OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Eine topologische Charakterisierung der kongruenten Transformationen in E^n
Author(s)	Terasaka, Hidetaka
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1949, 1(1), p. 1-35
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/5529
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

Osaka Mathematical Journal
Vol. 1, No. 1, March, 1949

Eine topologische Charakterisierung der kongruenten Transformationen in E^n

Von Hidetaka TERASAKA.

Die klassische Grundlegung der ebenen Euklidischen Geometrie von D. Hilbert [1]) begründet auf die Stetigkeitsbetrachtung wurde zuerst von v. Kerékjártó [2]) und dann von Montgomery und Zippin [3]) auf den Raum ausgedehnt. Wie die letzt genannten Autoren bemerkt haben, könnte man das Problem auch vom Standpunkte aus in Angriff nehmen, den S. S. Cairns [4]) für den Fall der Ebene aufgenommen hat. Im folgenden werden wir versuchen, eine Charakterisierung der Gruppe von kongruenten Transformationen der n-dimensionalen Euklidischen (und hyperbolischen) Geometrie zu geben, indem wir ein System von Axiomen aufstellen, die, wie bei Cairns, auf den Begriff der involutorischen Transformationen beruhen.

Unser Resultat hat eine Ähnlichkeit mit jenem von H. Busemann [5]) bei seiner metrischen Charakterisierung des n-dimensionalen Euklidischen Raumes und möge deshalb zur topologischen Charakterisierung desselben Raumes dienen.

§ 1. AXIOME.

Der im folgenden in Betracht kommende Raum ist ausschließlich der m-dimensionale Euklidische Raum E^m $(m \geqq 2)$.

---

1) D. Hilbert : Über die Grundlagen den Geometrie. Math. Ann. 56, 1902 (Grundlagen der Geometrie, 7te Aufl., Anhang IV.)

2) B. von Kerékjártó : On a geometrical theory of continuous groups II. Euclidean and hyperbolic groups of the three-dimensional space. Ann. of Math. 29, 1928.

3) D. Montgomery and L. Zippin : Topological group foundations of rigid space geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 1940.

4) S. S. Cairns : An axiomatic basis for plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933.

5) H. Busemann : On Leibniz's definition of planes. Amer. Journ. of Math. 63, 1941.

Definitionen. Eine involutorische, topologische Transformation A des E^m auf sich selbst soll *Axialsymmetrisierung* heißen, wenn A die Punkte einer abgeschlossenen Menge α und nur diese festläßt, welche topologisches Bild der gewöhnlichen Geraden ist. Dabei wollen wir die Menge α die *Achse* von A nennen.

Bezeichnungen. Die kleinen lateinischen Buchstaben a, b, s, x usw. bezeichnen Punkte von E^m. Die Axialsymmetrisierungen werden mit A, B, S, X usw. und die zugehörigen Achsen mit den entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben α, β, σ, ξ bezeichnet.

$a_n \to a$ soll bedeuten, daß die Folge von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ gegen den Punkt a konvergiert. a_m bedeutet eine Teilfolge von a_n.

Bezeichnet T eine Transformation, die einen Punkt x oder eine Menge λ in y bzw. in μ überführt, so schreiben wir $y = T(x)$ oder $\mu = T(\lambda)$.

Wir betrachten nun die Gruppe von Transformationen $\mathfrak{G}$, die folgenden Axiomen genügen :

Axiom I. *$\mathfrak{G}$ ist eine Gruppe von topologischen Transformationen des E^m auf sich selbst, die von Axialsymmetrisierungen erzeugt wird.*

Axiom II_1. *Es gibt eine und nur eine Axialsymmetrisierung in $\mathfrak{G}$, die jedes gegebene Paar von verschiedenen Punkten festläßt.*

Axiom II_2. *Es seien $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a \neq b$, und sei S_n die Axialsymmetrisierung von $\mathfrak{G}$, die die Punkte a_n und b_n festläßt, und ferner S die Axialsymmetrisierung von $\mathfrak{G}$, die die Punkte a und b festläßt; dann gilt $S_n \to S$, d. h. es gilt für jeden Punkt x die Konvergenz $S_n(x) \to S(x)$.*

Axiom III. *Es seien $a_n \to c$, $b_n \to c$ und sei T_n die Transformation von $\mathfrak{G}$ mit $T_n(a_n) \to c'$; dann gilt auch $T_n(b_n) \to c'$.*

Unser Zweck ist es, die kongruenten Transformationen von E^m mittels $\mathfrak{G}$ zu characterisieren.

§ 2. Die Senkrechten.

Wenn $a \neq b$, so gibt es nach Axiom I eine und nur eine Axialsymmetrisierung S, die a und b festläßt. Also :

1. *Wenn $a \neq b$, so gibt es eine und nur eine Aches durch a*

und b.

Definitionen. Die Achse durch a und b $(a \neq b)$ wird mit $a \smile b$ bezeichnet ; ein einfacher Bogen auf $a \smile b$ von beiden Endpunkten a und b heißt *Segment* und wird mit (a, b) bezeichnet.

Wie bekannt gilt :

2. *Wenn* A *und* B *Axialsymmetrisierungen sind und* β *die Achse von* B *bezeichnet, so ist* ABA, *d. h.* ABA^{-1}, *die Axialsymmetrisierung mit der Achse* $A(\beta)$.

Wenn α die Achse einer Axialsymmetrisierung A und b ein nicht auf α gelegener Punkt, so gilt offenbar $A(b) \neq b$. Da A die Achse $b \smile A(b) = \beta$ auf sich selbst abbildet und dabei b und $A(b)$ miteinander vertauscht, so läßt A einen und nur einen Punkt auf β invariant. Dieser Punkt muß auf α liegen, da α die sämtlichen Fixpunkte bei A ausmacht, und wir sehen, daß α und β einen Punkt gemeinsam haben. Bezeichnet B die Axialsymmetrisierung mit der Achse β, so ist ABA nach 1. die Axialsymmetrisierung mit der Achse $A(\beta) = \beta$, d. h. $ABA = B$. Daher $AB = BA$. Wenn umgekehrt für zwei verschiedene Axialsymmetrisierungen A und B die Beziehung $AB = BA$ gilt, so muß die Achse α und β von A bzw. B einen Punkt gemeinsam haben. Dabei erlitt β durch A eine die Richtung umkehrende Abbildung auf sich selbst. Zusammenfassend haben wir :

3. *Es sei* b *ein Punkt außerhalb der Achse* α *einer Axialsymmetrisierung* A. *Dann hat die Achse* β *durch* b *und* $A(b)$ *mit* α *einen und nur einen Punkt gemeinsam und es gilt* $AB = BA$, *wobei* B *die Axialsymmetrisierung mit der Achse* $\beta = b \smile A(b)$ *bezeichnet. Umgekehrt, wenn* A *und* B *zwei verschiedene Axialsymmetrisierungen mit den Achsen* α *bzw.* β *mit der Beziehung* $AB = BA$ *bezeichnen, so haben* α *und* β *einen Punkt gemeinsam. Dabei erlitt* β *durch* A *eine die Richtung umkehrende Abbildung auf sich selbst.*

Definitionen. Wenn $AB = BA$, so nennen wir die Achsen α und β *senkrecht* aufeinander und schreiben $\alpha \perp \beta$. Den Durchschnitt von β und α nennen wir ferner die *Projektion* von b auf α.

4. *Durch jeden Punkt ausserhalb einer Achse geht eine und nur*

eine Senkrechte auf dieselbe. Zwei Achsen, die in verschiedenen Punkten irgendeine Achse senkrecht durchsetzen, haben keinen Punkt gemeinsam.

Aus 2. und 3. ergibt sich :

5. Die Invarianz der Orthogonalität. *Wenn* $\alpha \perp \beta$, *so auch* $T(\alpha) \perp T(\beta)$ *für jedes* T *von* $\mathfrak{S}$.

§ 3. KONVERGENZ.

6. *Wenn* A_n *eine Axialsymmetrisierung mit einem Fixpunkte* a_n *ist und* $a_n \to a$, *so gibt es eine Teilfolge* A_m *von* A_n *und eine Axialsymmetrisierung* A *derart, daß* $A_m \to A$ *und* $A(a) = a$ *gelten.*

Beweis. Es sei S^{m-1} eine Kugelfläche des E^m vom Mittelpunkt a und sei b_n ein gemeinsamer Punkt von α_n (die Achse von A_n) mit S^{m-1}. Es sei b_m eine Teilfolge von b_n, die gegen einen Punkt b von S^{m-1} konvergiert. Nach Axiom II_2 gilt dann $A_m \to A$, wobei A_m und A die Axialsymmetrisierungen, die a und b_m bzw. a und b festlassen, bezeichnen, w. z. b. w.

7. Erweiterung von Axiom III. *Sind* S_n *und* S *Axialsymmetrisierungen mit* $S_n \to S$ *und* $x_n \to x$, *so gilt* $S_n(x_n) \to S(x)$.

Beweis. Setzt man $S(x_n) = x_n'$, $S(x) = x'$, so hat man der Reihe nach :

(i) trivialerweise $x' \to x'$,

(ii) $x_n' \to x'$ (die Stetigkeit von S.)

(iii) $S_n S(x') \to x'$, da nach Annahme $S_n S(x') = S_n(x) \to S(x) = x'$.

Demnach ergibt sich im Hinblick auf Axiom III : $S_n S(x_n') \to x'$, was gleichbedeutend ist mit $S_n(x_n) \to S(x)$.

Hieraus folgt insbesondere :

8. *Wenn* $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a \neq b$ *und wenn* S_n *und* S *die Axialsymmetrisierungen mit den Fixpunkten* a_n *und* b_n *bzw.* a *und* b *sind, so gilt* $S_n(x_n) \to S(x)$ *falls* $x_n \to x$.

9. *Zu jeder gegebenen Umgebung* U *von* a *kann man eine Umgebung* V *von* a *finden derart, daß für jeden Punkt* b *und jeden Punkt* x *von* V *und für jede Axialsymmetrisierung* B *mit* $B(b) = b$ *die Beziehung* $B(x) \in U$ *gilt.*

Beweis. Im entgegegesetzten Falle gäbe es nämlich eine gegen a konvergierenden Folge von Punkten b_n, eine Folge von Axialsymmetrisierungen B_n mit $B_n(b_n) = b_n$ und eine gegen a konvergierende Folge von Punkten c_n derart, daß $B_n(c_n)$ außerhalb U liegen. Betrachte man dann eine Umgebung W von a mit $\overline{W} < U$ und sei d_n ein gemeinsamer Punkt der Achse von B_n mit der Begrenzung $B(W)$ von W. Wählt man eine gegen einen Punkt d von $B(W)$ konvergierende Teilfolge d_m von d_n, so konvergieren B_m gegen eine Axialsymmetrisierung mit den Fixpunkten a und d. Da $c_m \to a$, so muß nach 7. $S_m(c_m) \to S(a) = a$ sein, was ein Widerspruch ist, da $S_m(c_m)$ nicht $\varepsilon\, U$ war. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 4. PROJEKTION.

10. *Die Projektion y des Punktes x außerhalb einer Achse α auf α ist eine stetige Funktion von x.*

Beweis. Es sei $x_n \notin \alpha$ und $x_n \to x \notin \alpha$. Es seien y_n und y die Projektionen von x_n bzw. x auf α. Ist A die Axialsymmetrisierung mit der Achse α, und setzt man $A(x_n) = x_n'$ und $A(x) = x'$, so gilt $x_n' \to x'$ infolge der Stetigkeit der Abbildung A. Also gilt nach II_2 $X_n \to X$, wenn X_n und X die Axialsymmetrisierungen mit den Achsen $x_n \smile x_n'$ bzw. $x \smile x'$ bezeichnen. Wählt man einen beliebigen, von y verschiedenen Punkt a auf α und setzt man $a' = X(a)$, $a_n' = X_n(a)$, so gilt insbesondere

$$X_n(a) \to X(a), \text{ d. h. } \quad a_n' \to a'.$$

Dabei liegt a' auf α, da α nach 3. durch die Abbildung X auf sich selbst abgebildet wird, und zwar wird das Segment (a, a') durch X auf sich selbst in entgegengesetzter Richtung abgebildet. y muß infolgedessen innerer Punkt von (a, a') sein, da y ein Fixpunkt bei X ist, und ebenso ist y innerer Punkt von (a, a_n') wenigstens für hinreichend großes n. Also liegen die sämtlichen Häufungspunkte von y_n auf (a, a'). Jeder Häufungspunkt y_0 von y_n fällt indessen mit y zusammen. Denn, wäre $y_0 \neq y$, und konvergiert eine Teilfolge y_m von y_n gegen y_0, so gilt nach 7., weil $y_m \to y_0$ und $X_m \to X$,

$$(*) \qquad X_m(y_m) \to X(y_0) \quad (\neq y_0).$$

Auf der anderen Seite gilt $X_m(y_m) = y_m \to y_0$, was mit (*) im Widerspruch steht. Also muß $y_0 = y$ sein und wir haben tatsächlich $y_n \to y$, womit die Stetigkeit der Projektion bewiesen ist.

11. *Konvergiert eine Folge von außerhalb einer Achse α liegenden Punkte x_n gegen einen Punkt a von α, so konvergieren die Projektionen von x_n auf α auch gegen a.*

Beweis. Man schlage um a als Mittelpunkt eine Kugel des E^m, die alle x_n im Inneren enthält und sei b_n ein gemeinsamer Punkt von $x_n \frown y_n$ mit der Kugelfläche. Es sei b_m eine gegen einen Häufungspunkt b von b_n konvergierende Teilfolge derselben. Bezeichnen X_n und X die Axialsymmetrisierungen mit den Achsen $x_n \frown y_n$ und $a \frown b$, so ist $X_m \to X$, da $x_m \to a$ und $b_m \to b$ gelten. Es ist insbesondere

$$X_m(a) \to X(a) = a.$$

Da aber $y \in (a, X_m(a)) < \alpha$ gilt, so muß $y_m \to a$ sein. Wir sehen hieraus, daß jede Teilfolge y_m von y_n eine weitere konvergente Teilfolge y_l enthält, was dann und nur dann geschieht, wenn y_n selbst eine konvergente Folge ist. Es ist also $y_n \to a$, womit die Stetigkeit bewiesen ist.

10. und 11. liefern zusammen:

12. Die Stetigkeit der Projektion. *Die Projektion des Punktes x von E^m auf eine gegebene Achse α ist eine stetige Funktion von x.*

13. *Durch jeden Punkt a einer Achse α geht mindestens eine Achse β, die auf α senkrecht steht.*

Beweis. Es sei (p, q) ein a im Inneren enthaltendes Segment auf α und man wähle Punkte x und y außerhalb α und genügend nahe an p bzw. q, so daß die Projektionen von x und y auf α genügend nahe an p bzw. q fallen. Dabei sollen x und y auf derselben Seite von α gewhält werden, wenn der vorliegende Raum E^m die Ebene ist. Verbindet man dann x und y durch einen zu α fremden Jordanbogen und läßt man einen variablen Punkt t auf diesem von x aus nach y durch-

laufen, so stimmt die Projektion von t auf α an einer Stelle mit a überein. Die an dieser Stelle auf α errichtete Senkrechte ist die gesuchte.

§ 5. TRANSFORMATION AUF EINER ACHSE.

14. *Wenn eine Achse α durch eine Transformation T von $\mathfrak{S}$ auf sich selbst abgebildet wird ohne ihre Richtung zu umkehren, und wenn T dabei einen Punkt von α festläßt, so läßt T alle Punkte von α fest.*

Beweis. Es sei $T(a) = a \in \alpha$. Wir nehmen im Gegenteil zur Behauptung an, daß es einen Punkt b auf α mit $T(b) \neq b$ gibt, und wollen daraus einen Widerspruch herleiten. Man darf nur den Fall, daß $T(b) \in (a, b)$ gilt, allein zu berücksichtigen, da man anderenfalls statt T die Inverse T^{-1} zu betrachten hat. Da (a, b) also durch T auf sein echtes Teilsegment $(a, T(b))$ abgebildet wird, so wird $(a, T(b))$ seinerseits durch T auf sein echtes Teilsegment $(a, T^2(b))$ abgebildet. Im allgemeinen wird $(a, T^{n-1}(b))$ auf sein echtes Teilsegment $(a, T^n(b))$ abgebildet, und somit konvergieren $T^n(b)$ gegen einen Punkt b_0 des Segmentes (a, b). Es bestehen demnach die folgenden beiden Beziehungen :

$$b^n = T^n(b) \to b_0, \qquad b^{n+1} = T^{n+1}(b) \to b_0.$$

Wendet man nun Axiom III auf diese Beziehungen zusammen mit der trivialen

$$T^{-n}(b^n) \to b$$

an, so ergibt sich sofort

$$T^{-n}(b^{n+1}) \to b.$$

Auf der anderen Seite gilt nach Annahme

$$T^{-n}(b^{n+1}) = T^{-n}\,T^{n+1}(b) = T(b) \neq b,$$

womit ein Widerspruch entstanden ist; und damit haben wir die Richtigkeit des Satzes bewiesen.

Aus 14. folgt unmittelbar :

15. *Wenn zwei Transformationen T_1 und T_2 von $\mathfrak{S}$ eine Achse α auf sich selbst abbilden, ohne ihre Richtung zu umkehren, und dabei einen Punkt a von α in denselben Punkt überführen, so gilt für jeden Pnnkt x von α : $T_1(x) = T_2(x)$.*

Wir haben ferner :

16. *Wenn zwei Transformationen T_1 und T_2 von $\mathfrak{S}$ eine Achse α auf sich selbst in entgegengesetztem Sinne abbilden und dabei einen Punkt a von α festläßt, so gilt für jeden Punkt x von α : $T_1(x) = T_2(x)$.*

17. *Es gibt eine Axialsymmetrisierung, die einen gegebenen Punkte a einer Achse α festläßt, und die α in entgegengesetztem Sinne auf sich selbst abbildet.*

Beweis. Es sei β nach 13. eine Achse, die in a auf α senkrecht steht. Dann ist die Axialsymmetrisierung mit der Achse β die gesuchte.

18. *Es gibt eine Axialsymmetrisierung S, die zwei gegebene Punkte a und a' einer Achse α vertauscht, und die α in entgegengesetztem Sinne auf sich selbst abbildet.*

Beweis. Falls $a = a'$, so existiert S nach 17. Es sei also $a \neq a'$. Man errichte dann in a und in a' Senkrechten auf α, nehme darauf und außerhalb α Punkte p und p', und verbinde diese mit einem zu α fremden Jordanbogen γ. (Falls der vorliegende Raum E^m die Ebene ist, so haben wir p und p' auf derselben Seite von α zu wählen). Zieht man vom variablen Punkte s von γ Senkrechte auf α und bezeichnet man mit S die Axialsymmetrisierung mit dieser Senkrechte als Achse, so ist $S(a)$ eine stetige Funktion von s, die sich von a aus nach der anderen Seite von a' stetig ändert, wenn s sich auf γ von p aus nach p' bewegt. Es gibt folglich eine Stelle von s, wo $S(a)$ mit a' zusammenfällt. Offenbar gilt dann auch $S(a') = a$. S ist also der gesuchte Axialsymmetrisierung. ——

Durch zwei Transformationen T_1 und T_2 von $\mathfrak{S}$, die α im entgegengesetztem Sinne auf sich selbst abbilden und die einen Punkt a von α in einem anderen Punkt b von α' überführen, erlitt α eine und dieselbe Abbildung, denn, $T_2 T_1$ ist ersichtlich eine die Richtung erhaltende

Abbildung von α auf sich selbst, die a invariant läßt, also nach 14. für alle x von α $T_2 T_1(x) = x$ gilt, d.h. $T_1(x) = T_2(x)$. Insbesondere sind T_1 und T_2 beide involutorisch auf α. Dies erlaubt uns, folgende Definition aufzustellen :

Definition. Wenn $a \neq b$ ist und wenn T eine Abbildung von $\mathfrak{S}$, die a und b vertauscht, so heißt der Fixpunkt von T auf der Achse $a \smile b$ die *Mitte* des Segmentes (a, b).

Wir haben dann, wie wir oben gesehen haben :

19. *Es gibt für jedes Segment eine und nur eine Mitte. Sie ist innerer Punkt des Segmentes.*

20. *Es seien a und b zwei Punkte auf einer Achse α. Es gibt dann mindestens eine Transformation T von $\mathfrak{S}$, welche α die Richtung erhaltend auf sich selbst abbildet, und welche a in b überführt.*

Beweis. Falls $a = b$, so leistet die Identität das gewünschte. Es sei also $a \neq b$. Bezeichnet man mit S_1 die Transformation von $\mathfrak{S}$, die a und b vertauscht und ferner mit S_2 eine solche, die α in entgegengesetztem Sinne auf sich selbst abbildet, und die b festläßt, so ist $S_2 S_1$ die gesuchte Transformation.

Definitionen. Eine die Richtung erhaltende Abbildung einer Achse auf sich selbst, die durch eine Transformation von $\mathfrak{S}$ induziert wird, heißt eine *Parallelverschiebung*. Eine die Richtung umkehrende Abbildung der Achse α auf sich selbst, die durch eine Transformation von $\mathfrak{S}$ induziert wird, heißt eine *Umlegung* von α.

Wir haben dann folgendes gesehen :

21. *Auf jeder Achse α gibt es eine und nur eine Parallelverschiebung bzw. eine und nur eine Umlegung, die einen beliebigen Punkt von α in einen anderen Punkt b von α überführen.*

§ 6. Vergleichung der Segmente auf derselben Achse.

Definitionen und Bezeichnungen. Wenn zwei verschiedene Punkte a und b durch eine Transformation T von $\mathfrak{S}$ in die Punkte a' und b' übergeführt werden, so heißen die Segmente (a, b) und (a', b')

miteinander *kongruent* und werden mit $(a, b) \equiv (a', b')$ bezeichnet. Nach 18. ist dann $(a, b) \equiv (b, a)$. Jedes Segment (a, b) ist mit keinem seiner echten Teilsegment kongruent, wie man genau so wie beim Beweis von 14. durch Heranziehung von Axiom III sehen kann. Schreibt man $(a, b) < (a', b')$ ((a, b) heißt *kleiner* als (a', b')), wenn (a, b) mit einem echten Teilsegment von (a', b') kongruent ist, so gilt für jedes Paar von Segmenten (a, b) und (a', b') eine und nur eine der Relationen $(a, b) \gtrless (a', b')$. Ebenso erkennt man leicht, daß aus $(a, b) < (a', b') < (a'', b'')$ die Beziehung $(a, b) < (a'', b'')$ folgt. Es ist also

22. *Unter den Segmenten derselben Achse bestehen die Kongruenz- und Größenbeziehungen. Diese genügen den gewöhnlichen Gesetzen der Kongruenz sowie der Größenordnung.*

Auf Grund der Existenz der Mitte des Segmentes beweist man wie üblich folgendes :

23. Einführung der Koordinate auf der Achse. *Zu jedem Punkt x der gegebenen Achse α kann man eine reelle Zahl $\xi = \xi(x)$ so zuordnen, daß*

$$|\xi(x) - \xi(y)| = |\xi(x') - \xi(y')|$$

dann und nur dann gilt, wenn (x, y) kongruent mit (x', y') ist.

Definitionen. $\xi(x)$ heißt die *Koordinate* des Punktes x auf α. Der Punkt o mit $\xi(o) = 0$ wird der Koordinatenanfangspunkt genannt. Unter *Länge* des Segmentes (x, y) verstehen wir ferner den Wert $|\xi(x) - \xi(y)|$. Wenn $\xi(x) < \xi(y)$ ausfällt, so schreibt man $x < y$.

Die Frage nach der Möglichkeit der Vergleichung der Segmente auf verschiedenen Achsen ist viel schwieriger zu erledigen. Dies soll erst in späteren Paragraphen geschehen.

§ 7. GLEICHMAESSIGE KONVERGENZ.

24. *Wenn $a_n \to c$, $b_n \to c$, so konvergieren die Segmente (a_n, b_n) selbst gegen c.*

Beweis. Es sei U eine beliebige Umgebung des Punktes c. Nach 9. gibt es eine sphärische Umgebung V von c derart, daß für jede Axialsymmetrisierung S, die einen Punkt x von V festläßt, und für

jeden Punkt y von V, die Beziehung $S(y) \in U$ gilt. Wir behaupten, daß, wenn a_n und b_n Punkte von V sind, auch $(a_n, b_n) < U$ sein muß.

Im Gegenteil zu dieser Behauptung nehmen wir an, es gäbe ein (a_n, b_n), das einen Punkt p außerhalb U enthält. Die Achse $a_n \smile b_n$ wird durch p in zwei Teile zerlegt, deren einer, etwa α, den Punkt a_n, und deren andere, etwa β, den Punkt b_n enthält. Verbindet man a_n und b_n in E^m durch eine Strecke, so enthält sie eine Teilstrecke $a\,b$, von dessen Endpunkten a zu α und b zu β gehört, und die übrigens zu $a_n \smile b_n$ fremd ist. Offenbar gehören a und b ganz zu V und das Segment (a, b) von $a_n \smile b_n$ enthält den Punkt p. Läßt man einen Punkt s von a aus nach b längs der Strecke $a\,b$ wandern, und betrachtet man die Axialsymmetrisierung S, welche die Senkrechte von s auf $a_n \smile b_n$ als Achse besitzt, so ist $S(a)$ eine stetige Funktion des Punktes s. Wenn s genügend nahe an a liegt, so liegt $S(a)$ auch genügend nahe an a, und $S(a)$ ist dann Punkt von α. Wenn s dagegen genügend nahe an b herankommt, so kommt $S(a)$ auf β zu liegen. Es gibt deshalb eine Stelle auf der Strecke ab, wo $S(a) = p$ gilt. Dies steht aber im Widerspruch zur Eigenschaft von V, da $S(a)$ Punkt von V sein mußte. Wir haben somit erkannt, daß $(a_n, b_n) < U$ gelten muß, solange a_n und b_n zu V gehören.

Da U beliebig war, so ist damit die Richtigkeit des Satzes bewiesen.

25. Gleichmäßige Konvergenz der Segmente. *Wenn* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$, *so konvergieren die Segmente* (a_n, b_n) *gleichmäßig gegen* (a, b).

Beweis. Wir nehmen eine beliebige Umgebung U von (a, b) und zeigen, daß $(a_n, b_n) < U$ für fast alle n. Dabei können wir annehmen, daß $a \neq b$ ist, da andernfalls der Satz schon in 24. als richtig bewiesen ist.

Bezeichnet man mit S_n und S die Axialsymmetrisierungen, die a_n und b_n, bzw. a und b festlassen, so folgt nach Voraussetzung $S_n \to S$, also insbesondere $S_n(a) \to S(a) = a$ gilt. Nach 24. gilt dann $(a, S_n(a)) \to a$. Ist p_n die Projektion von a auf $a_n \smile b_n$, so hat man $p_n \to a$, da

$p_n \varepsilon (a, S_n(a))$ ist. Zusammen mit $a_n \to a$ schließt man hieraus, indem man wieder 24. zu Hilfe nimmt, $(a_n, p_n) \to a$. Ebenso hat man $(b_n, q_n) \to b$, wenn q_n die Projektion von b auf $a_n \smile b_n$ bezeichnet. Es genügt folglich statt $(a_n, b_n) < U$ nur $(p_n, q_n) < U$ zu zeigen für fast alle n.

Läßt man einen beweglichen Punkt x auf (a, b) von a aus nach b wandern, so bewegt sich die Projektion von x auf $a_n \smile b_n$ stetig von p_n aus nach q_n. Mithin ist jeder Punkt von (a_n, b_n) die Projektion irgendeines Punktes von (a, b).

Wäre nun die Behauptung, daß für fast alle n $(a_n, b_n) < U$ sei, falsch, so gäbe es für unendlich viele n Punkte von (a_n, b_n) außerhalb U; es seien p_m $(m = n_1, n_2, \ldots)$ Punkte von (a_m, b_m) außerhalb U. Entsprechend jedem p_m gibt es dann nach dem obigen auf (a, b) einen Punkt x_m, dessen Projektion auf (a_m, b_m) mit p_m zusammenfällt. Da die Punkte x_m einen Punkt x_0 des (a, b) als Häufungspunkt besitzt, so kann man aus x_m eine gegen x_0 konvergierende Teilfolge x_l auswählen. Aus $x_l \to x_0$ folgt dann nach 8. $S_l(x_l) \to S(x_0) = x_0$. Auf Grund von 24. schließt man hieraus $(x_l, S_l(x_l)) \to x$, woraus $p_l \to x_0$ folgt, da $p_l \varepsilon (x_l, S_l(x_l))$ war, entgegen der Annahme. Es muß also für fast alle n $(a_n, b_n) < U$ sein, wie behauptet. Da U beliebig war, so erkennen wir hieraus, daß (a_n, b_n) gleichmäßig gegen (a, b) konvergieren.

26. *Wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so konvergieren die Mitten c_n von (a_n, b_n) gegen die Mitte c von (a, b).*

Beweis. Alle Häufungspunkte der Mitten c_n von (a_n, b_n) sind nach 25. Punkte von (a, b). Es sei c_0 eine von ihnen, und sei c_m eine Teilfolge von c_n mit $c_m \to c_0$. Bezeichnet man mit S_n die Axialsymmetrisierung, die a_n und b_n vertauscht, so gilt $S_m(c_m) = c_m \to c_0$, mithin nach 6. es eine Teilfolge S_l von S_m gibt mit $S_l \to S$, wo S eine Axialsymmetrisierung bedeutet, die a festläßt. Aus $a_l \to a$ folgt dann nach 7. $S_l(a_l) \to S(a)$. Da auf der anderen Seite $S_l(a_l) = b_l \to b$ gilt, so muß $S(a) = b$ sein. c_0 stimmt also mit der Mitte c von (a, b) überein.

Da jede Teilfolge von c_n eine gegen die Mitte c von (a, b) konvergierende Teilfolge enthält, so konvergieren c_n selbst gegen c, w. z. b. w.

Definition. a und b heißen in bezug auf c zueinander *symmetrisch*, wenn c die Mitte des Segmentes (a, b) ist.

27. *Wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so konvergieren die in bezug auf b_n*

zu a_n symmetrischen Punkte c_n gegen den in bezug auf b zu a symmetrischen Punkt c.

Beweis. Es sei S_n eine oder die Axialsymmetrisierung, die b_n festläßt, und die, falls $a_n \neq b_n$, $a_n \smile b_n$ im entgegengesetztem Sinne auf sich selbst abbildet. Nach 6. gibt es eine Teilfolge S_m von S_n derart, daß $S_m \to S$ und $S(b) = b$ für eine passend gewählten Axialsymmetrisierung S gelten. Aus $a_m \to a$ folgt daher nach 7. $S_m(a_m) \to S(a)$, d. h. $S_m(a_m) = c_m \to S(a)$. Aus $a_m \to a$ und $c_m \to S(a)$ folgt nach 28., daß die Mitten b_m von (a_m, c_m) gegen die Mitte von $(a, S(a))$ konvergieren. Da aber $b_m \to b$, so muß b die Mitte von $(a, S(a))$ sein. Es ist somit $S(a) = c$, und wir haben $c_m \to c$. Da man aus jeder Teilfolge von c_n eine gegen c konvergierende Teilfolge auswählen kann, so gilt tatsächlich $c_n \to c$.

Auf Grund der Sätze 26. und 27. haben wir ohne Schwierigkeit :

28. *Es seien $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n \neq b_n$ und $a \neq b$. Man führe auf jeder Achse $a_n \smile b_n$ und $a \smile b$ die Koordinaten ξ in der Weise ein, daß $\xi(a_n) = 0$, $\xi(b_n) = 1$ und $\xi(a) = 0$, $\xi(b) = 1$ ausfallen. Dann konvergieren für jede reelle Zahl α die Punkte x_n von $a_n \smile b_n$ mit $\xi(x_n) = \alpha$ gegen den Punkt x von $a \smile b$ mit $\xi(x) = \alpha$.*

Diesen Tatbestand drücken wir wie folgt aus :

29. Regularität der Familie von Achsen. *Die Menge der Achsen bildet eine reguläre Familie von Kurven.*

§ 8. Existenz des Halbierungsstrahles des Winkels

Definitionen. Jede Achse zerfällt durch jeden ihrer Punkte a in zwei zusammenhängende Teile. Jeder dieser Teile soll einschließlich a der *von a ausgehende Strahl* heißen und mit $(a\ b\ \infty)$ bezeichnet werden, wo b ein beliebiger Punkt auf dem Strahl bedeutet. Die beiden Strahlen nennt man dabei zueinander *entgegengesetzt.* Als Projektion von einem Punkt auf einen Strahl erklärt man die Projektion dieses Punktes auf die Achse, die den nämlichen Strahl enthält. Man schreibt ferner $(a_n\ b_n\ \infty) \to (a\ b\ \infty)$, wenn $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n \neq b_n$ und $a \neq b$ bestehen.

Definition. Wenn auf jedem von einem Punkt o ausgehenden Strahl ρ ein von o verschiedener Punkt $x = x(\rho)$ eindeutiger Weise be-

stimmt ist derart, daß $x(\rho_n) \to x(\rho)$ gilt, falls $\rho_n \to \rho$ ist, so heißt die Menge von Punkten $x(\rho)$ *Pseudosphäre mit dem Mittelpunkt* o, und wird mit $P(o)$ bezeichnet.

30. *Für jeden Punkt* o *des* E^m *gibt es eine Pseudosphäre mit dem Mittelpunkte* o.

Beweis. Es sei A die abgeschlossene Hülle einer beschränkten Umgebung von o. Auf jedem von o ausgehenden Strahl ρ projiziere man die sämtlichen Punkte von A und sei $x = x(\rho)$ der von o entferntest gelegener Punkt davon auf ρ. Behauptet wird, daß $x = x(\rho)$ eine Pseudosphäre ausmacht.

In der Tat gibt es erstens auf jedem Strahl ρ eindeutiger Weise einen von o verschiedenen Punkt $x(\rho)$. Zweitens sei $\rho_n \to \rho$ und setze man $x(\rho_n) = x_n$. Es seien R_n und R die Axialsymmetrisierungen mit den Achsen ρ_n bzw. ρ, und seien ferner a_n und a diejenigen Punkte von A, deren Projektionen mit x_n bzw. mit x übereinstimmen. Ist a' ein Häufungspunkt von a_n und wählt man eine gegen a' konvergierende Teilfolge a_m von a_n, so gilt nach 7. $R_n(a_n) \to R(a')$, da $R_n \to R$. Dann konvergieren x_m, nämlich die Mitten von $(a_m, R_m(a_m))$, gegen die Mitte von $(a', R(a'))$, d. h. gegen die Projektion x' von a' auf ρ. Da x der von o entferntest gelegener Punkt unter den Projektionen der Punkte von A war, so gilt $x' \leqq x$. Andererseits gilt aber $x \leqq x'$. Denn, für die Projektion y_m von a auf ρ_m gilt zunächst infolge der Beschaffenheit von x_m $y_m \leqq x_m$. Da aber aus $R_m(a) \to R(a)$ die Konvergenz $y_m \to x$ folgt, so muß in der Tat $x \leqq x'$ sein. Aus diesen beiden Ungleichheiten folgt $x = x'$.

Aus dem Bewiesenen erkennen wir, daß jede Teilfolge von x_n eine konvergente Teilfolge enthält, woraus $x_n \to x$ unmittelbar folgt. Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

31. *Jede Pseudosphäre* P *zerlegt* E^m *in zwei Gebiete. Jeder Punkt von* P *ist von den beiden Gebieten aus erreichbar.*

Beweis. Führen wir auf jedem vom Mittelpunkt der P ausgehenden Strahl die Koordinate ξ derart ein, daß dem Mittelpunkt der Wert 0 und dem Punkte auf P der Wert 1 zugeordnet werden, so wird jedem Punkte x von E^m eine nicht negative Zahl definiert, die eine eindeutige, stetige Funktion von x ist. Ersichtlich bildet die Menge x mit $\xi(x) < 1$

ein beschränktes und die Menge x mit $\xi(x)>1$ ein unbeschränktes Gebiet, während P als die Menge $\xi(x)=1$ mit der Grenze dieser beiden Gebiete übereinstimmt. Ferner ist jeder Punkt von P von den beiden Gebieten aus radial erreichbar.

Definitionen. Zwei von einem Punkt o ausgehende Strahlen $(o\ a\ \infty)$ und $(o\ b\ \infty)$ bilden einen *Winkel* $\angle\, a\, o\, b$. Die beiden Strahlen heißen *Schenkel* des Winkels und der Punkt o der *Scheitel* des Winkels. Falls die Schenkel eines Winkels zueinander entgegengesetzt sind, so spricht man von einem *gestreckten Winkel.*

Es sei γ die Achse der Axialsymmetrisierung C, die die Schenkel eines nicht gestreckten Winkels $\angle\, a\, o\, b$ vertauscht. Da die Projektion des von o verschiedenen Punktes von $(o\ a\ \infty)$ auf γ niemals mit o zusammenfällt, so liegt sie auf einem und demselben von den beiden von o ausgehenden Strahlen auf γ.

Definition. Dieser Strahl soll der *Halbierungsstrahl* des Winkels $\angle\, a\, o\, b$ heißen. Für gestreckten Winkel ist jeder vom Scheitel des Winkels ausgehende, auf dem Schenkel senkrecht stehende Strahl ein Halbierungsstrahl.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir jetzt imstande, das Ziel dieses Paragraphen zu erreichen:

22. *Jeder Winkel besitzt mindestens einen Halbierungsstrahl.*

Beweis. Wir schlagen um den Punkt o als Mittelpunkt eine Pseudosphäre P, und bestimmen auf P einen beliebigen Punkt a. Der Schnittpunkt des zu $(o\ a\ \infty)$ entgegengesetzten Strahles mit P werde mit a^* bezeichnet.

Es sei X die Axialsymmetrisierung, die o und den variablen Punkt x auf P festläßt, und sei x'' der Schnittpunkt des von o ausgehenden, durch den Punkt $x'=X(a)$ gehenden Strahles mit P. x'' erweist sich dann leicht als eine stetige Funktion des Punktes x.

Betrachtet man nun die Projektion y von a auf $o \smile x$, so ist y als Mitte des Segmentes $(a, x')=(a, X(a))$ wieder eine stetige Funktion von x. y ist offenbar Punkt des Strahles $(o\ x\ \infty)$ falls $x=a$, weil dann y mit a übereinstimmt, während y Punkt des zu $(o\ x\ \infty)$ entgegengesetzten Strahles ist, falls $x=a^*$, weil dann wieder $y=a$ ausfällt. Mithin stimmt y an einer Stelle von x mit o überein, wenn x von a

aus nach a^* wandert.

Man ordne nun für jeden Punkt x von P den Punkt z folgendermaßen zu : z sei gleich x'', falls y zu $(o\ x\ \infty)$ gehört, und z sei gleich a^*, falls y nicht zu $(o\ x\ \infty)$ gehört. Offenbar ist z auch eine stetige Funktion von x. Wir behaupten, daß z alle Punkte von P durchläuft.

Zum Beweis dieser Behauptung nehmen wir das Gegenteil an, und sei c ein Punkt auf P, der niemals mit z zusammenfällt. Bezeichnet c^* den Schnittpunkt des zu $(o\ c\ \infty)$ entgegengesetzten Strahles mit P, so geht (z, c^*) nach Annahme durch den Punkt o nicht. Bestimmt man also auf (z, c^*) für jedes $t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ den Punkt z_t, so daß das Verhältnis der Längen (vgl. Definition auf Seite 10) von (z, z_t) und (z_t, c^*) wie t und $1-t$ steht, und bezeichne man den Schnittpunkt des Strahles $(o\ z_t\ \infty)$ mit P durch v_t, so ist v_t eine stetige Funktion von x und t.

Ebenso bestimme man auf (x, z) den Punkt x_s, so daß das Verhältnis der Längen von (x, x_s) und (x_s, z) wie s und $1-s$ steht, und bezeichne man den Schnittpunkt des Strahles $(o\ x_s\ \infty)$ mit P durch u_s, so daß wieder eine stetige Funktion u_s von den beiden Variablen x und s hergestellt wird.

Betrachtet man nun eine $(m-1)$-dimensionale Euklidische Sphäre S^{m-1} von E^m mit dem Mittelpunkt o und projiziert man die Punkte u_s und v_t von o aus geradlinig auf dieselbe, so bekommt man eine stetige Schar von Abbildungen φ von P auf S^{m-1}, wobei φ für $s=0$ mit der zentralen Abbildung von P auf S^{m-1} und für $t=1$ mit der Abbildung des einzigen Punktes c^* auf S^{m-1} übereinstimmt. Das steht aber mit dem bekannten Satz von Borsuk[6]) im Widerspruch, da o dem beschränkten Gebiete von den beiden durch P geteilten Gebieten von E^m angehört. Damit haben wir bewiesen, daß z alle Punkte von P durchläuft.

Es sei nun ein Winkel $\angle a'\ o\ b'$ gegeben. Schlägt man um o als Mittelpunkt eine Pseudosphäre P und seien a und b die Durchschnitte von $(o\ a'\ \infty)$ und $(o\ b'\ \infty)$ mit P. Infolge des obigen Ergebnisses gibt

6) K. Borsuk : Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume. Math. Ann. 106 (1932) S. 247, 11. Satz. Vgl. W. Hurewicz and H. Wallman : Dimension Theory (1941), Theorem VI. 10.

es auf P einen Punkt x, welchem der Punkt z mit $z = b$ entspricht. $(o\ x\ \infty)$ ist dann der gesuchte Halbierungsstrahl des Winkels $\angle\, a'\, o\, b'$.

33. *Jeder nicht gestreckte Winkel hat einen und nur einen Halbierungsstrahl.*

Beweis. Durch jede Transformation T von $\mathfrak{G}$, welche die Schenkel $(o\ a\ \infty)$ und $(o\ b\ \infty)$ des vorgelegten Winkels vertauscht, wird a nach 14. in einen und denselben Punkt $a' = T(a)$ übergeführt. Da alle Halbierungsstrahlen von $\angle\, a\, o\, b$ durch die Mitte von (a, a') hindurchgehen müssen, fallen sie alle zusammen, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist. Die Existenz des Halbierungsstrahles war ja der Inhalt des vorigen Satzes 32.

Offenber gilt :

34. *Es sei $\angle\, a\, o\, b$ ein nicht gestreckter Winkel und sei $(o, a) \equiv (o, b)$. Dann steht der Halbierungsstrahl von $\angle\, a\, o\, b$ senkrecht auf $a \smile b$ und zwar geht er durch die Mitte von (a, b).*

Beim Beweis von 32. war dort der Punkt x'' eine eindeutige, stetige Funktion von x. Wie wir soeben gesehen hahen, ist x umgekehrt eine eindeutige Funktion von x'', solange x'' nicht mit a^* zusammenfällt. Deshalb ist x eine stetige Funktion von x'' innerhalb $P - a^*$. Damit haben wir :

35. *Der Halbierungsstrahl des Winkels $\angle\, a\, o\, x$ ist eine eindeutige, stetige Funktion von $(o\ x\ \infty)$, solange $(o\ x\ \infty)$ nicht zu $(o\ a\ \infty)$ entgegengesetzt zu liegen kommt. Wenn $(o\ x\ \infty) \to (o\ a\ \infty)$, so konvergiert der Halbierungsstrahl von $\angle\, a\, o\, x$ gegen $(o\ a\ \infty)$.*

Infolge der Existenz des Halbierungsstrahles erkennen wir die Existenz der Transformation von $\mathfrak{G}$, welche eine vorgelegte Achse α auf eine andere vorgelegte Achse α' abbildet. Wähle man in der Tat auf α und α' beliebig Punktepaare o und a bzw. o' und a' und führe man zunächst o durch eine Axialsymmetrisierung S_1 in o' über. Dabei gehe α in α'' über und sei $S_1(a) = a''$. Durch eine oder die Axialsymmetrisierung S_2 mit dem Halbierungsstrahl von $\angle\, a'\, o\, a''$ als Achse, werde α'' weiter auf α' abgebildet. Dann leistet $S_2 S_1$ das gewünschte. Wir haben also :

36. *Jede Achse läßt sich durch eine Transformation von $\mathfrak{G}$ auf jede andere Achse abbilden. Jeder Strahl läßt sich durch eine Transformation von $\mathfrak{G}$ auf jeden anderen Strahl abbilden.*

Definition. Auf einer beliebig aber festgelegten Achse α_1 führen wir eine Koordinate ξ ein. Unter der $\mathfrak{G}$-*Länge* oder dem $\mathfrak{G}$-*Abstand* $\gamma(a, b)$ des Segmentes (a, b) oder der Punkte a und b verstehen wir folgendes: Falls $a = b$, so setze man $\delta(a, b) = 0$. Falls $a \neq b$, so bilde man $a \smile b$ mittels einer Transformation T von $\mathfrak{G}$ auf α_1 und setze

$$\delta(a, b) = |\xi(T(a)) - \xi(T(b))|.$$

Auf Grund von 23. z. B. hängt $\gamma(a, b)$ von der Wahl von T nicht ab, also:

37. *Die Punkte a und b und die Punkte a' und b' haben dann und nur dann dieselbe Abstände, wenn die Segmente (a, b) und (a', b') kongruent sind.*

Definition. *Normalkoordinate* nennt man diejenige Koordinate auf jeder Achse, daß die Längen der Segmente auf derselben mit den $\mathfrak{G}$-Längen der Segmente übereinstimmen.

Definitionen. Die Menge der Punkte, die von einem Punkt o einen festen $\mathfrak{G}$-*Abstand*, etwa ρ, haben, heißt die $\mathfrak{G}$-*Sphäre mit dem Mittelpunkt* o und dem *Halbmesser* ρ, und wird mit $\Sigma(o\ ;\ \rho)$ oder mit Σ bezeichnet. Das Segment zwischen o und dem Punkt von Σ heißt *Radius* von Σ.

38. *Die $\mathfrak{G}$-Sphäre $\Sigma = \Sigma(o\ ;\ \rho)$ ist eine Pseudosphäre.*

Beweis. Auf jedem von o ausgehenden Strahle gibt es offenbar einen und nur einen Punkt von Σ. Es ist deshalb nur die Konvergenzeigenschaft zu beweisen.

Es seien also $(o\ a_n\ \infty)$ von o ausgehende Strahlen, die gegen einen Strahl $(o\ a\ \infty)$ konvergieren, wobei a_n und a die Schnittpunkt der Strahlen mit Σ bezeichnen. Nach 35. konvergieren dann die Halbierungsstahlen von $\angle\, a\ o\ a_n$ gegen $(o\ a\ \infty)$, somit konvergieren die Axialsymmetrisierungen A_n, die $(o\ a_n\ \infty)$ und $(o\ a\ \infty)$ vertauschen, nämlich die Axialsymmetrisierung mit dem Halbierungsstrahlen von $\angle\, a\ o\ a_n$ als Achsen, gegen die Axialsymmetrisierung mit der Achse $(o\ a\ \infty)$. Folglich gilt $a_n = A_n(a) \to A(a) = a$, w. z. b. w.

39.[7]) *Die Projektion von einem ausserhalb einer Achse α gelegenen Punkte p auf α sei a, und sei x ein von a verschiedener Punkt auf α. Es ist dann $\delta(p, a) < \delta(p, x)$.*

Beweis. Gäbe es außer a noch einen Punkt x auf α mit $\delta(p, x) = \delta(p, a)$, so stände der Halbierungsstrahl von $\angle a\, p\, x$ senkrecht auf α, im Widerspruch mit 4.

Gäbe es wiederum einen Punkt x auf α mit $\delta(p, x) < \delta(p, a)$, so würde $(a\, x\, \infty)$ die durch a gehende $\mathfrak{G}$-Sphäre mit dem Mittelpunkt p in einem Punkt b schneiden. Dann müßte $\delta(p, b) = \delta(p, x)$ sein, was eben ausgeschlossen war.

Definitionen. Drei Segmente (a, b), (b, c), (c, a) bilden zusammen ein *Dreieck* $\Delta\, a\, b\, c$, falls a, b, c nicht auf einer Achse liegen. Diese Segmente heißen *Seiten*, die Punkte a, b, c *Ecken*. Wenn $a \smile b \perp a \smile c$, so heißt $\Delta\, a\, b\, c$ *rechtwinkliges Dreieck* mit der Hypotenuse (b, c).

Mit diesen Definitionen läßt sich 39. wie folgt ausdrücken:

40. *In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als die anderen Seiten.*

41. *In jedem Dreiecke $\Delta\, a\, b\, c$ ist die Summe der $\mathfrak{G}$-Längen zweier Seiten grösser als die $\mathfrak{G}$-Länge der dritten Seite; so z. B.*

$$\delta(a, b) + \delta(b, c) > \delta(a, c).$$

Beweis.[8]) Bei Dreiecke $\Delta\, a\, b\, c$ sei p die Projektion von c auf $a \smile b$. Falls $p \notin (a, b)$, so sind $\delta(a, c) > \delta(a, p)$ und $\delta(b, c) > \delta(p, b)$, woraus $\delta(a, c) + \delta(b, c) > \delta(a, b)$ folgt. Falls $p \notin (a, b)$, so ist (a, b) schon kleiner als einer von den anderen Seiten.

Daraus folgt:

42. *Die Punkte a, b und c mit $\delta(a, b) + \delta(b, c) = \delta(a, c)$ liegen auf einer und derselben Achse.*

Aus 41. schließt man wie üblich:

43. Die Stetigkeit der $\mathfrak{G}$-Länge. *Die $\mathfrak{G}$-Länge $\delta(x, y)$ ist*

[7]) Die Ausführungen von 39. und folgenden verdanke ich der Arbeit von Montgomery and Zippin, a. a. O.

[8]) Montgomery and Zippin, a. a. O.

eine stetige Funktion von x und y.

Beweis. Es seien $a_n \to a$, $b_n \to b$. Schlage man für jedes vorgeschriebene positive Zahl ε um a und b die Pseudosphären $\Sigma_1 = \Sigma(a\ ;\ \varepsilon)$ und $\Sigma_2 = \Sigma(b\ ;\ \varepsilon)$, so gehören für fast alle n a zu Σ_1 und b zu Σ_2, da Σ_1 und Σ_2 nach 38. offene Mengen sind, und folglich $(a_n, a) < \varepsilon$ und $(b_n, b) < \varepsilon$, woraus wegen 41.

$$|\delta(a_n, b_n) - \delta(a, b)| < 2\varepsilon$$

folgt.

Definition. Eine Transformation Z des E^m auf sich, die jeden Punkt x in den zu einem vorgelegten festen Punkt o symmetrischen Punkt x' überführt, heißt *Zentralsymmetrisierung mit dem Zentrum o*.

Zunächst gilt:

44. *Haben die Segmente (a, a') und (b, b') einen Punkt o als Mitte gemeinsam, so gilt $(a, b) \equiv (a', b')$.*

Beweis. Es sei S_1 die Axialsymmetrisierung, die $(o\ a\ \infty)$ und $(o\ b\ \infty)$ vertauscht, und S_2 die Axialsymmetrisierung, die $(o\ a\ \infty)$ und $(o\ b'\ \infty)$ vertauscht. Dann werden a und b durch die Abbildung S_2S_1 in a' und b' übergeführt. Es ist demnach $(a, b) \equiv (a', b')$.

45.[9]) *Durch Zentralsymmetrisierung geht jede Achse wieder in die Achse, ein Paar aufeinander senkrecht stehende Achsen wieder in ein solches. Dabei bleibt die $\mathfrak{G}$-Länge jedes Segmentes unverändert.*

Beweis. Die Invarianz der $\mathfrak{G}$-Länge folgt aus 44. Man braucht den ersten Teil des Satzes nur dann zu beweisen, wenn die Achse α nicht durch das Zentrum o der Zentralsymmetrisierung Z geht. Nimmt man auf α drei Punkte a, b, c so, daß $\delta(a, b) + \delta(b, c) = \delta(a, c)$ gilt, und setzt man $Z(a) = a'$, $Z(b) = b'$, $Z(c) = c'$, so ist nach 44. $\delta(a', b') + \delta(b', c') = \delta(a', c')$. Wegen 42. liegen also a', b', c' auf einer Achse, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist. Die Invarianz der Orthogonalität beweist man mit Hilfe des 39., gestützt auf die Invarianz der $\mathfrak{G}$-Länge.

---

[9]) Die Einführung der Zentralsymmetrisierung stammt von v. Kerékjártó, vgl. von Kerékjártó, a. a. O. S. 176.

46.[10]) *Stehen zwei verschiedene Achsen β und γ in a senkrecht auf einer Achse α, so steht die Achse durch a und einen Punkt x, der auf einer β und γ ausserhalb a schneidenden Achse ξ liegt, auch auf α senkrecht.*

Beweis. Es seien b und c die Schnittpunkte von ξ mit β und γ. Durch die Zentralsymmetrisierung Z mit dem Zentrum a gehen b, c und x in b', c' und x' auf der Achse $\xi' = Z(\xi)$ über, und zwar bestehen $\delta(b, x) = \delta(b', x')$ und $\delta(x, c) = \delta(x', c')$. Da $\beta \perp \alpha$ und $\gamma \perp \alpha$, so gehen b und c durch die Axialsymmetrisierung A mit der Achse α auch in b' und c' über, somit geht x durch A ebenfalls in einen Punkt x'' von ξ' über. Da aber $\delta(b', x'') = \delta(b, x)$ und $\delta(x'', c') = \delta(x, c)$ bestehen, so muss x'' mit x' zusammenfallen. Demnach steht $x \smile x' = x \smile a$ in a senkrecht auf α.

Hieraus folgt:

47. *Die Projektionen der Punkte einer Achse auf eine andere sind entweder alle verschieden oder fallen sie alle auf einen Punkt zusammen.*

Ferner:

48. *Es seien (a, b) und (a', b') zwei Segmente, die so beschaffen sind, dass die Projektionen von a und b auf $a' \smile b'$ mit a' und b' zusammenfallen. Dann gehört die Projektion x' des Punktes x von (a, b) auf $a' \smile b'$ zum Segment (a', b') und die Zuordnung $x \leftrightarrow x'$ ist eineindeutig und stetig.*

§ 9. Vergleichung der Winkel

Definition. Gehen durch eine Transformation von $\mathfrak{G}$ die Strahlen $(o\,a\,\infty)$ und $(o\,b\,\infty)$ in $(o\,a'\,\infty)$ bzw. $(o\,b'\,\infty)$ über, so heissen die Winkel $\angle a\,o\,b$ und $\angle a'\,o\,b'$ *kongruent* oder *gleich*, in Zeichen

$$\angle\, a\, o\, b \equiv \angle\, a'\, o\, b'.$$

Ersichtlich gilt nach 32:

49. $$\angle\, a\, o\, b \equiv \angle\, b\, o\, a$$

[10]) von Kerékjártó, a. a. O. S. 177.

Definition. Steht die Schenkel eines Winkels aufeinander senkrecht, so heisst er der *rechte Winkel.*

50. *Alle rechten Winkel sind einander kongruent.*

Beweis. Es seien $\angle a\,o\,b$ und $\angle a'\,o'\,b'$ rechte Winkel. Führt man mittels einer Transformation von $\mathfrak{G}$ den Winkel $\angle a'\,o'\,b'$ in einen Winkel $\angle a''\,o\,b''$ vom Scheitel o über, so gilt wegen der Invarianz der Orthogonalität $o \smile a'' \perp o \smile b''$. Führt man alsdann durch die Axialsymmetrisierung, welche $(o\,a''\,\infty)$ und den zu $(o\,a\,\infty)$ entgegengesetzten Strahl miteinander vertauscht, den Winkel $\angle a''\,o\,b''$ in den Winkel $\angle a'''\,o\,b'''$ über, so wird dieser schliesslich durch die Axialsymmetrisierung, die $(o\,b\,\infty)$ und $(o\,b'''\,\infty)$ vertauscht, in $\angle a\,o\,b$ übergeführt.

Bequemlichkeitshalber setzen wir von nun an fest, dass die $\mathfrak{G}$-Längen der Segmente (o, a) und (o, b) bei Winkel $\angle a\,o\,b$ gleich 1 genommen werden sollen. Auf $o \smile a$ soll dann die Normalkoordinate ξ eingeführt werden derart, dass $\xi(o) = 0$ und $\xi(a) = 1$ ausfallen. Alsdann liegt die Projektion p von b auf $o \smile a$ nach 39. zwischen a und dem Punkte a^* mit $\xi(a^*) = -1$.

Definitionen. Die Koordinate $\xi(c)$ der Projektion c von b auf $o \smile a$ möge der *cosinus* von $\angle a\,o\,b$ heissen und mit $\cos \angle a\,o\,b$ bezeichnet werden. Je nachdem $\cos \angle a\,o\,b$ positiv oder negativ ist, heisst $\angle a\,o\,b$ *spitzer* bzw. *stumpfer Winkel.* Er ist dann und nur dann gleich Null, wenn der Winkel ein rechter ist.

Es gilt:

51. $\angle a\,o\,b \equiv \angle a'\,o'\,b' \rightleftarrows \cos \angle a\,o\,b = \cos \angle a'\,o'\,b'$.

Beweis. $\rightarrow$ ist klar. Um $\leftarrow$ zu beweisen, seien p und p' die Projektionen von b und b' auf $o \smile a$ und $o' \smile a'$. Bildet man den rechten Winkel $\angle o'\,p'\,a'$ auf den rechten Winkel $\angle o\,p\,a$ ab, was nach 50. ausführbar ist, und seien o'', c'', a'' dabei die Bilder von o', c', a', so fällt o'' erstens nach Annahme von $(o, p) \equiv (o', p')$ mit o zusammen. Das Bild a'' von a' muss zweitens mit a zusammenfallen, denn andernfalls stände der Halbierungsstrahl des Winkels $\angle a\,o\,a''$ in der Mitte von (a, a'') auf $a \smile a''$ senkrecht, was offenbar ausgeschlossen ist. Damit ist die Kongruenz von $\angle a\,o\,b$ und $\angle a'\,o'\,b'$ bewiesen.

52. *Für jede reelle Zahl t mit $-1 \leqq t \leqq 1$ gibt es mindestens einen*

Winkel $\angle a\,o\,b$ *mit* $\cos \angle a\,o\,b = t$.

Beweis. Es sei c der Punkt von $o \frown a$ mit der Koordinate t, d. h. $\xi(c) = t$, und man errichte in c eine Senkrechte γ auf $o \frown a$. Da c innerer Punkt der $\mathfrak{G}$-Sphäre Σ mit dem Mittelpunkt o und dem Halbmesser 1 ist, so schneidet γ die Σ in einem Punkte b. Der Winkel $\angle a\,o\,b$ ist dann offenbar der gesuchte.

53. *Ist* $(o\,c\,\infty)$ *der Halbierungsstrahl des Winkels* $\angle a\,o\,b$, *so besteht* $\cos \angle a\,o\,b < \cos \angle a\,o\,c$.

Beweis. Falls $\angle a\,o\,b$ ein gestreckter Winkel ist, so gilt die zu beweisende Ungleichung, da offenbar $\cos \angle a\,o\,b = -1$ und $\cos \angle a\,o\,c = 0$. Wir nehmen also an, dass $\angle a\,o\,b$ kein gestreckter Winkel sei. Nach der Verabredung $(o, a) \equiv (o, b)$ geht $(o\,c\,\infty)$ durch die Mitte d von (a, b) und steht senkrecht auf $a \frown b$. Es sei $(o, c) \equiv (o, a)$ und sei q die Projektion von c auf $o \frown a$, so werden die Punkte o, q, a durch die Axialsymmetrisierung, welche $(o\,a\,\infty)$ und $(o\,b\,\infty)$ vertauscht, in o, d, c übergeführt. Da der Punkt d als Projektion des auf dem Schenkel des Winkels $\angle a\,o\,b$ gelegenen Punktes a auf dem Halbierungsstrahl nach Definition zu $(o\,c\,\infty)$ gehören muss, und da andererseits nach 39. $\delta(a, d) < \delta(a, c) = \delta(o, c)$ gilt, so ist d innerer Punkt des Segmentes (o, c) und deshalb ist q auch innerer Punkt des Segmentes (o, a), d. h. $0 < \cos \angle a\,o\,c < 1$. Hieraus folgt unmittelbar $\cos \angle a\,o\,b < \cos \angle a\,o\,c$, wenn $\cos \angle a\,o\,b < 0$ ist. Wenn dagegen $\cos \angle a\,o\,b \geqq 0$ ausfällt, wenn also p ein Punkt von (o, a) ist, so fällt die Projektion von d auf $o \frown a$ wegen 48. auf dem offenen Segment (p, a), woraus $\cos \angle a\,o\,b < \cos \angle a\,o\,c$ sogleich folgt.

Definition. Den Winkel $\angle a\,o\,c$ beim Satze 53. wollen wir den *halben Winkel* von $\angle a\,o\,b$ nennen.

54. *Sind zwei Winkel kongruent, so sind auch ihre halben Winkel kongruent.*

Bezeichnung. Auf jeder Achse mit der Koordinate ξ schreiben wir $a < b$, wenn $\xi(a) < \xi(b)$ gilt.

55. *Es sei* $\angle a\,o\,a_1$ *der halbe Winkel von* $\angle a\,o\,b$, *und im allgemeinen sei* $\angle a\,o\,a_n$ *der halbe Winkel von* $\angle a\,o\,a_{n-1}$. *Dann gilt* $a_n \to a$,

Beweis. Es ist nur den Fall zu berücksichtigen, dass $(o\,a\,\infty)$ von $(o\,b\,\infty)$ verschieden ist. Bezeichnet p_n die Projektion von a_n auf $o \smile a$, so gilt nach 53. $(o, p_1) < (o, p_2) < \ldots < (o, a)$, d. h. mit der oben eingeführten Schreibweise $o \leqq p_1 < p_2 < \ldots < a$, und folglich konvergieren p_n gegen einen Punkt p von (o, a). Für den Grenzpunkt a_0 jeder konvergenten Teilfolge a_m von a_n stimmt die Projektion von a_0 auf $o \smile a$ mit p überein. Wenn nun $p \neq a$ wäre, so sei $\angle a\,o\,c$ der halbe Winkel von $\angle a\,o\,a_0$ und q die Projektion von c auf $o \smile a$. Es ist dann nach 53. $p < q < a$. Für hinreichend grosses m kommt der Punkt a_{m-1} in genügender Nähe von a_0, folglich kommt a_m in beliebiger Nähe von c, und die Projektion von a_m auf $o \smile a$ fällt ebenso in genügender Nähe von c, was mit der Tatsache $p_m < p < q$ im Widerspruch steht. Demnach muss $p = a$ sein. Nach der uns bekannten Schlussweise erkennen wir $a_n \to a$.

§ 10. BESTIMMUNG DER WINKELGROESSE.

Auf der Achse $o \smile a_0$ sei die Normalkoordinate ξ so eingeführt, dass $\xi(o) = 0$, $\xi(a_0) = 1$ ausfallen, und sei a_1 der Punkt mit $\xi(a_1) = -1$. Es sei $\angle a_0\,o\,a_{1/2}$, mithin auch $\angle a_{1/2}\,o\,a_0$, ein rechter Winkel. Es sei im allgemeinen $(o\,a_s\,\infty)$ mit $s = (r + t)/2$ und $\delta(o, a_s) = 1$ der Halbierungsstrahl von $\angle a_r\,o\,a_t$ mit $r = m/2^n$ und $t = (m+1)/2^n$. p_r bezeichne ferner die Projektion von a_r auf $o \smile a_0$.

Es soll diese Bezeichnungen im folgenden beständig beibehalten werden.

56. *Aus $r < s$ folgt $a_r > a_s$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst im allgemeinen an, dass für drei Winkel $\angle a_r\,o\,a_u$, $\angle a_r\,o\,a_s$, $\angle a_r\,o\,a_t$, wo jeder von den ersten zwei der halbe Winkel des nachfolgenden ist, die Beziehung $o \leqq p_t < p_s < p_u < p_r$ besteht. Dann sieht man, wenn $\angle a_s\,o\,a_v$ der halbe Winkel von $\angle a_s\,o\,a_t$ ist, dass $p_t < p_v < p_s$ gilt. Der Winkel $\angle a_s\,o\,a_r$ und sein halber Winkel $\angle a_s\,o\,a_u$ gehen nämlich durch die Axialsymmetrisierung A_s mit der Achse $o \smile a_s$ in $\angle a_s\,o\,a_t$ und $\angle a_s\,o\,a_v$. Also liegt die Mitte b des Segmentes (a_u, a_v) auf (o, a_v). Demnach liegt die Projektion q von b auf $o \smile a$ auch auf (o, p_s), d. h. $q < p_s$, und da $p_v < q < p_u$ besteht, weil q Mitte

von (a_v, a_u) ist, so hat man $p_v < p_s$. Auf der anderen Seite sei q' die Projektion der Mitte von (a_s, a_t) auf $o \smile a$. Dann besteht $p_t < q' < p_s$, und da $q' < p_v$, so hat man $p_t < p_v$. Zusammenfassend besteht also die Beziehung $p_t < p_v < p_s$, wie behauptet.

Wendet man dies auf den Fall an, dass $r = 0$, $u = 1/8$, $t = 1/4$, $t = 1/2$, so hat man $o < p_{3/8} < p_{1/4} < p_{1/8}$, da nach 53. $o < p_{1/4} < p_{1/8}$ gilt. Auf diese Weise beweist man unseren Satz für den Fall $o \leqq r$, $s \leqq 1/2$ durch wiederholte Anwendungen der eben bewiesenen Formel.

Die übrig bleibenden Fälle, wo einer oder die beiden von r, s grösser als 1/2 ausfallen, kann man entweder direkt beweisen oder durch Axialsymmetrisierung an der Achse $o \smile a_{1/2}$ auf den ersten Fall züruckführen.

Aus 56. und 55. hat man:

57. *Wenn* $r = m/2^n \to 0$, *so* $a_r \to a_0$.

58. *Es sei* r *für jedes* $i\,(i = 1, 2, \ldots)$ *eine rationale Zahl von der Form* $m/2^n$ *und sei* $r_i \to \alpha$. *Dann konvergieren* $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots$ *gegen einen Punkt* a.

Beweis. Aus a_{r_i} wähle man eine Teilfolge a_{s_i} aus, die etwa gegen a konvergiert. Sind $r = m/2^n$ und $s = (m + 1)/2^n$, so ist $\angle a_r\, o\, a_s$, wie man leicht sieht, mit $\angle a_0\, o\, a_{1/2^n}$ kongruent, und folglich gibt es eine Transformation T von $\mathfrak{G}$, durch welche $(o\, a_r\, \infty)$ und $(o\, a_s\, \infty)$ in $(o\, a_0\, \infty)$ und $(o\, a_{1/2^n}\, \infty)$ übergeführt wird. Dabei geht der Punkt a_t mit $t = p/2^n$ in den Punkt a_t mit $t = (p - m)/2^n$ über.

Betrachtet man jetzt die den Punkt o festlassende Transformation T_i von $\mathfrak{G}$, welche denjenigen von a_{r_i} und a_{s_i} mit der kleineren Marke in a_0 und den anderen in den Punkt a_{t_i} mit $t_i = |r_i - s_i|$ überführt, so muss $a_{t_i} \to a_0$ sein, da r_i und also auch s_i Cauchy'sche Folge ist, und deshalb $|r_i - s_i| \to 0$ gilt. Hieraus hat man $T_i(a_{r_i}) \to a_0$ und $T_i(a_{s_i}) \to a_0$, woraus sich zusammen mit der Konvergenz $a_{s_i} \to a$ auf Grund von Axiom III $a_{r_i} \to a$ ergibt.

Wir haben demnach:

59. *Ordnet man zu jedem* t *mit* $0 \leqq t \leqq 1$ *den Punkt* $a = \lim a_{r_i}$ *zu, indem man eine Folge von rationalen Zahlen* r_i *mit* $\lim r_i = t$ *wählt, so liefert* $a = a(t)$ *eine eineindeutige, stetige Funktion von* t. *Ist*

ferner $p = p(t)$ *die Projektion von* a *auf* $a_1 \smile a_0$, *so ist* $p(t)$ *wieder eine eineindeutige, stetige Funktion von* t, *und genügt* $p(0) = a_0$, $p(1/2) = o$, $p(1) = a_1$.

Wenn man einen Winkel $\angle a_0 o a$ angibt, so wird der Wert t mit $\cos \angle a_0 o a =$ die Koordinate von $p(t)$ und mit $-1 \leqq t \leqq 1$ eindeutig bestimmt. Indessen haben wir

60. *Jedem Winkel* $\angle a' o b'$ *gibt es einen ihm kongruenten Winkel* $\angle a_0 o a$.

Beweis. Es sei p' die Projektion von b' auf $o \smile a'$. Wählt man auf $o \smile a$ denjenigen Punkt p, dessen Koordinate der Koordinate von p' auf $o \smile a'$ gleich ist, und sei $\angle a_0 o a$ der (nach 59. existierende) Winkel derart, dass die Projektion von a auf $o \smile a_0$ mit p zusammenfällt. Dann ist nach 51. $\angle a_0 o a \equiv \angle a' o b'$.

Infolge des 60. kann man die folgende Definition aufstellen:

Definition. Der Wert $t\pi$, wo t die oben angegebene Bedeutung hat, soll die *Grösse des Winkels* und des mit demselben kongruenten Winkels heissen.

Der rechte Winkel bekommt den Wert $\pi/2$ und der gestreckte Winkel den Wert π. Der uneigentliche Winkel mit zusammenfallenden Schenkeln hat die Grösse 0. Kongruente Winkel und nur solche haben gleiche Winkelgrössen.

61. *Bezeichnet man mit* A_0 *die Axialsymmetrisierung mit der Achse* $o \smile a_0$, *und mit* $A_{m/2^n}$ *die Axialsymmetrisierung mit der Achse* $o \smile a_{m/2^n}$, *so ist*

$$A_{m/2^n} = (A_{1/2^n} A_0)^m A_0 .$$

Beweis. Einfachheitshalber setze man

$$B_m = A_{m/2^n} ,$$

und nehme erstens an, es bestehe schon

$$B_m = (B_1 A_0)^m A_0$$

für m, $m-1$, ..., 1, 0. Nach 2. ist dann

$$B_{m+1} = B_m B_{m-1} B_m^{-1} = (B_1 A_0)^m A_0 \,.\, (B_1 A_0)^{m-1} A_0 \,.\, ((B_1 A_0)^m A_0)^{-1}$$
$$= (B_1 A_1)^m A_0 \,.\, (B_1 A_0)^{m-1} A_0 \,.\, A_0 (B_1 A_0)^{-m}$$
$$= (B_1 A_0)^m A_0 \,.\, (B_1 A_0)^{-1} = (B_1 A_0)^m B_1^{-1}$$
$$= (B_1 A_0)^m B_1 A_0 A_0 = (B_1 A_0)^{m+1} A_0 ,$$

womit der Satz als im allgemeinen gültig bewiesen ist.

Definitionen. Die abgeschlossene Hülle der Menge von allen Achsen $o \smile a_r (r = m/2^n)$ der vorangehenden Betrachtungen nennt man die *𝔊-Ebene* (oder das *2-dimensionale 𝔊-Lineargebilde*) *vom Mittelpunkt o* und ferner jede Achse $o \smile a$, wo $a = \lim a_r$ ist, eine *Achse der 𝔊-Ebene.*

Aus der Berechnung beim Beweis von 61. erkennt man mit Rücksicht auf die Stetigkeit von Axialsymmetrisierung:

62. *Jede 𝔊-Ebene durch o wird durch die Axialsymmetrisierung, die eine Achse derselben als Achse besitzt, auf sich selbst abgebildet.*

Definitionen. Der Jordanbogen $a = a(t)$ des Satzes 59. lässt sich durch Axialsymmetrisierung mit der Achse $o \smile a$ zu einer Jordankurve ergänzen. Diese Jordankurve heisst *𝔊-Kreis vom Mittelpunkt o*, und das Segment (o, a), wo $a = \lim a_{r_i}$ bedeutet, ihr *Radius.* Zwei entgegengesetzte Radien machen zusammen einen *Durchmesser* aus.

63. *Die 𝔊-Kreise mit kongruenten Radien sind einander kongruent.*

64. *Jeder 𝔊-Kreis ist symmetrisch sowohl in bezug auf seinen Durchmesser als auch in bezug auf seinen Mittelpunkt.*

65. *Sind a und b zwei verschiedene, nicht diametral gegenüberliegende Punkte des 𝔊-Kreises Σ^1 vom Mittelpunkt o, so enthält der Halbierungsstrahl von $\angle a\,o\,b$ einen Radius des Σ^1.*

Beweis. Es seien $a_r \to a$, $a_s \to b$ mit der obigen Bedeutung von a_r, a_s. Da der Halbierungsstrahl von $\angle a_r\, o\, a_s$ einen Radius von Σ^1 enthält, und mit r und s gegen den Halbierungsstrahl von $\angle a\, o\, b$ konvergiert, so erkennt man daraus die Richtigkeit des Satzes.

Hieraus folgt:

66. *Wenn zwei 𝔊-Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt zwei*

verschiedene, nicht diametral gegenüberliegende Punkte gemeinsam haben, so fallen sie zusammen.

Ferner:

67. *Es geht ein und nur ein* ℭ*-Kreis vom Mittelpunkt* o *durch zwei verschiedene Punkte* a *und* b *mit* $\delta(o, a) = \delta(o, b)$ *hindurch, es sei denn, dass* o, a, b *auf einer und derselben Achse gelegen sind.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus 66. Die Existenz ist nach 60. klar.

§ 11. ℭ-LINEARGEBILDE.

68. *Stehen die Achsen* β *und* γ *senkrecht auf* α, *so steht auch das zu* β *symmetrische Bild* $C(\beta)$ *in bezug auf* γ *senkrecht auf* α.

Beweis. Seien A, B, C die Axialsymmetrisierungen mit den Achsen α, β, γ. Nach Annahme gelten dann wegen 2. $AB = BA$, $AC = CA$, während $C(\beta)$ die Achse von CBC darstellt. Es ist nun $A(CBC) = CABC = CBAC = (CBC)A$, woraus $C(\beta) \perp \alpha$ folgt.

69. *Stehen zwei verschiedene Achsen* β *und* γ *in einem Punkte* a *einer Achse* α *senkrecht auf derselben, so auch die Halbierungsachse von* β *und* γ *auf* α.

Beweis. Es sei δ eine Halbierungsachse von β und γ und seien A, D die Axialsymmetrisierungen mit den Achsen α und δ. Es sei ferner b ein von a verschiedener Punkt auf β und setze $D(b) = c$, $A(c) = c'$, $A(b) = b'$. Aus der Annahme der Orthogonalität von β und γ auf α liegen b' und c' auf β bzw. γ, und da δ durch die Mitten d und d' von (b, c) und (b', c') geht, und da (b, c) durch die Abbildung A in (b', c') übergeht, somit auch d in p', so muss $\delta = d \smile d'$ senkrecht auf α sein.

70. *Steht eine Achse durch den Mittelpunkt eines* ℭ*-Kreises auf zwei nicht entgegengesetzte Radien desselben senkrecht, so steht sie auf allen seinen Radien senkrecht.*

Es sei Σ^1 ein ℭ-Kreis vom Mittelpunkt o durch a_1 und sei a_2 ein Punkt von Σ^1, so dass $\angle a_1 o a_2$ rechtwinklig wird. Wir bezeichnen mit $o \smile \Sigma^1$ die Vereinigungsmenge aller Punkte der Achsen, die durch o und die Punkte von Σ^1 durchgehen. Wir haben sie oben ℭ-Ebene genannt.

Wenn der vorliegende Raum E^m die Euklidische Ebene E^2 ist, so stimmt $o \smile \Sigma^1$ offenbar mit E^m überein. Wenn m dagegen >2 ist, so gibt es mindestens einen von $o \smile \Sigma^1$ verschiedenen Punkt, insbesondere einen solchen x mit $(o, x) \equiv (o, a_1)$. Konstruiert man dann den ℌ-Kreis vom Mittelpunkt o durch a_1 und x und wählt man auf demselben einen Punkt x_1 derart, dass $\angle a_1 o x_1$ rechtwinklig wird, konstruiert man dann weiter den ℌ-Kreis vom Mittelpunkt o durch x_1 und a_2 und wählt man auf demselben einen Punkt a_3, so dass $\angle a_2 o a_3$ rechtwinklig wird, so stehen die drei Achsen $o \smile a_1$, $o \smile a_2$, $o \smile a_3$ senkrecht aufeinander.

Die sämlichen Punkte der ℌ-Kreise vom Mittelpunkt o, die durch a_3 und die Punkte von Σ^1 durchgehen, bilden ein Gebilde, das der 2-dimensionalen Euklidischen Sphäre S^2 homöomorph ist. Wir nennen dieses Gebilde eine 2-dimensionale ℌ-Sphäre und bezeichnen mit Σ^2.

Angenommen, die $(n-1)$-dimensionale ℌ-Sphäre Σ^{n-1} sei schon konstruiert und seien $o \smile a_1$, $o \smile a_2$, ..., $o \smile a_n$ aufeinander senkrecht stehende "Radien" derselben. Falls die Dimension des vorliegenden E^m grösser als n ist, so gibt es einen Punkt x außerhalb $o \smile \Sigma^{n-1}$. Genau so wie oben, (i) konstruiere man den ℌ-Kreis vom Mittelpunkt o durch a_1 und x und wähle auf demselben einen Punkt x_1, so dass $\angle a_1 o x_1$ rechtwinklig wird, (ii) konstruiere man dann den ℌ-Kreis vom Mittelpunkt o durch x_1 und a_2 und wähle auf demselben einen Punkt x_2, so dass $\angle x_2 o a_2$ rechtwinklig wird, usw. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir schliesslich einen Punkt a_{n+1}, so dass $o \smile a_{n+1}$ auf allen $o \smile a_1$, $o \smile a_2$, ..., $o \smile a_n$ senkrecht steht.

Es sei nun y ein variabler Punkt auf Σ^{n-1} und sei K_y der ℌ-Kreis mit dem Mittelpunkt o durch a_{n+1} und y. Da $\angle a_{n+1} o y$ rechtwinklig ist, so haben K_y für je zwei verschiedene y_1 und y_2 nur den Punkt a_{n+1} und sein symmetrisches Bild in bezug auf o gemeinsam, ausgenommen den Fall, wo y_1 und y_2 in bezug auf o symmetrisch liegen, in welchem Falle K_{y_1} mit K_{y_2} zusammenfällt. Die Punkte auf K_y lassen sich demnach eineindeutig und stetig auf die n-dimensionale Euklidische Sphäre S^n abbilden.

Definition. Das so erhaltene Gebilde nennen wir *n-dimensio-*

nale ℭ-*Sphäre* und bezeichnen mit Σ^n.

Die Menge der sämtlichen Punkte von $o \smile \Sigma^n$ bildet dann eine mit dem $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum homöomorphe Gebilde.

Definition. $o \smile \Sigma^{n-1}$ heisst *n-dimensionales* ℭ-*Lineargebilde vom Mittelpunkt* o und wird mit L^n bezeichnet.

Zusammenfassend haben wir:

71. *Es gibt in* E^m *mindestens eine n-dimensionale* ℭ-*Sphäre* Σ^n $(n \leqq m-1)$ *mit dem gegebenen Punkt o von* E^m *als Mittelpunkt.* $o \smile \Sigma^n$ *ist dabei homöomorph mit dem Euklidischen* E^{n+1}.

Es ergibt sich ferner:

72. Existenz der Orthogonalachsen. *Durch jeden Punkt des* E^m *gehen genau m aufeinander senkrecht stehende Achsen.*

Definition. Durch zwei aus einem und demselben Punkt o gehende, nicht einander entgegengesetzte Strahlen (oder verschiedene Achsen) ρ_1 und ρ_2 lässt sich, wie man nach 67. sieht, ein und nur ein 2-dimensionales ℭ-Lineargebilde konstruieren, welche wir das von ρ_1 und ρ_2 *aufgespannte* ℭ-Lineargebilde nennen wollen. Jeder Strahl (Achse) dieses ℭ-Lineargebildes durch o möge dabei eine *lineare Kombination* von ρ_1 und ρ_2 heissen.

73. *Sind* α *und* β *zwei verschiedene, durch den Mittelpunkt des* ℭ-*Lineargebildes* L^n *gehende Achsen, so ist das von* α *und* β *aufgespannte* ℭ-*Lineargebilde in* L^n *enthalten.*

Beweis. Es seien $o \smile a_1$, $o \smile a_2$, ..., $o \smile a_n$ die aufeinander senkrecht stehenden Achsen von L^n. Nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, dass eine lineare Kombination γ von α und β gäbe, die nicht in L^n enthalten ist, so würden wir, ausgehend von γ, genau so wie bei der Konstruktion von Σ^n aus Σ^{n-1}, eine auf allen $o \smile a_1, \ldots, o \smile a_n$ senkrecht stehende Achse δ erhalten, während dies unmöglich ist, weil γ auf jede, zu allen $o \smile a_1, \ldots, o \smile a_n$ senkrecht stehende Achse selbst senkrecht stehen müsste, und deshalb durch den obigen Prozess zu keiner solchen Achse δ, welche auf alle $o \smile a_1, \ldots, o \smile a_n$ senkrecht steht, erlangen könnte. Damit ist die Richtigkeit des Satzes bewiesen.

Aus diesem Beweis erhellt sich:

74. *Es seien* $o \smile a_1, \ldots, o \smile a_n, \ldots, o \smile a_m$ *aufeinander senkrecht stehende Achsen durch* o, *und* L^n *das durch* $o \smile a_1, \ldots, o \smile a_n$ *gehende (von diesen aufgespannte)* $\mathfrak{E}$*-Lineargebilde. Dann sind alle Achsen durch* o, *die auf allen* $o \smile a_{n+1}, \ldots, o \smile a_m$ *senkrecht stehen, in* L^n *enthalten.*

Dieses L^n fällt demnach mit der Vereinigungsmenge der Punkte aller Achsen, die auf allen $o \smile a_{n+1}, \ldots, o \smile a_m$ senkrecht stehen, zusammen. Allgemein gesagt, haben wir:

75. *Die Vereinigungsmenge aller Achsen durch* o, *die auf einer vorgelegten Menge von Achsen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ *durch* o *senkrecht stehen, bilden ein gewisses* $\mathfrak{G}$*-Lineargebilde* L^n.

Definition. Dieses L^n heisst auf $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ senkrecht stehen.

Der Satz 74. zusammen mit 46. ergibt:

76. *Die Achse durch zwei verschiedene Punkte eines* n*-dimensionalen* $\mathfrak{G}$*-Lineargebildes liegt ganz auf demselben.*

77. *Durch die Axialsymmetrisierung mit einer Achse auf einem* $\mathfrak{G}$*-Lineargebilde wird dieses auf sich selbst abgebildet.*

Beweis. Sei A die Axialsymmetrisierung mit der Achse α auf dem $\mathfrak{G}$-Lineargilde L, und sei x ein beliebiger, nicht auf α gelegener Punkt von L. Da die Achse $x \smile A(x)$ wegen 76. zu L gehört, weil x und der gemeinsame Punkt von $x \smile A(x)$ mit α auf L liegt, so gehört auch $A(x)$ zu L, w. z. b. w.

78. *Mittels einer das* $\mathfrak{G}$*-Lineargebilde* L *auf sich selbst abbildenden Transformation* T *von* $\mathfrak{G}$ *lässt sich jeder Punkt* x *von* L *in jeden Punkt* y *von* L *überführen.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass der Mittelpunkt o von L in einen vorgelegten Punkt x überführbar ist. Wir nehmen einen Punkt y ausserhalb $o \smile x$ und genügend nahe an x, verbinden o und y durch das Segment (o, y). Ein variabler Punkt z bewege sich entlang (o, y) von y aus nach o. Auf Grund der Stetigkeit von Projektion gibt es auf (o, y) eine Stelle, wo die Projektion c auf $o \smile x$ mit der Mitte von (o, x) übereinstimmt. Durch die Axialsymmetrisierung mit der Achse $b \smile c$ wird dann L auf sich selbst abgebildet und o wird dabei in x übergeführt.

79. L^n *wird durch das in demselben gelegene* L^{n-1} *in zwei Gebiete*

zerlegt, welche durch die Axialsymmetrisierung mit der in L^{n-1} enthaltenen Achse vertauscht werden.

Beweis. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ Achsen durch den Punkt o, die zusammen L^{n-1} aufspannen, und sei α_n die in L^n gelegene Achse, die auf allen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ senkrecht steht. Ein Punkt x gehört dann und nur dann zu L^{n-1}, wenn die Projektion von x auf α_n mit o zusammenfällt. Nun wähle man willkürlich je einen von o verschiedenen Punkt a und b auf jedem der beiden von o ausgehenden Strahlen von α. Jeder a und b verbindende Weg γ schneidet dann L^{n-1}, da die Projektion von variablen Punkt z von γ auf α_n den Punkt o passieren muss, wenn z von a aus entlang γ nach b durchläuft. L^{n-1} zerlegt also L^n mindestens in zwei Gebiete. Es sind aber höchstens zwei, denn die Projektion y von jedem nicht auf L^{n-1} gelegenen Punkt x auf α_n lässt sich entweder mit a oder mit b durch das zu L^{n-1} fremde Segment (y, a) oder (y, b) verbinden. Da die beiden Strahlen $(o\,a\,\infty)$ und $(o\,b\,\infty)$ durch die Axialsymmetrisierung mit der auf L^{n-1} gelegenen Achse durch o einander vertauscht werden, so gilt desgleichen für die in Rede stehenden beiden Gebiete.

80. *Die Axialsymmetrisierung mit der Achse auf L^n ist entweder die Indikatrix erhaltende oder die Indikatrix umkehrende Abbildung von L^n auf sich selbst, je nachdem n ungerade oder gerade ist.*

Beweis. Angenommen, der Satz sei schon für $n-1$ bewiesen, und zwar sei jede Axialsymmetrisierung bei L^{n-1} Indikatrix erhaltend (umkehrend). Es sei dann S eine Axialsymmetrisierung mit der Achse σ auf L^n, und betrachte man ein L^{n-1} durch σ, so wird das eine von den beiden durch L^{n-1} geteilten Gebieten von L^n durch S auf das andere abgebildet, während L^{n-1} dabei nach Annahme auf sich selbst die Indikatrix erhaltend (umkehrend) abgebildet wird. Folglich stellt sich S heraus als eine die Indikatrix umkehrende (erhaltende) Abbildung von L^n auf sich selbst. Da S bei L^n offenbar die Indikatrix umkehrend ist, so erkennt man hieraus die Richtigkeit des Satzes.

81. *Im Falle des E^m für gerades m ist die Zentralsymmetrisierung eine Transformation von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Es sei Z eine Zentralsymmetrisierung mit dem Zentrum o und seien $o \smile a_1 = \alpha_1$, $o \smile a_2 = \alpha_2$, ..., $o \smile a_m = \alpha_m$ m paarweise in o senkrecht stehende Achsen. Bei Z geht jeder Punkt $x \in E^m$ mit den Projektionen x_i auf α_i $(i = 1, \ldots, m)$ infolge der Invarianz der Orthogonalität bei Zentralsymmetrisierung in den Punkt x' mit den Projektionen x_i' auf α_i, wo x_i' in bezug auf o zu x_i symmetrisch ist. Es sei A_i die Axialsymmetrisierung mit der Achse α_i und betrachte die Transformation $A = A_m A_{m-1} \ldots A_2 A_1$. Für $i \neq j$ werden nun das in x_i und das in x_i' auf α_i senkrecht stehende L^{m-1} durch A_j vertauscht, während sie beide durch A_i auf sich selbst abgebildet werden. Folglich wird x bei geradem m durch A in x' übergeführt, d. h. Z ist gleich A, w. z. b. w.

Genau so wie oben erkennen wir, dass die Zentralsymmetrisierung für ungerades m eine die Indikatrix umkehrende Abbildung des E^m auf sich selbst ist, und deshalb wegen 80. gehört zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht. Indessen haben wir für ungerades m:

82. *Durch Hinzufügung aller Zentralsymmetrisierungen mit den beliebigen Punkten als Zentren zur Gruppe $\mathfrak{G}$ als Erzeugende ergibt sich eine neue Gruppe $\mathfrak{G}^*$, die wieder den Axiomen I bis III genügt.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des folgenden

83. *Es seien eine Zentralsymmetrisierung Z und eine Axialsymmetrisierung S gegeben. Dann ist ZSZ eine Axialsymmetrisierung.*

Beweis. Es sei σ die Achse von S. Für jeden ausserhalb σ befindlichen Punkt x gehen $x \smile S(x)$ und σ durch Z wegen 45. wieder in die aufeinander senkrecht stehenden Achsen $Z(x) \smile ZS(x)$ und $Z(\sigma)$, wobei $Z(\sigma)$ ferner durch die Mitte des Segmentes $(Z(x), ZS(x))$ geht. Bezeichnet also S' die Axialsymmetrisierung mit der Achse $Z(\sigma)$, so gilt $S'Z(x) = ZS(x)$, woraus $ZSZ = S'$ gleich folgt.

Wir sind jetzt in der Lage, folgenden Hauptsatz zu beweisen:

84. Hauptsatz. *Gegeben seien m aufeinander senkrecht stehende Strahlen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ und $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'$ durch o bzw. o'. Es gibt dann eine und nur eine Transformation T von $\mathfrak{G}$, oder von $\mathfrak{G}^*$, die $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'$ in $\rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_m$ überführt.*

Beweis. Mittels einer Axialsymmetrisierung S_0 gehen $\rho_1', \ldots, \rho_m'$

in $\rho_1^{(1)}, \ldots, \rho_m^{(1)}$ über. Einfachheitshalber wollen wir $\alpha_1, \ldots \alpha_m \overset{T}{\rightarrow} \alpha_1', \ldots,$ α_m' schreiben, wenn die Strahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ durch eine Transformation T in $\alpha_1', \ldots, \alpha_m'$ übergehen. Wir bezeichnen ferner mit ρ^* den zu ρ entgegengesetzten Strahl.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

I. m : gerade.

Durch die $\rho_1^{(1)}$ und ρ_1^* vertauschende Axialsymmetrisierung S_1 :

$$\rho_1^{(1)}, \ \rho_2^{(1)}, \ \ldots, \ \rho_m^{(1)} \overset{S_1}{\rightarrow} \rho_1^*, \ \rho_2^{(2)}, \ \ldots, \ \rho_m^{(2)}.$$

Durch die $\rho_2^{(2)}$ und ρ_2 vertauschende Axialsymmetrisierung S_2 :

$$\rho_1^*, \ \rho_2^{(2)}, \ \ldots, \ \rho_m^{(2)} \overset{S_2}{\rightarrow} \rho_1, \ \rho_2, \ \rho_3^{(3)}, \ \ldots, \ \rho_m^{(3)}.$$

Ebenso

$$\rho_1, \ \rho_2, \ \rho_3^{(3)}, \ \ldots, \ \rho_m^{(3)} \overset{S_3}{\rightarrow} \rho_1^*, \ \rho_2^*, \ \rho_3^*, \ \rho_4^{(4)}, \ \ldots, \ \rho_m^{(4)} \overset{S_4}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \rho_1, \ \rho_2, \ \rho_3, \ \rho_4, \ \rho_5^{(5)} \ \ldots, \ \rho_m^{(5)} \rightarrow \ldots \overset{S_{m/2}}{\longrightarrow} \rho_1, \ \ldots, \ \rho_m.$$

II. m : ungerade.

Genau so wie bei I können wir der Reihe nach eine Menge von Axialsymmetrisierungen finden derart, dass wir schliesslich entweder zu $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, oder zu $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-1}, \rho_m^*$ gelangen, in welch letzterem Falle wir folgendermassen fortsetzen : Mittels der passend gewählten Zentralsymmetrisierung Z haben wir zunächst $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m^*$ $\overset{Z}{\rightarrow} \rho_1^*, \rho_2^*, \ldots, \overset{*}{\rho}_{m-1} \rho_m$, woraus durch Anwendung der Axialsymmetrisierungen R_1, R_2 usw. mit den Achsen ρ_1, ρ_2, usw. der Reihe nach

$$\rho_1^*, \ \rho_2^*, \ \ldots, \ \overset{*}{\rho}_{m-1}, \ \rho_m \overset{R_1}{\rightarrow} \rho_1^*, \ \rho_2, \ \rho_3, \ \ldots, \ \rho_{m-1}, \ \rho_m^* \overset{R_2}{\rightarrow}$$

$$\rho_1, \ \rho_2, \ \rho_3^*, \ \ldots, \ \overset{*}{\rho}_{m-1}, \ \rho_m \rightarrow \ldots \rightarrow \rho_1, \ \rho_2, \ \ldots, \ \rho_m.$$

Damit ist die Überführbarkeit von $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'$ in $\rho_1, \rho_2, \ldots,$ ρ_m in allen Fällen bewiesen.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu beweisen. Zu dem Zwecke bemerken wir voraus, dass mit zwei durch einen Punkt gehenden Achsen

auch die von diesen aufgespannten 2-dimensionale $\mathfrak{S}$-Lineargeilde durch eine Transformation von $\mathfrak{S}$ festbleibt. Die Eindeutigkeit folgt hieraus leicht in Verbindung mit der Entstehungsweise von L''.

28. IV, 1948.

(Eingegangen 4. Oktober, 1948)