてしまわないように設けたヒューリスティックな上限である．

7.3 シミュレーション

Fig. 5.2に示す衛星搭載の 6 リンクマニピュレータの手首から先 (リンク 4〜6) を取り除いたモデルに対して，**第5章**の制御則を適用した場合の動力学的なシミュレーションの結果の一例を **Fig. 7.3** (a) に示す．ただし，3 秒毎の状態を表示している．この時のゲインは，

$$\begin{aligned} k_p &= 20[\mathrm{N}] \\ K_V &= \mathrm{diag}(400, 100, 200)[\mathrm{Nms/rad}] \end{aligned}$$

とした．

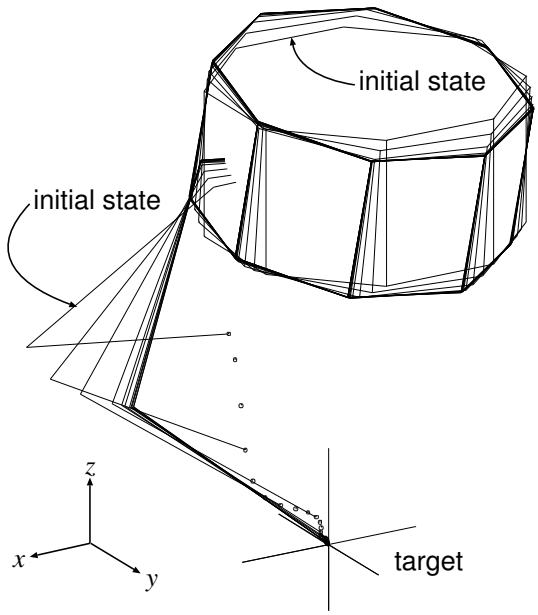
それに対して，同じ条件で，回転変換 Pを

$$\begin{aligned} k_r &= 5 \\ \psi_L &= 0.45\pi[\mathrm{rad}] \end{aligned}$$

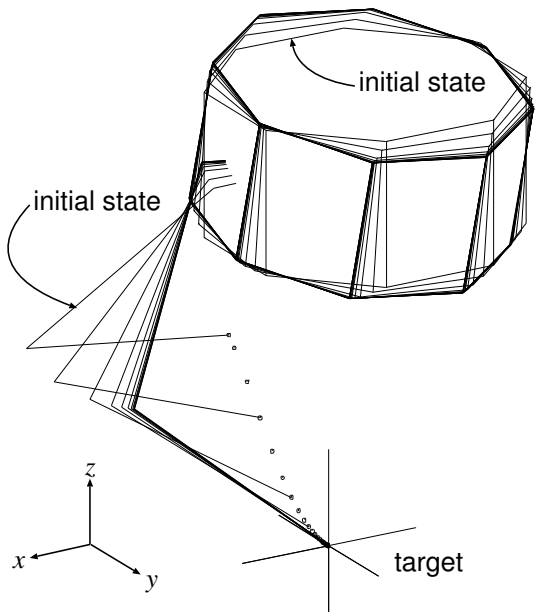
とした時のシミュレーション結果を **Fig. 7.3** (b) に示す．手先が目標点に至る経路が改善されていることがわかる．

7.4 おわりに

転置ヤコビ行列制御を用いた浮遊マニピュレータの位置決めにおいて，回転変換行列をもちいて偏差ベクトルを修正すれば，簡潔さと安定性を損なわずに，手先が目標点へ至る経路性能が改善できることを示した．今後は，より最適なゲインの設計法を確立する必要がある．安定性の条件 (7.3) を満たす Pの選び方は他にも考えることができるので，さらに改善できる可能性がある．



(a) Normal TJC



(b) Improved TJC

Fig. 7.3 Results of normal and improved TJC (every 3 seconds)

第 8 章

浮遊型ロボット の遠隔操作

8.1 はじめに

宇宙活動において，人間を単純作業や危険な作業から解放し，また人間の安全を確保するために高いコストのかかる有人ミッションをできるだけ減らすために，人間に代わって多様な作業を行うロボットが必要不可欠な存在である．将来的には，それらのロボットは完全に自律的に行動できるようになるだろうが，現時点の技術で，人間の高度な認識能力や柔軟な判断能力を全てロボットに置き換えることは不可能だろう．したがって，宇宙ロボットでには，人間の指令によって動かす遠隔操作システムが非常に重要であり，多くの研究が行われている．

近年，操作者の負担を軽減するために，サーボのレベルではなく，作業要素を単位として指令できるレベルの遠隔操作システムのアイデアがいくつも提案されている．しかしながら，従来のサーボレベルでの遠隔操作は，最も基本的なモードであり，人間の高度な認識と判断を要するミッションには実用上欠かせない．

本章では，浮遊型ロボットをサーボレベルで遠隔操作することを考える．**Fig. 8.1**に示すように，操作者は，浮遊マニピュレータのベース (宇宙機など) に搭乗してそこからマニピュレータを直接目視しているか，あるいはベースに搭載されたカメラ映像を別の場所で見ているとする．そして，マニピュレータや周りの環境を見ながら，ジョイスティックやマスターマニピュレータを使って作業座標系に関する位置・速度・力の指令を与える．浮遊型ロボットでは，マニピュレータのベースが空間に固定されていないので，マニピュレータを動かすとその反力でベースが変動してしまう．その変動は視覚系の視野を変化させ操作者を惑わせる．**第5章**では，この様な状況でいかにマニピュレータを位置決めするかという制御則について論じたが，ここではその閉ループ系に人間が介在する場合を取り扱う．果して人間は，視覚系の変動に対応できるだろうか．

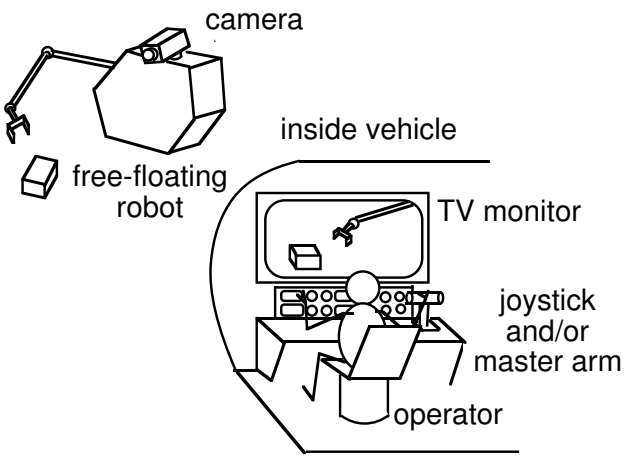


Fig. 8.1 Concept of teleoperated free-floating robots

マニピュレータの動きと視覚系の運動の関係を一般的に分類すると以下のようになる (**Fig. 8.2**).

1. 不規則に運動

2. 加速度で関係

3. 速度で関係

4. 位置で関係

5. 固定

浮遊型ロボットでは，角運動量の保存則がマニピュレータの関節速度とベースの角速度の拘束式となるので，視覚系の運動はマニピュレータ速度と関係付けられる 3 に属する．変動する視覚系の映像に基づいて遠隔操作を行なう場合，この分類の下の場合ほど操作は容易であることは明らかであるが，浮遊宇宙ロボットの遠隔操作を実用化するには，視野の変化が及ぼす影響をもっと定量的に知る必要がある．

そこで，これを調べるために計算機シミュレーションを行うシステムを開発した．このシステムは，動力学モデルに基づいて実時間でマニピュレータとベースの運動を計算し，同時に実際のカメラの映像の代りとしてロボットとその環境の 3 次元画像を描画するものである．これまで，通信の容量や遅延を考慮した宇宙ロボットのシミュレーションはいくつか報告されているが，マニピュレータの反力によって引き起こされる視覚系の変動については扱われていなかった．このシステムを用いれば，以下のようなことを調べることがで

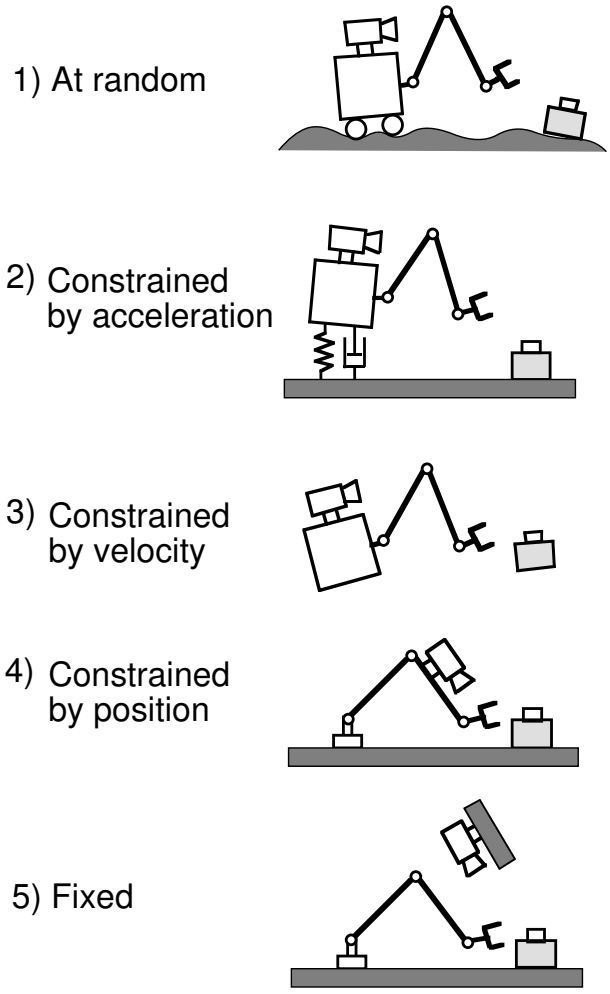


Fig. 8.2 Classification of moving visual system

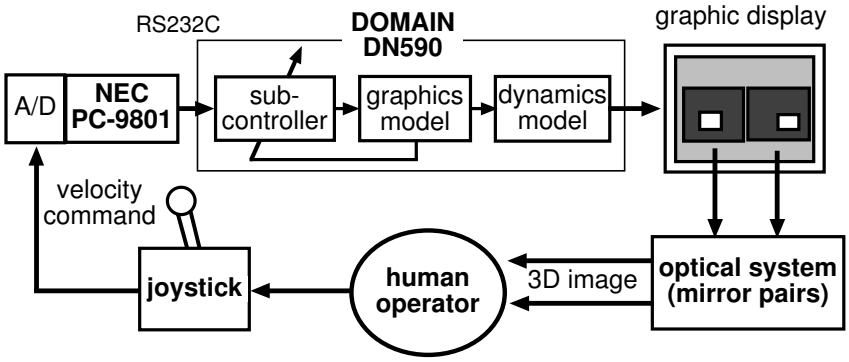


Fig. 8.3 Block diagram of the simulation system

きる.

1) ベースの変動が操作者に及ぼす負担.

2) 指令の構成と補正の方法.

3) 操作者の訓練法.

以下では，システムの基礎となる動力学モデルと描画モデルについて述べた後，位置決め作業のシミュレーションを通じて，操作者が作業座標系で与えた指令を関節空間へ変換するいくつかの方法について比較検討を行なう.

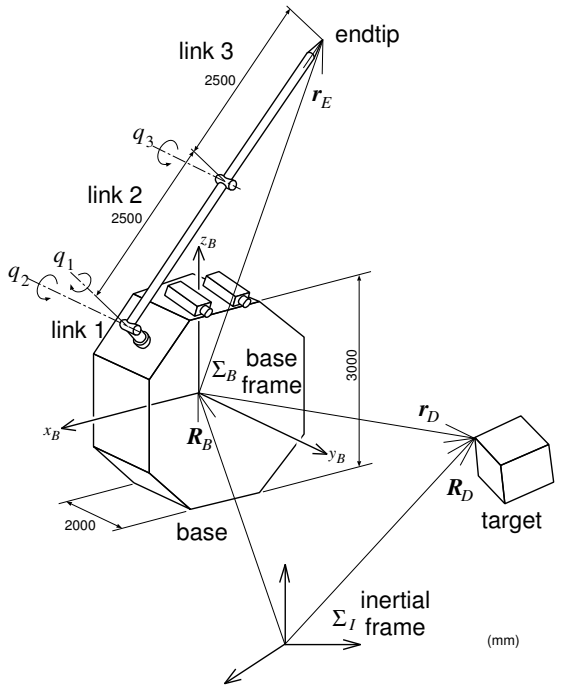
8.2 シミュレーション システム

Fig. 8.3にシミュレーションシステムのブロック線図を示す．システムはサブコントローラ，動力学モデル，描画モデルの 3 つの部分と I/O インターフェースから構成されている．操作者は，グラフィックディスプレイに提示された作業環境の 3 次元的な画像を見ながら，3 自由度のジョイスティックを使ってロボットに指令を与える.

8.2.1 動力学モデル

Fig. 8.4に本シミュレータで用いた動力学モデルを示す．宇宙ロボットを無重力下で浮遊する剛体多体系としてモデル化する．マニピュレータの動作反力によるベースの変動は，**第4章**で述べたように，マニピュレータの関節 $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \cdots, q_n]^T$の時間微分とベースの速度 $\boldsymbol{V}_B$と角速度$\boldsymbol{\Omega}_B$の関係から計算する.

$$
\begin{aligned}
{}^B\boldsymbol{V}_B &= H_L(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} \quad H_L \in \mathbf{R}^{3\times n} && (8.1)\\
{}^B\boldsymbol{\Omega}_B &= H_A(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} \quad H_A \in \mathbf{R}^{3\times n}. && (8.2)
\end{aligned}
$$



link		base	1	2	3
m_i	[kg]	1200	20.00	50.00	50.00
I_{ix}	[kgm^2]	598	–	–	–
I_{iy}	[kgm^2]	871	–	–	–
I_{iz}	[kgm^2]	598	–	–	–

Fig. 8.4 Dynamics model

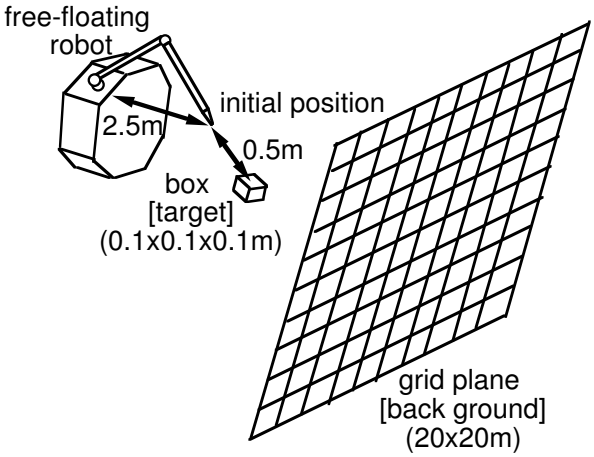


Fig. 8.5 Graphics model

また，ベースの位置$\boldsymbol{R}_B$と姿勢 (ロール，ピッチ，ヨー)$\boldsymbol{\phi}_B$との関係は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
{}^I\dot{\boldsymbol{R}}_B &= {}^IA_B(\boldsymbol{\phi}_B)\,{}^B\boldsymbol{V}_B \qquad {}^IA_B(\boldsymbol{\phi}_B)\ \in \mathbf{R}^{3\times 3} && (8.3)\\
\dot{\boldsymbol{\phi}}_B &= N^{-1}(\boldsymbol{\phi}_B)\,{}^B\boldsymbol{\Omega}_B \qquad N(\boldsymbol{\phi})\ \in R^{3\times 3}, && (8.4)
\end{aligned}
$$

ここで，${}^IA_B$ はΣ_BからΣ_Iへの回転変換行列である．

一方，マニピュレータ手先のベースに対する速度$\boldsymbol{v}_E$，および，慣性空間に対する速度$\boldsymbol{V}_E$は以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
{}^B\boldsymbol{v}_E &= J_L(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} && (8.5)\\
{}^B\boldsymbol{V}_E &= \widehat{J}_L(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} && (8.6)
\end{aligned}
$$

ここで，$J_L \in \mathbf{R}^{3\times n}$は従来のヤコビ行列であり，$\widehat{J}_L \in \mathbf{R}^{3\times n}$ は一般化ヤコビ行列である．

サブコントローラはジョイスティックの出力値を目標の位置または速度と見なして関節速度の指令$\dot{\boldsymbol{q}}_c$に変換する．浮遊宇宙ロボットの運動方程式は求められているが，用いた計算機ではその微分方程式を実時間で解くことは無理である．そこで，関節のアクチュエータには高ゲインの速度フィードバックが施されており，関節の速度は指令に遅れなく発生できると仮定し，微分方程式 (8.1) および，(8.2), (8.3), (8.4) だけををオイラー法で解くことにする．現在のところオイラー法の時間刻みは 60 [msec] であり，その結果は描画モデルに送られる．

8.2.2 描画モデル

Fig. 8.5に設定した作業環境を示す．最も基本的な状況を想定して，カメラはベース座標系に固定されているとする．作業対象の目標物体として $0.1 \times 0.1 \times 0.1$[m] の立方体を，背景として 20×20 [m] 格子状の平面を作業領域に配置する．

操作者の視界に単一の物体しか入らない場合には，たとえその物体が静止していても，視覚系の変動によってそれが動いているように見えてしまう．そこで，背景を配置した映像を提示すると，操作者に視覚系自身が動いているという感覚を与えることができる．マニピュレータと以上の物体の幾何学的な情報はグラフィックライブラリ `gmr3d` の形式で階層的に管理している．

遠隔操作システムには 3 次元的な情報の提示が重要である．我々のシステムでは，操作者に 3 次元的な像を提示するために右目用と左目用の画像を別々に表示する方法を用いており，その輻輳角を 7 [deg] に設定している．2 つの画像は **Fig. 8.6**に示すような光学系によって操作者の目へ導かれる．奥行き方向の精度を上げるために，像は実際の 20%に縮小して表示している．像はダブルバッファを用いて約 100 [msec] 毎に更新されるので，操作者はほとんど遅れを感じることはない．予備実験によって，この立体視のシステムは奥行き方向に 1%未満の分解能があることを確認している．

8.3 実験

ここでは，遠隔操作性の実験の例として，いくつかのサブコントローラの比較を行なう．

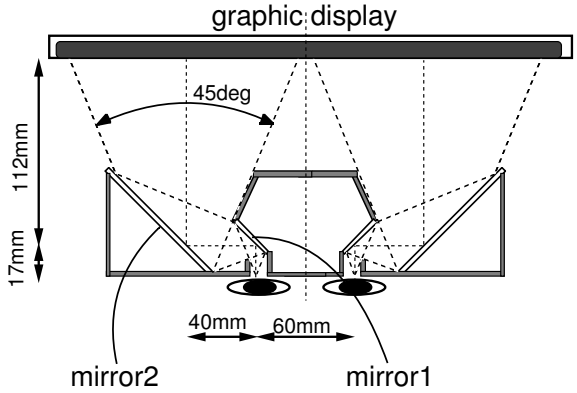


Fig. 8.6 Optical system for stereo vision

操作者はマニピュレータ手先の 3 成分の速度指令値 v_{cx}, v_{cy}, v_{cz} (最大 0.5 [m/sec]) をジョイスティックで与えることにする．これをサブコントローラが関節速度の指令値 $\dot{\boldsymbol{q}}_c$へ変換する方法として以下の 4 通りを考える．

1) 一般化ヤコビ行列の逆 ($\dot{\boldsymbol{q}}_c = \widehat{J}_L{}^{-1}\boldsymbol{v}_c$)

2) 従来のヤコビ行列の逆 ($\dot{\boldsymbol{q}}_c = J_L{}^{-1}\boldsymbol{v}_c$)

3) 一般化ヤコビ行列の転置 ($\dot{\boldsymbol{q}}_c = \widehat{J}_L{}^{T}\boldsymbol{v}_c$)

4) 従来のヤコビ行列の転置 ($\dot{\boldsymbol{q}}_c = J_L{}^{T}\boldsymbol{v}_c$)

方法 1) と 2) は，分解速度制御 (RMRC) であり，方法 3) と 4) は転置ヤコビ行列制御 (TJC: Transpose Jacobian Controller) である．

分解速度制御を用いる場合，一般化ヤコビ行列はベースの変動によって生じる速度成分を補正しているので，これを用いたサブコントローラは予見的であると見なすことができる．しかし，操作者が乗っているベース座標系において，手先速度の指令値と実際の動きは一致しない．一方，従来のヤコビ行列を用いる方法は，ベース座標系で手先速度の指令値が実際と一致するが，ベースの変動分が補正されない．

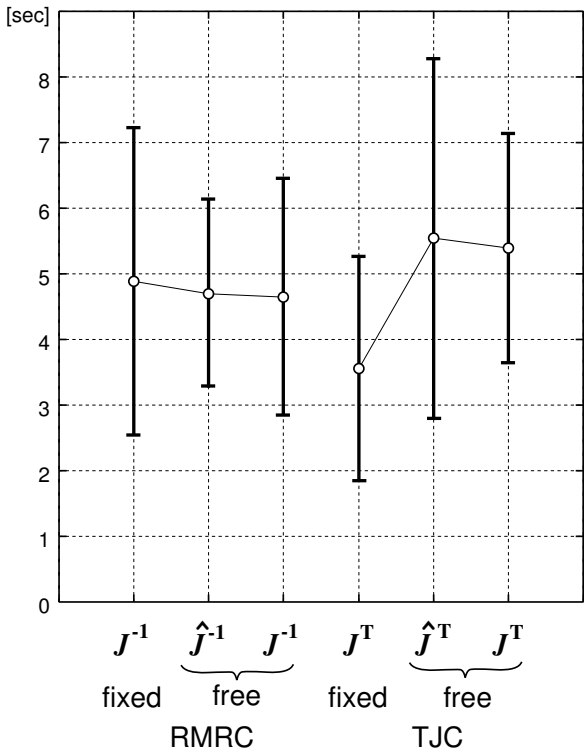
実験における興味は，どの方法が最も操作者の感覚に馴染むかということである．遠隔操作性の評価は，マニピュレータの手先を目標物体の 1 点へ位置決めする作業を通じて行なう．評価の指標は，初期状態から目標点に至るまでの所用時間とする．マニピュレータ手先の初期位置はベース座標系で $x = 0.0$, $y = 2.5$, $z = 1.5$ [m] とする．この位置は 2 つのカメラの視線が輻輳している点である，また，目標物体の位置は手先の初期位置から 0.5m 離れた 8 点のうちの 1 つをランダムに選ぶ．被験者は 24 歳の健常な男子であり，何人かの候補者の中から立体視の最も得意な者を選んだ．

所用時間は，ベース固定の場合に方法 2) と 4) に対して，ベース浮遊の場合に方法 1) ～ 4) に対して，8 点の目標に関して交互に測定した．つまり，1 セットの実験は，6 つの方法

×8 目標 = 48 回の作業よりなる．この実験では，5 セットの測定を行なった．操作者がシステムに慣れた後半の 3 セットにおける所用時間の平均と標準偏差を **Fig. 8.7**に示す．

統計的検定を用いて，有意水準 5%でこれらの結果に差があるか調べた．これによると，RMRC と TJC のどちらに対しても，所用時間だけを見る限り，一般化ヤコビ行列と従来のヤコビ行列の間に違いがあると結論できない．しかし，操作者はいくらかの差異を感じている．このことから，遠隔操作性をより反映する新しい指標が必要であると考えられる．

RMRC に対しては，ベース固定と浮遊の場合で違いを見い出せなかった．一方，TJC に対しては，ベース浮遊になると遠隔操作性は劣化する．興味深いのはベース固定の場合の TJC がすべての中でもっとも良い結果になっていることである．速度を正確に分配するという意味では，TJC は適当ではないが，操作者の感覚には沿うということであろうか．しかし，視覚系が変動する場合には指令を頻繁に調整しなければならず，指令値と実際の手先の動きとの違いの影響が顕著に現れるためにこの効果は打ち消されてしまうものと考えられる．



base	[sec]	RMRC(inverse)		TJC(transpose)	
fixed	mean	4.89		3.56	
	s.d.	2.34		1.71	
free		1) $\hat{J}^{-1}$	2) J^{-1}	3) $\hat{J}^{T}$	4) J^{T}
	mean	4.70	4.65	5.54	5.39
	s.d.	1.44	1.80	2.74	1.75

Fig. 8.7 Mean and standard deviation of settling time of each method

8.4 数学モデルによる遠隔操作性の評価

前節の結果によれば，ベースの変動は操作性に悪い影響を及ぼすが，マニピュレータの動きとベースの変動は速度に関して線形な関係にあるので，操作は比較的容易であることがわかる．したがって，ベースの変動を許容しても遠隔操作は実用になる場合は多いと考えられる．このような場合には，ロボットの設計や動作計画のために操作性の劣化の性質を定量的に知ることが必要である．

梅谷らはベースの変動を加味した “一般化ヤコビ行列” に対して可操作楕円体や可操作度などの分布を求め，浮遊ベースマニピュレータの運動学的な機構評価を試みている [23]．これらはマニピュレータ本来の機構とベースの変動の影響を合わせて評価していることになるが，変動による操作性の劣化を調べるには適していない．そこで，ここでは操作者が速度で指令を与える場合に，実現される速度がベースの変動によって歪む量を操作性劣化の指標として導入し，可動範囲においてその分布を調べる．

簡単のため，ベース座標系とベース上の視覚系の座標系は一致しているとする．また，マニピュレータの並進速度のみを扱い，マニピュレータの関節$\boldsymbol{q} = [\ q_1, q_2, \cdots, q_n\ ]^T$ の自由度 n はこれに対して冗長でないとする．また，前節までと同じように，各関節に高ゲインの速度フィードバックが施されており，マニピュレータ自身の動特性は無視できるとして議論を進める．操作者がベース上のカメラ画像に基づいてベース座標系における速度指令値$\boldsymbol{v}_c$を与える場合，これを関節速度に分配するために従来のヤコビ行列 Jを用いると，ベース座標系 (=視覚系) においては指令速度は忠実に実現される．しかし，慣性空間に対しては

$$\boldsymbol{V}_E = \widehat{J}J^{-1}\boldsymbol{v}_c \tag{8.7}$$

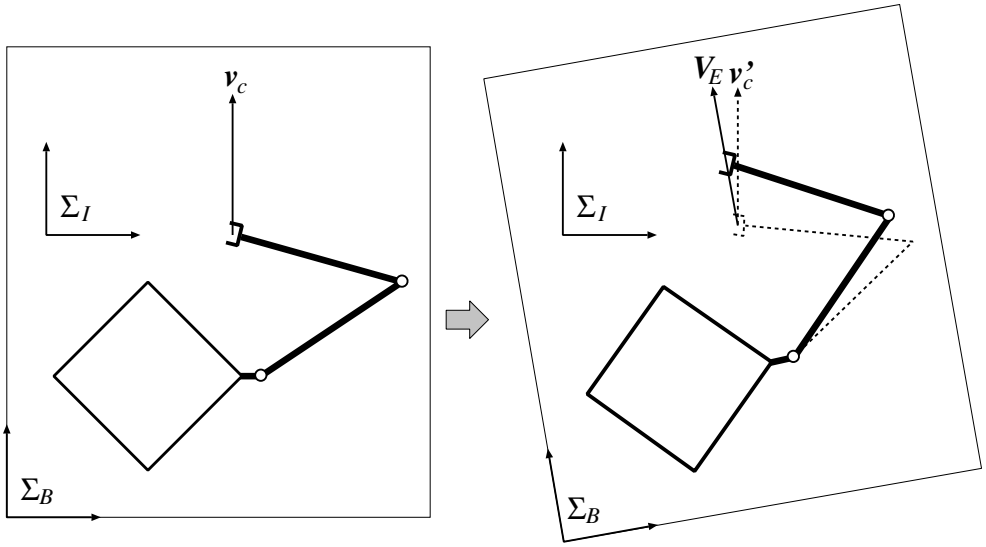
なる速度が発生するので，慣性空間に位置している対象物体に対して所望の速度を発生することができない (**Fig. 8.8** (a))．一方，一般化ヤコビ行列$\widehat{J}$ を速度分配に用いると，慣性空間に対して忠実な速度を発生できるが，視覚系で観察される手先の速度は指令値 $\boldsymbol{v}_c$ とは一致せず，操作者に違和感を与える (**Fig. 8.8** (b))．

どちらの方法にしても，手先の指令速度 $\boldsymbol{v}_c$ と実現される速度$\boldsymbol{V}_E$の不一致が操作性の劣化を引き起こす．そこで，ある関節変位における操作性劣化の指標として，$|\boldsymbol{v}_c|$ の一定の下で 2 つのベクトルの差$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{V}_E - \boldsymbol{v}_c$の大きさの最大値を用いる (**Fig. 8.9**参照)．これは次のように定式化できる．

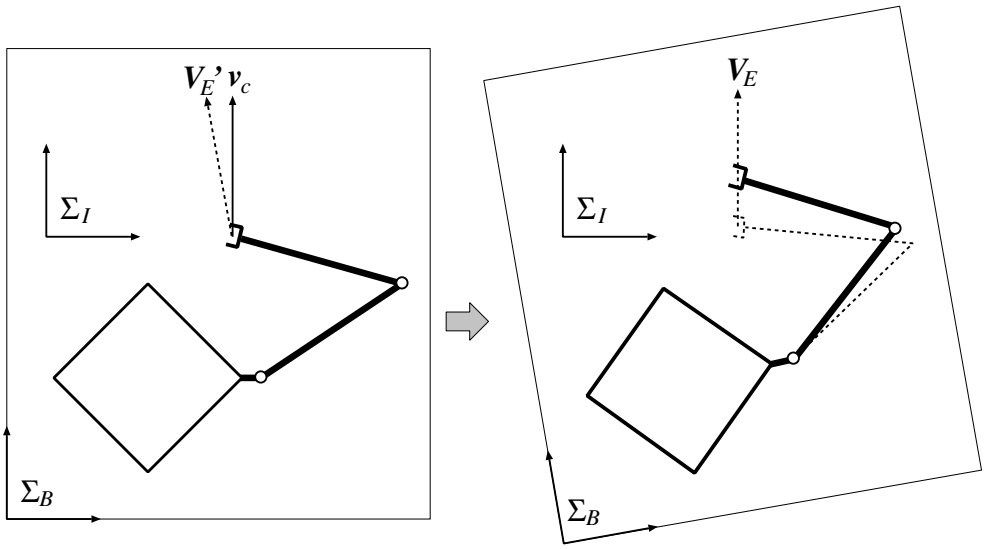
$$\begin{aligned} I_1(\boldsymbol{q}) &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\boldsymbol{v}_c|=1} \left|(\widehat{J}J^{-1} - I)\boldsymbol{v}_c\right| \\ &= \sqrt{\lambda_{max}[(\widehat{J}J^{-1} - I)^T(\widehat{J}J^{-1} - I)]} \end{aligned} \tag{8.8}$$

ここで，$\lambda_{max}*$ は行列の最大固有値である．

また，速度指令値を用いてマニピュレータを操作するのは，比較的大きな動作を行なうときであり，このような場合には速度の大きさよりも方向の重要度が高い．したがって，速度$\boldsymbol{v}_c$と$\boldsymbol{V}_E$の方向の不一致を表わすために，2 つのベクトルの成す角度θは，操作性の劣化をより反映すると考えられる (**Fig. 8.9**参照)．そこで，ある関節変位に対して，その角度



(a) Based on the conventional Jacobian det $\boldsymbol{q}_c = J^{-1}\ \boldsymbol{v}_c$



(b) Based on the generalized Jacobian $\dot{\boldsymbol{q}}_c = \widehat{J}^{-1}\ \boldsymbol{v}_c$

Fig. 8.8 Resolving of velocity command of end tip

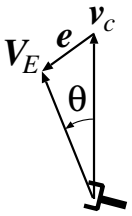


Fig. 8.9 Difference between commanded and actual velocities

の最大値を別の操作性劣化の指標として採用する．

$$\boldsymbol{v}_c^T \boldsymbol{V}_E = |\boldsymbol{c}_c|\,|\boldsymbol{V}_E| \cos\theta$$

であるから，以下のように指標を定義する．

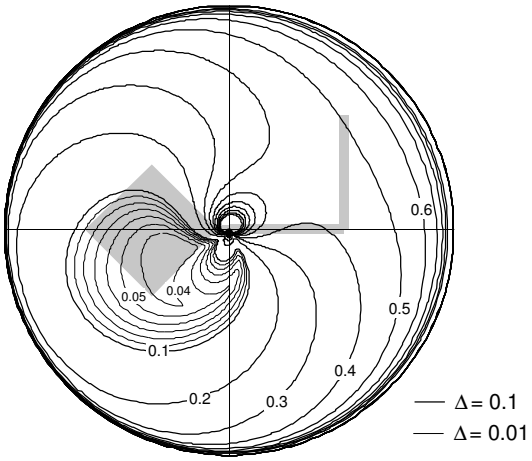
$$I_2(\boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \max \cos^{-1} \frac{\boldsymbol{v}_c^T \widehat{J} J^{-1} \boldsymbol{v}_c}{\left|\widehat{J} J^{-1} \boldsymbol{v}_c\right|} \tag{8.9}$$

さて，**Fig. 4.4**の 2 自由度浮遊型マニピュレータの平面モデルに対して，提案した操作性の指標の分布を調べる．各関節変位 (ただし $q_2 > 0$) に対して計算した指標をベース座標系の対応する手先の点における値とし，その分布を等高線図として表示する．**Fig. 8.10**の (a) に指標 I_1，(b) に指標 I_2，比較のために，(c) に一般化ヤコビ行列の可操作度

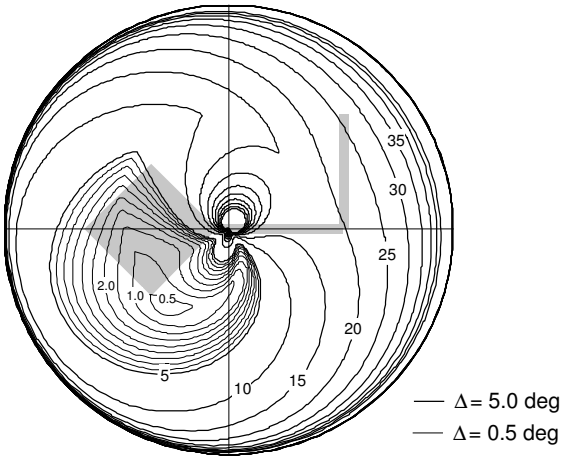
$$\sqrt{\det \widehat{J} \widehat{J}^T} \tag{8.10}$$

の分布を示す．

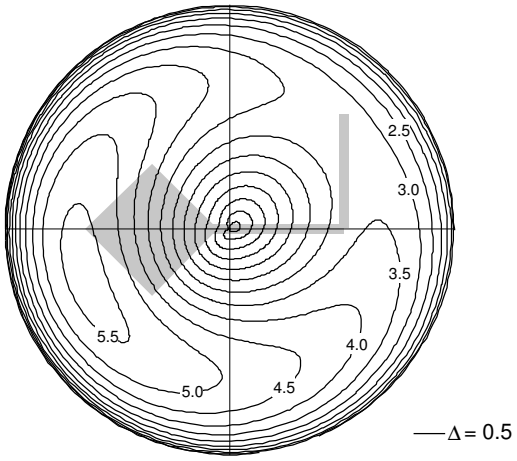
可操作度のピークが可動範囲のかなり端に鋭く存在するのに対して，指標 I_1, I_2 では，ピークはあまり鋭くなく，その位置はもっと中心に近い．2 つの指標の分布はよく似ているが，ピークの位置が異なり，I_1より I_2 の方が値が小さい（劣化が許容できる）領域が広い．また，どちらの指標も作業領域のうちベースのある側の半分の領域でその値は小さく ($I_1 < 0.3$, $I_2 < 15$ [deg])，反対側の領域では値がかなり大きくなる．したがって，遠隔操作の観点からすると，ベースと反対側の領域での作業を行なわなければ，操作性の劣化は広い範囲で避けられることがわかる．



(a) Contour map of index I_1



(b) Contour map of index I_2



(c) Contour map of manipulability

Fig. 8.10 Comparison of three indexes

8.5 おわりに

本章で考案したシステムを用いれば，マニピュレータの反作用で視覚系が変動する宇宙ロボットの遠隔操作性を調べることができる．浮遊宇宙ロボットでは視覚系の変動は避けられない問題であり，このようなシミュレータを用いて，多くの実験的な検証を行なうことが必要である．

今のところ，このシステムで調べることのできる遠隔操作性は操作者の立体視の融合能力にかなり依存しているので，3 次元画像の提示法の改善が必要である．また，もっと純粋に遠隔操作性が抽出できるような指標を見つけなければならない．

一方，浮遊宇宙ロボットを遠隔操作する際にベースの変動によって生じる操作性の劣化の分布を定量的に評価する指標を提案した．実際に宇宙用ロボットを設計するには，提案した指標の他に様々な因子を考慮する必要があり，今後，総合的な設計指針を確立することが望まれる．

第 9 章

結論

将来の宇宙活動を支える衛星軌道上のインフラストラクチャの構築には，宇宙ロボットが必要不可欠である．宇宙ロボットには様々な種類があるが，地上では見られない宇宙独特のものとして，ロボット自身やその作業対象が浮遊した状態で作業を行う形態がある．本論文では，これを“浮遊型宇宙ロボット”と呼び，その基本的な作業である“物体捕捉”を実行するために必要な計測や制御の手法をいくつか提案した．

以下に本論文の主要な結果について述べる．

第2章では，ロボットの作業対象である物体が浮遊状態で回転しており，その幾何学的パラメータも慣性パラメータも未知な場合に，運動の様子を撮影した画像の時系列のみから，その運動の動力学的な特性を推定し，それに基づいて姿勢を予測する手法を提案した．物体が未知であっても，2 枚の画像から短い間隔の相対変位が得られることを利用して，角速度の時系列を抽出し，それを入力とした．運動を記述するためには，4 つの“動力学パラメータ”と“参照座標系”が得られれば良いことを示し，オイラーの運動方程式の解を 4 つに分類し，入力されたデータに応じてそれぞれの解に対応するモデルに切り替える規則を示した．この手法を用いれば，宇宙ロボットは，あらかじめ知識を持っていないデブリのような未知物体も扱えるようになるだろう．

第3章では，**第2章**で提案した手法の性能を評価するために，実際の画像から角速度を抽出する際に不可避な量子化や差分近似の影響を考慮した計算機シミュレーション実験の結果を示した．それによると，量子化や差分近似に起因する誤差が入力に含まれていても，提案した手法による動力学的な推定が可能であり，広い範囲の運動に対して適用できることがわかった．

第4章では，ベースが浮遊しているマニピュレータを，運動量と角運動量が保存される剛体多体系としてモデル化し，地上のマニピュレータの場合と比較しながら，その運動学と動力学を明らかにした．その成果として，従来のベース固定のマニピュレータのヤコビ行列から，ベース浮遊の場合のベースの変動分を加味した速度に対応する一般化ヤコビ行列を導出する汎用的な方法を明らかにした．また，ベース浮遊のマニピュレータの運動方程式は，関節の変位を一般化座標として，ベース固定のマニピュレータと全く同じ形式で表現できることも明らかにした．

第5章では，マニピュレータの動作反力によってベースが変動する場合，そのベース上に搭載されたカメラなどによるセンサ情報をフィードバックして，マニピュレータの手先を慣性空間に指定された点へ位置決めする制御則を提案した．フィードバックによって構成される閉ループ系の目標状態における漸近安定性をリアプノフ法を用いて証明し，さらに，計算機シミュレーションにより，制御則の有効性を示した．この制御則を用いれば，ベースの姿勢を制御しなくても，マニピュレータの手先を空間に位置決めできるために，浮遊型宇宙ロボットの機動性を活かした運用が期待できる．また，制御則は比較的簡単な処理で構成されており，またベースの位置や速度を計測する必要もないので，計算機資源やセンサ系の制約の大きい衛星軌道上では有効である．

第6章では，**第5章**で提案した制御則において，宇宙用ヤコビ行列の代わりに，地上用の従来のヤコビ行列を用いた場合の安定解析の数値例と動力学的なシミュレーション例を 2 次元のモデルを使って示し，近似の妥当性について検討した．その結果は，1 つのケーススタディではあるものの，実際的な場面では，導出が繁雑な一般化ヤコビ行列の代わりに，従来のヤコビ行列が十分実用的に利用できることがわかった．

第7章では，**第5章**で提案した制御則を適用した場合に手先が目標点に向かう経路を改善するため，回転変換を用いる方法を提案した．これを用いれば，制御則の簡便さや系の安定性を損なうことなく経路を直線に近づけることができる．この考えに基づいた制御則を 1 つ提案し，計算機シミュレーションによってその有効性を示した．

第8章では，マニピュレータの動作反力でベースが変動する宇宙ロボットを人間が遠隔操作するシミュレーション実験を行い，その操作性につい議論した．ベースの変動による視野の変化が操作者を惑わせる現象を定量的に評価するために，立体視のコンピュータ画像を用いたシミュレーションを行った．装置の性能限界のために，シミュレーションからは有意な結果は得られなかったが，ここで指摘した問題点は，浮遊型宇宙ロボットの実際の運用では重要な意味があるものと思われる．また，視野の変化による座標系の変動の影響を数値的に評価する方法について提案し，その分布が従来提案されていたマニピュレータ操作性の評価とは異なる傾向があることを示した．

次に今後の研究課題について述べる．

第2章で提案した運動の推定は，大量のデータを一度に分析して動力学的な特性を抽出するオフライン的な手法であった．実際的な運用を考えると，オンラインで逐次的にデータを更新していく手法が必要である．また，ここで得られるのは剛体の相対的な慣性パラメータだけである．画像からは慣性パラメータの絶対量は知ることはできない．そこで，力覚センサを有するマニピュレータによる触診や，弾丸のようなものを撃ちつけて前後の運動の変化を観察するなど，補助的な手段と組み合わせて，慣性パラメータの絶対量を知る方法を確立したい．

本論文では，未知の物体の運動を推定する手法について述べたが，物体の形状の情報の獲得については何も触れなかった．作業対象に対する知識を獲得するには，同時に計算機の中に幾何モデルも構築する必要がある．物体は回転しているおかげで多くの方向からの画像が得られるので，これを積極的に利用すべきである．一般的な手法は，コンピュータ

ビジョンの分野で多く研究されているので，この問題に適した方法を選び，さらに，動力学的な情報 (例えば慣性主軸の方向) とどのように組み合わせてモデルを構築するか，さらには，相補的にデータの精度を高めていくにはどうすれば良いかを考えていきたい．

また，獲得された運動と形状の情報に基づいて，どのように作業を計画するかということも，今後の大きな課題である．手始めに，物体上の把持点の候補の決定や，近接から把持へ至る軌道生成の方法を考案していかねばならないだろう．

第4章で述べたモデル化では，各運動量が零で保存されることを前提としていた．しかし，例えば，宇宙飛行士による衛星捕捉のミッションにおいては，衛星の回転速度に合わせて飛行士が回転してから衛星を把持するという作業が実際に行われている．このことから考えて，宇宙ロボットの運用においても，角運動量が零でない場面も多々ありうるので，モデルを拡張していかなければならない．

第5章では，マニピュレータ手先の目標は空間に静止していると仮定していた．今後は，**第2章**のような手法で得られる回転運動する剛体に対する位置決め制御や追従制御を考えていきたい．また，対象物体や手先の位置や姿勢は即座に得られるものと仮定し，センサ系の特性には何も立ち入っていなかった．今後は，センサ系の特性も考慮したビジュアルフィードバックのような枠組を導入する必要があろう．

第6章の近似ヤコビ行列を用いた制御の妥当性の検討は，ケーススタディに留まっている．今後は，より解析的な手法で検討を進めていく必要があるだろう．

第7章では，回転変換行列を用いた特性改善の一例を示したにすぎない．さらに一般的で，設計のしやすい手法の開発が望まれる．

ところで，本論文では，浮遊物体の運動を推定し，マニピュレータの手先を対象に近づけるように制御する手法について述べてきたが，マニピュレータが物体が接触し，把持し，運動を停止させるという過程に関しては何も扱っていない．これは，浮遊型宇宙ロボットにおいて残る大きな問題であり，今後の最も重要な研究課題の 1 つと考えられる．この問題に対処するには，まず，接触に伴う衝撃力や摩擦をどのようにモデル化すべきか検討せねばならない．宇宙ロボットの衝突の瞬間を扱った研究はすでにあるが，瞬間だけではなく，近接から固定までを扱った作業計画として捉える研究が必要ではないかと考えている．また，宇宙では重力を支える必要がないので，地上に比べると寸法や慣性が格段に大きな物体を扱うことになる．このような状況では，手先で物体を把持した後の運動計画やフィードバック制御則も重要であり，宇宙独特の問題として考えていかねばならないだろう．

以上で述べたような研究課題に基づいて，浮遊型宇宙ロボットの実現に向けての研究をさらに進めていきたい．

謝辞

本研究を行うにあたり，終始一貫ご指導ご鞭撻をいただきました宮崎文夫教授に心より感謝いたします．そして，大阪大学大学院に在学中にご指導をいただき，宇宙ロボットの研究を始めるきっかけを与えて下さった有本卓教授 (現 東京大学) に深く感謝いたします．

また，本論文をまとめるにあたり，吉川孝雄教授ならびに辻本良信教授から貴重なご意見を賜わりました．厚くお礼申し上げます．

さらに，実験等において様々な助言をいただいた，林清重技官に感謝いたします．

大阪大学の有本研究室と宮崎研究室において共同で研究を行った，湯木哲生君 (現 日立製作所)，相園岳生君 (現 日立製作所)，岡田康弘君 (現 松下電器産業)，臼井道太郎君 (現 住友重機械工業)，山本一之君 (現 三菱電機)，菅田智文君 (現 日立製作所)，宮宇地隆君 (現 富士銀行)，岩津健君 (現 ソニー)，河野寿之君 (現 ソニー)，満田隆君 (現 富士通)，宮崎雅英君 (現 三菱自動車)，池田博君 (現 大阪大学大学院生)，佐藤嘉彦君 (現 三菱自動車)，中村康夫君 (現 三菱重工業) と，遠隔操作実験の被験者として協力していただいた新井良和君 (現 日本電気) に，心から感謝いたします．他にも，色々な討論をして下さったり，助言をいただいた研究室の先輩方や同輩後輩に心からお礼を申し上げます．

さらに，学会や研究会では多くの方々に貴重なご意見やご指摘をいただきました．合わせて感謝いたします．

最後に，ここまで暖かく見守っていただいた父と母に深く感謝の意を表します．

升谷 保博

1995 年 4 月

参考文献

[1] 戸田勧, 八坂哲雄, 小野田淳次郎, 鈴木良昭. スペースデブリ問題の現状と課題. 日本航空宇宙学会誌, Vol. 41, No. 478, pp. 603–614, 1994.

[2] 中谷一郎. 宇宙ロボットの展開 —無人宇宙基地の提案—. 第 4 回 宇宙ステーション講演会 講演集, pp. 21–26, 1988.

[3] 狼嘉彰. 世界における宇宙ロボットの研究開発動向. 計測と制御, Vol. 28, No. 12, pp. 1041–1046, 1989.

[4] 岩田勉, 小田光茂, 今井良一. 軌道上作業機 (OSV) の開発構想. 第 2 回宇宙用人工知能/ロボット/オートメーション シンポジウム講演集, pp. 125–128, 1988.

[5] 日本ロボット学会. 宇宙開発事業団委託業務成果報告書将来型宇宙ロボットの先端技術の調査検討, 1994.

[6] Gred Hirzinger, Bernhard Brunner, Johnanes Dietrich, and Johann Heindl. Sensor-based space robotics — ROTEX and its telerobotics features. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 5, pp. 649–663, 1993.

[7] 小田光茂, 若林靖史, 今井良一, 秋山正雄, 五百木誠. ランデブ・ドッキング/宇宙ロボット実験衛星 (ETS-VII) の開発. 第 10 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 459–462, 1992.

[8] 二宮敬虔, 中谷一郎, 斎藤宏文, 川口淳一郎. フリーフライヤによる衛星の回収実験について. 第 1 回宇宙用人工知能/ロボット/オートメーション シンポジウム講演集, pp. 145–148, 1987.

[9] 二宮敬虔, 中谷一郎, 若山敏康. 画像処理による宇宙浮遊物体の運動推定. 計測自動制御学会 第 30 学術講演会予稿集, pp. 259–260, 1991.

[10] 深瀬幹夫, 丸山次人, 内山 隆 岡本修, 山口功. RVD の自律化のための視覚センサの研究. 第 2 回宇宙用人工知能/ロボット/オートメーション シンポジウム講演集, pp. 43–46, 1988.

[11] Toru Tanabe and Hiroshi Koyama. Autonomus relative navigation using multiple imagery information for space robotic applications. In *38th Cong. Int. Astronautical Federation*, 1987.

[12] 岡林桂樹, 渡辺一郎, 青木孝, 丸山次人, 内山隆. 動的視覚計測による移動物体のトラッキング. 第 10 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 873–876, 1992.

[13] 下地治彦, 井上正夫, 土屋和雄, 二宮敬虔, 中谷一郎, 川口淳一郎. 画像情報を用いた浮遊するターゲットの捕獲. 第 3 回宇宙用人工知能/ロボット/オートメーション シンポジウム講演集, pp. 206–209, 1989.

[14] 永松弘行, 久保田孝, 中谷一郎. 宇宙用マニピュレータを用いた衛星捕捉制御. 日本航空宇宙学会誌, Vol. 42, No. 490, pp. 692–699, 1994.

[15] C. Fagerer, Dirk Dickmanns, and Dickmanns Ernst D. Visual grasping with long delay time of a free floating object in orbit. *Autonomous Robots*, Vol. 1, No. 1, pp. 53–68, 1994.

[16] J. K. Aggarwal and N. Nandhakumar. On the computation of motion from sequence of image — a review. *Proc. IEEE*, Vol. 76, No. 8, pp. 917–935, 1988.

[17] 金谷健一. 画像理解 —3 次元認識の数理—. 森北出版, 1960.

[18] Tamio Arai and Kazunori Umeda. Measurement of 3D motion parameters from range images. In *Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems '91*, pp. 383–388, Osaka, Japan, 1991.

[19] 浅田稔, 谷内田正彦, 辻三郎. 物体の 3 次元運動の解釈. 電子通信学会論文誌, Vol. J65-D, No. 6, pp. 687–694, 1982.

[20] Z. Vafa and Z. Dubowsky. On the dynamics of manipulators in space using the virtual manipulator approach. In *Proc. 1987 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 579–585, Raleigh, North Carolina, USA, 1987.

[21] Yoji Umetani and Kazuya Yoshida. Continuous path control of space manipulator mounted on OMV. *Acta Astronautica*, Vol. 15, No. 12, pp. 981–986, 1987.

[22] 梅谷陽二, 吉田和哉. 一般化ヤコビ行列を用いた 宇宙用ロボットマニピュレータの分解速度制御. 日本ロボット学会誌, Vol. 7, No. 4, pp. 327–337, 1989.

[23] 梅谷陽二, 吉田和哉. 宇宙用マニピュレータの作業領域および可操作性解析. 計測自動制御学会論文集, Vol. 26, No. 2, pp. 188–195, 1990.

[24] Richard W. Longman, Robert E. Lindberg, and Michael F. Zedd. Satellite-mounted robot manipulators —new kinematics and reaction moment compensation. *Int. J. Robotics Research*, Vol. 6, No. 3, pp. 87–103, 1987.

[25] Yoshihiko Nakamura and Ranjan Mukherjee. Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 7, No. 4, pp. 500–514, 1991.

[26] 秋山岳夫, 坂和愛幸. 宇宙ロボットの非線形計画による軌道計画. 第 3 回ロボットシンポジウム予稿集, pp. 191–196, 1993.

[27] 松野文俊, 前田朋彦. 双腕型宇宙ロボットの最適軌道計画. 日本ロボット学会誌, Vol. 12, No. 7, pp. 1038–1042, 1994.

[28] 山口功, 木田隆, 上野誠也, 田中正樹. 宇宙ロボットのハンドの dp による最適軌道生成. 計測自動制御学会論文集, Vol. 29, No. 10, pp. 1184–1190, 1993.

[29] 鈴木高宏, 中村仁彦. スパイラルモーションによる宇宙ロボットの 非ホロノミック運動の計画. 第 11 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 49–52, 1993.

[30] Harold L. Alexander and Robert H. Cannon. Experimental on the control of a satellite manipulator. In *Proc. 1987 American Control Conf.*, Seattle, Washington, USA, 1987.

[31] Ross Koningstein, Marc Ullman, and Robert H. Canon Jr. Computed torque control of a free-flying cooperating arm robot. In *Preprints of The 1989 NASA Conf. on Space Telerobotics*, Pasadena, California, USA, 1989.

[32] 新井民生, 梅田和昇, 潮崎成弘. 複数軸周りの回転運動を行う物体の運動認識. 第 10 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 879–880, 1992.

[33] Juyang Weng, Thomas S. Huang, and Narendra Ahuja. 3-D motion estimation,understanding, and prediction from noisy image sequences. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 9, No. 3, pp. 370–388, 1987.

[34] Juyang Weng, Thomas S. Huang, and Narendra Ahuja. Motion and structure from two perspective views: Algorithms, error analysis, and error estimation. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 5, pp. 451–476, 1989.

[35] E. J. Routh. *Dynamics of a System of Rigid Bodies.* Dover Publication, Inc., 1961.

[36] 山田豊. 宇宙船内の不思議な回転運動. 日本機械学会誌, Vol. 97, No. 910, pp. 794–796, 1994.

[37] H. Asada and J.J.E. Slotine. *Robot Analysis and Control.* Wiley-Interscience, 1985.

[38] 山田克彦, 土屋和雄. 宇宙ロボットのマニピュレータ制御における効率的計算法. 計測自動制御学会論文集, Vol. 26, No. 7, pp. 765–772, 1990.

[39] Ranjan Mukherjee and Yoshihiko Nakamura. Formulation and efficient computation of inverse dynamics of space robots. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 3, pp. 400–406, 1992.

[40] 吉川恒夫, 横小路泰義, 豊嶋毅. 宇宙用多腕型ロボットの運動制御のための効率的計算法. 日本ロボット学会誌, Vol. 10, No. 5, pp. 639–647, 1992.

[41] Morikazu Takegaki and Suguru Arimoto. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME Journal of Dynamics, System, Measurement, and Control*, Vol. 103, pp. 119–125, 1981.

[42] Fumio Miyazaki and Suguru Arimoto. Sensory feedback for robot manipulators. *Journal of Robotic Systems*, Vol. 2, No. 1, pp. 53–71, 1985.

[43] 山田克彦, 土屋和雄. 宇宙における剛体多体システムの定式化. 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 53, No. 491, pp. 1598–1606, 1987.

[44] Fumio Miyazaki and Yasuhiro Masutani. Robustness of sensory feedback control based on imperfect Jacobian. In Hirofumi Miura and Suguru Arimoto, editors, *Robotics Research: the 5th Int. Symp.*, pp. 201–208. MIT Press, 1990.

[45] 後藤憲一. 力学通論. 学術図書出版, 1965.

[46] R. N. Arnold and L. Maunder. *Gyrodynamics and Its Engineering Application.* Academic Press, 1961.

[47] Richard P. Paul. *Robotic Manipulators: Mathematics, Programming, and Control.* MIT Press, 1981.

[48] Devid E. Orin and William W. Schrader. Efficient computation of the Jacobian for robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, Vol. 3, No. 4, pp. 66–75, 1984.

関連論文

学術論文集

1. Fumio Miyazaki, Yasuhiro Masutani, and S. Arimoto. Sensor feedback using approximate Jacobian. In *Proceedings of the USA-Japan Symposium on Flexible Automation, Jul. 1988, Minneapolis, Minnesota, USA*, pp. 139–145, 1988.

2. Yasuhiro Masutani, Fumio Miyazaki, and Suguru Arimoto. Modeling and sensory feedback for space manipulators. In *Proc. 1989 NASA Conf. on Space Telerobotics*, pp. 287–296, Pasadena, California, USA, 1989.

3. Yasuhiro Masutani, Fumio Miyazaki, and Suguru Arimoto. Sensory feedback for space manipulators. In *Proc. 1989 IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1346–1351, Scottsdale, Arizona, USA, 1989.

4. Fumio Miyazaki and Yasuhiro Masutani. Robustness of sensory feedback control based on imperfect Jacobian. In Hirofumi Miura and Suguru Arimoto, editors, *Robotics Research: the 5th Int. Symp.*, pp. 201–208. MIT Press, 1990.

5. 升谷保博, 宮崎文夫. 宇宙用マニピュレータのセンサフィードバック制御. 日本ロボット学会誌, Vol. 7, No. 6, pp. 647–655, 1989.

6. Fumio Miyazaki, Kazuyuki Yamamoto, and Yasuhiro Masutani. Sensory feedback based on improved transpose Jacobian controller. In *Proc. IEEE Int. Workshop on Intelligent Motion Control*, pp. 355–360, Istanbul, Turkey, 1990.

7. Yasuhiro Masutani and Fumio Miyazaki. Simulation system for tele-operatability experiments of free-flying space robots. In *Proc. Int. Symp. on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space*, pp. 263–266, Kobe, Japan, 1990.

8. Yasuhiro Masutani, Yasuhiro Okada, and Fumio Miyazaki. Motion estimation of unknown object for space robotic missions. In *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems '92*, pp. 255–260, Raleigh, North Carolina, USA, 1992.

9. Yasuhiro Masutani, Fumio Miyazaki, and Suguru Arimoto. Sensory feedback control for space manipulators. In Takeo Kanade and Yangsheng Xu, editors, *Space Robotics: Dynamics and Control*, pp. 203–227. Kluwer Academic Publishers, 1993.

10. Yasuhiro Masutani, Takeshi Iwatsu, and Fumio Miyazaki. Motion estimation of unknown rigid body under no external forces and moments. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation '94*, pp. 1066–1072, San Diego, California, USA, 1994.

11. Yasuhiro Masutani, Masahiko Mikawa, Noriaki Maru, and Fumio Miyazaki. Visual servoing for non-holonomic mobile robots. In *Proc. IEEE/RSJ/GI Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems '94*, pp. 1133–1138, München, Germany, 1994.

12. Yasuhiro Masutani, Yasuhiro Okada, Takeshi Iwatsu, Ikeda Hiroshi, and Fumio Miyazaki. Estimation of general 3D motion of unknown rigid body under no external forces and moments. *J. Advanced Robotics*, 1995 (投稿中).

学術研究集会会議録

1. 升谷保博, 宮崎文夫, 有本卓. 宇宙用マニピュレータのセンサフィードバック制御. 日本ロボット学会第 5 回学術講演会予稿集, pp. 245–248, 1987.

2. 升谷保博, 宮崎文夫, 有本卓. センサフィードバックを用いた宇宙用マニピュレータの位置と姿勢の制御. 第 27 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 651–652, 1988.

3. 升谷保博, 宮崎文夫, 有本卓. 近似ヤコビ行列を用いた宇宙用マニピュレータのセンサフィードバック制御. 第 31 回自動制御連合講演会予稿集, pp. 321–322, 1988.

4. 山本一之, 升谷保博, 宮崎文夫. 改良 JTC による ロボットマニピュレータの制御. 第 28 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 749–750, 1989.

5. 升谷保博, 有本卓. EVA ロボットの遠隔操作シミュレーション. 第 2 回宇宙用人工知能/ロボット/オートメーション シンポジウム講演集, pp. 153–156, 1988.

6. 升谷, 宮崎. EVA ロボットの遠隔操作シミュレーション – 第 2 報 –. 宇宙用人工知能/ロボット/オートメーション シンポジウム '89 講演集, pp. 252–255, 1989.

7. 升谷保博, 宮崎文夫. 冗長自由度を持つ宇宙用マニピュレータの制御. 日本ロボット学会第 7 回学術講演会予稿集, pp. 387–388, 1989.

8. 山本一之, 升谷保博, 宮崎文夫. 時変ゲインを用いた JTC による ロボットマニピュレータの位置制御. 日本ロボット学会第 7 回学術講演会予稿集, pp. 503–504, 1989.

9. 升谷保博, 宮崎文夫. 浮遊宇宙ロボットの遠隔操作性の評価. 日本ロボット学会第 8 回学術講演会予稿集, pp. 425–426, 1990.

10. 岡田康弘, 升谷保博, 宮崎文夫. 宇宙ロボットのための運動物体のパラメータ推定. 日本ロボット学会第 8 回学術講演会予稿集, pp. 725–726, 1990.

11. 升谷保博, 岡田康弘, 宮崎文夫. 無重力下における未知物体の運動推定. 第 30 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 403–404, 1991.

12. 升谷保博, 宮崎文夫. 浮遊宇宙マニピュレータの制御. 第 30 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 807–808, 1991.

13. 岩津健, 升谷保博, 宮崎文夫. 無重力空間を自由運動する未知浮遊物体の運動推定の評価. 日本ロボット学会第 11 回学術講演会予稿集, pp. 281–282, 1993.

14. 升谷保博, 岩津健, 宮崎文夫. 無重力空間を自由運動する未知物体の運動推定とその評価. 日本機械学会 ロボティクス・メカトロニス講演会 講演論文集, pp. 1162–1167, 1994.

附章 A

運動パラメータの推定に用いた方法

第3章のシミュレーション実験では，画像上の特徴点の時系列から運動パラメータを得るために，J.Weng らの提案する方法 [33] を用いた．これを説明する．

動物体の画像が得られ，時刻 t, t'における特徴点の対応がとれたとすると，空間座標系では，時刻 t における物体上のある点$\boldsymbol{x}$と，時刻 t'における点$\boldsymbol{x}'$の間には，

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T} \tag{A.1}$$

のような関係がある．ただし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$は 3×1 の位置ベクトルを表し，Rは 3×3 の回転行列，$\boldsymbol{T}$は 3×1 の平行移動をあらわすベクトルである．式 (A.1) の関係が物体上のすべての特徴点で成り立つ時，Rと$\boldsymbol{T}$は一意に定まる．

カメラに固定された座標系を固定座標系とみなし，X, Y, Zとする．そして **Fig. A.1**のように，Oに視点をおき，$Z = 1$ に撮像面があるものとする．時刻 t における特徴点を$\boldsymbol{x}$とし，それが，時刻 t'で$\boldsymbol{x}'$に移動したとする．そこで，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$の座標を，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x, y, x]^T \\ \boldsymbol{x}' &= [x', y', z']^T \end{aligned}$$

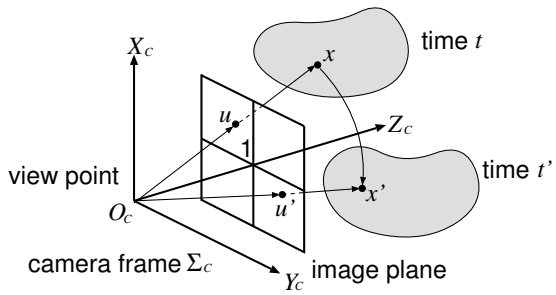


Fig. A.1 Motion parameters

とする．また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$を画面に投影した点を$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'$とすると，点$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'$の座標は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= [u, v, 1]^T = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right]^T \\ \boldsymbol{u}' &= [u', v', 1]^T = \left[\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}, 1\right]^T\end{aligned}$$

と書ける．ここで，$[u, v]$ と $[u', v']$ は点の画像座標を表す．また，点の位置ベクトルと画像ベクトルとの間には，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= z\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{x}' &= z'\boldsymbol{X}'\end{aligned}$$

の関係がある．そこで，これを式 (A.1) に代入すると，

$$z'\boldsymbol{X}' = zR\boldsymbol{X} + \boldsymbol{T} \tag{A.2}$$

と書ける．ここで，物体の重心はカメラ座標の原点と一致することはないので，$\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{O}$である．すると，式 (A.2) より，

$$\frac{z'}{|\boldsymbol{T}|}\boldsymbol{X}' = R\frac{z}{|\boldsymbol{T}|}\boldsymbol{X} + \widehat{\boldsymbol{T}} \tag{A.3}$$

と書ける．ただし，

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \frac{\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{T}|} \tag{A.4}$$

である．ここで，$\boldsymbol{T}$と同じ方向を持つ単位ベクトルを$\boldsymbol{T}_S$とし，式 (A.3) の両辺に左からこれをかけると，

$$\frac{z'}{|\boldsymbol{T}|}\boldsymbol{T}_S \times \boldsymbol{X}' = \frac{z}{|\boldsymbol{T}|}\boldsymbol{T}_S \times R\boldsymbol{X} \tag{A.5}$$

を得る．次に，式 (A.5) の両辺に左から$\boldsymbol{X}'^T$をかけると，

$$\boldsymbol{X}'^T\boldsymbol{T}_S \times R\boldsymbol{X} = 0 \tag{A.6}$$

となる．そこで，$E = \boldsymbol{T}_S \times R$とすると，$\boldsymbol{X}'^T E\boldsymbol{X} = 0$ が成り立つ．この Eは，essential parameters と呼ばれ，3×3 の行列である．また，Eは 8 自由度であるので, これを一意に求めるには 8 点以上の対応点が必要となることもわかる．

画像から得られた対応点を$\boldsymbol{X}_i = [u_i, v_i, 1]^T, \boldsymbol{X}'_i = [u'_i, v'_i, 1]^T, (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ とする．ただし，n は対応点の数である $(n \geq 8)$．$\boldsymbol{X}_i$がすべて，1 つの剛体上の点とすると，すべ

ての点に対して式 (A.6) が成立しているはずである．ここでは，ノイズのある場合を考慮して，

$$A = \begin{bmatrix} u_1u'_1 & u_1v'_1 & u_1 & v_1u'_1 & v_1v'_1 & v_1 & u'_1 & v'_1 & 1 \\ u_2u'_2 & u_2v'_2 & u_2 & v_2u'_2 & v_2v'_2 & v_2 & u'_2 & v'_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_nu'_n & u_nv'_n & u_n & v_nu'_n & v_nv'_n & v_n & u'_n & v'_n & 1 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

$$\boldsymbol{h} = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9]^T \tag{A.8}$$

とし，$|A\boldsymbol{h}| = min$ となるように単位ベクトル$\boldsymbol{h}$を求める．即ち，$\boldsymbol{h}$は A^TA の最小単位固有ベクトルである．すると Eは，

$$E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{E}_3 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

で表される．

次に，$\widehat{\boldsymbol{T}} = \pm\boldsymbol{T}_S$であるような単位ベクトル$\boldsymbol{T}_S$を求めるが，これは$\left|E^T\boldsymbol{T}_S\right| = min$ となるような$\boldsymbol{T}_S$を求めればよい．即ち，$\boldsymbol{T}_S$は EE^Tの最小単位固有ベクトルである．そして，得られた$\boldsymbol{T}_S$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{T}_S \times \boldsymbol{X}'_i) \cdot (E\boldsymbol{X}_i) < 0 \tag{A.10}$$

ならば，$\boldsymbol{T}_S = -\boldsymbol{T}_S$とする．

次に，

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{W}_2 & \boldsymbol{W}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{T}_S + \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{T}_S + \boldsymbol{E}_3 \times \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{E}_3 \times \boldsymbol{T}_S + \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.11}$$

を求める．もし誤差がなければ $R = W$であるが，実際には誤差が存在するので，$|R - W| =$ min となるような Rを求める．

$$B = \sum_{i=1}^{3} B_i^T B_i \tag{A.12}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & (\boldsymbol{I}_i - \boldsymbol{W}_i)^T \\ \boldsymbol{I}_i - \boldsymbol{W}_i & [(\boldsymbol{W}_i + \boldsymbol{I}_i)\times] \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

という 4×4 の行列 Bを求める．ただし，$I = [\ \boldsymbol{I}_1\ \boldsymbol{I}_2\ \boldsymbol{I}_3\ ]$ は 3×3 の単位行列である．また，$[*\times]$ は，

$$[(x_1, x_2, x_3)^T \times] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする．この行列 Bの最小単位固有ベクトルを$\boldsymbol{q}$とする．このようにして得られた$\boldsymbol{q}$は，2 枚の画像間の回転変換を表す 4 元数である．正定対称行列の最小固有ベクトルはコレスキー法を用いて求める．

4 元数$\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$と，回転変換の軸$\boldsymbol{\nu}$と角度$\vartheta$の間には以下のような関係がある．

$$\begin{cases} q_0 &= \cos(\vartheta/2) \\ q_1 &= \sin(\vartheta/2)\ \nu_x \\ q_2 &= \sin(\vartheta/2)\ \nu_y \\ q_3 &= \sin(\vartheta/2)\ \nu_z \end{cases} \tag{A.14}$$

したがって，以上のアルゴリズムによって 4 元数が得られれば，それから$\boldsymbol{\nu}$と角度ϑを求めることができる．なお，4 元数と回転行列 Rには，以下のような関係がある．

$$R(\boldsymbol{\nu}, \vartheta) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

附章 B

オイラーの運動方程式の求解と ハーポルホード の表現

主慣性モーメントの 3 つの値が全て異なる剛体に対して，オイラーの運動方程式の求解と，不変平面上のハーポルホード曲線の表現を示す．なお，本章の記述は文献 [45][35][46] を参考にしている．

B.1 オイラーの運動方程式の求解

外力モーメントが作用しない場合のオイラーの運動方程式 (2.5) を，本研究で導入した動力学パラメータで書き直す．

$$\begin{aligned} J_x\dot{\omega}_x - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z &= 0 \\ J_y\dot{\omega}_y - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x &= 0 \\ J_z\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y &= 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

(B.1) の各式に，$\omega_x, \omega_y, \omega_z$を掛けて足し合わせると，

$$J_x\omega_x\dot{\omega}_x + J_y\omega_y\dot{\omega}_y + J_z\omega_z\dot{\omega}_z = 0 \tag{B.2}$$

を得る．これより，

$$J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 = 1 \qquad (\text{一定}) \tag{B.3}$$

とおく．また，(B.1) の各式に，$J_x\omega_x, J_y\omega_y, J_z\omega_z$を掛けて足し合わせると，

$$J_x^2\omega_x\dot{\omega}_x + J_y^2\omega_y\dot{\omega}_y + J_z^2\omega_z\dot{\omega}_z = 0 \tag{B.4}$$

を得る．これより，

$$J_x^2\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2 + J_z^2\omega_z^2 = \alpha \qquad (\text{一定}) \tag{B.5}$$

とおく．

式 (B.3) に J_zを掛けてから式 (B.5) を引いたものを，ω_x^2について解くと，

$$\omega_x^2 = \frac{\alpha - J_z}{J_z(J_x - J_z)}\left(1 - \frac{J_y(J_y - J_z)}{\alpha - J_z}\omega_y^2\right) \tag{B.6}$$

となる．同様に，式 (B.3) に J_xを掛けてから式 (B.5) を引いたものを，ω_z^2について解くと，

$$\omega_z^2 = \frac{J_x - \alpha}{J_z(J_x - J_z)}\left(1 - \frac{J_y(J_x - J_y)}{J_x - \alpha}\omega_y^2\right) \tag{B.7}$$

となる．表記を簡単にするために以下のような記号を導入する．

$$c_x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_x(J_x - J_z)}{\alpha - J_z}} \tag{B.8}$$

$$c_y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_y(J_y - J_z)}{\alpha - J_z}} \tag{B.9}$$

$$c_z \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_z(J_x - J_z)}{J_z - \alpha}} \tag{B.10}$$

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{(\alpha - J_z)(J_x - J_y)}{(J_x - \alpha)(J_y - J_z)}} \tag{B.11}$$

式 (B.8)〜(B.11) の根号の中を全て正にするには，$J_x > J_y > \alpha > J_z$か $J_x < J_y < \alpha < J_z$ である必要がある．そこで，主慣性モーメントの 3 つの中の中間の大きさのものを J_yとし，$J_y > \alpha$ならば，主慣性モーメントの最大のものを J_x，最小のものを J_zとし，$J_y < \alpha$ならば，最大のものを J_z，最小のものを J_xと決める．このようにしても，全ての場合を表現できるので，一般性を損なうことはない．

式 (B.8)〜(B.11) の記号を使って，ω_x^2とω_z^2を書き直す．

$$\omega_x = \pm\frac{1}{c_x}\sqrt{1 - c_y^2\omega_y^2} \tag{B.12}$$

$$\omega_z = \pm\frac{1}{c_z}\sqrt{1 - k^2c_y^2\omega_y^2} \tag{B.13}$$

これを式 (B.1) の 2 番目に代入する．

$$c_y\dot{\omega}_y = \pm\lambda\sqrt{(1 - c_y^2\omega_y^2)(1 - k^2c_y^2\omega_y^2)} \tag{B.14}$$

ここで，

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_z - J_x}{J_y}\frac{c_y}{c_xc_z} \tag{B.15}$$

である．これを $c_y\omega_y$に対する方程式と考えて，変数分離によって積分する．

$$\lambda t = \pm\int\frac{d(c_y\omega_y)}{\sqrt{(1 - c_y^2\omega_y^2)(1 - k^2c_y^2\omega_y^2)}} + \delta \tag{B.16}$$

ここで，δは積分定数である．これにより，

$$c_y\omega_y = \mathrm{sn}(k, \lambda t - \delta) \tag{B.17}$$

ここで，sn はヤコビの楕円関数である (**附章C**参照)．sn は周期的な奇関数であるから，複号の違いはδで吸収することにする．以上から，オイラーの運動方程式の解は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \pm\frac{1}{c_x}\,\mathrm{cn}(k, \lambda t - \delta) \\
\omega_y &= \frac{1}{c_y}\,\mathrm{sn}(k, \lambda t - \delta) \\
\omega_z &= \pm\frac{1}{c_z}\,\mathrm{dn}(k, \lambda t - \delta) \\
&\quad (\text{複号同順})
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$\mathrm{dn} > 0$ であるから，推定の場合には，$\omega_z > 0$ となるように座標系の方向を選ぶことにすれば，複号を省くことができる．

B.2 ハーポルホード の表現

角速度ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{\omega}|$ を単にωと書くことにする．

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2 \tag{B.19}$$

両辺を微分すると

$$\omega_x\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\omega}_y + \omega_z\dot{\omega}_z = \omega\dot{\omega} \tag{B.20}$$

となる．式 (B.1) のそれぞれにω_x/J_x, ω_y/J_y, ω_z/J_zを掛けて足し合わせると，

$$\begin{aligned}
\omega\dot{\omega} &= \left(\frac{J_y - J_z}{J_x} + \frac{J_z - J_x}{J_y} + \frac{J_x - J_y}{J_z}\right)\omega_x\omega_y\omega_z \\
&= -\frac{(J_y - J_z)(J_z - J_x)(J_x - J_y)}{J_xJ_yJ_z}\omega_x\omega_y\omega_z
\end{aligned} \tag{B.21}$$

を得る．3 つの式 (B.3), (B.5), (B.19) をω_x^2, ω_y^2, ω_z^2について解く．

$$\begin{aligned}
\omega_x^2 &= C_x(\omega^2 - \Omega_x^2) \\
\omega_y^2 &= C_y(\omega^2 - \Omega_y^2) \\
\omega_z^2 &= C_z(\omega^2 - \Omega_z^2)
\end{aligned} \tag{B.22}$$

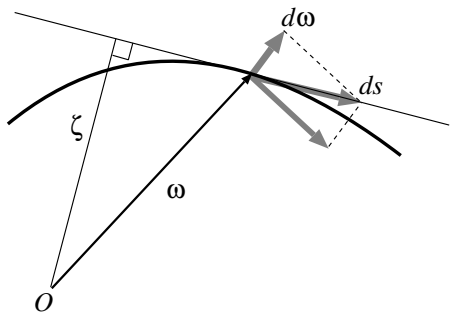


Fig. B.1 Perpendicular ζ from the origin O on the tangent of herpolhode

ここで,

$$
\begin{aligned}
C_x &= \frac{J_y J_z}{(J_x - J_y)(J_x - J_z)} \\
C_y &= \frac{J_z J_x}{(J_y - J_z)(J_y - J_x)} \\
C_z &= \frac{J_x J_y}{(J_z - J_x)(J_z - J_y)}
\end{aligned}
\tag{B.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_x^2 &= \frac{J_y + J_z - \alpha}{J_y J_z} \\
\Omega_y^2 &= \frac{J_z + J_x - \alpha}{J_z J_x} \\
\Omega_z^2 &= \frac{J_x + J_y - \alpha}{J_x J_y}
\end{aligned}
\tag{B.24}
$$

である．この結果を式 (B.21) を 2 乗したものに代入すると,

$$
(\omega\dot{\omega})^2 = -(\omega^2 - \Omega_x^2)(\omega^2 - \Omega_y^2)(\omega^2 - \Omega_z^2) \tag{B.25}
$$

を得る．

ハーポルホード曲線に沿って変数 s を取る．この変数とω_x, ω_y, ω_z の間には以下のような関係が成り立つ．

$$
\left(\frac{d\omega_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\omega_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\omega_z}{ds}\right)^2 = 1 \tag{B.26}
$$

ここに，式 (B.22) の両辺を s で微分し，2 乗したものを代入する．

$$
\left(\frac{C_x}{\omega^2 - \Omega_x^2} + \frac{C_y}{\omega^2 - \Omega_y^2} + \frac{C_z}{\omega^2 - \Omega_z^2}\right)\omega^2 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = 1 \tag{B.27}
$$

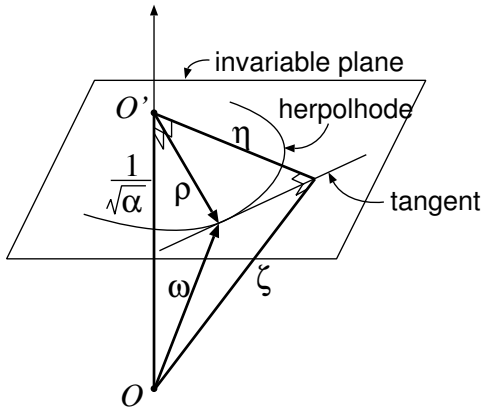


Fig. B.2 Relations of ρ-ω and ζ-η

ポアンソーの楕円体の原点から，ハーポルホード曲線の接線に下ろした垂線の長さをζとすると，**Fig. B.1**に示す幾何学的な関係から，

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \zeta^2}}{\omega} \tag{B.28}$$

であることがわかる．これを使って，先の関係式を次のように書き直すことができる．

$$\zeta^2 = \omega^2 - \frac{1}{\dfrac{C_x}{\omega^2 - \Omega_x^2} + \dfrac{C_y}{\omega^2 - \Omega_y^2} + \dfrac{C_z}{\omega^2 - \Omega_z^2}} \tag{B.29}$$

次に，不変平面上の長さの変数を導入する．**Fig. B.2**に示すように，ポアンソーの楕円体の原点から不変平面下ろした垂線の足を O'とする．O'から，ハーポルホード上の 1 点へ延ばした線分の長さをρ，その点における接線に O'から下ろした垂線の長さをηとする．2 つの直角三角形の関係から，

$$\omega^2 = \rho^2 + \frac{1}{\alpha} \tag{B.30}$$

$$\zeta^2 = \eta^2 + \frac{1}{\alpha} \tag{B.31}$$

これを式 (B.29) に代入して整理すると，

$$\eta^2 = \rho^2 - \frac{1}{\dfrac{C_x}{\rho^2 - \rho_x^2} + \dfrac{C_y}{\rho^2 - \rho_y^2} + \dfrac{C_z}{\rho^2 - \rho_z^2}} \tag{B.32}$$

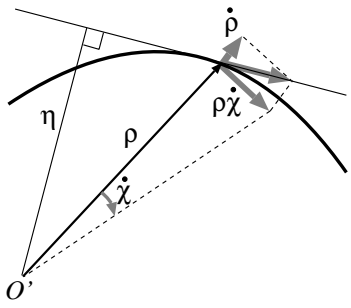


Fig. B.3 Radius ρ and perpendicular η from O' on the invariable plane

となる．ここで，

$$\begin{aligned} \rho_x^2 &= -\frac{(\alpha - J_y)(\alpha - J_z)}{\alpha J_y J_z} \\ \rho_y^2 &= -\frac{(\alpha - J_z)(\alpha - J_x)}{\alpha J_z J_x} \\ \rho_z^2 &= -\frac{(\alpha - J_x)(\alpha - J_y)}{\alpha J_z J_y} \end{aligned} \tag{B.33}$$

である．また，式 (B.25) に代入して，次の関係を得る．

$$(\rho\dot{\rho})^2 = -(\rho^2 - \rho_x^2)(\rho^2 - \rho_y^2)(\rho^2 - \rho_z^2) \tag{B.34}$$

さて，不変平面上において，角速度ベクトルの先端の位置を極座標 (ρ, χ) で表現することにする．χは，O'を中心として平面上の適当な方向基準にして測った角度である．ハーポルホード上のある点の移動速度を，径方向の成分$\dot{\rho}$とそれに直交する成分$\rho\dot{\chi}$に分けて考えると，**Fig. B.3**に示すように，

$$\dot{\rho} : \rho\dot{\chi} = \sqrt{\rho^2 - \eta^2} : \eta \tag{B.35}$$

なる幾何学的関係がある．これを，$\dot{\chi}$について解く．

$$\dot{\chi} = \frac{1}{\rho}\frac{\eta}{\sqrt{\rho^2 - \eta^2}}\dot{\rho} \tag{B.36}$$

これに式 (B.29) と (B.34) を代入し，$C_x, C_y, C_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$を元に戻し，丹念に整理すると，

$$\dot{\chi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left\{1 + \frac{(J_x - \alpha)(J_y - \alpha)(J_z - \alpha)}{J_x J_y J_z \rho^2}\right\} \tag{B.37}$$

を得る．また，式 (B.30) の関係を使って

$$\dot{\chi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left\{1 + \frac{(J_x - \alpha)(J_y - \alpha)(J_z - \alpha)}{J_x J_y J_z (\alpha\omega^2 - 1)}\right\} \tag{B.38}$$

と書くこともできる．

附章 C

ヤコビの楕円関数

第 1 種楕円積分の Legendre-Jacobi の標準形

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{C.1}$$

の逆関数を

$$z = \mathrm{sn}(k, u) \tag{C.2}$$

と定義する．ここで，$0 \leq k \leq 1$ を関数 sn の母数と呼ぶ．$k = 0$ と $k = 1$ 以外の母数に対しては $\mathrm{sn}(k, u)$ は初等関数で表すことができない．また，関数 $\mathrm{cn}(k, u)$ と $\mathrm{dn}(k, u)$ を以下のように定義する．

$$\mathrm{cn}(k, u) = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2(k, u)} \tag{C.3}$$

$$\mathrm{dn}(k, u) = \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(k, u)} \tag{C.4}$$

である．右辺はともに 2 つの 1 価関数に分解されるが，それらのうち，$u = 0$ で+1 になる方をとるものとする．

sn は奇関数，cn, dn は偶関数であり，sn，cn の周期は $4K(k)$ で，dn の周期は $2K(k)$ である．ここで，$K(k)$ は第 1 種完全楕円積分で以下のように定義される．

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{C.5}$$

これらの関数は，$k = 0$ では，

$$\mathrm{sn}(0, u) = \sin u \tag{C.6}$$

$$\mathrm{cn}(0, u) = \cos u \tag{C.7}$$

$$\mathrm{dn}(0, u) = 1 \tag{C.8}$$

$k=1$ では,

$$\mathrm{sn}(1,u) = \tanh u \tag{C.9}$$

$$\mathrm{cn}(1,u) = \mathrm{sech}\, u \quad (\equiv \frac{1}{\cosh u}) \tag{C.10}$$

$$\mathrm{dn}(1,u) = \mathrm{sech}\, u \quad (\equiv \frac{1}{\cosh u}) \tag{C.11}$$

となる.

微分に関しては,

$$\frac{d\,\mathrm{sn}(k,u)}{du} = +\mathrm{cn}(k,u)\,\mathrm{dn}(k,u) \tag{C.12}$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}(k,u)}{du} = -\mathrm{sn}(k,u)\,\mathrm{dn}(k,u) \tag{C.13}$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}(k,u)}{du} = -k^2\,\mathrm{sn}(k,u)\,\mathrm{cn}(k,u) \tag{C.14}$$

という関係がある.

Fig. C.1に母数 kに対するヤコビの楕円関数の $\mathrm{sn}(k,u'/4K)$, $\mathrm{cn}(k,u'/4K)$, $\mathrm{dn}(k,u'/4K$ の変化を示す. また, **Fig. C.2**には kに対する第一種完全楕円積分 $K(k)$ の変化を示す.

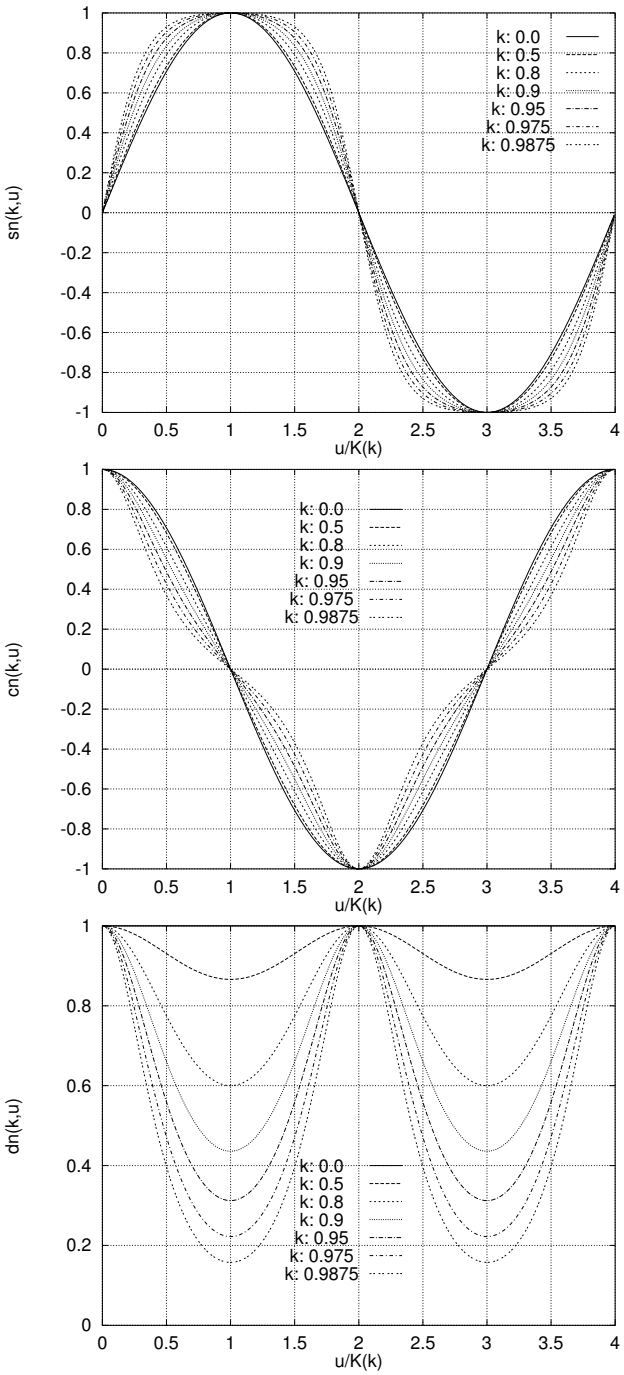


Fig. C.1 Jacobi's Elliptic Function

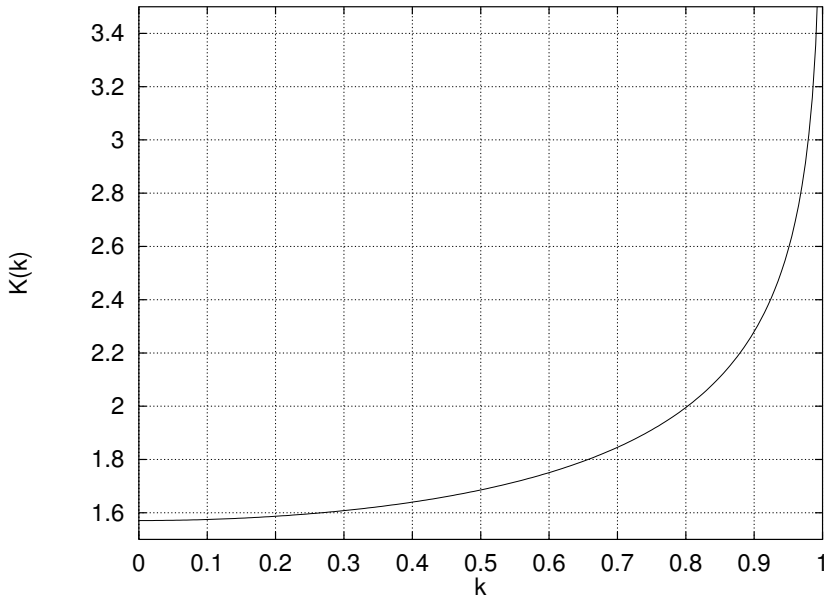


Fig. C.2 Complete elliptic integral of the first kind

附章 D

$\left|\omega(t)\right|^2$の波形のパラメータ推定

画像から抽出された雑音を含む離散的なデータ $\{t_i, |\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ から，その波形の特徴となるパラメータを推定する方法にについて説明する．

$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2$は以下のような値をとる．

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = \beta - k^2\lambda^2(k)\,\mathrm{sn}^2(k, \lambda(k)\ t - \delta) \tag{D.1}$$

$$\lambda(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{2K(k)}{T} \tag{D.2}$$

これは時間に関する周期関数であるから，まずデータをフーリエ変換し，スペクトルを分析することによって波形の周期 Tと概形を把握し，次に，式 (D.1) をモデルとして非線形最小二乗法を適用し，3 つのパラメータβ, k, δを推定する．

D.1 フーリエ変換

データの平均値$\overline{|\boldsymbol{\omega}|^2}$を求め，それを元のデータから差し引いて，平均値 0 のデータを作る．

$$g(i) = |\boldsymbol{\omega}_i|^2 - \overline{|\boldsymbol{\omega}|^2} \qquad (i = 0, \cdots, n-1) \tag{D.3}$$

次に，n 個のデータ $\{g(i)\}$ に Hanning の窓関数

$$w(i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi i}{n}\right) \tag{D.4}$$

を乗じる．

$$g'(i) = w(i)g(i) \qquad (i = 0, \cdots, n-1) \tag{D.5}$$

その後，$\{g'(i)\}$ に値が零のデータを付加して，データ数が 2 の冪乗 (それを Nとする) になるようにする．これに対して，高速フーリエ変換を行い，

$$G(\kappa) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} g'(i)\exp\frac{-2\pi i\kappa j}{N} \tag{D.6}$$

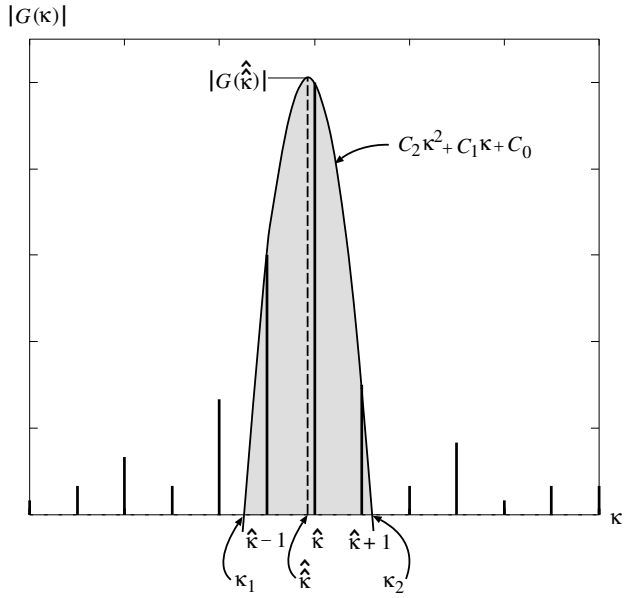


Fig. D.1 Parabolic curve for major spector

を得る．ここで，jは虚数単位である．

$|G(\kappa)|$ が最大値をとるκを探し，これを$\widehat{\kappa}$と名付ける．

$|G(\kappa)| > \Theta_{abs}\,|G(\widehat{\kappa})|$ かつ $|\kappa - \widehat{\kappa}| > \Theta_{near}$を満たす$\kappa$が存在するならば，十分に信頼できる主成分が見つけられないと判断する．ただし，$0 < \Theta_{abs} < 1$ と$\Theta_{near} \geq 1$ は適当な定数である．

D.2 スペクトルの分析

次に，$(\widehat{\kappa}-1, |G(\widehat{\kappa}-1)|)$, $(\widehat{\kappa}, |G(\widehat{\kappa})|)$, $(\widehat{\kappa}+1, |G(\widehat{\kappa}+1)|)$ を通る 2 次曲線の

$$y = C_2\kappa^2 + C_1\kappa + C_0 \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2}\left(|G(\widehat{\kappa}-1)| + |G(\widehat{\kappa}+1)|\right) - |G(\widehat{\kappa})| && \text{(D.8)} \\ C_1 &= |G(\widehat{\kappa}+1)| - |G(\widehat{\kappa})| - C_2(2\widehat{\kappa}+1) && \text{(D.9)} \\ C_0 &= |G(\widehat{\kappa})| - (C_2\widehat{\kappa} + C_1)\widehat{\kappa} && \text{(D.10)} \end{aligned}$$

を考える (**Fig. D.1**)．この曲線の頂点をスペクトルの主成分の周波数とする．

$$\widehat{\widehat{\kappa}} = -\frac{C_1}{2C_2} \tag{D.11}$$

$$F = \frac{n-1}{N(t_{n-1}-t_0)}\widehat{\widehat{\kappa}} \tag{D.12}$$

また，この成分のパワーを

$$P = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} (C_2\kappa^2 + C_1\kappa + C_0)^2 d\kappa \tag{D.13}$$

と見なす．ここで，κ_1, κ_2は$C_2\kappa^2 + C_1\kappa + C_0 = 0$の解である．すると，この成分の振幅は，

$$A = 2N\sqrt{\frac{P}{W}} \tag{D.14}$$

となる．ここで，

$$W = N\sum_{i=0}^{n-1} w(i)^2 \tag{D.15}$$

である．さらに，主成分の位相は$\widehat{\kappa}$の前後のκにおける値から 1 次式で内挿によって推定する．得られた値をΦとする．

以上より，スペクトル分析で得られた主成分は，

$$A\cos(2\pi F(t - t_0) + \Phi) = A\cos(2\pi Ft - \Phi') \tag{D.16}$$

と表される．ここで，

$$\Phi' = -\Phi + 2\pi Ft_0 + 2\pi m \tag{D.17}$$

である．ただし，$0 < \Phi' < 2\pi$となるように整数 m を調整する．主成分の周期は，

$$T = \frac{1}{F} \tag{D.18}$$

である．

D.3 非線形最小二乗法

ここでは，$\{t_i, |\boldsymbol{\omega}_i|^2\}$ に対するパラメータ推定のために Gauss-Newton 法を用いる．最初にこの方法を概説し，その後，具体的にどのように適用するかについて述べる．

n 個の測定値の組を$\boldsymbol{y} = [y_0, \cdots, y_{n-1}]^T$，測定値を説明するモデルを$\boldsymbol{f} = [f_0, \cdots, f_{n-1}]^T$，そのモデルの m 個のパラメータを$\boldsymbol{x} = [x_0, \cdots, x_{m-1}]^T$とする．この時，残差二乗和

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - f_i(\boldsymbol{x}))^2 \tag{D.19}$$

を最小化するパラメータ$\boldsymbol{x}$を求めるために，次のような繰り返し計算を行う．

$$\boldsymbol{x}^{(\kappa+1)} = \boldsymbol{x}^{(\kappa)} + s\Delta\boldsymbol{x}^{(\kappa)} \tag{D.20}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}^{(\kappa)} = \left(J^{(\kappa)T}J^{(\kappa)}\right)^{-1} J^{(\kappa)T}\Delta\boldsymbol{y}^{(\kappa)} \tag{D.21}$$

$$J_{ij}^{(\kappa)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^{(\kappa)}) \tag{D.22}$$

$$\Delta\boldsymbol{y}^{(\kappa)} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(\kappa)}) \tag{D.23}$$

ここで，$0 < s \leq 1$ は縮小因子であり，

$$S(\boldsymbol{x}^{(\kappa+1)}) > S(\boldsymbol{x}^{(\kappa)}) \tag{D.24}$$

となった場合には，s を

$$s \leftarrow \Theta_{damp}\ s \tag{D.25}$$

と更新して，$S(\boldsymbol{x}^{(\kappa+1)})$ を計算し直す．ただし，$0 < \Theta_{damp} < 1$ は適当な定数である．繰り返しの処理は，

$$\frac{S(\boldsymbol{x}^{(\kappa)}) - S(\boldsymbol{x}^{(\kappa+1)})}{S(\boldsymbol{x}^{(\kappa)})} > \Theta_{eps} \tag{D.26}$$

になれば終了する．ここで，Θ_{eps}は適当な正の定数である．

以上の方法の具体的な適用について述べる．推定するパラメータは 3 つである．

$$\boldsymbol{x} = [\beta, \delta, k]^T \tag{D.27}$$

周期 Tは前節で得られた値を定数として用いる．また，$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{f}$は，

$$y_i = |\boldsymbol{\omega}_i|^2 \tag{D.28}$$

$$f_i = \beta - k^2\lambda^2(k)\,\mathrm{sn}^2(k, \lambda(k)\ t_i - \delta) \tag{D.29}$$

である．ヤコビアン Jは，

$$\frac{\partial f_i}{\partial \beta} = 1 \tag{D.30}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \delta} = 2k^2\lambda(k)^2\ \mathrm{sn}(k, \lambda(k)\ t_i - \delta)\ \mathrm{cn}(k, \lambda(k)\ t_i - \delta)\ \mathrm{dn}(k, \lambda(k)\ t_i - \delta) \tag{D.31}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial k} = \frac{f_i(\beta, \delta, k + \Delta k) - f_i(\beta, \delta, k - \Delta k)}{2\Delta k} \tag{D.32}$$

とする．偏微分$\partial f/\partial k$は解析的に得られないので，差分で近似している．

非線形の最小二乗法では，どのような手法を用いようとも探索のための初期値の選択が最も重要である．この推定では，前節のスペクトル分析によって取り出した主成分の値から初期値を決める．

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \beta^{(0)} \\ \delta^{(0)} \\ k^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{|\boldsymbol{\omega}|^2} + A \\ \dfrac{K(k')}{\pi}\Phi' \\ k' \end{bmatrix} \tag{D.33}$$

ここで，k'は

$$2k'K(k') = T\sqrt{2A} \tag{D.34}$$

の解である．

附章 E

2 次方程式 (2.38) について

第2章において，動力学パラメータを決定するために用いた 2 次方程式 (2.38) の性質について述べる．

方程式 (2.38) を再び書いておく．

$$f(\xi) = C_2\xi^2 + C_1\xi + C_0 = 0$$

$$\begin{aligned} C_2 &= k^2\gamma(\alpha\beta - 1) - (\beta - \gamma) \\ C_1 &= -2\{k^2(\alpha\beta - 1) - \alpha(\beta - \gamma)\} \\ C_0 &= \alpha\{k^2(\alpha\beta - 1) - \alpha(\beta - \gamma)\} \end{aligned}$$

これは，式 (2.11) に式 (2.36) と式 (2.37) を代入し，$J_y \neq J_z$かつ $J_x \neq \alpha$という条件下で整理すると得られる．

[命題] 2 次方程式 (2.38) は 2 つの実数解を持つ．

[証明] 2 次方程式の判別式 Dは，

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{C_1^2}{4} - C_2C_0 \\ &= -k^2(\alpha\beta - 1)(\alpha\gamma - 1)\{k^2(\alpha\beta - 1) - \alpha(\beta - \gamma)\} \end{aligned} \tag{E.1}$$

である．ここで，β, γ, kにそれぞれ式 (2.11), (2.29), (2.30) を代入して整理し，$J_x > J_y > \alpha > J_z$または $J_x < J_y < \alpha < J_z$という条件を考えると，

$$\alpha\beta - 1 = \frac{(J_x - \alpha)(\alpha - J_z)}{J_xJ_z} > 0 \tag{E.2}$$

$$\alpha\gamma - 1 = \frac{(J_y - \alpha)(\alpha - J_z)}{J_yJ_z} > 0 \tag{E.3}$$

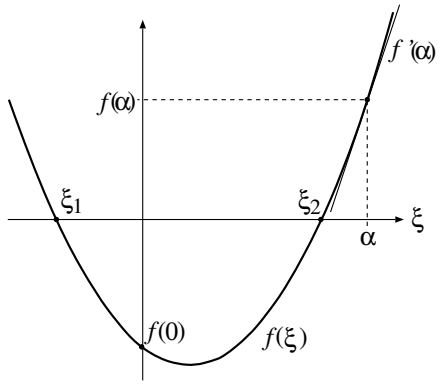


Fig. E.1 Parabolic curve $f(\xi)$ in case that $C_2 > 0$

$$k^2(\alpha\beta - 1) - \alpha(\beta - \gamma) = -\frac{(J_x - J_y)(\alpha - J_z)(J_y - \alpha)}{J_x J_y (J_y - J_z)} < 0 \tag{E.4}$$

である．これより，

$$D > 0 \tag{E.5}$$

したがって，2 次方程式 (2.38) は 2 つの実数解をもつ．□

[命題] 2 次方程式 (2.38) の 2 つの実数解をξ_1, ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$) とすると，

$$C_2 > 0 \quad \text{ならば} \quad \xi_1 < 0 < \xi_2 < \alpha$$
$$C_2 < 0 \quad \text{ならば} \quad 0 < \xi_1 < \alpha < \xi_2$$

である．

[証明] $f(0)$, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ の符号を調べる．式 (E.2), (E.3), (E.4) より，

$$\begin{aligned} f(0) &= C_0 \\ &= \alpha\{k^2(\alpha\beta - 1) - \alpha(\beta - \gamma)\} < 0 \end{aligned} \tag{E.6}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= C_2\alpha^2 + C_1\alpha + C_0 \\ &= \alpha k^2(\alpha\beta - 1)(\alpha\gamma - 1) > 0 \end{aligned} \tag{E.7}$$

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 2C_2\alpha + C_1 \\ &= 2k^2(\alpha\beta - 1)(\alpha\gamma - 1) > 0 \end{aligned} \tag{E.8}$$

であることがわかる．

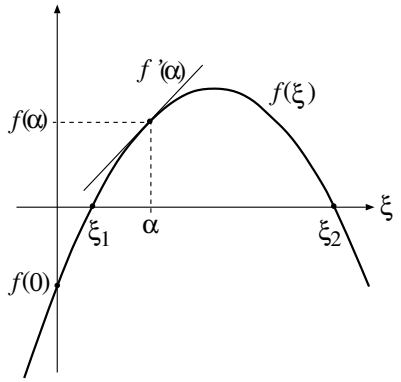


Fig. E.2 Parabolic curve $f(\xi)$ in case that $C_2 < 0$

- $C_2 > 0$ の場合 (**Fig. E.1**参照).
  式 (E.7) と (E.8) より,
  $$\xi_1 < \xi_2 < \alpha$$
  式 (E.6) より
  $$\xi_1 < 0 < \xi_2$$
- $C_2 < 0$ の場合 (**Fig. E.2**参照).
  式 (E.7) より,
  $$\xi_1 < \alpha < \xi_2$$
  式 (E.6) と$\alpha > 0$ より,
  $$0 < \xi_1$$

以上で命題が証明された. □

2 次方程式 (2.38) の 2 次の係数 C_2のβ, γ, kにそれぞれ式 (2.11), (2.29), (2.30) を代入して整理すると次の結果が得られる.

$$C_2 = \frac{(J_x - J_y)(J_y - \alpha)(\alpha - J_z)}{J_x J_y J_z^2 (J_y - J_z)} \cdot (\alpha - 2J_z) \tag{E.9}$$

右辺の前の部分は常に正であるから, C_2の符号は $(\alpha - 2J_z)$ の符号によって決まる. $J_x < J_y < \alpha < J_z$の場合は, 常に $C_2 < 0$ である. 一方, $J_x > J_y > \alpha > J_z$の場合は, どちらの符号にもなりうる. したがって, 符号が切り替わる付近では C_2の絶対値が小さくなるので, これを考慮した数値処理を用意する必要がある.

附章 F

ベースの姿勢およびその角速度の表現

慣性座標系Σ_Iに対するベース座標系Σ_Bの姿勢をロール角・ピッチ角・ヨー角で表現する場合，その定義の仕方は何通りもあるが，本論文では以下のように定義する．

ベース座標系Σ_Bをその原点がΣ_Iの原点と一致するまで平行移動する．これが次に示す座標系Σ_3と一致するとき，ベース座標系の姿勢をロール角ϕ・ピッチ角θ・ヨー角ψとする．

1. 座標系Σ_Iを x_I軸まわりにϕ回転させた座標系をΣ_1とする．
2. 座標系Σ_1を y_1軸まわりにθ回転させた座標系をΣ_2とする．
3. 座標系Σ_2を z_2軸まわりにψ回転させた座標系をΣ_3とする．

このとき，式 (4.1) における座標系Σ_Iから座標系Σ_Bへの回転変換行列${}^iA_B(\boldsymbol{\phi})$ は

$$
{}^IA_B(\boldsymbol{\phi}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_\theta C_\psi & -C_\theta S_\psi & S_\theta \\ C_\phi S_\psi + S_\phi S_\theta C_\psi & C_\phi C_\psi - S_\phi S_\theta S_\psi & -S_\phi C_\theta \\ S_\phi S_\psi - S_\phi S_\theta C_\psi & S_\phi C_\psi + C_\phi S_\theta S_\psi & C_\phi C_\theta \end{pmatrix} \tag{F.1}
$$

となる．ここで，$C_* \stackrel{\text{def}}{=} \cos *$，$S_* \stackrel{\text{def}}{=} \sin *$である．

また，慣性座標系に対するベースの角速度をベース座標系を基底として表現した${}^B\boldsymbol{\omega}_B$は，ベースの姿勢の時間微分$\dot{\boldsymbol{\phi}}$の線形結合で表わされる．

$$
{}^B\boldsymbol{\omega}_B = N(\boldsymbol{\phi})\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \tag{F.2}
$$

この係数行列 $N(\boldsymbol{\phi})$ は

$$
N(\boldsymbol{\phi}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & S_\psi & 0 \\ -S_\psi C_\theta & C_\psi & 0 \\ S_\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{F.3}
$$

となる．

附章 G

直鎖状マニピュレータの一般化ヤコビ行列導出手順と演算回数

第4章で述べた一般化ヤコビ行列の導出アルゴリズムは，あらゆるマニピュレータに対応している．ここでは，より具体的な処理を明らかにするために，取り扱いが容易な回転型の関節のみより成る直鎖状のマニピュレータの場合に限って導出手順を述べる．

G.1 定数

Fig. G.1直鎖状に連結された剛体群の一端をベース，他端を手先とし，ベースから順に $0, 1, \cdots, n$ と番号を付ける．リンク $i-1$ とリンク i を結ぶ関節を関節 i とする．さらに，座標系Σ_iは剛体 i に固定されており，その原点は関節軸 $i+1$ 上にあり，z軸がその関節軸に一致しているとする．ベースに固定された座標系として，ベースの質量中心に原点をとる座標系Σ_Bと，関節 1 に原点をとる座標系Σ_0を置く．

次に，Denavit と Hertenberg の方法 [47] と同様に，各剛体のリンクパラメータ

a_i: リンク長さ
d_i: リンク間距離
α_i: リンクねじれ角

を定める (**Fig. G.2**)．これらの変数を用いて，座標系Σ_i から座標系Σ_{i-1}の回転変換行列は，関節角 q_iの関数として，

$$
{}^{i-1}A_i(q_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos q_i & -\cos\alpha_i \sin q_i & \sin\alpha_i \sin q_i \\ \sin q_i & \cos\alpha_i \cos q_i & -\sin\alpha_i \cos q_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}
$$

三角関数: 2, 乗算: 4, 加減算: 0

と表される．また，Σ_0からΣ_Bへの変換行列を${}^BA_0$とする．これは定数である．

さらに以下のような定数を与える．

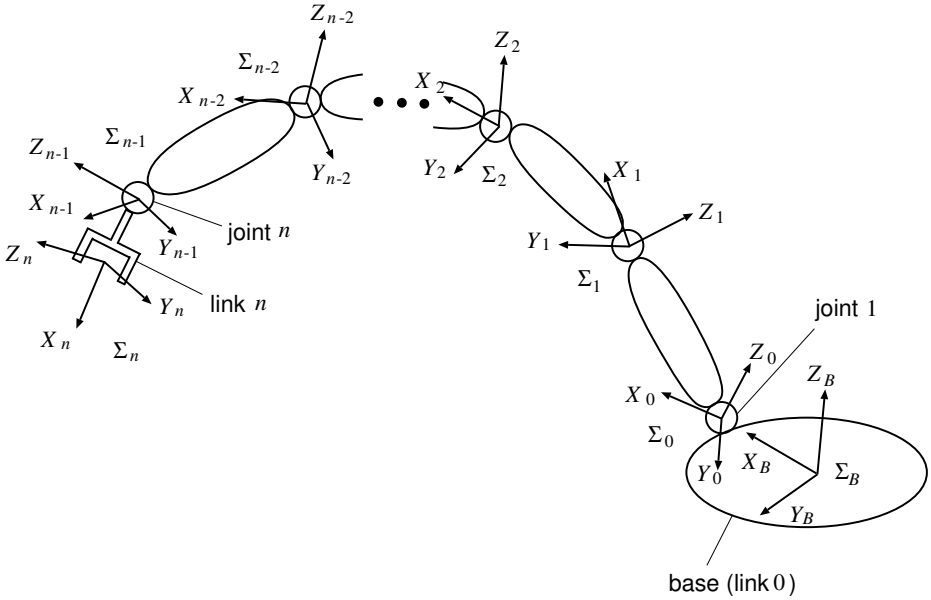


Fig. G.1 Coordinate frames on space manipulator

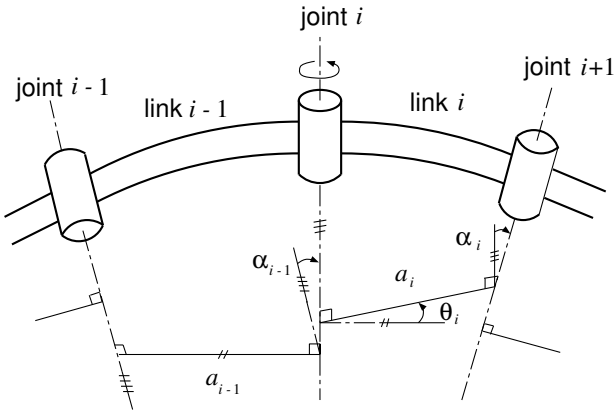


Fig. G.2 Link parameters

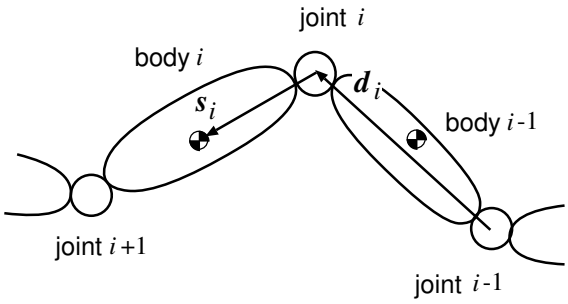


Fig. G.3 Constant parameters on each link

${}^{i}\boldsymbol{s}_i$:	関節 i から剛体 i の質量中心を指すベクトル (**Fig. G.3**)	$(i=1,\cdots,n)$
${}^{B}\boldsymbol{p}_1$:	ベースの質量中心から関節 1 を指すベクトル	
m_i:	剛体 i の質量	$(i=1,\cdots,n)$
${}^{i}I_i$:	座標系Σ_i表示の剛体 i の慣性テンソル	$(i=1,\cdots,n)$
${}^{B}I_0$:	座標系Σ_B表示のベースの慣性テンソル	

G.2 変数

計算のために次のような変数を使用する.

${}^{B}A_i$:	座標系Σ_Bから座標系Σ_iへの回転変換行列	$(i=1,\cdots,n)$
${}^{B}\boldsymbol{d}_i$:	Σ_B表示のベクトル${}^{i-1}\boldsymbol{d}_i$	$(i=2,\cdots,n+1)$
${}^{B}\boldsymbol{s}_i$:	Σ_B表示のベクトル${}^{i}\boldsymbol{s}_i$	$(i=1,\cdots,n)$
${}^{B}I_i$:	Σ_B表示の慣性テンソル${}^{i}I_i$	$(i=1,\cdots,n)$
${}^{B}\boldsymbol{r}_i$:	Σ_B表示の剛体 i の質量中心の位置ベクトル	$(i=1,\cdots,n)$
${}^{B}\boldsymbol{p}_i$:	Σ_B表示の関節 i の位置ベクトル	$(i=1,\cdots,n+1)$
${}^{B}\boldsymbol{r}_C$:	Σ_B表示の系全体の質量中心の位置ベクトル	
${}^{B}\boldsymbol{r}_{EC}$:	Σ_B表示の系全体の質量中心から手先を指すベクトル	
H_B:	系全体の慣性テンソル $\in \mathbf{R}^{3\times 3}$	
$[m_i{}^{B}\boldsymbol{r}_i]$:	作業変数	$(i=1,\cdots,n)$
L:	作業変数 $\in \mathbf{R}^{3\times 3}$	
D:	作業変数 $\in \mathbf{R}^{3\times 3}$	

$J_{Li} \equiv [\boldsymbol{J}_{Li}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{J}_{Li}^{(n)}]$:	各剛体の並進速度のヤコビ行列	$(i=1,\cdots,n)$
$J_{Ai} \equiv [\boldsymbol{J}_{Ai}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{J}_{Ai}^{(n)}]$:	各剛体の角速度のヤコビ行列	$(i=1,\cdots,n)$
$H_M \equiv [\boldsymbol{H}_M^{(1)},\cdots,\boldsymbol{H}_M^{(n)}]$:	角運動量の係数行列	
$J_C \equiv [\boldsymbol{J}_C^{(1)},\cdots,\boldsymbol{J}_C^{(n)}]$:	系の質量中心の速度のヤコビ行列	
$J_L \equiv [\boldsymbol{J}_L^{(1)},\cdots,\boldsymbol{J}_L^{(n)}]$:	手先の並進速度のヤコビ行列	
$\widehat{J}_L \equiv [\widehat{\boldsymbol{J}}_L^{(1)},\cdots,\widehat{\boldsymbol{J}}_L^{(n)}]$:	並進速度の一般化ヤコビ行列	
$\widehat{J}_A \equiv [\widehat{\boldsymbol{J}}_A^{(1)},\cdots,\widehat{\boldsymbol{J}}_A^{(n)}]$:	角速度の一般化ヤコビ行列	
$X \equiv [\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(n)}]$:	作業変数	
$Y \equiv [\boldsymbol{Y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{Y}^{(n)}]$:	作業変数	
$Z \equiv [\boldsymbol{Z}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{Z}^{(n)}]$:	作業変数	

G.3 関数

ベクトル$\boldsymbol{r} = [r_x, r_y, r_z]^T$に対して，

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{r}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{pmatrix}$$

乗算: 6, 加減算: 3

回転変換行列 $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ $(AA^T = U_3)$ と正定対称行列 $P \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ $(P^T = P > 0)$ に対して，

$$\mathrm{transformTensor}(A, P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A\ P\ A^T$$

乗算: 45, 加減算: 30

行列 $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$に対して，

$$\mathrm{thirdColumn}(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix}$$

乗算: 0, 加減算: 0

修正コレスキー法による行列の三角分解．正定対称行列 Pのに対して

$$\mathrm{Colesky1}(P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} L, D$$

$$P = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 1 & L_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

除算: 3, 乗算: 7, 加減算: 4

$$\mathrm{Colesky2}(L, D, \boldsymbol{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (LDL^T)^{-1}\ \boldsymbol{x}$$

乗算: 9, 加減算: 6

G.4 準備

余分な計算を避けるために，以下のような量をあらかじめ計算しておく．
関節 i から関節 $i+1$ を指すベクトル (**Fig. G.3**).

$${}^i\boldsymbol{d}_{i+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \sin\alpha_i \\ d_i \cos\alpha_i \end{bmatrix} = \mathrm{const.} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

ただし，${}^n\boldsymbol{d}_{n+1}$は関節 n から手先を指すベクトルとする．

$$
\begin{array}{lcl}
M & \leftarrow & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} m_i : \text{総質量} \\
[\sqrt{m_i}] & \leftarrow & \sqrt{m_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \\
[1/M] & \leftarrow & 1/M \\
[\sqrt{M}] & \leftarrow & \sqrt{M}
\end{array}
$$

G.5 算出手順

関節変位 $q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられた場合の一般化ヤコビ行列$\widehat{J}_L$, $\widehat{J}_A$の算出手順について述べる.

座標変換

$i \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$$
{}^{B}A_i \leftarrow {}^{B}A_{i-1}\ {}^{i-1}A_i(q_i)
$$

$\boxed{\text{乗算: } 31n, \text{ 加減算: } 18n}$

$i \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$$
\begin{array}{l}
{}^{B}\boldsymbol{d}_{i+1} \leftarrow {}^{B}A_i\ {}^{i}\boldsymbol{d}_{i+1} \\
{}^{B}\boldsymbol{s}_i \leftarrow {}^{B}A_i\ {}^{i}\boldsymbol{s}_i \\
{}^{B}I_i \leftarrow \mathrm{transformTensor}({}^{B}A_i, {}^{i}I_i)
\end{array}
$$

$\boxed{\text{乗算: } 63n, \text{ 加減算: } 42n}$

位置ベクト ル

$i \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$$
\begin{array}{l}
{}^{B}\boldsymbol{r}_i \leftarrow {}^{B}\boldsymbol{p}_i + {}^{B}\boldsymbol{s}_i \\
{}^{B}\boldsymbol{p}_{i+1} \leftarrow {}^{B}\boldsymbol{p}_i + {}^{B}\boldsymbol{d}_{i+1}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{乗算: } 0, \text{ 加減算: } 6n}$

$$
{}^{B}\boldsymbol{r}_C \leftarrow \boldsymbol{0}
$$

$i \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$$
\begin{array}{l}
[m_i {}^{B}\boldsymbol{r}_i] \leftarrow m_i\ {}^{B}\boldsymbol{r}_i \\
{}^{B}\boldsymbol{r}_C \leftarrow {}^{B}\boldsymbol{r}_C + [m_i {}^{B}\boldsymbol{r}_i]
\end{array}
$$

$\boxed{\text{乗算: } 3n, \text{ 加減算: } 3n}$

$$
{}^{B}\boldsymbol{r}_C \leftarrow [1/M]\ {}^{B}\boldsymbol{r}_C
$$

$\boxed{\text{乗算: } 3, \text{ 加減算: } 0}$

H_Bの計算

対称性を利用して，3×3 行列の 6 つの成分だけを計算する．

$H_B \leftarrow {}^B I_0 - \mathrm{D}([\sqrt{M}]{}^B\boldsymbol{r}_C)$

乗算: 9, 加減算: 9

$i \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$H_B \leftarrow H_B + {}^B I_i + \mathrm{D}([\sqrt{m_i}]{}^B\boldsymbol{r}_i)$

乗算: $9n$, 加減算: $15n$

ヤコビ行列の計算

$j \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$\boldsymbol{Z}^{(j)} \leftarrow \mathrm{thirdColumn}({}^B A_{j-1})$
$\boldsymbol{J}_L^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{Z}^{(j)} \times ({}^B\boldsymbol{r}_E - {}^B\boldsymbol{p}_j)$

乗算: $6n$, 加減算: $6n$

$i \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$j \leftarrow 1, \cdots, i$ に対して

$\boldsymbol{J}_{Li}^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{Z}^{(j)} \times ({}^B\boldsymbol{r}_i - {}^B\boldsymbol{p}_j)$
$\boldsymbol{J}_{Ai}^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{Z}^{(j)}$

乗算: $3(n^2+n)$, 加減算: $3(n^2+n)$

H_Mと J_Cの計算

$j \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$\boldsymbol{H}_M^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{J}_C^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{0}$

$i \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$j \leftarrow 1, \cdots, i$ に対して

$\boldsymbol{H}_M^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{H}_M^{(j)} + {}^B I_i \boldsymbol{J}_{Ai}^{(j)} + [m_i {}^B\boldsymbol{r}_i] \times \boldsymbol{J}_{Li}^{(j)}$
$\boldsymbol{J}_C^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{J}_C^{(j)} + m_i \boldsymbol{J}_{Li}^{(j)}$

乗算: $9(n^2+n)$, 加減算: $9(n^2+n)$

$j \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$\boldsymbol{H}_M^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{H}_M^{(j)} - {}^B\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{J}_C^{(j)}$
$\boldsymbol{J}_C^{(j)} \leftarrow [1/M]\boldsymbol{J}_C^{(j)}$

乗算: $9n$, 加減算: $6n$

Table G.1 Numerical complexities in computing the Generalized and Fixed-base Jacobians ($6 \times n$ matrices)

	Generalized Jacobian	Conventional (fixed-base) Jacobian
division	3 (3)	0 (0)
multiplication	$12n^2 + 148n + 19$ (1339)	$30n - 11$ (169)
addition & subtraction	$12n^2 + 126n + 16$ (1204)	$18n - 20$ (88)

$(*)$: in case of $n = 6$

$H_B^{-1}\ H_M$と $[({}^B\boldsymbol{r}_E - {}^B\boldsymbol{r}_C)\times]\ H_B^{-1}H_M$の計算

${}^B\boldsymbol{r}_{EC} \leftarrow {}^B\boldsymbol{r}_E - {}^B\boldsymbol{r}_C$ 乗算: 0, 加減算: 3

$L, D \leftarrow \mathrm{Colesky1}(H_B)$ 除算: 3, 乗算: 7, 加減算: 4

$j \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$\boldsymbol{X}^{(j)} \leftarrow \mathrm{Colesky2}(L, D, \boldsymbol{H}_M^{(j)})$
$\boldsymbol{Y}^{(j)} \leftarrow {}^B\boldsymbol{r}_{EC} \times \boldsymbol{X}^{(j)}$

乗算: $15n$, 加減算: $9n$

一般化ヤコビ行列の計算

$j \leftarrow 1, \cdots, n$ に対して

$\widehat{\boldsymbol{J}}_L^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{J}_L^{(j)} - \boldsymbol{J}_C^{(j)} + \boldsymbol{Y}^{(j)}$
$\widehat{\boldsymbol{J}}_A^{(j)} \leftarrow \boldsymbol{J}_{An}^{(j)} - \boldsymbol{X}^{(j)}$

乗算: 0, 加減算: $9n$

G.6 演算回数

前節で述べた一般化ヤコビ行列の算出に要する演算の回数を従来のヤコビ行列と比較して **Table G.1**に示す．$n = 6$ の場合の実際の値を併記している．$n = 6$ の場合では，一般化ヤコビ行列の算出には，従来のものに比べて 10 倍程度の演算が必要であることがわかる．

なお，従来のヤコビ行列の演算回数は文献 [48] の Olson/Roibble の方法による．