様式3

論 文 内 容 の 要 旨

氏 名 (森田 健)	
論文題名	Connection formulae of the Ramanujan entire function and a resummation of the basic hypergeometric series $_2\phi_0(0,0;-;q,x)$ (ラマヌジャン整函数と総和法を施したq-超幾何級数$_2\phi_0(0,0;-;q,x)$の接続公式)

論文内容の要旨

申請者の博士論文は、Ramanujan整函数が満たすq-差分方程式についての接続問題について述べてある。Birkhoffによって確定特異点型のq-差分方程式の接続問題の定式化が与えられたものの、一般のq-差分方程式においては解として発散級数が出現することがあり、研究が途絶えていた。その後RamisやZhang によって導入された2種類のq-Borel-Laplace変換が先述の発散級数の意味づけと接続問題において有効であることが分かってきたものの、具定例としてはZhangによる2例しか知られていなかった。
申請者はRamanujan整函数が満たすq-差分方程式の原点近傍の2つの独立な解と無限遠点近傍の独立な2つの解の間の接続係数を、前述のq-Borel-Laplace総和法を用いることで決定し、接続問題を解いた。原点近傍の解としてはRamanujan整函数とq-超幾何型発散級数を含む形式解が現れ、無限遠点近傍の解としてはq-Airy函数と呼ばれる整函数が現れる。セクション2.1において、変数と基数の変数変換をおこなうことで、これらの函数が解となっていることを示した。
セクション2.2において、Ramanujan整函数とq-Airy函数の接続公式を与えた。これらの函数はAiry函数の相異なるq-類似であることがIsmailによって指摘されていたものの、関係は知られていなかった。申請者は第2種q-Borel-Laplace変換を用いて留数を計算し、更に現れる積分の評価をおこなうことで接続係数を決定し、これらの函数が接続公式で関係づけられることを示した。
セクション2.3において、原点近傍のq-超幾何型発散級数を含む解に関して第1種q-Borel-Laplace変換による総和法によって有理型函数解を定め、その接続係数を決定した。こちらはまず基数がqである発散級数についての接続公式を求めた後、基数q^2のものとの対応を与えた。現れる基数qの発散級数に対し第1種q-Borel変換を適用することでq-指数函数が得られる。そこでこのq-指数函数の無限遠点近傍での表示を与えておき、q-Laplace変換を適用することで接続係数を決定した。この接続係数は総和法に含まれる新たなパラメータを含んでいる。さらに用意した補題を用いて基数q^2の函数との対応を考え、目標であった発散級数を含む解を総和法によって意味づけした真の解について接続公式を与えた。
これらの結果を用いることでRamanujan整函数が満たすq-差分方程式についての接続係数を決定した。

様式7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名（　森田　健　）			
		（職）	氏　名
論文審査担当者	主 査	教授	有木　進
	副 査	教授	和田　昌昭
	副 査	教授	山田　泰彦（神戸大学）
	副 査	准教授	大山　陽介

論文審査の結果の要旨

線型q-差分方程式の接続問題は古くから研究があったが、不確定特異点のまわりの漸近解析については20世紀終わりになってようやく研究が進み、J.-P. RamisらによってStokes現象のq-類似などが理論的に整備されてきた。不確定特異点を持つ線型q-差分方程式の例として、Ramanujanの整函数がみたす2階q-差分方程式などが知られていたが、方程式の大域的構造の研究はほとんど行われていなかった。Ramanujanの整函数とは、彼が遺したLost Notebookの中に記された奇妙なq-級数の一つである。2006年頃になってIsmailはこのRamanujanの整函数はAiry函数のq-類似と見ることができ、2階q-差分方程式をみたすことを示した。このq-差分方程式は不確定特異点を持つので、もう一つの別の解として発散するべき級数を含む形式解を持つ。また、ほぼ同時期にq-Painleve II型方程式の特殊解としてAiry函数の異なるq-類似が発見された。
そこで、Airy函数の異なる二つのq-類似の間の関係を調べることが十年近く課題であったとともに、Ramanujanの整函数がみたす2階q-差分方程式の大域的性質を調べることが問題であった。そこで本論文ではこの2階q-差分方程式の大域的な構造を調べて次の結果を得た。

1． Ramanujanの整函数がみたす2階q-差分方程式は、原点の周りではRamanujanの整函数と発散するq-超幾何級数の二つを形式解に持ち、無限遠の周りではq-Airy函数で表示される収束級数解を二つ持つ。まず、Ramanujanの整函数に対してコーシー積分による積分表示を与えて、その積分表示を異なる二通りの方法で計算することで、Ramanujanの整函数とq-Airy函数との間の関係式を見いだした。Ramanujanの整函数の接続問題を解いただけではなく、Airy函数の異なる二つのq-類似の間の関係を初めて与えた公式として意義のある結果である。

2．原点の周りでのもう一つの解は発散級数を含んでいる。この発散級数をBorel-Laplaceの方法のq-類似によってJackson積分を用いて意味づけを行い、2階q-差分方程式をみたす有理型解を構成した。この有理型解はJackson積分の取り方に依存する複素パラメタを含む。さらにこのJackson積分をq-無限積などの函数等式を駆使することで計算して、複素パラメタを含む有理型解を無限遠の周りの解の和で表した。この接続公式はStokes現象のq-類似の具体例を与えたものであり、その導出はたいへん興味深いものである。

以上の審査結果により、博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。