Title	自己重力流体方程式の解の大域的挙動と特異性の成長
Author(s)	澤田, 真宏
Citation	
Issue Date	
Text Version	ETD
URL	https://doi.org/10.18910/55852
DOI	10.18910/55852
rights	
Note	

自己重力流体方程式の解の大域的挙動と特異性の成長

提出先　　大阪大学大学院情報科学研究科
提出年月　2016年1月

澤 田　真 宏

研究業績

原著論文

[1] Masahiro Sawada and Yoshitaka Yamamoto, Existence of unbounded solutions to a one dimensional isentropic periodic flow of a compressible viscous fluid with self-gravitation, Scientiae Mathematicae Japonicae, 2016 (accepted for publication)

国際会議論文

[1] Masahiro Sawada and Yoshitaka Yamamoto, Unboundedness of some solutions to isentropic model equations for the one dimensional periodic motions of a compressible self-gravitating viscous fluid, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Mathematical Challenge to a New Phase of Materials Science, 2016 (accepted for publication).

目 次

第1章　序論

1.1　動機

力学は, 物体間に働く力と運動の関係を研究する分野の一つである. 今日にいう力学の歴史は, ニュートンが提唱した運動法則が惑星運行に適用され, 観測をもとに導き出されたケプラーの法則から太陽が惑星におよぼす引力の存在が認知され, これが万有引力の法則に普遍化されることで輝かしい一歩を踏み出した. その後, 科学, 工学の様々な分野において運動法則に基づいて諸現象が成功裏にモデル化され, 諸問題の解決に供され, 現代の文明の礎となっていることは言を待たない. しかしながら, 力学的手法の適用範囲が広まるにつれて, 次々と新たな未知の現象の存在が明らかにされてきていることも事実である. 有名なところでは, 惑星運行に関連して提出された三体問題がある. 力学の黎明期以来抱かれてきた期待に反して, 厳密に運動方程式にしたがう運動といえども未来永劫にわたってその詳細を知ることの難しさが Jules-Henri Poincaré をはじめとする数学者の努力によって明らかにされた. このような困難は, 身近に起こる現象の中にも数多く見受けられる. 1 例として, 変形可能な棒の両端から力を加えたときに生じる座屈 (オイラーバックリング) をとりあげてみる. 経験的に知られているように, 棒に加えられる力が小さいあいだは棒の変形を伴わない一種の力学平衡の状態が保たれるが, 力の大きさがある限度を越えるや否や, 棒に大きな変形が生じこれまでとは別の平衡状態に落ち着く. 変形後の棒の状態は静力学を用いれば記述可能であろう. しかしながら, 力の釣り合いだけを勘案すれば, 棒が破損しない限り, 常に可能なはずの変形のない状態がいかなる理由で実現不可能になってしまうのか, 変形した棒を観察するだけでは, 答えに窮するであろう. 本論文が関わる流体力学の分野は, さらに複雑な様相を呈する現象の宝庫である. 実験室および自然界で生じる熱対流や回転流ほか, 様々な流れに観察されるパターンの出現と変遷, そして消失である [34], [36], [41]. このような現象のモデル解析にあたっては, 関心のある状態だけをとりあげて追求する方法はもはや最善とは言えず, 様々な状態を包含する現象全体を支配する基本原理に立ち返ってモデルを組み立て, 現象の複雑さをモデルから引き出して説明する方法が理に適っていると考えられる.

三体問題の研究に始まる微分方程式の定性理論, 量子力学の記述に端を発する関数解析の理論, その他の数学解析の方法の整備にともない, 複雑現象を無限次元の力学系と呼ばれる枠組みでとらえる研究が現在, 活発に行われている [22], [25]. 力学系では, 現象の舞台となる物理系の状態を観測にかからない状態も含めて相空間で表現し, 現象の進行を相空間内における点の動きとして捉え, 状態変化の起こりやすさや系の長時間挙動を力学系の記述に関わる相空間上の作用素や汎関数の性質を用いて研究する. 力学系による研究で典型的なものは系の平衡とその安定性である. これに関連して, 力学系理論の一大分野を成す分岐理論がある. Crandall と Rabinowitz [5], [6] によって整備された形で提示された平衡の分岐と安定性の理論は, その後発展を遂げ, 現象の複雑さを説明するひとつの手がかりとして地位を得ている [7], [8], [9], [15]. 分岐理論の特徴は, 力学系の表現に含まれるパラメータに着目し, パラメータの変化による力学系の構造変化の一貫として系の平衡を組織的に捉え, その

全体構造や安定性を研究することにある．このような手法の開発によって, 例えば, 前出の棒の座屈現象に対してモデル解析の立場から説明を与えることが可能となった．この例を含め, 分岐理論によるいくつかの成果が文献 [2] にあげられている．しかしながら, 力学系の研究全般を統括する一般論が未だ整備されていない現状では, モデル解析にあたりモデルの細部に依存した工夫が必要となることもまた事実である．本論文では, 以上のような力学系研究の現状を鑑み, 宇宙空間における星間ガスの分布に関して天文物理学において提唱されている流体の重力不安定に的を絞り, 力学系の手法を援用しつつ当該現象のモデル解析に取り組む.

本論文で取り扱う流体の重力不安定とは, 宇宙空間に漂う星間ガスが, ガス自身の質量によって引き起こされる重力, すなわちガスの自己重力の作用によって, 一様に分布している状態から質量が凝集したガス塊の集まりへと状態遷移するという天文物理学の仮説である．この仮説は, Sir James Jeans の研究 [10], [11] に端を発することから, ジーンズ不安定性とも呼ばれている [4], [27]．天文物理学の 1 分野である宇宙流体力学では, 星間ガスを一種の圧縮性流体とみなし, 流体力学の基礎方程式とニュートン重力場の Poisson 方程式を組み合わせて, 一様な平衡状態の安定性解析の立場から重力不安定を説明している．しかしながら, 不安定な平衡に生じた擾乱が成長していく過程については, ガスが到達し得る平衡に関するものに限定しても, まとまった結果は得られていない．研究の現状は, 自己重力ガス球をモデル化した Lane-Emden 方程式に対する研究とは対照的である．Lane-Emden 方程式に関してはガスの状態方程式に対する解の依存性が詳しく調べられ, 状態方程式による平衡の違いが認められている [31], [44]．同様の違いが重力不安定のモデルに対しても起こるかどうかは興味深い研究対象になると考えられる.

本論文は, 天文物理学による方法論にしたがい, 重力不安定のモデルを流体力学の手法により圧縮性流体の方程式をもとに組み立てる．モデル解析にあたっては, 本来, ガスの空間 3 次元的な流れを対象とすべきであるが, 流体力学方程式に対する数学研究の現状に鑑み, 本論文では, 研究対象を無限一様に分布する圧縮性流体に平面波攪乱が入射して空間 1 次元周期的な流れが生じている状況に限る．そのうえで, ガスの状態方程式の違いがもたらす自己重力系の長時間挙動の違いに着目してモデル解析を行う.

本論文で扱うモデル方程式に対して数学解析の立場から説明を加えるため, 第 2 章で導く方程式を提示しておく．方程式はラグランジュ質量座標と呼ばれる座標系で表示されている:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p - \mu \partial_x \left(\dfrac{\partial_x u}{v} \right) = F. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

ここで, v は流体の比体積, すなわち, 流体単位質量あたりの体積, u は流速, p は圧力, F は後述の流体の自己重力を表す．v と u は時空の変数 t, x の未知関数で, 周期流との想定から変数 x について周期 L をもつとしている．圧力 p は状態方程式

$$p(v) = av^{-\gamma} \quad a > 0,\ \gamma \geq 1 \text{ は定数}$$

にしたがうものとする．本論文では, $\gamma = 1$ の場合, 流れを等温流, $\gamma > 1$ の場合, 流れを等エントロピー流と呼ぶことにする．第 2 章においてモデル化されるように, 流体の自己重力は, 重力定数 $G > 0$ を用いて

$$F(t, x) = -\frac{4\pi G}{\bar{v}} \partial_x \int_0^L K_L(x, y)(v(t, y) - \bar{v})\, dy \tag{1.1.2}$$

で与えられる. K_L は L 周期関数に作用する作用素 $-\partial_x^2$ のグリーン関数で,

$$\bar{v} = \frac{1}{L}\int_0^L v(t,x)\,dx$$

である. ここで注意すべきは, 自己重力項 F は時空変数 t, x に関して有界となることである.

本論文では, モデル方程式 (1.1.1) の解の挙動に関して, とくに, 解の有界性に着目する. モデル方程式とは境界条件その他において委細が異なるが, この種の方程式の扱いでは, 解の有界性を導くことが解の長時間挙動を調べるうえで鍵となることが知られているからである. 例えば, 外力項 0 の方程式に対する Kanel' [12] の結果, 有界な外力項をもつ, 有限区間上の等温流方程式に対する Matsumura-Nishida [17] の結果, 同じく等エントロピー流方程式に対する Matsumura-Yanagi [18] の結果はいずれも解の有界性を結論のひとつにあげている. しかしながら, 外力の有無や状態方程式の違いによって結果の詳細は異なっている. 本論文と関連する部分を述べると, [17] では等温流方程式に対して外力項が有界であれば無条件に解の有界性が示されているが, [18] の等エントロピー流に対する解析では解の有界性を導くために初期データの大きさに応じて指数 γ を 1 に近づけており, 解の有界性が実際にデータに依存するか否かについて言及されていない.

本論文第 3 章において示されるように, 自己重力項 (1.1.2) の有界性より, 自己重力流体の等温流モデル方程式については Matsumura-Nishida の解の評価法を用いて解の有界性が導き出され, これをもとに解の長時間挙動が平衡に支配されることがわかる. 本論文において新たな解析方法によって明らかになったのは, 等エントロピー流のモデル方程式については自己重力項の有界性から必ずしも解の有界性がしたがわないことである. 事実, 指数 γ に関する条件 $1 < \gamma < 2$ のもとに,

$$\sup_{t,x} v(t,x) = \infty \tag{1.1.3}$$

を満たす非有界な解の存在が導き出される. さらに, 解が非有界になるための初期条件も提示できる. モデル方程式の解の非有界性 (1.1.3) は, 自己重力流体がその長時間挙動として, 流体中に真空を含む特異な状態に近づきうることを意味している. このことは, 星間ガスがその自己重力によって凝集しガス塊の集まりへと分裂するという重力不安定仮説を支持するものと考えられる.

本論文で開発した解析手法の要点を述べて本節を締めくくる. まず, Matsumura-Nishida による解の評価法を参考に, 等エントロピー流のモデル方程式についても有界な解の長時間挙動は平衡に支配されることを示す. 次に, 平衡解全体の構造および平衡解の安定性を調べつくす. これをもとに, エネルギー形式と呼ばれる, 状態変化の方向を指し示す汎関数を用いて, 平衡解に近づき得ず, したがって, 有界とはなり得ない解を見出す.

1.2 概要

本論文の構成は以下のとおりである.

第 2 章では, ニュートンの重力則をもとに自己重力流体のモデル方程式を導出する.

第 3 章では, モデル方程式の初期値問題に対して時間大域解の一意存在を示す.

第 4 章では, 解軌道のオメガ極限を調べ, 有界な解の長時間挙動が平衡に支配されることを示す.

第 5 章では, モデル方程式の平衡解全体の構造と平衡解の安定性を調べる.

第 6 章では, 平衡解のエネルギー準位を比較し, 結果を平衡解の安定性と照合することにより, 解が非有界となるための初期条件を提示する.

第 7 章では, 本論文を総括し, 今後の研究の展望について述べる.

1.3　記号表

本論文で用いる主な記号をまとめておく. これら以外に必要とされるものはその都度, 定める.

非負整数 m, $1 \le p < \infty$, 正数 L に対して,

C^m_{per} : $\mathbf{R}$ 上の m 階連続的微分可能な実数値 L-周期関数の集合.

C^∞_{per} : $\mathbf{R}$ 上の無限階連続的微分可能な実数値 L-周期関数の集合.

L^p_{loc} : $\mathbf{R}$ 上の局所 p 乗可積分な実数値可測関数の集合.

L^2_{per} : $\mathbf{R}$ 上の局所 2 乗可積分な実数値 L-周期的可測関数の集合. 内積とノルムはそれぞれ,

$$(u_1, u_2)_{L^2} = \int_0^L u_1(x) u_2(x)\, dx, \qquad \|u\|_{L^2} = \left(\int_0^L u(x)^2\, dx \right)^{1/2}.$$

L^∞ : $\mathbf{R}$ 上の本質的に有界な実数値可測関数の集合. ノルムは, $\|u\|_{L^\infty} = \operatorname{ess.sup} |u(x)|$.

H^m_{loc} : m 階までの導超関数が L^2_{loc} に属する $\mathbf{R}$ 上の実数値可測関数の集合.

H^m_{per} : $H^m_{\mathrm{loc}} \cap L^2_{\mathrm{per}}$ に属する $\mathbf{R}$ 上の実数値関数の集合. 内積とノルムはそれぞれ,

$$(u_1, u_2)_{H^m} = \sum_{j=0}^{m} (\partial_x^j u_1, \partial_x^j u_2)_{L^2}, \qquad \|u\|_{H^m} = \sqrt{(u, u)_{H^m}}.$$

ノルム $\|\cdot\|_X$ を備えたバナッハ空間 X, 正数 T に対して,

$C^m([0,T];X)$: 区間 $[0,T]$ 上の m 階連続的微分可能な X 値関数の集合.

$C^m([0,\infty);X)$: 区間 $[0,\infty)$ 上の m 階連続的微分可能な X 値関数の集合.

$L^2(0,T;X)$: 区間 $(0,T)$ 上の 2 乗可積分な X 値強可測関数の集合. ノルムは,

$$\|u\|_{L^2(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^2\, dt \right)^{1/2}.$$

$L^2(0,\infty;X)$: 区間 $[0,\infty)$ 上の 2 乗可積分な X 値強可測関数の集合. ノルムは,

$$\|u\|_{L^2(0,\infty;X)} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_X^2\, dt \right)^{1/2}.$$

$L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X)$: 区間 $[0,\infty)$ 上の局所 2 乗可積分な X 値強可測関数の集合, i.e. 任意の T に対して,

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^2\, dt < \infty$$

を満たす, 区間 $[0,\infty)$ 上の X 値強可測関数の集合.

$H^m(0,T;X)$: m 階までの導超関数が $L^2(0,T;X)$ に属する, 区間 $(0,T)$ 上の X 値強可測関数の集合. ノルムは,

$$\|u\|_{H^m(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \int_0^T \|\partial_t^j u(t)\|_X^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

$H^m_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X)$: m 階までの導超関数が $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X)$ に属する, 区間 $(0,\infty)$ 上の X 値強可測関数の集合.

線形空間 X, 線形作用素 A に対して,

$\dim X$: 空間 X の次元.

$\operatorname{codim} X$: 空間 X の余次元.

$D(A)$: 作用素 A の定義域.

$R(A)$: 作用素 A の値域, i.e. 要素 Au, $u \in D(A)$, の全体.

$\ker(A)$: 作用素 A の核空間, i.e. $Au = 0$ を満たす要素 $u \in D(A)$ の全体.

D^s_r : r に関する s 回 Fréchet 微分.

第2章　自己重力流体のモデル方程式

気体に代表される圧縮性流体の流れは流体密度の変化を伴う．その結果, 密度波や衝撃波などの興味深い現象が引き起こされる．宇宙空間における星間ガスの流れによる大規模な流体現象には, 流体の質量分布によって生じる, 流体の自己重力の効果が顕著に現れていると考えられている．圧縮性流体の流れを記述する基礎方程式系には, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式と圧縮性 Euler 方程式がある．両者には, 流体の粘性などによって生じる散逸の効果を顕わに表現して考慮に入れるか否かの違いがある．本章では, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いて気体の 1 次元的なバロトロピック流を記述し, これに流体の自己重力をモデル化して組み込み, 自己重力流体のモデル方程式を導く.

2.1　バロトロピック流体の方程式

本論文で取り扱う重力現象が本質的に関わりをもつのは宇宙空間に分布するガスである．宇宙空間においてガスは, ほとんど真空に近いものから恒星内部にみられる濃密なものまで, 非常に大きな密度の変化をもって分布している．このようなガスを圧縮性流体とみなして流体力学を適用するためには, 流体近似が成立すること, すなわち, ガスが力学的に変化するのに要する時間と比較して, ガスを構成する原子や分子の衝突時間が十分に短く, 熱力学的局所平衡が成立していることが必要である．宇宙空間で観測される多くの現象について流体近似の成立が認められており, 天文物理学の 1 分野である宇宙流体力学において流体力学的手法は, 運動学的手法とならぶ重要な研究方法となっている．詳細については, 文献 [31] 第 1 章を参照されたい．本章では, このような流体力学的観点に立って重力現象の数理モデルを組み立てる.

本論文では, 星間ガスを圧縮性流体とみて, 無限一様に分布する圧縮性流体に平面波的な擾乱が生じ, 1 次元的な流れが引き起こされている状況を想定する．流れの方向を x 軸にとり, 時刻 t, 位置 x における流体の密度を $\rho(t,x)$, 流速を $u(t,x)$, 圧力を $p(t,x)$ と記し, 流体力学の基礎方程式のひとつである圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いて流れを記述することにすると, 次の方程式系が導かれる:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \rho(\partial_t u + u\partial_x u) + \partial_x p - \mu \partial_x^2 u = \rho f. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

ここに, μ は粘性定数を表し, 本論文では正の定数と仮定する．f は流体の単位体積あたりに働く外力を表している．方程式 (2.1.1) の第 1 式, 第 2 式はそれぞれ, 流体の質量保存則, 運動量保存則を表している．一般の 3 次元的な流れに対する圧縮性 Navier-Stokes 方程式の導出については, 文献 [47] を参照されたい.

圧縮性の流れの扱いでは, 圧力 p は状態方程式を通じて他の熱力学的量と結びつけて考えられることが多い．とくに, 圧力が密度のみに依存して決まる流れはバロトロピック流と呼ばれる．代表的な

ものとしては, 圧力が密度のべき乗に比例する流れである:

$$p = p(\rho) = a\rho^{\gamma}. \tag{2.1.2}$$

天文物理学の分野ではこの関係式を, 一般に, ポリトロピック (polytropic) と呼んでいる. 熱力学における理想気体の等温関係, 等エントロピー関係に因み, $\gamma = 1$ の場合, 流れを等温流 (isothermal flow), $\gamma > 1$ の場合, 流れを等エントロピー流 (isentropic flow) と呼ぶこともあり, 本論文では後者の呼称にしたがうことにする. 指数 γ は元来, 理想気体の断熱定数に由来するものである. 理想気体の場合, γ の値は, 気体が単原子分子からなるときは $\gamma = \frac{5}{3}$, 2 原子分子からなるときは $\gamma = \frac{7}{5}$ である. 天文物理学では, 理想気体に限らず, 気体の様々な構成や状態を想定して γ をパラメータとして扱うことが多い. 本論文においても, γ は値を特定せずパラメータとみなすことにする.

2.2　流体の自己重力

流体に作用する場のひとつに重力がある. 重力には, 地球などの天体が重力源となるもののほかに, 流体が質量をもって分布することに起因するものがある. このような重力は流体の自己重力と呼ばれる. 本節では, 流体が密度の変化をもって空間に分布している場合に, 流体の自己重力に対するモデルをニュートンの重力則にしたがって導く. 計算の都合上, 本節では, 空間変数を表すために添字つきの変数 x_1, x_2, x_3 等を用いることにする.

流体が位置 (x_1, x_2, x_3) において密度 $\rho(x_1, x_2, x_3)$ で分布しているとする. dV を体積要素として, 位置 (y_1, y_2, y_3) にある質量 $\rho(y_1, y_2, y_3)\,dV$ が位置 (x_1, x_2, x_3) におかれた単位質量におよぼすニュートン重力は,

$$-G\,\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}\rho(y_1, y_2, y_3)\,dV$$

である. ここで, $\|\cdot\|$ は 3 次元ベクトルの長さ, $G > 0$ は重力定数である. したがって, 位置 (x_1, x_2, x_3) におかれた単位質量に流体の全体がおよぼす重力は,

$$\mathbf{F} = -G\iiint \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}\rho(y_1, y_2, y_3)\,dy_1dy_2dy_3$$

となる. これが流体の自己重力一般に対する表現である. しかしながら, 流体の重力現象といっても千差万別である. 研究対象となる現象を特定してモデル化し解析するためには, 流体の質量分布のしかたを考慮に入れ, 必要に応じて物理的考察なども交えながら, この表現から解析に役立つ自己重力のモデルを導かねばならない.

本論文で取り扱う流れのモデルでは, 流体の密度が x_1 軸の方向のみに変化する場合, すなわち, $\rho(y_1, y_2, y_3) = \rho(y_1)$ の場合に関心がある. この場合, 流体の自己重力は,

$$\mathbf{F} = -G\iiint \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}\rho(y_1)\,dy_1dy_2dy_3$$

となる. x_1 軸方向の力の成分 F_1 は以下のように表現しなおすことができる.

$$F_1 = -G\iiint \frac{x_1-y_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}\rho(y_1)\,dy_1dy_2dy_3$$

$$= -G\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy_2dy_3}{\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\}^{3/2}}\right)(x_1-y_1)\,\rho(y_1)\,dy_1$$

において, $x_2-y_2=r\cos\theta$, $x_3-y_3=r\sin\theta$, $r\geq 0$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ と置換すると,

$$\begin{aligned}
&= -G\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r}{\{(x_1-y_1)^2+r^2\}^{3/2}}\,d\theta\,dr\right)(x_1-y_1)\,\rho(y_1)\,dy_1\\
&= -2\pi G\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{r}{\{(x_1-y_1)^2+r^2\}^{3/2}}\,dr\right)(x_1-y_1)\,\rho(y_1)\,dy_1\\
&= -2\pi G\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1.
\end{aligned}$$

ここで, 注意すべきは, x_2 軸, x_3 軸方向両成分を表す積分は, $\rho=0$ でない限り, 絶対収束しないことである. しかしながら, x_1 軸に垂直な各平面上で密度が一定という仮定のもとで, 力 $\mathbf{F}$ が x_1 軸の方向を向き, x_2 軸, x_3 軸方向の成分は 0 になるということは物理的に妥当と考えられる.

以上により, 圧縮性流体の 1 次元的な流れに対して, 流体の自己重力のモデルとして

$$\mathbf{F}=\left(-2\pi G\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1,0,0\right) \tag{2.2.1}$$

が考えられる. この表現は, ρ が $\mathbf{R}$ 上可積分の場合には大きさが有限な力場を与え, 流体の分布が局所的で遠方で密度が速やかに減衰する場合には妥当なモデルと考えられる.

周期流の場合 本論文で想定する流れは, 無限一様に正の密度で分布する流体に擾乱が生じたものである. この場合, (2.2.1) に現れる積分に絶対収束性は期待できない. とくに, 本論文で取り扱う周期流の場合は, 密度の変化の周期性より, $\rho=0$ という自明な場合を除き, 積分は決して絶対収束しない. このような発散の問題は, 無限一様な気体の重力不安定に関わる天文物理学のモデルを考察する際, 必ずといっていいほど現れる. 文献 [27] には, このような場合, 重力場を記述する Poisson 方程式において一様な状態からの密度の変位のみが力場に寄与すると解釈せよ, との記述がある. ここで, ρ が周期関数の場合に限れば, 収束因子の導入により (2.2.1) の発散積分に意味を与えることができ, 天文物理学の解釈を支持する結果が導かれることを示しておきたい:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\operatorname{sgn}(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1. \tag{2.2.2}$$

$\rho\in L^1_{\mathrm{loc}}$, および, ρ の l-周期性を仮定すると,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\rho(y_1)\,dy_1 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{x_1+ml}^{x_1+(m+1)l}e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\rho(y_1)\,dy_1\\
&\leq \sum_{m<0}e^{\varepsilon(m+1)l}\int_{x_1+ml}^{x_1+(m+1)l}\rho(y_1)\,dy_1+\sum_{m\geq 0}e^{-\varepsilon ml}\int_{x_1+ml}^{x_1+(m+1)l}\rho(y_1)\,dy_1\\
&= \frac{2}{1-e^{-\varepsilon l}}\int_0^l\rho(y_1)\,dy_1<\infty
\end{aligned}$$

となり, (2.2.2) の右辺の積分は絶対可積分であることに注意する. この積分を表現しなおして, 有限な極限が存在することを示す.

まず, ρ が C^∞ 級であるとして, ρ を絶対収束する Fourier 級数で表す:

$$\rho(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}y}, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_0^l \rho(z) e^{-i\frac{2\pi n}{l}z}\,dz.$$

このとき, (2.2.2) の右辺の積分は絶対収束する級数で表せる:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\mathrm{sgn}\,(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\mathrm{sgn}\,(x_1-y_1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}y_1}\,dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{\varepsilon|s|}\mathrm{sgn}\,s\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}(x_1-s)}\,ds \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} -e^{\varepsilon|s|-i\frac{2\pi n}{l}s}\mathrm{sgn}\,s\,ds\,a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon - i\frac{2\pi n}{l}} + \frac{1}{-\varepsilon - i\frac{2\pi n}{l}}\right) a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1} \\
&= \sum_{n\neq 0}\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\varepsilon^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{l^2}} a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\varepsilon^2+\frac{4\pi^2n^2}{l^2}} = \frac{il}{\pi n} - \varepsilon^2\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\left\{\varepsilon^2+\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}$$

を用いると,

$$= \sum_{n\neq 0}\frac{il}{\pi n}a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1} - \varepsilon^2\sum_{n\neq 0}\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\left\{\varepsilon^2+\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1}$$

さらに, Fourier 係数 a_n の定めかたにより,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n\neq 0}\frac{i}{\pi n}\int_0^l \rho(z)e^{i\frac{2\pi n}{l}(x_1-z)}\,dz - \varepsilon^2\sum_{n\neq 0}\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\left\{\varepsilon^2+\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1} \\
&= \sum_{n\neq 0}\frac{i}{\pi n}\int_0^l \rho(z)\frac{d}{dz}\left\{-\frac{l}{2i\pi n}e^{i\frac{2\pi n}{l}(x_1-z)}\right\}dz - \varepsilon^2\sum_{n\neq 0}\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\left\{\varepsilon^2+\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1} \\
&= \int_0^l \frac{d\rho}{dz}(z)\sum_{n\neq 0}\frac{l}{2\pi^2 n^2}e^{i\frac{2\pi n}{l}(x_1-z)}\,dz - \varepsilon^2\sum_{n\neq 0}\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\left\{\varepsilon^2+\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1} \qquad (2.2.3)
\end{aligned}$$

を得る. ここで, l-周期関数 k_l を以下のように定める:

$$k_l(x) = -\frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2l}x^2 + \frac{1}{12}l, \quad 0 \le x \le l.$$

k_l の Fourier 係数は,

$$\frac{1}{l}\int_0^l k_l(x)e^{-i\frac{2\pi n}{l}x}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2l}x^2+\frac{1}{12}l\right)e^{-i\frac{2\pi n}{l}x}\,dx = \frac{l}{4\pi^2 n^2}$$

となるから, k_l は絶対収束する Fourier 級数

$$k_l(x) = \sum_{n\neq 0}\frac{l}{4\pi^2 n^2}e^{i\frac{2\pi n}{l}x}$$

で表せる. これより,

$$\int_0^l \frac{d\rho}{dz}(z)\sum_{n\neq 0}\frac{l}{2\pi^2 n^2}e^{i\frac{2\pi n}{l}(x_1-z)}\,dz = 2\int_0^l \frac{d\rho}{dz}(z)k_l(x_1-z)\,dz = 2\int_0^l \rho(z)\partial_{x_1}(k_l(x_1-z))\,dz$$

となる. これと (2.2.3) をあわせて,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\mathrm{sgn}\,(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1\\ &= 2\int_0^l \rho(z)\partial_{x_1}(k_l(x_1-z))\,dz - \varepsilon^2\sum_{n\neq 0}\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\left\{\varepsilon^2+\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1} \qquad (2.2.4)\end{aligned}$$

が得られた.

一般に, $\rho\in L^1_{\mathrm{loc}}$ の場合, ρ を滑らかな l-周期関数列で L^1_{loc} において近似すると, 対応する Fourier 係数は有界収束するから, この場合も (2.2.4) は正しい. ここで,

$$\sum_{n\neq 0}\left|\frac{i\frac{4\pi n}{l}}{\left\{\varepsilon^2+\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}a_n e^{i\frac{2\pi n}{l}x_1}\right| \le 2\sum_{n\neq 0}\left(\frac{l}{2\pi n}\right)^3|a_n| < \infty$$

に注意すると, $\varepsilon\to 0$ のとき, (2.2.4) の右辺第 2 項は 0 に収束して,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\mathrm{sgn}\,(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1 = 2\partial_{x_1}\int_0^l k_l(x_1-z)\rho(z)\,dz$$

となる.

以上のことから, 発散積分で表現される力場 F_1 のひとつの解釈として,

$$\begin{aligned}F_1 &= -2\pi G\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x_1-y_1|}\mathrm{sgn}\,(x_1-y_1)\rho(y_1)\,dy_1\\ &= -4\pi G\,\partial_{x_1}\int_0^l k_l(x_1-z)\rho(z)\,dz\\ &= -4\pi G\,\partial_{x_1}\int_0^l K_l(x_1,y_1)(\rho(y_1)-\bar{\rho})\,dy_1 \qquad (2.2.5)\end{aligned}$$

が得られた. ここで,

$$K_l(x,y) = k_l(x-y)$$

$$= \sum_{n \neq 0} \frac{l}{4\pi^2 n^2} e^{i\frac{2\pi n}{l}(x-y)} \tag{2.2.6}$$

$$= -\frac{1}{2}|x-y| + \frac{1}{2l}(x-y)^2 + \frac{1}{12}l, \quad 0 \leq x, y \leq l, \tag{2.2.7}$$

および,

$$\bar{\rho} = \frac{1}{l}\int_0^l \rho(x)\,dx$$

である. K_l は平均 0 の l 周期関数に作用する $-\partial_x^2$ のグリーン関数であり, F_1 は方程式

$$\partial_{x_1}^2 \phi = 4\pi G(\rho - \bar{\rho})$$

にしたがう周期 l のポテンシャル ϕ をもつ: $F_1 = -\partial_{x_1}\phi$. ポテンシャル ϕ の方程式は通常, 重力場の方程式として用いられている Poisson 方程式を変更して, 平均密度 $\bar{\rho}$ からの密度の変位のみが場に寄与するようにしたものとなっている. この意味で, 力場 F_1 の表現 (2.2.5) は天文物理学における前出の解釈に合致している.

2.3　ラグランジュ質量座標系への変換

2.1 節の流体方程式, 2.2 節の流体の自己重力の場はいずれも, オイラー座標系で記述されている. オイラー座標系では, 流体の密度や流速など, 時刻と位置によって変化する量が時間変数と空間に固定された座標系の空間座標の関数として与えられる. 流れ一般を扱う場合は通常, オイラー座標系で流れの方程式を記述するが, 1 次元流に限れば, オイラー座標系をラグランジュ質量座標系と呼ばれる座標系に変換し, オイラー座標系の方程式を書き換えたほうが方程式が簡略化されて扱いよい場合が多い. 本節では, [40] にしたがって, 方程式 (2.2.1) をオイラー座標系からラグランジュの質量座標系に変換する手順を示し, 変換後の方程式がオイラー座標系における方程式と同値であることを示す. さらに, 流体の自己重力のモデルをラグランジュ質量座標系で表現し, 本論文で解析する自己重力流体のモデル方程式を提示する.

2.3.1　ラグランジュ質量座標

時刻 $t = 0$ において, $\mathbf{R}$ の各点 x がパラメータ $h \in \mathbf{R}$ によって印付けされているものとする:

$$x = x_0(h), \quad t = 0.$$

方程式 (2.1.1) にしたがう速度場 $u(t,x)$ に沿って, $t = 0$ において位置 $x_0(h)$ にあった粒子が時刻 t のとき到達する位置を

$$x = x(t,h)$$

と表す. 粒子の運動を微分方程式を用いて表現すると,

$$\begin{cases} \partial_t x(t,h) = u(t, x(t,h)), \\ x(0,h) = x_0(h) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

となる．このような手続きで座標変換 $(t,h)\mapsto(t,x)=(t,x(t,h))$ が決まる．オイラー座標 (t,x) に対して, (t,h) をラグランジュ座標と呼ぶ．ラグランジュ座標系とは, 流体を粒子の集まりと考え, 時刻 $t=0$ において位置 $x_0(h)$ にあった粒子を追跡し, 時刻 t のときの移動先が分かれば流れの様子が把握できるという考え方に基づいて, 時刻毎に $\mathbf{R}$ の点に座標を付与するものである．とくに, 流体の密度 ρ を用いて

$$h=\int_0^{x_0(h)}\rho(0,y)\,dy$$

によって $x_0(h)$ が定められているとき, 得られる座標系をラグランジュ質量座標系という．質量座標の名は, $h>0$ の場合, 初期時刻における区間 $[0,x]$ 上の質量が h となるように $\mathbf{R}$ 上の点 x を印付けすることに由来する．

粒子の運動方程式 (2.3.1), および, 方程式 (2.1.1) の第 1 式を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{x(t,0)}^{x(t,h)}\rho(t,y)\,dy&=\rho(t,x(t,h))\partial_t x(t,h)-\rho(t,x(t,0))\partial_t x(t,0)+\int_{x(t,0)}^{x(t,h)}\partial_t\rho(t,y)\,dy\\&=\rho(t,x(t,h))u(t,x(t,h))-\rho(t,x(t,0))u(t,x(t,0))-\int_{x(t,0)}^{x(t,h)}\partial_x(\rho u)(t,y)\,dy\\&=0\end{aligned}$$

となり, 任意の (t,h) に対して,

$$\int_{x(t,0)}^{x(t,h)}\rho(t,y)\,dy=\int_0^{x_0(h)}\rho(0,y)\,dy=h \tag{2.3.2}$$

が成り立つことに注意する．ここで, 流体の密度がどの点においても有限な正値であること, すなわち, 流体中に真空の点や密度が発散する点が含まれないことをあらためて仮定し, (2.3.2) を h で偏微分すると,

$$\partial_h x(t,h)=\frac{1}{\rho(t,x(t,h))}>0 \tag{2.3.3}$$

が得られる．これは, 各時刻 t で $x=x(t,h)$ が h の狭義単調増加関数で, オイラー座標とラグランジュ質量座標が 1 対 1 に対応することを示している．

以上の設定のもと, オイラー座標で $g(t,x)$ と表現される関数のラグランジュ質量座標による表現を

$$\tilde{g}(t,h)=g(t,x(t,h))$$

と記す．(2.3.3) を h で積分すると,

$$x(t,h)=x(t,0)+\int_0^h\frac{dz}{\rho(t,x(t,z))}$$

となり, (2.3.1) を用いると,

$$\begin{aligned}&=\int_0^t u(s,x(s,0))\,ds+\int_0^h\frac{dz}{\rho(t,x(t,z))}\\&=\int_0^t\tilde{u}(s,0)\,ds+\int_0^h\frac{dz}{\tilde{\rho}(t,z)}\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

となって, 座標変換の関数はラグランジュ質量座標系の関数で表される．さらに, (2.3.1), (2.3.3) から偏導関数の変換則

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{g} = \partial_t g + u\partial_x g, \\ \partial_h \tilde{g} = (\partial_h x)(\partial_x g) = \dfrac{1}{\rho}\partial_x g, \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} \partial_t g = \partial_t \tilde{g} - \tilde{\rho}\tilde{u}\partial_h \tilde{g}, \\ \partial_x g = \tilde{\rho}\partial_h \tilde{g}, \end{cases} \tag{2.3.5}$$

が得られる．これらを用いると, 方程式 (2.1.1) において,

- $\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$ は, $\partial_t \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^2 \partial_h \tilde{u} = 0$ に,
- $\rho(\partial_t u + u\partial_x u) + \partial_x p - \mu\partial_x^2 u = \rho f$ は, $\partial_t \tilde{u} + \partial_h \tilde{p} - \mu\partial_h(\tilde{\rho}\partial_h \tilde{u}) = \tilde{f}$ に,

それぞれ変換される．ここで,

$$\tilde{f}(t,h) = f\left(t, \int_0^t \tilde{u}(s,0)\,ds + \int_0^h \frac{dz}{\tilde{\rho}(t,z)}\right)$$

である．比体積 $\tilde{v} = 1/\tilde{\rho}$ を用いると, ラグランジュ質量座標系で表現された方程式を得る:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{v} - \partial_h \tilde{u} = 0, \\ \partial_t \tilde{u} + \partial_h \tilde{p} - \mu\partial_h\left(\dfrac{\partial_h \tilde{u}}{\tilde{v}}\right) = f\left(t, \displaystyle\int_0^t \tilde{u}(s,0)\,ds + \int_0^h \tilde{v}(t,z)\,dz\right). \end{cases} \tag{2.3.6}$$

方程式 (2.3.6) に滑らかな解が存在するとして, (2.3.6) からオイラー座標系の方程式を再現するには, まず, 座標変換 $x = x(t,h)$ を (2.3.4), すなわち,

$$x = \int_0^t \tilde{u}(s,0)\,ds + \int_0^h \tilde{v}(t,z)\,dz$$

で定め, $\partial_h x(t,h) = \tilde{v}(t,h) > 0$ に注意して逆変換 $h = h(t,x)$ を定める．オイラー座標系による関数 $g(t,x)$ がラグランジュ質量座標系による関数 $\tilde{g}(t,h)$ を用いて

$$g(t,x) = \tilde{g}(t, h(t,x))$$

と表現されることに注意すれば, 偏導関数の変換則 (2.3.5) の成立が確かめられ, 方程式 (2.3.6) からオイラー座標系の方程式 (2.1.1) が導かれる．

周期流の場合　方程式 (2.1.1) において, ρ, u がともに変数 x に関して周期 l をもつとする．このとき, (2.1.1) の第 1 式により,

$$L = \int_0^l \rho(t,y)\,dy > 0$$

は t に依らない保存量となる．ρ の周期性より,

$$\int_{x(t,h)}^{x(t,h)+l} \rho(t,y)\,dy = L$$

である．これと (2.3.2) から,

$$\int_{x(t,0)}^{x(t,h)+l} \rho(t,y)\,dy = \int_{x(t,0)}^{x(t,h)} \rho(t,y)\,dy + L = h + L = \int_{x(t,0)}^{x(t,h+L)} \rho(t,y)\,dy$$

となり,

$$x(t,h+L) = x(t,h) + l$$

がしたがう．

オイラー座標系において周期 l をもつ関数 $g(x)$ にラグランジュ質量座標系の関数 $\tilde{g}(h) = g(x(t,h))$ を対応させると,

$$\tilde{g}(h+L) = g(x(t,h+L)) = g(x(t,h)+l) = g(x(t,h)) = \tilde{g}(h)$$

となり, $\tilde{g}$ は周期 L の周期関数となる．とくに, 方程式 (2.3.6) において比体積 $\tilde{v}$, および, 流速 $\tilde{u}$ は変数 h に関して L-周期的である．

2.3.2　流体の自己重力の表現

本論文で採用する流体の自己重力のモデル (2.2.5) をラグランジュ質量座標系で表現する．一般に, 次の補題が成り立つ．

補題 2.3.1 $\rho = \rho(x)$ は連続で l 周期的とし, $\rho > 0$ を仮定する．定数 x_0 に対して, 変数変換

$$h = \int_{x_0}^{x} \rho(y)\,dy, \tag{2.3.7}$$

により, ρ を変数 h の関数

$$v(h) = \frac{1}{\rho(x)}$$

に変換する．

$$L = \int_0^l \rho(y)\,dy, \quad \bar{v} = \frac{1}{L}\int_0^L v(h)\,dh$$

とおく．このとき,

(i) v は L 周期的であり, $\bar{v} = 1/\bar{\rho}$ が成り立つ．

(ii) 等式

$$\partial_x \int_0^l K_l(x,y)(\rho(y)-\bar{\rho})\,dy = -\frac{1}{\bar{v}}\partial_h \int_0^L K_L(h,z)(v(z)-\bar{v})\,dz$$

が成り立つ．

証明　(i) ρ の周期性より, 任意の x に対して,

$$L = \int_x^{x+l} \rho(y)\, dy$$

が成り立ち,

$$h + L = \int_{x_0}^{x+l} \rho(y)\, dy,$$

したがって,

$$v(h+L) = \frac{1}{\rho(x+l)} = \frac{1}{\rho(x)} = v(h)$$

である. 変数変換 (2.3.7) により, $h = 0$ は $x = x_0$ に, $h = L$ は $x = x_0 + l$ に対応するから,

$$\bar{v} = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+l} v(h)\rho(x)\, dx = \frac{l}{L} = \frac{1}{\bar{\rho}}.$$

(ii) $m(x) = \int_{x_0}^x \rho(y)\, dy$ とおく.

$$m(l) = \int_{x_0}^l \rho(y)\, dy = \int_0^l \rho(y)\, dy + \int_{x_0}^0 \rho(y)\, dy = L + m(0) \tag{2.3.8}$$

である. 積分核 $K_l(x,y)$ の表現 (2.2.7) を用いると,

$$\begin{aligned}
&\partial_x \int_0^l K_l(x,y)(\rho(y) - \bar{\rho})\, dy \\
&= \int_0^l \partial_x K_l(x,y)\rho(y)\, dy \\
&= \int_0^x \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{l}(x-y) \right\} \rho(y)\, dy + \int_x^l \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{l}(x-y) \right\} \rho(y)\, dy
\end{aligned}$$

となる. これを次の 3 項の和で表す:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) = -\frac{1}{2}\int_0^x \rho(y)\, dy + \frac{1}{2}\int_x^l \rho(y)\, dy = \frac{1}{2} l\bar{\rho} - \int_0^x \rho(y)\, dy, \\
&(\mathrm{II}) = \frac{x}{l}\int_0^l \rho(y)\, dy = \bar{\rho}x, \\
&(\mathrm{III}) = -\frac{1}{l}\int_0^l y\rho(y)\, dy.
\end{aligned}$$

まず,

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} l\bar{\rho} - (m(x) - m(0)) = \frac{1}{2} l\bar{\rho} - h + m(0)$$

である. 次に, $(m^{-1}(h))' = 1/m'\left(m^{-1}(h)\right) = v(h)$ を用いると,

$$(\mathrm{II}) = \bar{\rho} m^{-1}(h) = \bar{\rho} \int_{m(0)}^h v(z)\, dz.$$

変数変換 $y = m^{-1}(z)$ にひきつづき部分積分を行うと, (2.3.8) より,

$$(\mathrm{III}) = -\frac{1}{l}\int_{m(0)}^{m(l)} m^{-1}(z)\, dz$$

$$= -\frac{1}{l}\left\{\left[zm^{-1}(z)\right]_{z=m(0)}^{z=m(l)} - \int_{m(0)}^{m(l)} zv(z)\,dz\right\}$$
$$= -(L+m(0)) + \frac{1}{l}\left(-\int_0^{m(0)} zv(z)\,dz + \int_L^{L+m(0)} zv(z)\,dz + \int_0^L zv(z)\,dz\right)$$

となる．ここで, v の L-周期性を用いると,

$$= -(L+m(0)) + \frac{L}{l}\int_0^{m(0)} v(z)\,dz + \frac{1}{l}\int_0^L zv(z)\,dz$$

がしたがう．以上, (I), (II), (III) をあわせて,

$$\partial_x \int_0^l K_l(x,y)(\rho(y)-\bar{\rho})\,dy = \frac{1}{2}l\bar{\rho} - h - L + \bar{\rho}\int_{m(0)}^h v(z)\,dz + \frac{L}{l}\int_0^{m(0)} v(z)\,dz + \frac{1}{l}\int_0^L zv(z)\,dz$$

を得る．$\bar{\rho} = 1/\bar{v}$, $l = L\bar{v}$ に注意すると,

$$= -\frac{L}{2} - h + \frac{1}{\bar{v}}\int_0^h v(z)\,dz + \frac{1}{L\bar{v}}\int_0^L zv(z)\,dz$$
$$= -\frac{1}{\bar{v}}\left(\frac{1}{2}L\bar{v} - \int_0^h v(z)\,dz + \bar{v}h - \frac{1}{L}\int_0^L zv(z)\,dz\right)$$

となり, (I), (II), (III) と比較すると, これは

$$-\frac{1}{\bar{v}}\partial_h \int_0^L K_L(h,z)(v(z)-\bar{v})\,dz$$

に等しい．□

オイラー座標とラグランジュ質量座標を結ぶ関係 (2.3.2) に注意して, $x_0 = x(t,0)$ ととって (2.2.5) に**補題2.3.1** を適用すれば, 流体の自己重力がラグランジュ質量座標系において表現される．

2.3.3 モデル方程式

流体の様々な重力現象のうち, 本論文で関心があるのは, 一様に分布する流体が流体の自己重力によって質量をもった塊の集まりへと分裂する過程である．このような過程を取り扱ううえでもっとも簡素と考えられるモデルは, 流れが空間的に周期性をもつ周期流のモデルである．そこで, 方程式 (2.1.1) の圧力項として (2.1.2) を採用し, 密度 ρ, 流速 u が空間変数に関して周期 l をもつものとして, 外力項に周期 l の周期流に対する自己重力のモデル (2.2.5) を採用したモデル方程式を考えることにする．このようにして得られる自己重力流体の等温流または等エントロピー流の方程式は, オイラー座標系の方程式として次にように表現される:

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \rho(\partial_t + u\partial_x)u + \partial_x(a\rho^\gamma) - \mu\partial_x^2 u = 4\pi G\rho\,\partial_x \int_0^l K_l(\,\cdot\,,y)(\rho(t,y)-\bar{\rho})\,dy. \end{cases}$$

本論文では, 方程式の扱いやすさという観点から, $\rho > 0$ の仮定のもと, オイラー座標系のモデル方程式をラグランジュ質量座標系に変換して取り扱う. 座標変換後, 時空の変数を表す (t, h) の代わり (t, x) を, 未知の比体積と流速を表す $(\tilde{v}, \tilde{u})$ の代わりに (v, u) をあらためて用いることにすれば, ラグランジュ質量座標系で表現された自己重力流体の等温流または等エントロピー流の方程式は次のようになる:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x (a v^{-\gamma}) - \mu \partial_x \left(\dfrac{\partial_x u}{v} \right) = -\dfrac{4\pi G}{\bar{v}} \partial_x \displaystyle\int_0^L K_L(\,\cdot\,, y)(v(t,y) - \bar{v})\, dy. \end{cases}$$

ここに,

$$L = \int_0^l \rho(t,x)\, dx, \quad \bar{v} = \frac{1}{L} \int_0^L v(t,x)\, dx$$

であり, 比体積 v, 流速 u は空間変数に関して L-周期的である. 本論文は, 以降, これを自己重力流体のモデル方程式として採用し, L-周期条件のもとで取り扱う.

第 3 章　解の存在と一意性

本章では, 一般の外力項をもつ等温流または等エントロピー流の方程式に対して, 初期値問題の解を構成し方程式が時間大域的に一意可解であることを示す．つづいて, 解の構成法を自己重力流体方程式の適用する手順を示し, 時間大域解の存在と一意性に関する結果を述べる.

3.1　一般の外力項の場合

等温流または等エントロピー流の方程式は, ラグランジュ質量座標系で次のように表現される:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x (p(v)) - \mu \partial_x \left(\dfrac{\partial_x u}{v} \right) = F. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ここで, $v > 0$ は比体積, u は流速を表している．これらは時間変数 t, 空間変数 $x \in \mathbf{R}$ の未知関数である．$p(v) = av^{-\gamma}(a > 0,\, \gamma \geq 1$ は定数) は圧力, $F = F(t,x)$ は外力を表している．方程式 (3.1.1) に対して, 周期 L の周期条件

$$u(t, x+L) = u(t,x), \quad v(t, x+L) = v(t,x)$$

のもと, $t = 0$ において初期条件

$$v(0,x) = v_0(x) \quad u(0,x) = u_0(x)$$

を与えて, $t > 0$ において解を求める初期値問題を考える．本節では, 外力項 F に適切な条件を課して, 初期値問題が一意に時間大域解をもつことを示す.

解の構成の概要　はじめに, 初期値問題の解を構成する方法について説明する．方程式 (3.1.1) の第 1 式を用いると v が u で表せることに着目する:

$$v(t,x) = v_0(x) + \int_0^t \partial_x u(s,x)\, ds.$$

これを方程式 (3.1.1) の第 2 式に代入すれば, u に関する関数方程式が導かれる．この関数方程式の初期値問題を, 線形方程式の解を用いて求める方法として以下の手順が考えられる.

STEP 1: 与えられた $\tilde{u} = \tilde{u}(t,x)$ に対して,

$$\tilde{v} = \tilde{v}(t,x) = v_0(x) + \int_0^t \partial_x \tilde{u}(s,x)\, ds$$

を対応させる.
STEP 2: 初期条件 $u(0,x)=u_0(x)$ を与えて, 周期条件のもと, 線形方程式

$$\partial_t u - \mu\partial_x\left(\frac{\partial_x u}{\tilde{v}}\right) = F - \partial_x(p(\tilde{v}))$$

の初期値問題を解く.
STEP 3: 関数 $\tilde{u}$ に **STEP 2** の解 u を対応させる写像 Ψ: $\tilde{u}\mapsto u$ の不動点 $u=\Psi(u)$ が関数方程式の初期値問題の解となり, 方程式 (3.1.1) の初期値問題の解を与える.

ところが, このような手順で関数方程式に線形方程式を対応させると, 線形方程式の主要項 $u\mapsto -\mu\partial_x\left(\frac{\partial_x u}{\tilde{v}}\right)$ の係数が時間変数に依存する非斉次方程式となる. この種の方程式は, 非斉次放物型方程式の枠組みで八木 [49] に詳しく解説されているが, 一般に扱いが難しい. そこで, 関数方程式に対応させる線形方程式として, **STEP 2** の方程式に替えて,

$$\partial_t u - \mu\partial_x\left(\frac{\partial_x u}{v_0}\right) = F + \mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}} - \frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}\right\} - \partial_x(p(\tilde{v}))$$

を採用することにする. これは時間変数に依存しない作用素係数をもつ線形方程式の形をしている:

$$\partial_t u + Au = f. \tag{3.1.2}$$

ここに, A は 2 階の線形微分作用素

$$u \longmapsto Au = -\mu\partial_x\left(\frac{\partial_x u}{v_0}\right)$$

であり,

$$f = F + \mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}} - \frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}\right\} - \partial_x(p(\tilde{v})) \tag{3.1.3}$$

である. 方程式 (3.1.2) の初期値問題を解き, 関数 $\tilde{u}$ にその解 u を対応させる写像をあらためて Ψ と定めなおすと, その不動点 $u=\Psi(u)$ もまた, 関数方程式の初期値問題の解を与えることになる.

抽象的設定　本論文では, 外力項 F の時空変数に関する 2 乗可積分性, および空間平均に関する仮定

$$\int_0^L F(t,x)\,dx = 0$$

のもと, 方程式 (3.1.2) を平均 0 の局所 2 乗可積分実数値 L-周期関数の全体からなる実ヒルベルト空間

$$H = \dot{L}^2_{\mathrm{per}} = \left\{u\in L^2_{\mathrm{loc}};\ u(x+L)=u(x),\ \int_0^L u(x)\,dx = 0\right\}$$

における方程式とみなす. H には内積

$$(u_1,u_2)_H = \int_0^L u_1(x)u_2(x)\,dx$$

を入れる. 関数 v_0 について,

$$v_0\in H^1_{\mathrm{per}} = \left\{v\in H^1_{\mathrm{loc}};\ v(x+L)=v(x)\right\},\quad v_0(x)>0$$

を仮定すると, 作用素 A は H に稠密に埋め込まれたヒルベルト空間

$$V = \dot{H}^1_{\mathrm{per}} = \left\{ u \in H^1_{\mathrm{loc}};\, u(x+L) = u(x),\, \int_0^L u(x)\,dx = 0 \right\},$$

および, V の内積

$$(u_1, u_2)_V = \mu \int_0^l \frac{\partial_x u_1(x) \partial_x u_2(x)}{v_0(x)}\,dx$$

を用いて, 次のように空間 H 上の作用素として実現される.

- 作用素 A の定義域は,

  $D(A) = \{u_1 \in V; f \in H$ が存在して, 任意の $u_2 \in V$ に対して $(u_1, u_2)_V = (f, u_2)_H$ が成り立つ.$\}$

- $u_1 \in D(A)$ に対して, 等式

  $$(u_1, u_2)_V = (f, u_2)_H$$

  を任意の $u_2 \in V$ に対して成立させる $f \in H$ は, H における V の稠密性より, ただひとつに定まる. この対応で, A は $u_1 \in D(A)$ を $f \in H$ に写す.

作用素 A の定義域 $D(A)$ が関数空間

$$\dot{H}^2_{\mathrm{per}} = \left\{ u \in H^2_{\mathrm{loc}};\, u(x+L) = u(x),\, \int_0^L u(x)\,dx = 0 \right\}$$

となり, A が微分作用素 $-\mu\partial_x \left(\partial_x u / v_0\right)$ を H 上の作用素として実現することを確かめておく.

検証　$u_1 \in D(A)$ に対して $u_1 \in H^2_{\mathrm{loc}}$ を示す. $Au_1 = f$ おくと, 任意の $u_2 \in V$ に対して

$$\mu \int_0^L \frac{\partial_x u_1(x) \partial_x u_2(x)}{v_0(x)}\,dx = \int_0^L f(x) u_2(x)\,dx$$

が成り立つ. テスト関数 $\phi \in C^\infty_{\mathrm{per}}$ をとり, ϕ からその平均 $\bar{\phi} = \frac{1}{L}\int_0^L \phi(x)\,dx$ を引くと V の元となる. $u_2 = \phi - \bar{\phi}$ ととれば, f の平均が 0 であるから, 超関数の等式

$$\left\langle \mu \frac{\partial_x u_1}{v_0},\, \partial_x \phi \right\rangle = \langle f, \phi \rangle,$$

すなわち,

$$\left\langle -\mu\partial_x \left(\frac{\partial_x u_1}{v_0} \right),\, \phi \right\rangle = \langle f, \phi \rangle$$

が成り立つ. したがって,

$$-\mu\partial_x \left(\frac{\partial_x u_1}{v_0} \right) = f \in L^2_{\mathrm{loc}}$$

であり, $\partial_x u_1 / v_0 \in H^1_{\mathrm{loc}}$ となる. 関数積の滑らかさに関してよく知られている事実から, $\partial_x u_1 = \partial_x u_1 / v_0 \times v_0 \in H^1_{\mathrm{loc}}$ となり, $u_1 \in H^2_{\mathrm{loc}}$ がしたがう.

次に, $u_1 \in \dot{H}^2_{\mathrm{per}}$ に対して $u_1 \in D(A)$ を示す. $v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}$, $v_0 > 0$ より $1/v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}$ に注意すると,

$$\frac{\partial_x u_1}{v_0} \in H^1_{\mathrm{per}}, \quad \partial_x \left(\frac{\partial_x u_1}{v_0} \right) \in \dot{L}^2_{\mathrm{per}}$$

であって, 等式

$$\mu \int_0^L \frac{\partial_x u_1(x) \partial_x u_2(x)}{v_0}\, dx = - \int_0^L \mu \partial_x \left(\frac{\partial_x u_1}{v_0} \right) u_2(x)\, dx$$

がすべての $u_2 \in \dot{H}^1_{\mathrm{per}}$ に対して成り立つ. したがって, $u_1 \in D(A)$ である. □

線形問題の一意可解性　線形方程式 (3.1.2) の初期値問題について確立されているひとつの抽象的な取り扱いを述べる. 詳細は, [33], [39] 等を参照されたい. H を実ヒルベルト空間, V を H に稠密に埋め込まれた実ヒルベルト空間とする. ある $f \in H$ について, 等式

$$(u_1, u_2)_V = (f, u_2)_H$$

をすべての $u_2 \in V$ に対して成り立たせるような $u_1 \in V$ の全体を定義域 $D(A)$ として, H における作用素 A を

$$Au_1 = f$$

で定める. A は H 上の正値自己共役作用素である. V が H にコンパクトに埋め込まれている場合, 作用素 A はコンパクトな逆作用素 A^{-1} をもつ. したがって, A の固有値は離散的であり, 各固有値に対する固有空間は有限次元空間であって, 固有値全体を重複度を込めて小さいものから順に,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

と並べることができる. このとき, 固有値 λ_k に対する A の固有ベクトル φ_k を $\{\varphi_k; k = 1, 2, \ldots, \}$ が H の完全正規直交系を成すように選ぶことができる.

以上の設定のもとで, H における線形方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

に対して次の (i), (ii), (iii) を示すことができる.

(i) $f = 0$ の場合, 任意の $u_0 \in H$ に対して, 初期値問題 (3.1.4) は級数解

$$u^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, \varphi_k)_H e^{-\lambda_k t} \varphi_k$$

をもつ, この級数は H において $t \geq 0$ で一様収束し, $D(A)$ において $t > 0$ で広義一様収束する. $u_0 \in V$ ならばこの級数は V においても $t \geq 0$ で一様収束し, $L^2(0, \infty; D(A))$ においても収束する. この場合, 解は評価

$$\|Au^{(1)}\|_{L^2(0,\infty;H)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0\|_V$$

を満たす.

(ii) $u_0 = 0$ の場合, 任意の $T > 0$, $f \in L^2(0,T;H)$ に対して, 初期値問題 (3.1.4) は級数解

$$u^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} (f(\tau), \varphi_k)_H \, d\tau \right) \varphi_k$$

をもつ. この級数は V において $t \in [0,T]$ に関して一様に収束, $L^2(0,T;D(A))$ において収束し, 和は $H^1(0,T;H) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap C^0([0,T];V)$ に属している. 解は評価

$$\|Au^{(2)}\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|f\|_{L^2(0,T;H)}$$

を満たす.

(iii) 任意の $u_0 \in V$, $T > 0$, $f \in L^2(0,T;H)$ に対して, (i), (ii) で得られる解 $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ を重ね合わせることにより, 初期値問題 (3.1.4) は解

$$u \in H^1(0,T;H) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap C^0([0,T];V) \tag{3.1.5}$$

をもつ. 解は評価

$$\|Au\|_{L^2(0,T;H)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0\|_V + \|f\|_{L^2(0,T;H)}$$

を満たす. (3.1.5) を満たす初期値問題 (3.1.4) の解は一意である.

3.1.1 局所解の構成

方程式 (3.1.1) において, 外力項 F は区間 $[0,T_0]$ 上で定められた $H(=\dot{L}^2_{\mathrm{per}})$ の値をとる関数で, 空間 $L^2(0,T_0;H)$ に属するものとする. 本小節では, $v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}$, $v_0 > 0$, $u_0 \in V = \dot{H}^1_{\mathrm{per}}$ を満たす初期値に対して, 概要で示した方針にしたがって, 方程式 (3.1.1) の時間局所解の存在を示す.

$0 < T \leq T_0$ とし, $\tilde{u} \in L^2(0,T;D(A))$ に対して,

$$\tilde{v} = v_0 + \int_0^t \partial_x \tilde{u} \, ds$$

と定める. $\tilde{v}(t,\cdot) > 0$, $0 \leq t \leq T$, ならば区間 $[0,T]$ 上で H 値関数

$$\partial_x(p(\tilde{v})) = \partial_x(a\tilde{v}^{-\gamma}), \quad \partial_x \left\{ \left(\frac{1}{\tilde{v}} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x \tilde{u} \right\}$$

を定めることができる. このための $\tilde{u}$ に関する条件を探すために,

$$\frac{\tilde{v}(t,x)}{v_0(x)} = 1 + \int_0^t \frac{\partial_x \tilde{u}(s,x)}{v_0(x)} \, ds$$

と表す. 空間変数に関する $\tilde{u}$ の周期性より, s 毎にある $x_0 \in [0,L)$ があって $\partial_x \tilde{u}(s,x_0) = 0$ となり,

$$\frac{\partial_x \tilde{u}(s,x)}{v_0(x)} = \frac{\partial_x \tilde{u}(s,x)}{v_0(x)} - \frac{\partial_x \tilde{u}(s,x_0)}{v_0(x_0)} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial_x \tilde{u}(s,y)}{v_0(y)} \right) dy$$

であるから,

$$\left\| \frac{\partial_x \tilde{u}(s,\cdot)}{v_0(\cdot)} \right\|_{L^\infty} \leq \int_0^L \left| \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial_x \tilde{u}(s,y)}{v_0(y)} \right) \right| dy \leq L^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}(s,\cdot)}{v_0(\cdot)} \right) \right\|_{L^2}$$

が成り立つ．この評価を用いると,

$$
\begin{aligned}
\min_x \frac{\tilde{v}(t,x)}{v_0(x)} &\geq 1 - \int_0^t \left\| \frac{\partial_x \tilde{u}(s,\cdot)}{v_0(\cdot)} \right\|_{L^\infty} ds \\
&\geq 1 - L^{1/2} \int_0^t \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}(s,\cdot)}{v_0(\cdot)} \right) \right\|_{L^2} ds \\
&\geq 1 - (LT)^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&= 1 - \mu^{-1} (LT)^{1/2} \left\| A\tilde{u} \right\|_{L^2(0,T;H)}
\end{aligned}
$$

となる．このことから, $\tilde{u}$ の大きさに関して

$$
\mu^{-1}(LT)^{1/2} \|A\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H)} < 1
$$

を仮定して話を進めることにする．

以下, (3.1.3) 式において, 項 $\mu\partial_x \{(1/\tilde{v} - 1/v_0)\, \partial_x \tilde{u}\}$, $\partial_x(p(\tilde{v}))$, それぞれの $L^2(0,T;H)$ におけるノルムを $\|A\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H)}$ と T を用いて評価する．

$$
M = 1 - \mu^{-1}(LT)^{1/2} \|A\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H)} > 0
$$

とおく．

$\mu\partial_x \{(1/\tilde{v} - 1/v_0)\, \partial_x \tilde{u}\}$ に関して： はじめに,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \mu \partial_x \left\{ \left(\frac{1}{\tilde{v}} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x \tilde{u} \right\} \right\|_{L^2} \\
&= \mu \left\| \partial_x \left\{ \left(\frac{v_0}{\tilde{v}} - 1 \right) \frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} \\
&= \mu \left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}} - 1 \right) \frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} + \left(\frac{v_0}{\tilde{v}} - 1 \right) \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \mu \left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}} - 1 \right) \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right\|_{L^\infty} + \mu \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}} - 1 \right\|_{L^\infty} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right) \right\|_{L^2}
\end{aligned}
\tag{3.1.6}
$$

と評価する．各ノルムの評価は以下のとおりである．まず,

$$
\begin{aligned}
\left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}} - 1 \right) \right\|_{L^2} &= \left\| \left(\frac{\tilde{v}}{v_0} \right)^{-2} \partial_x \left(\frac{\tilde{v}}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \left(\frac{\tilde{v}}{v_0} \right)^{-2} \int_0^t \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right) ds \right\|_{L^2} \\
&\leq \left(\min_x \frac{\tilde{v}(t,x)}{v_0(x)} \right)^{-2} \int_0^t \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right) \right\|_{L^2} ds \\
&\leq M^{-2} T^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} .
\end{aligned}
\tag{3.1.7}
$$

また,

$$
\left\| \frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right\|_{L^\infty} \leq L^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}}{v_0} \right) \right\|_{L^2}
\tag{3.1.8}
$$

であり, これを用いると,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{v_0}{\tilde{v}}-1\right\|_{L^\infty} &= \left\|\frac{v_0}{\tilde{v}}\left(1-\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)\right\|_{L^\infty} \\
&= \left\|-\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-1}\int_0^t \frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\,ds\right\|_{L^\infty} \\
&\le \left(\min_x \frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-1}\int_0^t \left\|\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right\|_{L^\infty} ds \\
&\le M^{-1}L^{1/2}\int_0^t \left\|\partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right)\right\|_{L^2} ds \\
&\le M^{-1}(LT)^{1/2}\left\|\partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.1.9}
$$

以上, (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) をあわせて

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}}-\frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}\right\}\right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\le \mu M^{-2}(LT)^{1/2}\left\|\partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right)\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \mu M^{-1}(LT)^{1/2}\left\|\partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right)\right\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \\
&= \mu^{-1}(M^{-2}+M^{-1})(LT)^{1/2}\|A\tilde{u}\|^2_{L^2(0,T;H)}
\end{aligned}
$$

が得られる.

$\partial_x(p(\tilde{v}))$ に関して:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x(p(\tilde{v}))\|_{L^2} &= \left\|a\partial_x\left\{v_0^{-\gamma}\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\}\right\|_{L^2} \\
&= \left\|a\partial_x\left(v_0^{-\gamma}\right)\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-\gamma} - a\gamma v_0^{-\gamma}\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-\gamma-1}\partial_x\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)\right\|_{L^2} \\
&\le a\left\|\partial_x\left(v_0^{-\gamma}\right)\right\|_{L^2}\left\|\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\|_{L^\infty} \\
&\quad + a\gamma\left\|v_0^{-\gamma}\right\|_{L^\infty}\left\|\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-\gamma-1}\right\|_{L^\infty}\left\|\partial_x\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)\right\|_{L^2}
\end{aligned}
\tag{3.1.10}
$$

と評価して, 各ノルムをさらに評価する.

$$
\left\|\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\|_{L^\infty} \le M^{-\gamma}, \quad \left\|\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^{-\gamma-1}\right\|_{L^\infty} \le M^{-\gamma-1},
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)\right\|_{L^2} &= \left\|\int_0^t \partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right)ds\right\|_{L^2} \\
&\le \int_0^t \left\|\partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right)\right\|_{L^2} ds \\
&\le T^{1/2}\left\|\partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde{u}}{v_0}\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2)}.
\end{aligned}
$$

よって, (3.1.10) より,

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x(p(\tilde v))\|_{L^2(0,T;L^2)}\\
&\le a\left(\left\|\partial_x\left(v_0^{-\gamma}\right)\right\|_{L^2} M^{-\gamma}T^{1/2}+\gamma\|v_0^{-\gamma}\|_{L^\infty}M^{-\gamma-1}T\left\|\partial_x\left(\frac{\partial_x\tilde u}{v_0}\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2)}\right)\\
&= aT^{1/2}\left(\left\|\partial_x\left(v_0^{-\gamma}\right)\right\|_{L^2} M^{-\gamma}+\mu^{-1}\gamma\|v_0^{-\gamma}\|_{L^\infty}M^{-\gamma-1}T^{1/2}\|A\tilde u\|_{L^2(0,T;H)}\right).
\end{aligned}
$$

以上の評価を用いて, 空間 $L^2(0,T;H)$ における (3.1.3) のノルムを評価し, 線形方程式の初期値問題の解の評価を u に適用して, ノルム $\|Au\|_{L^2(0,T;H)}$ を評価すると,

$$
\begin{aligned}
\|Au\|_{L^2(0,T;H)} &\le \frac{1}{\sqrt 2}\|u_0\|_V+\|f\|_{L^2(0,T;H)}\\
&\le \frac{1}{\sqrt 2}\left(\mu\int_0^L\frac{(\partial_x u_0)^2}{v_0}\,dx\right)^{1/2}+\|F\|_{L^2(0,T;L^2)}\\
&\quad +\mu^{-1}(M^{-2}+M^{-1})(LT)^{1/2}\|A\tilde u\|^2_{L^2(0,T;H)}\\
&\quad +aT^{1/2}\left(\left\|\partial_x\left(v_0^{-\gamma}\right)\right\|_{L^2} M^{-\gamma}+\mu^{-1}\gamma\|v_0^{-\gamma}\|_{L^\infty_x}M^{-\gamma-1}T^{1/2}\|A\tilde u\|_{L^2(0,T;H)}\right)
\end{aligned}
$$

が得られる.

$$
N_0=\frac{1}{\sqrt 2}\left(\mu\int_0^L\frac{(\partial_x u_0)^2}{v_0}\,dx\right)^{1/2}+\|F\|_{L^2(0,T_0;L^2)}+1
$$

とおく. $\|A\tilde u\|_{L^2(0,T;H)}\le N_0$ のとき,

$$
M\ge 1-\mu^{-1}(LT)^{1/2}N_0
$$

に注意して, $\mu^{-1}(LT)^{1/2}N_0\le 1/2$ を満たすように $T\in(0,T_0]$ を選ぶと, $M\ge 1/2$ であって

$$
\begin{aligned}
\|Au\|_{L^2(0,T;H)} &\le \frac{1}{\sqrt 2}\left(\mu\int_0^L\frac{(\partial_x u_0)^2}{v_0}\,dx\right)^{1/2}+\|F\|_{L^2(0,T;L^2)}\\
&\quad +6\mu^{-1}(LT)^{1/2}N_0^2+a2^\gamma T^{1/2}\left(\left\|\partial_x(v_0^{-\gamma})\right\|_{L^2}+2\mu^{-1}\gamma\|v_0^{-\gamma}\|_{L^\infty}T^{1/2}N_0\right)
\end{aligned}
$$

となる. 必要ならば T を小さく取り直して

$$
6\mu^{-1}(LT)^{1/2}N_0^2+a2^\gamma T^{1/2}\left(\left\|\partial_x(v_0^{-\gamma})\right\|_{L^2}+2\mu^{-1}\gamma\|v_0^{-\gamma}\|_{L^\infty}T^{1/2}N_0\right)\le 1
$$

が成り立つようにできる. このとき, $\|A\tilde u\|_{L^2(0,T;H)}\le N_0$ から $\|Au\|_{L^2(0,T;H)}\le N_0$ がしたがい, 集合

$$
X_T=\left\{\tilde u\in L^2(0,T;D(A));\ \|A\tilde u\|_{L^2(0,T;H)}\le N_0\right\}
$$

は写像 $\Psi_T:\tilde u\mapsto u$ の不変集合, つまり,

$$
\Psi_T(X_T)\subset X_T
$$

となる. 以上の要件を満たす T はノルム $\|\partial_x(v_0^{-\gamma})\|_{L^2}$, $\|v_0^{-\gamma}\|_{L^\infty}$, $\left\|\partial_x u_0/\sqrt{v_0}\right\|_{L^2}$, および, $\|F\|_{L^2(0,T_0;L^2)}$ の大きさだけに依存して選べることに注意する.

本論文では, 縮小写像の原理を用いて不変集合 X_T の中で Ψ_T の不動点を探すことにする. 空間 $L^2(0,T;D(A))$ は $\|Au\|_{L^2(0,T;H)}$ をノルムとしてヒルベルト空間をなす. したがって, 集合 X_T に次のように距離 d を導入して, 完備な距離空間とすることができる:

$$d(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)=\|A(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)\|_{L^2(0,T;H)}, \quad \tilde{u}_1,\tilde{u}_2\in X_T.$$

必要ならば時間幅 T を小さくとり直すことにより, Ψ_T が距離 d について縮小写像となること, すなわち, 定数 $\sigma\in(0,1)$ が存在して, $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\in X_T$ に対して

$$d(\Psi_T(\tilde{u}_1),\Psi_T(\tilde{u}_2))\le\sigma d(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$$

が成り立つことを示す.

$$\Psi_T(\tilde{u}_1)=u_1, \quad \Psi_T(\tilde{u}_2)=u_2$$

とおく. (3.1.3) より, u_1, u_2 はそれぞれ,

$$\partial_t u_1-\mu\partial_x\left(\frac{\partial_x u_1}{v_0}\right)=F+\mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}_1}-\frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}_1\right\}-\partial_x\left(p(\tilde{v}_1)\right), \tag{3.1.11}$$

$$\partial_t u_2-\mu\partial_x\left(\frac{\partial_x u_2}{v_0}\right)=F+\mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}_2}-\frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}_2\right\}-\partial_x\left(p(\tilde{v}_2)\right) \tag{3.1.12}$$

を満たす. ここで,

$$\tilde{v}_1=v_0+\int_0^t\partial_x\tilde{u}_1\,ds, \quad \tilde{v}_2=v_0+\int_0^t\partial_x\tilde{u}_2\,ds$$

である. (3.1.11), (3.1.12) より, u_1-u_2 は線形方程式

$$\partial_t(u_1-u_2)-\mu\partial_x\left\{\frac{\partial_x(u_1-u_2)}{v_0}\right\}=g$$

を満たす. ここで,

$$g=\mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}_1}-\frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}_1-\left(\frac{1}{\tilde{v}_2}-\frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}_2\right\}-\partial_x(p(\tilde{v}_1)-p(\tilde{v}_2))$$

とおいた. これと

$$u_1(0)-u_2(0)=u_0-u_0=0$$

とをあわせて線形方程式の初期値問題の解にたいする評価を u_1-u_2 に適用すると,

$$d(u_1,u_2)=\|A(u_1-u_2)\|_{L^2(0,T;H)}\le\|g\|_{L^2(0,T;H)}.$$

を得る. 以下, 空間 $L^2(0,T;H)$ における g のノルムを評価する.

$\mu\partial_x\left\{\left(1/\tilde{v}_1-1/v_0\right)\partial_x\tilde{u}_1-\left(1/\tilde{v}_2-1/v_0\right)\partial_x\tilde{u}_2\right\}$ に関して:

$$\begin{aligned}&\left\|\mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}_1}-\frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}_1-\left(\frac{1}{\tilde{v}_2}-\frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}_2\right\}\right\|_{L^2}\\&=\mu\left\|\partial_x\left\{\left(\frac{v_0}{\tilde{v}_1}-1\right)\frac{\partial_x\left(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2\right)}{v_0}-\left(\frac{1}{\tilde{v}_2}-\frac{1}{\tilde{v}_1}\right)\partial_x\tilde{u}_2\right\}\right\|_{L^2}\end{aligned}$$

を次の 2 項の和で評価する:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \mu \left\| \partial_x \left\{ \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_1} - 1 \right) \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2}, \\
(\mathrm{II}) &= \mu \left\| \partial_x \left\{ \left(\frac{1}{\tilde{v}_2} - \frac{1}{\tilde{v}_1} \right) \partial_x \tilde{u}_2 \right\} \right\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

$M_1 = 1 - \mu^{-1}(LT)^{1/2}\|A\tilde{u}_1\|_{L^2(0,T;H)}$ とおくと, (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) を用いて,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \mu \left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_1} - 1 \right) \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} + \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_1} - 1 \right) \partial_x \left\{ \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} \\
&\le \mu \left\{ \left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_1} - 1 \right) \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_1} - 1 \right\|_{L^\infty} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} \right\} \\
&\le \mu \left\{ M_1^{-2}(LT)^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} \right. \\
&\qquad \left. + M_1^{-1}(LT)^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} \right\} \\
&= \mu (LT)^{1/2} (M_1^{-1} + M_1^{-2}) \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

を得る. (II) については,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \partial_x \left\{ \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_2} - \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \right) \frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \partial_x \left\{ \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\} \frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} + \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
&\le \left\| \partial_x \left\{ \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\} \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^\infty} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_1} \right) \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) + \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_2} \right) \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) + \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \partial_x \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right\|_{L^\infty} \\
&\qquad + \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^\infty} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
&\le \left(\left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_1} \right) \right\|_{L^2} \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right\|_{L^\infty} + \left\| \partial_x \left(\frac{v_0}{\tilde{v}_2} \right) \right\|_{L^2} \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right\|_{L^\infty} \right. \\
&\qquad \left. + \left\| \partial_x \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \right\|_{L^\infty} \right) \left\| \frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right\|_{L^\infty} \\
&\quad + \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_1} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{v_0}{\tilde{v}_2} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right\|_{L^\infty} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

と評価し, さらに,

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right\|_{L^\infty} &= \left\| \int_0^t \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \, ds \right\|_{L^\infty} \\
&\le \int_0^t \left\| \frac{\partial_x (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\|_{L^\infty} ds
\end{aligned}
$$

$$\leq (LT)^{1/2} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}, \tag{3.1.13}$$

ならびに,

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} - \frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} &= \left\| \partial_x \int_0^t \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \, ds \right\|_{L^2} \\
&\leq \int_0^t \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} ds \\
&\leq T^{1/2} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

を用いて評価する. $M_2 = 1 - \mu^{-1}(LT)^{1/2}\|A\tilde{u}_2\|_{L^2(0,T;H)}$ とおくと, (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9), (3.1.13), (3.1.14) より,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}) \leq \mu \Bigg\{ & M_1^{-2} T^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} M_2^{-1} (LT)^{1/2} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
& + M_2^{-2} T^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} M_1^{-1} (LT)^{1/2} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
& + T^{1/2} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} M_1^{-1} M_2^{-1} \Bigg\} L^{1/2} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
& + \mu M_1^{-1} M_2^{-1} (LT)^{1/2} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
= \mu (LT)^{1/2} M_1^{-1} M_2^{-1} \Bigg\{ & (LT)^{1/2} M_1^{-1} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
& + (LT)^{1/2} M_2^{-1} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} + 2 \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \Bigg\} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned}$$

を得る. 以上, (I), (II) の評価をあわせると,

$$\begin{aligned}
& \left\| \mu \partial_x \left\{ \left(\frac{1}{\tilde{v}_1} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x \tilde{u}_1 - \left(\frac{1}{\tilde{v}_2} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x \tilde{u}_2 \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
& \leq \mu (LT)^{1/2} (M_1^{-1} + M_1^{-2}) \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
& \quad + \mu (LT)^{1/2} M_1^{-1} M_2^{-1} \Bigg\{ L^{1/2} T M_1^{-1} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
& \quad + L^{1/2} T M_2^{-1} \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} + 2 \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \Bigg\} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned}$$

となり,

$$\mu \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_j}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq N_0, \quad M_j \geq \frac{1}{2}, \qquad j = 1, 2,$$

を用いると,

$$\leq \mu^{-1} (LT)^{1/2} \left\{ 14 + 16 L^{1/2} T \right\} N_0 \|A(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)\|_{L^2(0,T;H)}$$

が得られる．

$\partial_x\left(p(\tilde{v}_1)-p(\tilde{v}_2)\right)$ に関して：

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial_x\left(p(\tilde{v}_1)-p(\tilde{v}_2)\right)\right\|_{L^2}\\
&=a\left\|\partial_x\left[v_0^{-\gamma}\left\{\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\}\right]\right\|_{L^2}\\
&=a\left\|\partial_x\left(v_0^{-\gamma}\right)\left\{\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\}+v_0^{-\gamma}\partial_x\left\{\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\}\right\|_{L^2}\\
&\le a\left\|\partial_x\left(v_0^{-\gamma}\right)\right\|_{L^2}\left\|\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\|_{L^\infty}+a\left\|v_0^{-\gamma}\right\|_{L^\infty}\left\|\partial_x\left\{\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\}\right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

と評価し，さらに各ノルムの評価を行う．$0\le\theta\le 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}&\ge\theta\min_x\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\min_x\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\\
&\ge\min\left\{\min_x\frac{\tilde{v}_1}{v_0},\ \min_x\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.1.15}
$$

が成り立つことに注意し，(3.1.13) とあわせると，

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\|_{L^\infty}\\
&\le\int_0^1\left\|-\gamma\left\{\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}^{-\gamma-1}\right\|_{L^\infty}d\theta\left\|\frac{\tilde{v}_1}{v_0}-\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\|_{L^\infty}\\
&\le\gamma\left(\min\left\{\min_x\frac{\tilde{v}_1}{v_0},\ \min_x\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}\right)^{-\gamma-1}(LT)^{1/2}\left\|\partial_x\left\{\frac{\partial_x(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)}{v_0}\right\}\right\|_{L^2(0,T;L^2)}\\
&\le\gamma\left(\min\left\{M_1,M_2\right\}\right)^{-\gamma-1}(LT)^{1/2}\left\|\partial_x\left\{\frac{\partial_x(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)}{v_0}\right\}\right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned}
$$

を得る．ノルム $\left\|\partial_x\left\{(\tilde{v}_1/v_0)^{-\gamma}-(\tilde{v}_2/v_0)^{-\gamma}\right\}\right\|_{L^2}$ の評価は以下のとおりである．

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial_x\left\{\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)^{-\gamma}\right\}\right\|_{L^2}\\
&\le\left\|\gamma(\gamma+1)\int_0^1\left\{\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}^{-\gamma-2}\partial_x\left\{\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}d\theta\left(\frac{\tilde{v}_1-\tilde{v}_2}{v_0}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\gamma\int_0^1\left\{\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}^{-\gamma-1}d\theta\,\partial_x\left(\frac{\tilde{v}_1-\tilde{v}_2}{v_0}\right)\right\|_{L^2}\\
&\le\gamma(\gamma+1)\int_0^1\left\|\left\{\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}^{-\gamma-2}\right\|_{L^\infty}\left\|\partial_x\left\{\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}\right\|_{L^2}d\theta\left\|\frac{\tilde{v}_1}{v_0}-\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\|_{L^\infty}\\
&\quad+\gamma\int_0^1\left\|\left\{\theta\frac{\tilde{v}_1}{v_0}+(1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right\}^{-\gamma-1}\right\|_{L^\infty}d\theta\left\|\partial_x\left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0}-\frac{\tilde{v}_2}{v_0}\right)\right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

であり, (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15) を用いると,

$$
\begin{aligned}
&\leq \gamma(\gamma+1)\left(\min\{M_1,M_2\}\right)^{-\gamma-2}(LT)^{1/2} \\
&\qquad \times \int_0^1 \left\| \partial_x \left\{ \theta \frac{\tilde{v}_1}{v_0} + (1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} d\theta \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\quad + \gamma\left(\min\{M_1,M_2\}\right)^{-\gamma-1} T^{1/2} \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $0 \leq \theta \leq 1$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \partial_x \left\{ \theta \frac{\tilde{v}_1}{v_0} + (1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} \\
&\leq \theta \left\| \partial_x \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2} + (1-\theta) \left\| \partial_x \left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq T^{1/2}\theta \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} + T^{1/2}(1-\theta) \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\| \partial_x \left\{ \theta \frac{\tilde{v}_1}{v_0} + (1-\theta)\frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right\} \right\|_{L^2} d\theta \\
&\leq T^{1/2} \int_0^1 \left\{ \theta \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} + (1-\theta) \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} T^{1/2} \left(\left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} + \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \right)
\end{aligned}
$$

が成り立つから,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \partial_x \left\{ \left(\frac{\tilde{v}_1}{v_0} \right)^{-\gamma} - \left(\frac{\tilde{v}_2}{v_0} \right)^{-\gamma} \right\} \right\|_{L^2} \\
&\leq \gamma\left(\min\{M_1,M_2\}\right)^{-\gamma-1} T^{1/2} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{2}(\gamma+1)\left(\min\{M_1,M_2\}\right)^{-1}(LT)^{1/2} \left(\left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} + \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \right) + 1 \right\} \\
&\quad \times \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned}
$$

が得られる. 以上より,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \partial_x \left(p(\tilde{v}_1) - p(\tilde{v}_2) \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\leq a\gamma\left(\min\{M_1,M_2\}\right)^{-\gamma-1} T \\
&\quad \times \Bigg[\left\| \partial_x \left(v_0^{-\gamma} \right) \right\|_{L^2} L^{1/2} + \left\| v_0^{-\gamma} \right\|_{L^\infty} \\
&\qquad \times \left\{ \frac{1}{2}(\gamma+1)\left(\min\{M_1,M_2\}\right)^{-1}(LT)^{1/2} \left(\left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_1}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} + \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x \tilde{u}_2}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \right) + 1 \right\} \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \times \left\| \partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)}{v_0} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\le \mu^{-1} a\gamma 2^{\gamma+1} T \left[\left\| \partial_x \left(v_0^{-\gamma} \right) \right\|_{L^2} L^{1/2} + \left\| v_0^{-\gamma} \right\|_{L^\infty} \left\{ 2\mu^{-1}(\gamma+1)(LT)^{1/2} N_0 + 1 \right\} \right] \| A(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \|_{L^2(0,T;H)}
\end{aligned}
$$

が得られた.

以上の結果を用いて g を評価すると,

$$
\|g\|_{L^2(0,T;L^2)} \le CT^{1/2} \| A(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) \|_{L^2(0,T;H)}
$$

が得られた. ここに, C は $\left\| \partial_x \left(v_0^{-\gamma} \right) \right\|_{L^2}$, $\left\| v_0^{-\gamma} \right\|_{L^\infty}$, $\left\| \partial_x u_0 / \sqrt{v_0} \right\|_{L^2}$, $\|F\|_{L^2(0,T_0;L^2)}$ の大きさと T_0 のみに依存する定数である. よって, 次の不等式が得られた:

$$
d(u_1, u_2) \le CT^{1/2} d(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2).
$$

必要ならば, T を小さくとり直して $CT^{1/2} < 1$ が成り立つようにすれば, Ψ_T は縮小写像となり, バナッハの不動点定理 ([38] を参照) により, Ψ_T は X_T の中にただひとつの不動点をもつ. この不動点は, 区間 $[0,T]$ 上で方程式 (3.1.1) の解を与えている.

3.1.2　解の一意性

$T_0 > 0$, $F \in L^2(0,T_0;\dot{L}^2_{\mathrm{per}})$ とし, $v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}$, $v_0 > 0$, $u_0 \in \dot{H}^1_{\mathrm{per}}$ を満たす初期値に対して, 方程式 (3.1.1) の初期値問題が,

$$
\begin{aligned}
&v^{(j)} \in C^1([0,T_0];L^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T_0];H^1_{\mathrm{per}}), \quad v^{(j)} > 0, \\
&u^{(j)} \in H^1(0,T_0;L^2_{\mathrm{per}}) \cap L^2(0,T_0;H^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T_0];H^1_{\mathrm{per}}),
\end{aligned}
\qquad j = 1, 2,
$$

を満たすふたつの解 $(v^{(1)}, u^{(1)})$, $(v^{(2)}, u^{(2)})$ をもつとする.

$$
f^{(j)} = F + \mu \partial_x \left\{ \left(\frac{1}{v^{(j)}} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x u^{(j)} \right\} - \partial_x (p(v^{(j)}))
$$

とおくと, $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, は線形方程式の初期値問題

$$
\begin{cases}
\partial_t u^{(j)} + A u^{(j)} = f^{(j)}, \\
u^{(j)}(0, \cdot) = u_0
\end{cases}
$$

の解となるから, ふたつの解の差 $u^{(1)} - u^{(2)}$ に線形方程式の解の評価を適用できる:

$$
\left\| A \left(u^{(1)} - u^{(2)} \right) \right\|_{L^2(0,T;H)} \le \left\| f^{(1)} - f^{(2)} \right\|_{L^2(0,T;H)}, \quad 0 < T \le T_0.
$$

写像 Ψ_T の縮小性の導出と同様にして, $\left\| f^{(1)} - f^{(2)} \right\|_{L^2(0,T;H)}$ を評価すると,

$$
\begin{aligned}
&\left\| f^{(1)} - f^{(2)} \right\|_{L^2(0,T;H)} \\
&= \left\| \partial_x \left\{ \left(\frac{1}{v^{(1)}} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x u^{(1)} - \left(\frac{1}{v_{(2)}} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x u^{(2)} - \partial_x \left(p(v^{(1)}) - p(v^{(2)}) \right) \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\le \left\| \partial_x \left\{ \left(\frac{1}{v^{(1)}} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x u^{(1)} - \left(\frac{1}{v^{(2)}} - \frac{1}{v_0} \right) \partial_x u^{(2)} \right\} \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\quad + \left\| \partial_x \left(p(v^{(1)}) - p(v^{(2)}) \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\le C T^{1/2} \left\| A \left(u^{(1)} - u^{(2)} \right) \right\|_{L^2(0,T;H)}
\end{aligned}$$

が得られる. ここに, C は,

$$\left\| \partial_x \left(v_0^{-\gamma} \right) \right\|_{L^2}, \quad \left\| v_0^{-\gamma} \right\|_{L^\infty}, \quad \|F\|_{L^2(0,T_0;L^2)}, \quad T_0,$$

に加えて,

$$\min_{t,x} \frac{v^{(1)}}{v_0}, \quad \min_{t,x} \frac{v^{(2)}}{v_0}, \quad \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x u^{(1)}}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T_0;L^2)}, \quad \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x u^{(2)}}{v_0} \right) \right\|_{L^2(0,T_0;L^2)}$$

の大きさのみで定まる定数である.

この評価をもとに, $T_1 = \min\{T_0, (2C)^{-2}\}$ ととれば, $\left\| A(u^{(1)} - u^{(2)}) \right\|_{L^2(0,T_1;H)} = 0$ より, $0 \le t \le T_1$ において $u^{(1)} = u^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$ がしたがう. $T_1 = T_0$ の場合, 区間 $[0, T_0]$ 全体でふたつの解は一致する. $T_1 < T_0$ の場合, $v^{(1)}(T_1) = v^{(2)}(T_1)$, $u^{(1)}(T_1) = u^{(2)}(T_1)$ をそれぞれ v, u の初期値, F を区間 $[T_1, T_0]$ に制限したものを新たな外力項とみて, 区間 $[T_1, T_0]$ 上でふたつの解の差の評価を行うと, $T_1 \le t \le T_2 = \min\{T_0, 2(2C)^{-2}\}$ において $u^{(1)} = u^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$ が示される. これを繰り返すことにより, 区間 $[0, T_0]$ 全体でふたつの解の一致が示せる.

以上、3.1.1 節の結果とあわせて局所解の存在定理が得られる.

定理 3.1.1 (局所解の一意存在定理) $T_0 > 0$ とする. 任意の正数の組 C_1, C_2, C_3, C_4 に対して, 正数 $T = T(C_1, C_2, C_3, C_4) \le T_0$ が存在して次のことが成立する:

$$\left\| \partial_x \left(v_0^{-\gamma} \right) \right\|_{L^2} \le C_1, \ \left\| v_0^{-\gamma} \right\|_{L^\infty} \le C_2, \ \left\| \frac{\partial_x u_0}{\sqrt{v_0}} \right\|_{L^2} \le C_3, \ \|F\|_{L^2(0,T_0;L^2)} \le C_4$$

を満たす $v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}$, $v_0 > 0$, $u_0 \in \dot{H}^1_{\mathrm{per}}$, $F \in L^2(0, T_0; \dot{L}^2_{\mathrm{per}})$ に対して, 方程式 (3.1.1) の初期値問題は区間 $[0, T]$ 上で

$$\begin{aligned}
&v \in C^1([0,T]; L^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T]; H^1_{\mathrm{per}}), \quad v > 0, \\
&u \in H^1(0,T; L^2_{\mathrm{per}}) \cap L^2(0,T; H^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T]; H^1_{\mathrm{per}}),
\end{aligned}$$

を満たす解を唯ひとつもつ.

3.1.3 アプリオリ評価と大域解

前小節で得られた局所解を延長して大域解を構成する. このために, 解のアプリオリ評価を導出する. $T_0 > 0$, $F \in L^2(0, T_0; \dot{L}^2_{\mathrm{per}})$ とし, 初期値を

$$v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}, \quad v_0 > 0, \qquad u_0 \in \dot{H}^1_{\mathrm{per}}$$

で与える．$0 < T \le T_0$ とし，(v, u) を区間 [0,T] 上の初期値問題の解

$$v \in C^1([0,T]; L^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T]; H^1_{\mathrm{per}}), \quad v > 0,$$
$$u \in H^1(0,T; L^2_{\mathrm{per}}) \cap L^2(0,T; H^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T]; H^1_{\mathrm{per}})$$

とする．この解のノルム

$$\left\|\partial_x(v(t,\cdot)^{-\gamma})\right\|_{L^2}, \ \ \|v(t,\cdot)^{-\gamma}\|_{L^\infty}, \ \ \left\|\frac{\partial_x u(t,\cdot)}{\sqrt{v(t,\cdot)}}\right\|_{L^2}$$

を評価する．ノルム $\|\partial_x(v(t,\cdot)^{-\gamma})\|_{L^2}$ については，

$$\partial_x(v^{-\gamma}) = -\gamma v^{-\gamma-1}\partial_x v = -\gamma v^{-\gamma}\partial_x(\log v)$$

より，$\|\partial_x(\log v(t,\cdot))\|_{L^2}$ ならびに $\|v(t,\cdot)^{-\gamma}\|_{L^\infty}$ を評価すればよい．

はじめに，解の評価の基本となる等式を導く．$p(v) = av^{-\gamma}$ とおく．方程式 (3.1.1) の第 1 式より，

$$\partial_x\left(\frac{\partial_x u}{v}\right) = \partial_x\left(\frac{\partial_t v}{v}\right) = \partial_{xt}(\log v) = \partial_t\left(\frac{\partial_x v}{v}\right).$$

これを用いて方程式 (3.1.1) の第 2 式を

$$\mu\partial_t\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) - \partial_t u - p'(v)(\partial_x v) = -F$$

と書き換え，両辺に $\frac{\mu}{2}\frac{\partial_x v}{v}$ をかけて x に関して区間 $[0, L]$ 上で積分すると，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu^2}{4}\int_0^L\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 dx - \frac{\mu}{2}\int_0^L u\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)dx\right\} - \frac{\mu}{2}\int_0^L\frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx - \frac{\mu}{2}\int_0^L p'(v)\frac{(\partial_x v)^2}{v}\,dx$$
$$= -\frac{\mu}{2}\int_0^L F\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)dx \tag{3.1.16}$$

を得る．次に，方程式 (3.1.1) の第 2 式に u をかけて x に関して区間 $[0, L]$ 上で積分すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L \frac{1}{2}u^2\,dx\right) + \int_0^L\left\{(p(\bar{v}) - p(v))(\partial_x u) + \mu\frac{(\partial_x u)^2}{v}\right\}dx = \int_0^L Fu\,dx$$

を得る．方程式 (3.1.1) の第 1 式より，

$$\int_0^L (p(\bar{v}) - p(v))(\partial_x u)\,dx = \int_0^L (p(\bar{v}) - p(v))(\partial_t v)\,dx = \frac{d}{dt}\left(\int_0^L \Phi(v)\,dx\right),$$

ただし，

$$\Phi(v) = \int_{\bar{v}}^v (p(\bar{v}) - p(\xi))\,d\xi = p(\bar{v})(v - \bar{v}) - \int_{\bar{v}}^v p(\xi)\,d\xi \tag{3.1.17}$$

となるから，

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L\left(\frac{1}{2}u^2 + \Phi(v)\right)dx\right\} + \mu\int_0^L\frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx = \int_0^L Fu\,dx \tag{3.1.18}$$

が得られる. (3.1.16) と (3.1.18) の辺々を加え合わせ,

$$E(t) = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}u^2 - \frac{\mu}{2}u\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) + \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 + \Phi(v) \right\} dx \tag{3.1.19}$$

とおくと,

$$\frac{dE}{dt}(t) + \frac{\mu}{2}\int_0^L \left\{ \frac{(\partial_x u)^2}{v} - p'(v)\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 \right\} dx = \int_0^L \left\{ Fu - \frac{\mu}{2}F\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) \right\} dx \tag{3.1.20}$$

を得る. ここで, $p(v) = av^{-\gamma}$ であったから, 等式

$$\frac{dE}{dt}(t) + \frac{\mu}{2}\int_0^L \left\{ \frac{(\partial_x u)^2}{v} + a\gamma\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}} \right\} dx = \int_0^L \left\{ Fu - \frac{\mu}{2}F\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) \right\} dx \tag{3.1.21}$$

が導き出された.

$$\Phi(v) = \begin{cases} a\left(\dfrac{v}{\bar{v}} - 1 - \log\dfrac{v}{\bar{v}}\right), & \gamma = 1, \\ a\left\{\left(\dfrac{v}{\bar{v}} - 1\right)\bar{v}^{1-\gamma} - \dfrac{v^{1-\gamma} - \bar{v}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}, & \gamma > 1, \end{cases}$$

について $\Phi \geq 0$ であること, および, ヤングの不等式より

$$\frac{\mu}{2}u\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) \leq \frac{3}{8}u^2 + \frac{\mu^2}{6}\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2$$

が成り立つことを用いると,

$$\int_0^L \left\{ \frac{1}{8}u^2 + \frac{\mu^2}{12}\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 \right\} dx \leq E(t) \leq \int_0^L \left\{ \frac{7}{8}u^2 + \frac{5}{12}\mu^2\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 + \Phi(v) \right\} dx \tag{3.1.22}$$

がしたがう.

等式 (3.1.21) の右辺は,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L \left\{ Fu - \frac{\mu}{2}F\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) \right\} dx \right| &\leq \frac{1}{2}\int_0^L \left\{ u - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) \right\}^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L F^2\, dx \\ &\leq \int_0^L \left\{ u^2 + \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2}\|F\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

と評価されるから, (3.1.22) を用いると, 等式 (3.1.21) から $E(t)$ に関する微分不等式

$$\frac{dE}{dt}(t) \leq 8E(t) + \frac{1}{2}\|F\|_{L^2}^2$$

が得られる. グローンウォールの補題により,

$$E(t) \leq E(0)e^{8t} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{8(t-s)}\|F\|_{L^2}^2\, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

が得られ, 再び (3.1.22) を用いると, $\|\partial_x(\log v)\|_{L^2} = \|\partial_x v/v\|_{L^2} \leq \frac{12}{\mu^2}E(t)$ であるから, ノルム $\|\partial_x(\log v)\|_{L^2}$ は $E(0)$ とノルム $\|F\|_{L^2(0,T_0;H)}$ および T_0 のみで定まる定数で上から評価できる.

次に $\|v^{-\gamma}\|_{L^\infty}$ を評価する．$x_0 \in [0, L)$ を $v(t, x_0) = \bar{v}$ を満たすように選ぶと，

$$\log v(t,x) - \log \bar{v} = \log v(t,x) - \log v(t, x_0) = \int_{x_0}^{x} \partial_y (\log v(t,y))\, dy.$$

したがって，

$$\log \bar{v} - \sqrt{L}\|\partial_x(\log v)\|_{L^2} \le \log v(t,x) \le \log \bar{v} + \sqrt{L}\|\partial_x(\log v)\|_{L^2}$$

となり，

$$\bar{v} e^{-\sqrt{L}\|\partial_x(\log v)\|_{L^2}} \le v(t,x) \le \bar{v}_0 e^{\sqrt{L}\|\partial_x(\log v)\|_{L^2}} \tag{3.1.23}$$

を得る．よって，

$$\|v^{-\gamma}\|_{L^\infty} = \|v^{-1}\|_{L^\infty}^{\gamma} \le \bar{v}^{-\gamma} e^{\gamma\sqrt{L}\|\partial_x(\log v)\|_{L^2}}.$$

である．

最後に，ノルム $\|\partial_x u/\sqrt{v}\|_{L^2}$ を評価する．

$$\left\| \frac{\partial_x u}{\sqrt{v}} \right\|_{L^2} \le \|\partial_x u\|_{L^2} \|v^{-1/2}\|_{L^\infty} = \|\partial_x u\|_{L^2} \|v^{-1}\|_{L^\infty}^{1/2}$$

に注意すると，(3.1.23) よりノルム $\|\partial_x u\|_{L^2}$ を評価すればよい．方程式 (3.1.1) の第 2 式に $-\partial_x^2 u$ をかけて x に関して区間 $[0, L]$ 上で積分すると，

$$\int_0^L \left\{ -(\partial_t u)(\partial_x^2 u) - \partial_x(p(v))(\partial_x^2 u) + \mu \int_0^L \partial_x \left(\frac{\partial_x u}{v} \right) (\partial_x^2 u) \right\} dx = -\int_0^L F(\partial_x^2 u)\, dx.$$

部分積分して整理すると，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L (\partial_x u)^2\, dx \right) + \mu \int_0^L \frac{(\partial_x^2 u)^2}{v}\, dx = \int_0^L \left(p'(v)(\partial_x v) + \frac{(\partial_x u)(\partial_x v)}{v^2} - F \right) (\partial_x^2 u)\, dx.$$

ε を正のパラメータとして，この等式の右辺各項の評価は以下のとおりである．$p'(v)$ の有界性に注意すると，

$$\left| \int_0^L p'(v)(\partial_x v)(\partial_x^2 u)\, dx \right| \le \frac{\varepsilon}{2} \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^2 + \frac{c_1}{2\varepsilon} \|\partial_x v\|_{L^2}^2.$$

ソボレフの不等式を用いて $\|\partial_x u\|_{L^\infty} \le \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x u\|_{L^2}^{1/2}$ と評価すると，

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^L \frac{(\partial_x u)(\partial_x v)}{v^2} (\partial_x^2 u)\, dx \right| &\le \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|v^{-1}\|_{L^\infty} \int_0^L |\partial_x^2 u| |\partial_x(\log v)|\, dx \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^2 + \frac{\|v^{-1}\|_{L^\infty}^2}{2\varepsilon} \|\partial_x u\|_{L^\infty}^2 \|\partial_x(\log v)\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^2 + \frac{\|v^{-1}\|_{L^\infty}^2}{2\varepsilon} \|\partial_x^2 u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^2} \|\partial_x(\log v)\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\|v^{-1}\|_{L^\infty}^2}{2\varepsilon} \|\partial_x(\log v)\|_{L^2}^2 \|\partial_x u\|_{L^2} \right)^2 \\
&\le \varepsilon \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^2 + \frac{c_2}{8\varepsilon^3} \|\partial_x u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

さらに,

$$\left|\int_0^L F(\partial_x^2 u)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L (\partial_x^2 u)^2\,dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^L F^2\,dx.$$

ここで, $c_1 = \|p'(v)\|_{L^\infty}^2$, $c_2 = \|v^{-1}\|_{L^\infty}^4 \|\partial_x(\log v)\|_{L^2}^4$ である. $\varepsilon \le \mu\|v^{-1}\|_{L^\infty}/2$ と選べば,

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x u\|_{L^2}^2 \le \frac{c_1}{\varepsilon}\|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|F\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\frac{c_2}{\varepsilon^3}\|\partial_x u\|_{L^2}^2. \tag{3.1.24}$$

を得る. グローンウォールの補題により, $\|\partial_x u\|_{L^2}$ は $\|\partial_x u_0\|_{L^2}$ と $E(0)$ と $\|F\|_{L^2(0,T_0;H)}$ および T_0 のみで定まる定数で上から評価できる.

以上より, ノルム $\|u_0\|_{H^1}$, $\|v_0\|_{H^1}$, $\|v_0^{-1}\|_{L^\infty}$, $\|F\|_{L^2(0,T_0;H)}$, ならびに T_0 のみに依存する定数 C_1, C_2, C_3 が存在して,

$$\left\|\partial_x\left(v^{-\gamma}\right)\right\|_{L^2} \le C_1,\ \ \left\|v^{-\gamma}\right\|_{L^\infty} \le C_2,\ \ \left\|\frac{\partial_x u}{\sqrt{v}}\right\|_{L^2} \le C_3,\ \ 0 \le t \le T, \tag{3.1.25}$$

が成り立つことが示された.

解の延長　方程式 (3.1.1) の解が区間 $[0,T]$ 上に延長されているとして, $0 < T < T_0$ の場合, $(v(T), u(T))$ を初期値, $F(t,x)$, $(T \le t \le T_0)$ を外力項とする初期値問題に**定理3.1.1** を適用すると, (3.1.25) に現れる定数 C_1, C_2, C_3 とノルム $\|F\|_{L^2(0,T_0;L^2)}$ のみに依存する時間幅で解を延長することができる. 必要ならば, このような解の延長を何度か繰り返すことによって, 時間区間 $[0,T_0]$ 全体に解を延長することができる.

以上をまとめて, 方程式 (3.1.1) の初期値問題に対して, 次の解の一意存在定理が得られる.

定理 3.1.2 $T_0 > 0$, $F \in L^2(0,T_0;\dot{L}^2_{\mathrm{per}})$ とする. $v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}$, $v_0 > 0$, $u_0 \in \dot{H}^1_{\mathrm{per}}$ に対して, 方程式 (3.1.1) の初期値問題は,

$$\begin{aligned}&v \in C^1([0,T_0];L^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T_0];H^1_{\mathrm{per}}), \quad v > 0,\\ &u \in H^1(0,T_0;L^2_{\mathrm{per}}) \cap L^2(0,T_0;H^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,T_0];H^1_{\mathrm{per}})\end{aligned}$$

を満たす解を唯ひとつもつ.

定理3.1.2 において, $T_0 > 0$ は任意であったから, $t \ge 0$ 全体で与えられた外力項に対して時間大域解の一意存在が示せたことになる.

定理 3.1.3 (大域解の一意存在) $F \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\dot{L}^2_{\mathrm{per}})$ とする. v_0, u_0 に関する**定理 3.1.2** の仮定のもとで, 方程式 (3.1.1) の初期値問題は,

$$\begin{aligned}&v \in C^1([0,\infty);L^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,\infty);H^1_{\mathrm{per}}), \quad v > 0,\\ &u \in H^1_{\mathrm{loc}}(0,\infty;L^2_{\mathrm{per}}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;H^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,\infty);H^1_{\mathrm{per}})\end{aligned}$$

を満たす解を唯ひとつもつ.

3.2　外力項が自己重力の場合

本節では, 方程式 (3.1.1) において外力項 F が流体の自己重力

$$F(t,x) = -\frac{4\pi G}{\bar{v}}\partial_x \int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-\bar{v})\,dy$$

の場合に, 自己重力流体の等温流または等エントロピー流の方程式

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x(av^{-\gamma}) - \mu\partial_x\left(\dfrac{\partial_x u}{v}\right) = -\dfrac{4\pi G}{\bar{v}}\partial_x \displaystyle\int_0^L K_L(\,\cdot\,,y)(v(t,y)-\bar{v})\,dy \end{cases} \tag{3.2.1}$$

の初期値問題の解の存在と一意性について述べる.

(2.2.7) より, $\partial_x K_L(x,y)$ は有界である. したがって, $v>0$ が成り立つ限り, F は有界である:

$$\sup_{t,x}|F(t,x)| < \infty.$$

このことから, 方程式 (3.2.1) の初期値問題について, 時間局所解の存在が**定理3.1.1** と同様に示されれば, 解のアプリオリ評価と組み合わせて時間局所解を時間大域的に延長することができる.

時間局所解の存在については, 3.1.1 節で示した手順にしたがって証明することができる:

STEP 1: 与えられた $\tilde{u} = \tilde{u}(t,x)$ に対して,

$$\tilde{v} = \tilde{v}(t,x) = v_0(x) + \int_0^t \partial_x \tilde{u}(s,x)\,ds$$

を対応させる.

STEP 2: $V = \overline{v_0}$ とおき, 周期条件のもと, 初期条件 $u(0,x) = u_0(x)$ を与えて, 線形方程式

$$\partial_t u - \mu\partial_x\left(\frac{\partial_x u}{v_0}\right) = f,$$

$$f = -\frac{4\pi G}{V}\partial_x \int_0^L K_L(\,\cdot\,,y)(\tilde{v}(t,y)-\overline{\tilde{v}})\,dy + \mu\partial_x\left\{\left(\frac{1}{\tilde{v}} - \frac{1}{v_0}\right)\partial_x\tilde{u}\right\} - \partial_x(p(\tilde{v})) \tag{3.2.2}$$

の初期値問題を解く.

STEP 3: 関数 $\tilde{u}$ に **STEP 2** の解 u を対応させる写像 Ψ: $\tilde{u} \mapsto u$ の不動点 $u = \Psi(u)$ が方程式 (3.2.1) の初期値問題の解を与える.

外力項 (3.2.2) の空間変数に関する平均は 0 となることに注意して, 3.1 節と同じく, 線形方程式をヒルベルト空間 $H = \dot{L}^2_{\mathrm{per}}$ 上の方程式として扱うことで次の結果が得られる.

定理 3.2.1 $v_0 \in H^1_{\mathrm{per}}$, $v_0 > 0$, $u_0 \in \dot{H}^1_{\mathrm{per}}$ に対して, 方程式 (3.2.1) の初期値問題は,

$$\begin{aligned} &v \in C^1([0,\infty); L^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,\infty); H^1_{\mathrm{per}}), \quad v > 0, \\ &u \in H^1_{\mathrm{loc}}(0,\infty; L^2_{\mathrm{per}}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty; H^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,\infty); H^1_{\mathrm{per}}) \end{aligned}$$

を満たす解を唯ひとつもつ.

詳細については, [46] を参照のこと.

第4章　解の有界性と時間大域的挙動

本章では, 等温流ならびに等エントロピー流の方程式の初期値問題に対して第 3 章で得られた時間大域解の長時間挙動を考察する. はじめに, 外力項の有界性の仮定のもと, 解の有界性の評価を導いて解軌道のコンパクト性を示す. この際, 等温流と等エントロピー流両方程式でその扱いに差が生じることが, 本論文のひとつの主題である非有界な解の存在に結びつく. つづいて, この結果を, 自己重力流体方程式に適用し, 解軌道のオメガ極限集合についてその存在と平衡解との関係を明らかにする.

4.1　解の有界性

等温流または等エントロピー流の方程式

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x(av^{-\gamma}) - \mu\partial_x\left(\dfrac{\partial_x u}{v}\right) = F \end{cases} \tag{4.1.1}$$

の初期値問題は, 外力項 F に関するいくつかの仮定のもとで H^1 値連続な時間大域解をもつ. 本節では, 外力項 F について, $F \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\dot{L}^2_{\mathrm{per}})$, および

$$\int_0^L F(t,x)\,dx = 0, \quad t \geq 0, \tag{4.1.2}$$

に加えて, 時空変数についての有界性

$$\sup_{t,x} |F(t,x)| < \infty \tag{4.1.3}$$

を仮定して, 方程式 (4.1.1) の解の H^1-有界性を導く.

以下, 方程式 (4.1.1) について,

$$\begin{aligned} &v \in C^1([0,\infty);L^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,\infty);H^1_{\mathrm{per}}), \quad v > 0, \\ &u \in H^1_{\mathrm{loc}}(0,\infty;L^2_{\mathrm{per}}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;H^2_{\mathrm{per}}) \cap C^0([0,\infty);H^1_{\mathrm{per}}) \end{aligned}$$

を満たす時間大域解 (v,u) を考える. v, u の空間変数に関する平均

$$\bar{v} = \frac{1}{L}\int_0^L v(t,x)\,dx, \quad \bar{u} = \frac{1}{L}\int_0^L u(t,x)\,dx$$

は保存量 (運動の定数) である. 必要ならば, $u - \bar{u}$ をあらためて u と取り直すことにより,

$$\bar{v} = V, \quad \bar{u} = 0$$

として議論をすすめても一般性は失われない.

4.1.1　等温流の場合

本小節では, Matsumura-Nishida [17] にしたがって, 等温流方程式 (4.1.1) ($\gamma = 1$) について, 解の H^1 ノルムを評価して有界であることを示す.

解の評価の基本となるのは 3.1.3 節で導いた等式である. $p(v) = av^{-1}$ とおき, (3.1.17) で Φ, (3.1.19) で $E(t)$ を定めると, 3.1.3 節の結果より (3.1.20) が導かれ,

$$\frac{dE}{dt}(t) + \frac{\mu}{2}\int_0^L \left\{ \frac{(\partial_x u)^2}{v} + a\frac{(\partial_x v)^2}{v^3} \right\} dx = \int_0^L \left\{ Fu - \frac{\mu}{2}F\left(\frac{\partial_x v}{v}\right) \right\} dx \tag{4.1.4}$$

となる.

等式 (4.1.4) の右辺を評価する. $\bar{u} = 0$ より, $x_0 \in [0, L)$ を $u(t, x_0) = 0$ と選ぶと,

$$|u(t,x)| = |u(t,x) - u(t,x_0)| = \left| \int_{x_0}^x \partial_x u(t,y)\,dy \right| \leq \int_0^L |\partial_x u(t,y)|\,dy$$

となり, 不等式 $\|u\|_{L^\infty} \leq \int_0^L |\partial_x u|\,dx$ が導かれる. これを用いると,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^L Fu\,dx \right| &\leq \int_0^L |Fu|\,dx \\
&\leq L\|u\|_{L^\infty}\|F\|_{L^\infty} \\
&= L\int_0^L v^{1/2}\frac{|\partial_x u|}{v^{1/2}}\,dx\|F\|_{L^\infty} \\
&\leq L\left(\int_0^L v\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\right)^{1/2}\|F\|_{L^\infty} \\
&\leq L(LV)^{1/2}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\right)^{1/2}\|F\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{\mu}{4}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx + \frac{L^3 V}{\mu}\|F\|_{L^\infty}^2,
\end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2}\left| \int_0^L \frac{\partial_x v}{v}F dx \right| &\leq \frac{\mu}{2}\int_0^L \frac{|\partial_x v|}{v}\,dx\|F\|_{L^\infty} \\
&= \frac{\mu}{2}\int_0^L \frac{|\partial_x v|}{v^{3/2}}v^{1/2}\,dx\|F\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{\mu}{2}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx\right)^{1/2}(LV)^{1/2}\|F\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{\mu}{4}\int_0^L a\frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx + \frac{\mu}{4a}LV\|F\|_{L^\infty}^2
\end{aligned}$$

が成り立ち, (4.1.4) から不等式

$$\frac{dE}{dt}(t) + \int_0^L \frac{\mu}{2}\left\{ \frac{(\partial_x u)^2}{v} + a\frac{(\partial_x v)^2}{v^3} \right\} dx$$

$$\leq \frac{\mu}{4}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx + \int_0^L a\frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx\right) + \left(\frac{L^2}{\mu} + \frac{\mu}{4a}\right) LV\|F\|_{L^\infty}^2,$$

すなわち,

$$\frac{dE}{dt}(t) + \frac{\mu}{4}\int_0^L \left\{\frac{(\partial_x u)^2}{v} + a\frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\right\} dx \leq C(V)\|F\|_{L^\infty}^2 \tag{4.1.5}$$

が導かれる. ここで, $C(V) = \left(\frac{L^2}{\mu} + \frac{\mu}{4a}\right) LV$ とおいた.

この不等式をもとに $E(t)$ に関する微分方程式を導くために, $E(t)$ を $\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx$ と $\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx$ を用いて評価する. はじめに,

$$X = \int_0^L \left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 dx, \quad Y = \int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx$$

とおき, Y を用いて X を評価する. $x_0 \in [0, L)$ を $v(t, x_0) = \bar{v}$ と選べば,

$$\left|\log\frac{v}{\bar{v}}\right| = \left|\int_{x_0}^x \frac{\partial_x v}{v}\,dx\right| \leq \int_0^L \left|\frac{\partial_x v}{v}\right| dx = \int_0^L v^{1/2}\frac{|\partial_x v|}{v^{3/2}}\,dx \leq (LV)^{1/2}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx\right)^{1/2}$$

より,

$$\|v\|_{L^\infty} \leq V\exp\left((LV)^{1/2}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx\right)^{1/2}\right).$$

これを用いると,

$$\begin{aligned} X &\leq \int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx\|v\|_{L^\infty} \\ &\leq \left(\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx\right) V\exp\left((LV)^{1/2}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\,dx\right)^{1/2}\right) \\ &= VY\exp\left((LV)^{1/2}Y^{1/2}\right). \end{aligned}$$

ここで, $y \geq 0$ の関数を

$$G(y) = Vy\exp\left((LV)^{1/2}y^{1/2}\right)$$

と定めると, $X \leq G(Y)$ が成り立つ. G について,

$$\begin{aligned} &G(0) = 0, \\ &G'(y) = V\left\{\exp\left((LV)^{1/2}y^{1/2}\right) + \frac{1}{2}(LV)^{1/2}y^{1/2}\exp\left((LV)^{1/2}y^{1/2}\right)\right\} > 0, \quad y > 0, \\ &G(+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

が成り立つから, 逆関数 $y = G^{-1}(x)$, $x \geq 0$, が存在し,

$$G^{-1}(0) = 0, \qquad (G^{-1})'(x) > 0, \quad x > 0, \qquad G^{-1}(+\infty) = +\infty$$

を満たす．さらに, $H(x) = \frac{G^{-1}(x)}{x}$ とおくと,

$$H(x) = \frac{y}{x} = V^{-1} \exp\left(-(LV)^{1/2} y^{1/2}\right) = V^{-1} \exp\left(-(LV)^{1/2} G^{-1}(x)^{1/2}\right)$$

であるから,

$$H(x) \le V^{-1}, \quad H'(x) \le 0, \quad x \ge 0,$$

が成り立つ．$c = \frac{12}{\mu^2}$ とおくと, (3.1.22) より $X \le cE(t)$. $H(x)$ は単調減少するから,

$$H(cE(t)) \le H(X) = \frac{G^{-1}(X)}{X} \le \frac{Y}{X}$$

が成り立ち, 再び (3.1.22) を用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{G^{-1}(cE(t))}{c} &= H(cE(t))E(t) \\
&\le H(cE(t)) \int_0^L \left\{ \frac{7}{8} u^2 + \frac{5}{12} \mu^2 \left(\frac{\partial_x v}{v} \right)^2 + \Phi(v) \right\} dx \\
&\le H(cE(t)) \int_0^L \left(u^2 + \Phi(v) \right) dx + \mu^2 H(cE(t)) X \\
&\le V^{-1} \int_0^L \left(u^2 + \Phi(v) \right) dx + \mu^2 Y
\end{aligned}$$

を得る．ここで,

$$\begin{aligned}
&\int_0^L u^2\, dx \le L \|u\|_{L^\infty}^2 \le L \left(\int_0^L v^{1/2} \frac{|\partial_x u|}{v^{1/2}}\, dx \right)^2 \le L^2 V \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dx, \\
&\int_0^L \left(\frac{v}{\bar{v}} - 1 - \log \frac{v}{\bar{v}} \right) dx \le \int_0^L \left| \log \frac{v}{\bar{v}} \right| dx \le \frac{\mu^2 V}{a} \int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\, dx + \frac{L^3 a}{4\mu^2}
\end{aligned}$$

であるから,

$$G^{-1}(cE) \le c \left\{ L^2 \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dx + 2\mu^2 \int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\, dx + \frac{L^3 a^2}{4V\mu^2} \right\}$$

が導かれる．これと (4.1.5) をあわせると, 正の定数 C_1, C_2 が存在して,

$$\frac{dE}{dt}(t) + C_1 G^{-1}(cE(t)) \le C(V) \|F\|_{L^\infty}^2 + C_2$$

を得る．この微分不等式から,

$$\sup_t E(t) \le \max\{E(0), E_s\}, \quad E_s = \frac{1}{c} G\left(\frac{C(V) \sup_t \|F\|_{L^\infty}^2 + C_2}{C_1} \right)$$

がしたがう．理由は以下のとおりである．

- $E(0) > E_s$ の場合, G^{-1} は単調増加関数であるから, $E(t) \ge E_s$ である限り, $G^{-1}(cE(t)) \ge G^{-1}(cE_s) = \frac{C(V)\sup_t \|F\|_{L^\infty}^2 + C_2}{C_1}$ となる．したがって, 微分不等式より

$$\frac{dE}{dt}(t) \le C(V) \sup_t \|F\|_{L^\infty}^2 + C_2 - C_1 G^{-1}(cE(t)) \le 0$$

　となって $E(t)$ は減少し続けるから, $E(t) \le E(0)$, $t \ge 0$, である．

- $E(0) \le E_s$ の場合, $E(t_1) > E_s$ を満たす $t_1 > 0$ の存在を仮定すると, $E(t_2) > E_s$ かつ $\frac{dE}{dt}(t_2) > 0$ を満たす $t_2(< t_1)$ が存在する. ところが, 微分不等式を用いると,

$$\frac{dE}{dt}(t_2) \le C(V) \sup_t \|F\|_{L^\infty}^2 + C_2 - C_1 G^{-1}(cE(t_2)) \le 0$$

　となり矛盾が生じる. したがって, $E(t) \le E_s$, $t \ge 0$, である.

以上で $E(t)$ の有界性が示された. (3.1.22) より,

$$\left|\log \frac{v}{\bar{v}}\right| \le \int_0^L \left|\frac{\partial_x v}{v}\right| dx \le L^{1/2} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 dx\right)^{1/2} \le L^{1/2}(cE(t))^{1/2}$$

がしたがい,

$$\inf_{t,x} v(t,x) > 0, \quad \sup_{t,x} v(t,x) < \infty \tag{4.1.6}$$

が成り立つ. これより, ノルム $\|\partial_x v\|_{L^2}$ の有界性もしたがう.

最後に, ノルム $\|\partial_x u\|_{L^2}$ の有界性を示す. $p(v) = av^{-1}$ とおくと, 3.1.3 節と全く同様にして (3.1.24) が導かれる. (3.1.24) の辺々を ε^4 倍して (4.1.5) に加えると,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(E(t) + \varepsilon^4 \|\partial_x u\|_{L^2}^2\right) + \frac{\mu}{4} \int_0^L \left\{\frac{(\partial_x u)^2}{v} + a\frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\right\} dx \\
&\le C(V)\|F\|_{L^\infty}^2 + \varepsilon^3 \left(c_1 \|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \|F\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{4} c_2 \varepsilon \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \\
&\le C(V)\|F\|_{L^\infty}^2 + \varepsilon^3 \|F\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 c_1 \|v\|_{L^\infty}^3 \int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3} dx + \frac{1}{4} c_2 \|v\|_{L^\infty} \varepsilon \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v} dx.
\end{aligned}$$

さらに, $\varepsilon^3 \le \frac{a\mu}{8c_1\|v\|_{L^\infty}^3}$, $\varepsilon \le \frac{\mu}{2c_2\|v\|_{L^\infty}}$ を満たすように ε を取り直すと,

$$\frac{d}{dt}\left(E(t) + \varepsilon^4 \|\partial_x u\|_{L^2}^2\right) + \frac{\mu}{8} \int_0^L \left\{\frac{(\partial_x u)^2}{v} + a\frac{(\partial_x v)^2}{v^3}\right\} dx \le C(V)\|F\|_{L^\infty}^2 + \varepsilon^3 \|F\|_{L^2}^2.$$

ここで, (4.1.6) より, 定数 $c_3 > 0$ が存在して

$$\frac{v}{\bar{v}} - 1 - \log \frac{v}{\bar{v}} \le c_3 \left(\frac{v}{\bar{v}} - 1\right)^2 \le c_3 \frac{L\|v\|_{L^\infty}^2}{V} \int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^3} dx$$

が成り立つことと (3.1.22) に注意すれば, 正定数 c_4 を用いて, 微分不等式

$$\frac{d}{dt}\left(E(t) + \varepsilon^4 \|\partial_x u\|_{L^2}^2\right) + c_4 \left(E(t) + \varepsilon^4 \|\partial_x u\|_{L^2}^2\right) \le C(V)\|F\|_{L^\infty}^2 + \varepsilon^3 \|F\|_{L^2}^2$$

が導かれる. これにグローンウォールの補題を適用して, ノルム $\|\partial_x u\|_{L^2}$ の有界性が得られる.

以上より, 解軌道の H^1-有界性が得られた.

補題 4.1.1 $\gamma = 1$ とする. 方程式 (4.1.1) の解 (v, u) に関して

$$\sup_t \|v(t,\cdot)\|_{H^1} < \infty, \quad \sup_t \|u(t,\cdot)\|_{H^1} < \infty$$

である. さらに, v の下限に関して,

$$\inf_{t,x} v(t,x) > 0$$

が成り立つ.

4.1.2　等エントロピー流の場合

本論文で結論されるように, 等エントロピー流方程式については, 一般に, 有界な外力項に対して解の有界性がしたがうとは限らない. 解が無条件に H^1-有界となる等温流方程式とは異なり, 解の H^1-有界性を保障するには, 解に関する何らかの先験情報が必要である. 本小節では, $1 < \gamma \le 2$ の仮定のもと, v の値の上限に関する先験情報をもとに, 次の事実を証明する.

補題 4.1.2 $1 < \gamma \le 2$ とし, 方程式 (4.1.1) の解 (v, u) に関して

$$\sup_{t,x} v(t,x) < \infty$$

を仮定する. このとき,

$$\sup_t \|v(t,\cdot)\|_{H^1} < \infty, \quad \sup_t \|u(t,\cdot)\|_{H^1} < \infty$$

である. さらに, v の下限に関して,

$$\inf_{t,x} v(t,x) > 0$$

が成り立つ.

証明　$p(v) = av^{-\gamma}$ とおき, **補題4.1.1** の証明と同じく, (3.1.17) で $\Phi(v)$, (3.1.19) で $E(t)$, それぞれを定めると, (3.1.20) が導かれ,

$$\frac{dE}{dt}(t) + \frac{\mu}{2}\int_0^L \left\{ \frac{(\partial_x u)^2}{v} + a\gamma \frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}} \right\} dx = \int_0^L \left\{ Fu - \frac{\mu}{2} F \left(\frac{\partial_x v}{v} \right) \right\} dx \tag{4.1.7}$$

となる. 以下, 等式 (4.1.7) の右辺を評価する.

$$M = \sup_{t,x} v(t,x)$$

とおく. $\bar{v} = V$, $\bar{u} = 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^L Fu\,dx \right| &\le \int_0^L |Fu|\,dx \\
&\le L\|u\|_{L^\infty}\|F\|_{L^\infty} \\
&\le L\int_0^L v^{1/2}\frac{|\partial_x u|}{v^{1/2}}\,dx\|F\|_{L^\infty} \\
&\le L\left(\int_0^L v\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\right)^{1/2}\|F\|_{L^\infty} \\
&\le \frac{\mu}{4}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx + \frac{L^3 V}{\mu}\|F\|_{L^\infty}^2,
\end{aligned}$$

次に, $\gamma > 1$ に注意して $v \le M$ を用いると,

$$\left| \int_0^L \frac{\partial_x v}{v} F\,dx \right| \le \int_0^L \frac{|\partial_x v|}{v^{\gamma/2+1}} v^{\gamma/2}\,dx\|F\|_{L^\infty}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^L vv^{\gamma-1}\,dx\right)^{1/2}\|F\|_{L^\infty}\\
&\le \frac{a\gamma}{2}\int_0^L \frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx+\frac{LV}{2a\gamma}M^{\gamma-1}\|F\|_{L^\infty}^2.
\end{aligned}
$$

以上により, (4.1.7) から

$$
\frac{dE}{dt}(t)+\frac{\mu}{4}\int_0^L\left\{\frac{(\partial_x u)^2}{v}+a\gamma\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\right\}dx \le C(M,V)\|F\|_{L^\infty}^2 \tag{4.1.8}
$$

を得る. ここで, $C(M,V)=\left(\frac{L^2}{\mu}+\frac{M^{\gamma-1}\mu}{4a\gamma}\right)LV$ とおいた.

$E(t)$ に関する微分不等式を導くために, (4.1.8) の左辺第 2 項を用いて $E(t)$ を評価する. まず,

$$
\int_0^L u^2\,dx \le L\|u\|_{L^\infty}^2 \le L\left(\int_0^L v^{1/2}\frac{|\partial_x u|}{v^{1/2}}\,dx\right)^2 \le L^2V\int_0^L\frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx
$$

である. 次に,

$$
\int_0^L\left(\frac{\partial_x v}{v}\right)^2 dx \le \|v\|_{L^\infty}^{\gamma}\int_0^L\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx \le M^{\gamma}\int_0^L\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx
$$

である.

$$
\Phi(v)=a\left\{\left(\frac{v}{\bar v}-1\right)\bar v^{1-\gamma}-\frac{v^{1-\gamma}-\bar v^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}
$$

において, $x_0\in[0,L)$ を $v(t,x_0)=\bar v$ と選べば,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{v^{\gamma-1}}-\frac{1}{\bar v^{\gamma-1}}\right| &= \left|\int_{x_0}^x(1-\gamma)\frac{\partial_x v}{v^{\gamma}}\,dx\right|\\
&\le (\gamma-1)\int_0^L\left|v^{\frac{2-\gamma}{2}}\frac{\partial_x v}{v^{\frac{\gamma+2}{2}}}\right|dx\\
&\le (\gamma-1)\left(\int_0^L v^{2-\gamma}\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^L\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

となり, $\gamma\le 2$ に注意すると, $v\le M$ より

$$
\le (\gamma-1)(LM^{2-\gamma})^{1/2}\left(\int_0^L\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx\right)^{1/2}
$$

が成り立つ. このことから,

$$
\int_0^L\Phi(v)\,dx \le a(L^3M^{2-\gamma})^{1/2}\left(\int_0^L\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx\right)^{1/2}
$$

となる. 以上を (3.1.22) とあわせると, V, M で定まる定数 $C_3>0$ と, M で定まる定数 $C_4>0$ が存在して

$$
E(t)\le C_3\int_0^L\left\{\frac{(\partial_x u)^2}{v}+a\gamma\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\right\}dx+C_4
$$

と評価され, (4.1.8) から $E(t)$ に関する微分不等式

$$\frac{dE}{dt}(t)+\frac{\mu}{4C_3}E(t)\le\frac{C_4\mu}{4C_3}+C(M,V)\|F\|_{L^\infty}^2$$

を得る. これにグロンウォールの補題を適用すれば,

$$E(t)\le e^{-\frac{\mu}{4C_3}t}E(0)+C_4+\frac{4C_3}{\mu}C(M,V)\|F\|_{L^\infty}^2$$

がしたがい, $E(t)$ は有界である. これと, (3.1.22) より

$$\inf_{t,x}v(t,x)>0,\quad \sup_{t,x}v(t,x)<\infty$$

および, ノルム $\|\partial_x v\|_{L^2}$ の有界性がしたがう.

最後に, $\|\partial_x u\|_{L^2}$ の有界性を示す. $p(v)=av^{-\gamma}$ とおくと, 3.1.3 節の結果, (3.1.24) が導かれる. これと (4.1.8) とをあわせ, 正定数 c_5 が存在して

$$\left(\frac{v}{\bar v}-1\right)\bar v^{1-\gamma}-\frac{v^{1-\gamma}-\bar v^{1-\gamma}}{1-\gamma}\le c_5\left(\frac{v}{\bar v}-1\right)^2\le\frac{c_5L\|v\|_{L^\infty}^{\gamma+1}}{V}\int_0^L\frac{(\partial_x v)^2}{v^{\gamma+2}}\,dx$$

が成り立つこと, および (3.1.22) を用いれば, **補題4.1.1** の証明と同様にして $\|\partial_x u\|_{L^2}$ の有界性が導かれる. □

4.2　解軌道のオメガ極限と平衡解

本節では, 方程式 (4.1.1) において, 外力項 F として流体の自己重力

$$F(t,x)=-\frac{4\pi G}{\bar v}\partial_x\int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-\bar v)\,dy$$

をとり, 自己重力流体の等温流または等エントロピー流の方程式

$$\begin{cases}\partial_t v-\partial_x u=0,\\ \partial_t u+\partial_x(av^{-\gamma})-\mu\partial_x\left(\dfrac{\partial_x u}{v}\right)=-\dfrac{4\pi G}{\bar v}\partial_x\displaystyle\int_0^L K_L(\,\cdot\,,y)(v(t,y)-\bar v)\,dy\end{cases}\tag{4.2.1}$$

の有界な解の長時間挙動を調べる. F は条件 (4.1.2) を満たす. (2.2.7) より $\partial_x K_L(x,y)$ は有界であり, これと v の正値性を合わせると, F は有界性 (4.1.3) も満たしている. したがって, 等温流の場合は**補題4.1.1** より, 等エントロピー流の場合は**補題4.1.2** より, 解軌道の H^1-有界性と $\inf_{t,x}v(t,x)>0$ が保証されている. このことをもとに, 本節では, 自己重力流体方程式に付随するエネルギー形式の諸性質を用いて, 解軌道のオメガ極限集合が方程式の平衡解の集合に含まれることを示す.

本論文で扱う, (v_0,u_0) を始点とする解軌道のオメガ極限集合とは, L-周期的な連続関数の空間 $C^0_{\rm per}$ で考えた解軌道の極限点全体の集合のことで, 連続関数空間において解軌道の部分の閉包をとることにより, 次のように定義される:

$$\omega(v_0,u_0)=\bigcap_{s\ge0}\overline{\{(v(t,\cdot\,),u(t,\cdot\,));t\ge s\}}^{C^0_{\rm per}\times C^0_{\rm per}}.$$

空間 H^1_{per} は C^0_{per} にコンパクトに埋め込まれているから ([1] を参照のこと), 方程式 (4.2.1) の H^1-有界な解の軌道は $C^0_{\mathrm{per}} \times C^0_{\mathrm{per}}$ の相対コンパクト集合であり, したがって, そのオメガ極限集合は空でないコンパクト集合となる.

H^1-有界な解軌道に関して次の命題が成り立つ.

命題 4.2.1 方程式 (4.2.1) について $1 \leq \gamma \leq 2$ を仮定し, $1 < \gamma \leq 2$ の場合は, 解 (v, u) に

$$\sup_{t,x} v(t,x) < \infty$$

を仮定する. このとき, $\omega(v_0, u_0) \neq \emptyset$ である. $(v_\omega, u_\omega) \in \omega(v_0, u_0)$ について,

- $u_\omega = 0$ である.
- $v_\omega > 0$, $v_\omega \in C^\infty_{\mathrm{per}}$ であって,

$$\partial_x (a v_\omega(x)^{-\gamma}) = -\frac{4\pi G}{\overline{v_\omega}} \partial_x \int_0^L K_L(x,y)(v_\omega(y) - \overline{v_\omega})\, dy \tag{4.2.2}$$

  を満たす. すなわち, (v_ω, u_ω) は方程式 (4.2.1) の平衡解である.

命題を示すために, 補題をふたつ用意する.

補題 4.2.1 $(v_\omega, u_\omega) \in \omega(v_0, u_0)$ に対して,

$$1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_j < t_{j+1} < \dots, \quad \lim_{j\to\infty} t_j = \infty$$

を満たし, C^0_{per} において,

$$\lim_{j\to\infty} v(t_j, \cdot) = v_\omega, \quad \lim_{j\to\infty} u(t_j, \cdot) = u_\omega,$$

となるような列 $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ が存在する.

証明 $C^0_{\mathrm{per}} \times C^0_{\mathrm{per}}$ における距離を d で表す. 任意の $\varepsilon > 0$, $s \geq 0$ に対して, 点 (v_ω, u_ω) の ε 近傍に解軌道上の点 $(v(t,\cdot), u(t,\cdot))$, $t \geq s$, が存在する. このことから以下の手順で列 $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ を選び出す.

はじめに, $t_1 \geq 1$ なる t_1 が存在して

$$d((v(t_1,\cdot), u(t_1,\cdot)), (v_\omega, u_\omega)) \leq \frac{1}{1}$$

が成り立つ. 次に, $t_2 \geq t_1 + 1$ なる t_2 が存在して

$$d((v(t_2,\cdot), u(t_2,\cdot)), (v_\omega, u_\omega)) \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つ. これを繰り返すと $t_j \geq t_{j-1} + 1$ なる t_j が存在して

$$d((v(t_j,\cdot), u(t_j,\cdot)), (v_\omega, u_\omega)) \leq \frac{1}{j}$$

が成り立つ. このとき, 明らかに, $C^0_{\mathrm{per}} \times C^0_{\mathrm{per}}$ において

$$\lim_{j\to\infty} (v(t_j,\cdot), u(t_j,\cdot)) = (v_\omega, u_\omega)$$

が成り立つ. □

エネルギー形式　L-周期関数 (v,u), $v>0$ に対して,

$$\Phi(v)=\begin{cases} a\left(\dfrac{v}{\bar v}-1-\log\dfrac{v}{\bar v}\right), & \gamma=1,\\ a\left\{\left(\dfrac{v}{\bar v}-1\right)\bar v^{1-\gamma}-\dfrac{v^{1-\gamma}-\bar v^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}, & \gamma>1,\end{cases}$$

とおき, 適当な可積分性を仮定して

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(v,u)&=\frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2+\mathcal{E}(v),\\ \mathcal{E}(v)&=\int_0^L\Phi(v)\,dx-\frac{2\pi G}{\bar v}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(v(x)-\bar v)(v(y)-\bar v)\,dxdy\end{aligned}$$

と定める. この形式を方程式 (4.2.1) に付随するエネルギー形式とよぶ. エネルギー形式は, 解軌道のオメガ極限と平衡の関係を調べるうえで有用であるばかりでなく, 第 5 章で示すように, 平衡解の安定性を論じる際にも重要な役割を果たす.

このようなエネルギー形式がもつ特性は, 方程式 (4.2.1) の解 (v,u) に対して, 解軌道上の各点でエネルギー形式の値をとってその変化を調べることで見出される. 実際,

$$E(t)=\mathcal{E}(v(t,\cdot),u(t,\cdot)) \tag{4.2.3}$$

により $t\ge 0$ の関数を定めると次が成り立つ.

補題 4.2.2　(i) $t\mapsto E(t)$ は単調減少関数であって,

$$\lim_{t\to\infty}E(t)=\inf_t E(t)=E(0)-\mu\int_0^\infty\int_0^L\frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dxdt$$

は有限値である.

(ii) $(v_\omega,u_\omega)\in\omega(v_0,u_0)$ に対して, $\lim_{t\to\infty}E(t)=\mathcal{E}(v_\omega,u_\omega)$.

証明　(i) 一般に, $v\in C^0_{\mathrm{per}}$, $v>0$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(v)&\ge-\frac{2\pi G}{\bar v}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(v(x)-\bar v)(v(y)-\bar v)\,dxdy\\ &=-\frac{2\pi G}{\bar v}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)v(x)v(y)\,dxdy\\ &\ge-2\pi GL^2\max_{x,y}|K_L(x,y)|\bar v^2\end{aligned}$$

が成り立つ. $\bar v$ の保存に注意すると, $\inf_t E(t)>-\infty$ である.

次に, $E(t)$ を微分し,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}(t)=&\int_0^L\left(u(t,x)\partial_t u(t,x)-\partial_t v(t,x)av(t,x)^{-\gamma}\right)\,dx\\ &-\frac{2\pi G}{\bar v}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\left\{\partial_t v(t,x)(v(t,y)-\bar v)+(v(t,x)-\bar v)\partial_t v(t,y)\right\}\,dxdy\end{aligned}$$

において, 方程式 (4.2.1) の第 2 式と対称性 $K_L(x,y)=K_L(y,x)$ を用いると,

$$= \int_0^L \left[u(t,x) \left\{ -\partial_x \left(av(t,x)^{-\gamma} \right) + \mu \partial_x \left(\frac{\partial_x u(t,x)}{v(t,x)} \right) - \frac{4\pi G}{\bar{v}} \partial_x \int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-\bar{v})\, dy \right\} \right.$$
$$\left. - \partial_t v(t,x) a v(t,x)^{-\gamma} \right] dx - \frac{4\pi G}{\bar{v}} \int_0^L \int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-\bar{v}) \partial_t v(t,x)\, dxdy$$

となる. 部分積分すると,

$$= \int_0^L \left\{ \partial_x u(t,x) \left(av(t,x)^{-\gamma} - \mu \frac{\partial_x u(t,x)}{v(t,x)} + \frac{4\pi G}{\bar{v}} \int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-\bar{v})\, dy \right) \right.$$
$$\left. - \partial_t v(t,x) a v(t,x)^{-\gamma} \right\} dx - \frac{4\pi G}{\bar{v}} \int_0^L \partial_t v(t,x) \left(\int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-\bar{v})\, dy \right) dx$$

となり, 方程式 (4.2.1) の第 1 式を用いると,

$$= -\mu \int_0^L \frac{(\partial_x u(t,x))^2}{v(t,x)}\, dx,$$

つまり,

$$\frac{dE}{dt} = -\mu \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dx \le 0 \tag{4.2.4}$$

を得る. とくに, 関数 $t \mapsto E(t)$ は単調に減少する.

等式 (4.2.4) の辺々を区間 $[0,s]$ 上で積分すると,

$$E(s) = E(0) - \mu \int_0^s \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dxdt$$

となり, $s \to \infty$ の極限をとって

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \inf_t E(t) = E(0) - \mu \int_0^\infty \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dxdt$$

を得る.

(ii) 補題**4.2.1** の列 $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{j\to\infty} E(t_j)$$

が成り立つ. 積分の収束定理を用いて,

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} E(t_j) &= \int_0^L \lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{2} u(t_j,x)^2 + \Phi(t_j,x) \right) dx \\
&\quad - \frac{2\pi G}{\bar{v}} \int_0^L \int_0^L K_L(x,y) \lim_{j\to\infty} \{ (v(t_j,x)-\bar{v})(v(t_j,y)-\bar{v}) \}\, dxdy \\
&= \int_0^L \left(\frac{1}{2} u_\omega(x)^2 + \Phi(v_\omega(x)) \right) dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \frac{2\pi G}{\bar{v}} \int_0^L \int_0^L K_L(x,y)(v_\omega(x) - \bar{v})(v_\omega(y) - \bar{v})\, dxdy \\
&= \mathcal{E}(v_\omega, u_\omega)
\end{aligned}
$$

を得る. □

命題 4.2.1 の証明　すでに示したように, $\omega(v_0, u_0) \neq \emptyset$ である. また, **補題4.1.1**, **4.1.2** より,

$$v(t,x) \geq \inf_{t,x} v(t,x) > 0$$

であるから, **補題4.2.1** の列 $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ に沿って極限をとれば,

$$v_\omega(x) = \lim_{j\to\infty} v(t_j, x) \geq \inf_{t,x} v(t,x) > 0$$

となり, $\inf_x v_\omega(x) > 0$ がしたがう.

$u_\omega = 0$ を示すために, $E(t)$ を区間 $[t_j, t_j+1]$ 上で積分し,

$$\int_{t_j}^{t_j+1} E(s)\, ds = \mathcal{E}(v(t_j,\,\cdot\,)) + \int_{t_j}^{t_j+1} (E(s) - \mathcal{E}(v(t_j,\,\cdot\,)))\, ds \tag{4.2.5}$$

と表す. **補題4.2.2** (ii) より,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{t_j}^{t_j+1} E(s)\, ds = \mathcal{E}(v_\omega, u_\omega)$$

であり, 積分の収束定理を用いれば,

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{E}(v(t_j,\,\cdot\,)) = \mathcal{E}(v_\omega)$$

がしたがう. (4.2.5) の右辺第 2 項は, 次の 3 項 (I), (II), (III) の和で表される:

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} &= \frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L u(t,x)^2\, dx\, dt, \\
\text{(II)} &= \begin{cases} -a \displaystyle\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \log \frac{v(t,x)}{v(t_j,x)}\, dx\, dt, & \gamma = 1, \\ -a \displaystyle\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{v(t,x)^{1-\gamma} - v(t_j,x)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\, dx\, dt, & \gamma > 1, \end{cases} \\
\text{(III)} &= -\frac{2\pi G}{\bar{v}} \int_{t_j}^{t_j+1} \left(\mathcal{K}[v(t,\,\cdot\,)] - \mathcal{K}[v(t_j,\,\cdot\,)]\right) dt.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$\mathcal{K}[v] = \int_0^L \int_0^L K_L(x,y)(v(x) - \bar{v})(v(y) - \bar{v})\, dxdy = \int_0^L \int_0^L K_L(x,y) v(x) v(y)\, dxdy$$

である. $j \to \infty$ のとき, これら 3 項が 0 に収束することを示す.

(I) について: $\bar{u}=0$ より, $\|u\|_{L^\infty} \le \int_0^L |\partial_x u|\,dx$ に注意すると,

$$\int_0^L u^2\,dx \le L\|u\|_{L^\infty}^2 \le L\left(\int_0^L v^{1/2}\frac{|\partial_x u|}{v^{1/2}}\,dx\right)^2 \le L^2\bar{v}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx$$

となり,

$$\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L u^2\,dxdt \le L^2\bar{v}\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dxdt \tag{4.2.6}$$

がしたがう. ここで, **補題4.2.2** (i) より, $\int_0^\infty\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\,dt < \infty$, したがって,

$$\lim_{j\to\infty}\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\,dt = 0 \tag{4.2.7}$$

となるから, $j\to\infty$ のとき, (I) の極限は 0 である.

(II) について: $m=\inf_{t,x} v(t,x)$ とおく. 方程式 $\partial_t v = \partial_x u$ を用いると, $t_j \le t \le t_j+1$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^L \log\frac{v(t,x)}{v(t_j,x)}\,dx\right|, \quad \left|\int_0^L \frac{v(t,x)^{1-\gamma}-v(t_j,x)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,dx\right| \\
&= \left|\int_0^L\int_{t_j}^t v(s,x)^{-\gamma}\partial_t v(s,x)\,ds\,dx\right| \\
&= \left|\int_{t_j}^t\int_0^L v(s,x)^{-\gamma+1/2}\frac{\partial_x u(s,x)}{v(s,x)^{1/2}}\,dx\,ds\right| \\
&\le \left(\int_{t_j}^t\int_0^L v(s,x)^{-2\gamma+1}\,dx\,ds\right)^{1/2}\left(\int_{t_j}^t\int_0^L \frac{\partial_x u(s,x)^2}{v(s,x)}\,dx\,ds\right)^{1/2} \\
&\le m^{-\gamma}(L\bar{v})^{1/2}\left(\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{\partial_x u(t,x)^2}{v(t,x)}\,dx\,dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

と評価され,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \log\frac{v(t,x)}{v(t_j,x)}\,dx\,dt\right|, \quad \left|\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{v(t,x)^{1-\gamma}-v(t_j,x)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,dx\,dt\right| \\
&\le m^{-\gamma}(L\bar{v})^{1/2}\left(\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{\partial_x u(t,x)^2}{v(t,x)}\,dx\,dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 再び (4.2.7) を用いると, $j\to\infty$ のとき, (II) の極限は 0 である.

(III) について: $K_L(x,y)=K_L(y,x)$ ならびに, $\partial_t v = \partial_x u$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{K}[v(t,\cdot)] &= \int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\left\{\partial_t v(t,x)v(t,y)+v(t,x)\partial_t v(t,y)\right\}\,dxdy \\
&= 2\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)v(t,y)\partial_x u(t,x)\,dxdy
\end{aligned}$$

となる．これより, $t_j \le t \le t_j+1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{K}[v(t,\,\cdot)] - \mathcal{K}[v(t_j,\,\cdot)]| &= \left| \int_{t_j}^{t} \frac{d}{ds}\mathcal{K}[v(s,\,\cdot)]\,ds \right| \\
&= 2\left| \int_{t_j}^{t} \int_0^L \int_0^L K_L(x,y) v(s,y) \partial_x u(s,x)\,dxdy\,ds \right| \\
&\le 2\max_{x,y}|K_L(x,y)| \int_{t_j}^{t} \left(\int_0^L v(s,y)\,dy \int_0^L |\partial_x u(s,x)|\,dx \right) ds \\
&= 2\max_{x,y}|K_L(x,y)| L\bar{v} \int_{t_j}^{t} \int_0^L |\partial_x u(s,x)|\,dx\,ds \\
&\le 2\max_{x,y}|K_L(x,y)| (L\bar{v})^{3/2} \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{\partial_x u(t,x)^2}{v(t,x)}\,dx\,dt \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

と評価され,

$$
\left| \int_{t_j}^{t_j+1} \left(\mathcal{K}[v(t,\,\cdot)] - \mathcal{K}[v(t_j,\,\cdot)] \right) dt \right| \le 2\max_{x,y}|K_L(x,y)| (L\bar{v})^{3/2} \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{\partial_x u(t,x)^2}{v(t,x)}\,dx\,dt \right)^{1/2}
$$

が成り立つ．再度, (4.2.7) を用いると, $j \to \infty$ のとき, (III) の極限は 0 となる．

以上, (4.2.5) の辺々の極限をとると, $\mathcal{E}(v_\omega, u_\omega) = \mathcal{E}(v_\omega)$ となり, $\|u_\omega\|_{L^2} = 0$, すなわち, $u_\omega = 0$ がしたがう．

最後に, v_ω が滑らかで, (4.2.2) を満たすことを示す．まず, 超関数の意味で等式 (4.2.2) が成り立つことを示す．

$$
\theta \ge 0, \quad \operatorname{supp}\theta \subset [0,1], \quad \int_0^1 \theta(t)\,dt = 1
$$

を満たす $\theta \in C^\infty$ をとり, $\phi \in C^\infty_{\mathrm{per}}$ を試験関数として, 方程式 (4.2.1) の第 2 式の両辺に $\theta(t-t_j)\phi(x)$ をかけて $[t_j, t_j+1] \times [0,L]$ 上で積分する．部分積分すると,

$$
\begin{aligned}
&- \int_{t_j}^{t_j+1} \theta'(t-t_j) \int_0^L \phi(x) u(t,x)\,dx\,dt \\
&\quad - \int_{t_j}^{t_j+1} \theta(t-t_j) \int_0^L \phi'(x) \left(a v(t,x)^{-\gamma} - \mu \frac{\partial_x u(t,x)}{v(t,x)} \right) dx\,dt \\
&= \frac{4\pi G}{\bar{v}} \int_{t_j}^{t_j+1} \theta(t-t_j) \int_0^L \phi'(x) \int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-\bar{v})\,dydx\,dt
\end{aligned}
$$

となり, $\int_{t_j}^{t_j+1} \theta(t-t_j)\,dt = 1$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^L \phi'(x) \left(a v(t_j,x)^{-\gamma} + \frac{4\pi G}{\bar{v}} \int_0^L K_L(x,y)(v(t_j,y)-\bar{v})\,dy \right) dx \\
&= \int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \theta'(t-t_j)\phi(x) u(t,x)\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \mu \int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \theta(t-t_j)\phi'(x) \frac{\partial_x u(t,x)}{v(t,x)}\, dxdt \\
&+ a \int_{t_j}^{t_j+1} \theta(t-t_j) \int_0^L \phi'(x) \left(v(t,x)^{-\gamma} - v(t_j,x)^{-\gamma} \right)\, dx\, dt \\
&+ \frac{4\pi G}{\bar{v}} \int_{t_j}^{t_j+1} \theta(t-t_j) \int_0^L \phi'(x) \int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-v(t_j,y))\, dydx\, dt
\end{aligned} \tag{4.2.8}
$$

が得られる. $j \to \infty$ のとき, 等式 (4.2.8) の右辺の各項が 0 に収束することを示す. まず, 右辺第 1 項は, (4.2.6) を用いて

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \theta'(t-t_j)\phi(x)u(t,x)\, dx\, dt \right| \\
&\le \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \theta'(t-t_j)^2 \phi(x)^2\, dx\, dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L u(t,x)^2\, dx\, dt \right)^{1/2} \\
&\le \left(\int_0^1 \theta'(t)^2\, dt \int_0^L \phi(x)^2\, dx \right)^{1/2} \left(L^2 \bar{v} \int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dx\, dt \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

と評価する. 同様に, 右辺第 2 項は,

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \theta(t-t_j)\phi'(x) \frac{\partial_x u(t,x)}{v(t,x)}\, dx\, dt \right| \\
&\le \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{\theta(t-t_j)^2 \phi'(x)^2}{v(t,x)}\, dx\, dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{\partial_x u(t,x)^2}{v(t,x)}\, dx\, dt \right)^{1/2} \\
&\le m^{-1} \left(\int_0^1 \theta(t)^2\, dt \int_0^L \phi'(x)^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dx\, dt \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

と評価される. 右辺第 3 項については, 方程式 $\partial_t v = \partial_x u$ を用いると, $t_j \le t \le t_j + 1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_0^L \phi'(x) \left(v(t,x)^{-\gamma} - v(t_j,x)^{-\gamma} \right)\, dx \right| \\
&= \left| \int_0^L \phi'(x) \int_{t_j}^t (-\gamma) v(s,x)^{-\gamma} \partial_t v(s,x)\, ds\, dx \right| \\
&= \gamma \left| \int_{t_j}^t \int_0^L \phi'(x) v(s,x)^{-\gamma+1/2} \frac{\partial_x u(s,x)}{v(s,x)^{1/2}}\, dx\, ds \right| \\
&\le \gamma \left(\int_{t_j}^t \int_0^L \phi'(x)^2 v(s,x)^{-2\gamma+1}\, dx\, ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_j}^t \int_0^L \frac{\partial_x u(s,x)^2}{v(s,x)}\, dx\, ds \right)^{1/2} \\
&\le \gamma m^{-\gamma+1/2} \left(\int_0^L \phi'(x)^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{t_j}^{t_j+1} \int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\, dx\, dt \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

が成り立ち,

$$
\left| \int_{t_j}^{t_j+1} \theta(t-t_j) \int_0^L \phi'(x) \left(v(t,x)^{-\gamma} - v(t_j,x)^{-\gamma} \right)\, dx\, dt \right|
$$

$$\le \gamma m^{-\gamma+1/2}\left(\int_0^L \phi'(x)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\,dt\right)^{1/2}$$

と評価される. 右辺第 4 項についても, $t_j \le t \le t_j+1$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-v(t_j,y))\,dy\right|\\
&=\left|\int_0^L K_L(x,y)\int_{t_j}^t \partial_t v(s,y)\,ds\,dy\right|\\
&\le \max_{x,y}|K_L(x,y)|\int_{t_j}^t\int_0^L |\partial_x u(s,y)|\,dy\,ds\\
&\le \max_{x,y}|K_L(x,y)|(L\bar{v})^{1/2}\left(\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\,dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

より次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_j}^{t_j+1}\theta(t-t_j)\int_0^L \phi'(x)\int_0^L K_L(x,y)(v(t,y)-v(t_j,y))\,dydx\,dt\right|\\
&\le \max_{x,y}|K_L(x,y)|(L\bar{v})^{1/2}\int_0^L|\phi'(x)|\,dx\left(\int_{t_j}^{t_j+1}\int_0^L \frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\,dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

これらの評価から, (4.2.7) により, いずれの項も $j\to\infty$ のとき, 0 に収束する.

以上より, $j\to\infty$ として, 等式 (4.2.8) の辺々の極限をとり, $\overline{v_\omega}=\bar{v}$ に注意すると,

$$-\int_0^L \phi'(x)\left(av_\omega(x)^{-\gamma}+\frac{4\pi G}{\overline{v_\omega}}\int_0^L K_L(x,y)(v_\omega(y)-\overline{v_\omega})\,dy\right)dx=0,$$

すなわち, 超関数の意味で等式 (4.2.2) の成立が示された. v_ω は連続関数であるから, この等式から, $\partial_x(av_\omega{}^{-\gamma})\in C_{\mathrm{per}}$ であり, $v_\omega\in C^2_{\mathrm{per}}$ がしたがう. この議論を繰り返して, v_ω は C^∞ 級で方程式 (4.2.2) を満たすことが結論される. □

第 5 章　平衡解と安定性

4.2 節で調べたように, $1 \leq \gamma < 2$ の場合, 自己重力流体方程式の有界な解について, 解軌道のオメガ極限集合は方程式の平衡解の集合に含まれる．このことから, 等温流方程式の解の長時間挙動は平衡に支配される．一方, 等エントロピー流方程式に対して, 解が有界でこのような長時間挙動を示すかどうかを判定するには, 平衡解の集合付近での解の挙動を観察することが必要になってくる．本章では, このような観点にたって自己重力流体方程式の平衡解全体の構造と平衡解の安定性を調べる．

5.1　平衡解の分岐

自己重力流体の等温流または等エントロピー流の方程式

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x (av^{-\gamma}) - \mu \partial_x \left(\dfrac{\partial_x u}{v} \right) = -\dfrac{4\pi G}{\bar{v}} \partial_x \displaystyle\int_0^L K_L(\,\cdot\,, y)(v(t,y) - \bar{v})\, dy \end{cases} \tag{5.1.1}$$

について, その定常問題は, L-周期関数 $v > 0$, u に関する方程式系

$$\begin{cases} \partial_x u(x) = 0 \\ \partial_x \left(av(x)^{-\gamma} \right) - \mu \partial_x \left(\dfrac{\partial_x u(x)}{v(x)} \right) = -\dfrac{4\pi G}{\bar{v}} \partial_x \displaystyle\int_0^L K_L(x,y)(v(y) - \bar{v})\, dy \end{cases}$$

である．第 1 式より u は定数である．これと第 2 式から v に関する方程式

$$\partial_x \left(av(x)^{-\gamma} \right) = -\frac{4\pi G}{\bar{v}} \partial_x \int_0^L K_L(x,y)(v(y) - \bar{v})\, dy \tag{5.1.2}$$

が得られる．これは定数 u の値に依らないから, $u = 0$ の平衡解の方程式とみてよい．v の L-周期性のもと, 方程式 (5.1.2) はその両辺を x で微分して得られる方程式

$$\partial_x^2 \left(av(x)^{-\gamma} \right) = \frac{4\pi G}{\bar{v}} (v(x) - \bar{v}). \tag{5.1.3}$$

と同値である．なぜなら, (5.1.3) 式の両辺を積分すると,

$$\partial_x \left(av(x)^{-\gamma} \right) = -\frac{4\pi G}{\bar{v}} \partial_x \int_0^L K_L(x,y)(v(y) - \bar{v})\, dy + C \quad (C : \text{積分定数})$$

となり, さらに区間 $[0, L]$ 上で積分すると, v ならびに $K_L(x,y)$ の変数 x に関する L-周期性により,

$$0 = CL$$

となり, $C=0$ が導かれるからである. さらに, 条件 $\bar{v}=V$ のもとで方程式 (5.1.3) は,

$$\partial_x^2\left(av(x)^{-\gamma}\right)=\frac{4\pi G}{V}(v(x)-V) \tag{5.1.4}$$

とも同値である. (5.1.3) から (5.1.4) がしたがうことは自明. (5.1.4) から (5.1.3) がしたがうのは, 方程式 (5.1.4) の両辺を区間 $[0,L]$ 上で積分することによって $\bar{v}=V$ が導けるからである. 以上により, 定常問題は, 条件 $\bar{v}=V$ のもとで方程式 (5.1.4) の正値の L-周期解を求める問題に帰着された.

本節では, 正の定数 V に対して, $\bar{v}=V$ を満たす方程式 (5.1.4) の正値 L-周期解 v を探索する. この問題を解くために未知関数の変換を行う. $w(x)=\frac{v(x)-V}{V}$ とおくと, 方程式 (5.1.4) は

$$\partial_x^2\left\{(1+w(x))^{-\gamma}\right\}=\frac{4\pi GV^\gamma}{a}w(x) \tag{5.1.5}$$

となる. ここで, $w(x)$ は L-周期的で, $w(x)>-1$ である. さらに, $r(x)=(1+w(x))^{-\gamma}-1$ とおくと, 方程式 (5.1.5) は

$$\partial_x^2 r(x)=\frac{4\pi GV^\gamma}{a}\left\{(1+r(x))^{-1/\gamma}-1\right\}$$

となる. $r(x)$ は L-周期的で, $r(x)>-1$ である.

$$\lambda=\frac{4\pi GV^\gamma}{a},\quad f(r)=1-(1+r)^{-1/\gamma}$$

とおくと, これは,

$$\partial_x^2 r(x)+\lambda f(r(x))=0 \tag{5.1.6}$$

と表せる. 関数 f は区間 $(-1,\infty)$ 上 C^∞ 級であり, $f(0)=0$, $f'(0)=1/\gamma>0$ を満たす. 明らかに, 方程式 (5.1.6) は自明解 $r(x)\equiv 0$ をもつ.

5.1.1　局所的分岐解

本小節では, 適当な関数空間の枠組みで方程式 (5.1.6) を捉え, 自明解 $r=0$ からの分岐という観点に立って非自明解 $r\neq 0$ をさがす. まず問題の reduction を行う. r の周期性から r はある x_0 で最大となり, $\partial_x r(x_0)=0$ が成り立つ. $\tilde{r}(x)=r(x+x_0)$ とおくと, $\tilde{r}$ は,

$$\begin{cases}\partial_x^2\tilde{r}(x)+\lambda f(\tilde{r}(x))=0,\\ \tilde{r}(0)=r(x_0),\ \ \partial_x\tilde{r}(0)=0\end{cases}$$

を満たす. 一方, $\hat{r}(x)=\tilde{r}(-x)$ とおくと, $\hat{r}$ もまた,

$$\begin{cases}\partial_x^2\hat{r}(x)+\lambda f(\hat{r}(x))=0,\\ \hat{r}(0)=r(x_0),\ \ \partial_x\hat{r}(0)=0\end{cases}$$

を満たす. 微分方程式 (5.1.6) の初期値問題の解の一意性により, $\hat{r}(x)=\tilde{r}(x)$, すなわち, $\tilde{r}(-x)=\tilde{r}(x)$ が成り立ち, $\tilde{r}$ は偶関数である. このことは, 方程式 (5.1.6) の L-周期解は偶関数解をシフトすることによって得られることを示している. 以上により, 方程式 (5.1.6) の非自明解を偶関数の範囲でさがすことにする.

整数 $p = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, p 回連続的微分可能 L-周期的な偶関数がなす空間を

$$C^p_{\mathrm{per,even}} = \{r \in C^p\,;\, r(x) = r(x+L),\, r(x) = r(-x)\}$$

で表す.

$$X = C^2_{\mathrm{per,even}}, \quad Z = C^0_{\mathrm{per,even}}$$

とおき, X の開集合 $\{r \in X; r > -1\}$ を Ω として, $\mathbf{R} \times \Omega$ 上で定義され, Z に値をとる作用素 H を

$$H(\lambda, r) = \partial_x^2 r + \lambda f(r)$$

と定めて, 関数方程式

$$H(\lambda, r) = 0 \tag{5.1.7}$$

として問題を定式化する.

関数方程式 (5.1.7) に Crandall-Rabinowitz の分岐理論 [5] を適用する. このために, まず,

- $H \in C^2$, すなわち, 作用素 H が 2 回連続的に Fréchet 微分可能であることを示し,

次に,

- $\ker(D_r H(\lambda, 0)) \neq \{0\}$ を満たす λ を求め,

このような λ について

- $\dim \ker(D_r H(\lambda, 0)) = \mathrm{codim}\ R(D_r H(\lambda, 0)) = 1$,
- $h \in \ker(D_r H(\lambda, 0)) \setminus \{0\}$ に対して $D_{\lambda r} H(\lambda, 0) h \notin R(D_r H(\lambda, 0))$

が成立することを確かめる.

はじめに, $H \in C^2$ を示す. $\lambda \in \mathbf{R}$, $r \in \Omega$, および, ノルム $\|h\|_X$ が十分小さな $h \in X$ に対して,

$$\begin{aligned}
H(\lambda, r+h)(x) - H(\lambda, r)(x) &= \big(\partial_x^2(r(x) + h(x)) + \lambda f(r(x) + h(x))\big) - \big(\partial_x^2 r(x) + \lambda f(r(x))\big) \\
&= \partial_x^2 h(x) + \lambda\left(f(r(x) + h(x)) - f(r(x))\right) \\
&= \partial_x^2 h(x) + \lambda\left(f'(r(x))h(x) + \frac{1}{2} f''(r(x) + \varepsilon h(x)) h(x)^2\right)
\end{aligned}$$

と表す. ここで, ε は 0 と 1 のあいだの数である. これより

$$\big\|H(\lambda, r+h) - H(\lambda, r) - \partial_x^2 h - \lambda f'(r) h\big\|_Z \leq \frac{1}{2}|\lambda| \max_s |f''(s)| \|h\|_X^2$$

ここで, $|f''(s)|$ の最大値は $\min r - \|h\|_{L^\infty} \leq s \leq \max r + \|h\|_{L^\infty}$ の範囲でとるものとする. この評価から, H は r に関して Fréchet 微分可能であって,

$$D_r H(\lambda, r) h = \partial_x^2 h + \lambda f'(r) h, \quad h \in X,$$

となる. 次に, $r \in \Omega$, $h_1, h_2 \in X$, $\|h_2\|_X$ は十分小, に対して, 0 と 1 のあいだの数 ε を用いて

$$(D_r H(\lambda, r + h_2) h_1)(x) - (D_r H(\lambda, r) h_1)(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\left(f'(r(x)+h_2(x))h_1(x) - f'(r(x))h_1(x)\right) \\
&= \lambda\left(f''(r(x))h_1(x)h_2(x) + \frac{1}{2}f'''(r(x)+\varepsilon h_2(x))h_1(x)h_2(x)^2\right)
\end{aligned}
$$

と表せるから,

$$
\|D_rH(\lambda, r+h_2)h_1 - D_rH(\lambda, r)h_1 - \lambda f''(r)h_1h_2\|_Z \le \frac{1}{2}|\lambda|\max_s|f'''(s)|\|h_1\|_X\|h_2\|_X^2.
$$

したがって, $D_rH(\lambda, r)$ は r に関して Fréchet 微分可能であって,

$$
D_r^2H(\lambda, r)[h_1, h_2] = \lambda f''(r)h_1h_2, \quad h_1, h_2 \in X.
$$

同様にして,

$$
D_\lambda H(\lambda, r) = f(r), \qquad D_\lambda^2 H(\lambda, r) = 0, \qquad D_{\lambda r}H(\lambda, r)h = f'(r)h, \quad h \in X,
$$

がしたがう. さらに微分を繰り返して, 実は $H \in C^\infty$ であることが示せる.

次に, $\ker(D_rH(\lambda, 0)) \ne \{0\}$ を満たす λ を求める. $h \in \ker(D_rH(\lambda, 0))$ は, 微分方程式

$$
\partial_x^2 h(x) + \lambda f'(0)h(x) = 0
$$

を満たす. この方程式が L-周期的な非自明解をもつのは $\lambda f'(0) = \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ のとき, かつそのときに限られ, このとき h は

$$
h(x) = c_1 \cos\frac{2\pi k}{L}x + c_2 \sin\frac{2\pi k}{L}x \quad (c_1, c_2 : 定数)
$$

と表せる. h は偶関数だから $\ker(D_rH(\lambda, 0))$ は $\cos\frac{2\pi k}{L}x$ で張られ, $\dim\ker(D_rH(\lambda, 0)) = 1$ となる.

$$
\lambda = \frac{1}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,
$$

のとき, $\operatorname{codim} R(D_rH(\lambda, 0)) = 1$, および, $h \in \ker(D_rH(\lambda, 0)) \setminus \{0\}$ に対して

$$
D_{\lambda r}H(\lambda, 0)h \notin R(D_rH(\lambda, 0))
$$

であることを示すには, 直和分解

$$
\ker(D_rH(\lambda, 0)) \oplus R(D_rH(\lambda, 0)) = Z \tag{5.1.8}
$$

の成立を示せばよい. $h \in \ker(D_rH(\lambda, 0))$ に対して,

$$
D_{\lambda r}H(\lambda, 0)h = f'(0)h \in \ker(D_rH(\lambda, 0))
$$

となるからである. まず次の補題を用意する.

補題 5.1.1 $\lambda = \frac{1}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ とする. $s \in R(D_rH(\lambda, 0))$ ならば,

$$
\int_0^L s(x)\cos\frac{2\pi k}{L}x\,dx = 0 \tag{5.1.9}
$$

である. この逆も成り立つ.

証明 $\Lambda=\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2$ とおく．$s\in R(D_rH(\lambda,0))$ は $r\in X$ を用いて，$s(x)=\partial_x^2 r(x)+\lambda f'(0)r(x)=\partial_x^2 r(x)+\Lambda r(x)$ と表せる．$r(x)$ ならびに $\cos\sqrt{\Lambda}x$ の L-周期性に注意すると，部分積分により，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L s(x)\cos\sqrt{\Lambda}x\,dx\\
&=\int_0^L \left(\partial_x^2 r(x)+\Lambda r(x)\right)\cos\sqrt{\Lambda}x\,dx\\
&=\int_0^L r(x)\left\{\partial_x^2\left(\cos\sqrt{\Lambda}x\right)+\Lambda\cos\sqrt{\Lambda}x\right\}dx\\
&=\int_0^L r(x)\left\{-\left(\sqrt{\Lambda}\right)^2\cos\sqrt{\Lambda}x+\Lambda\cos\sqrt{\Lambda}x\right\}dx\\
&=0
\end{aligned}
$$

となり，(5.1.9) が成り立つ．

次に逆を示す．定数変化法の公式により，$s\in Z$ に対して，$s(x)=\partial_x^2 r(x)+\Lambda r(x)$ を満たす r は，一般に，

$$
r(x)=-\frac{\cos\sqrt{\Lambda}x}{\sqrt{\Lambda}}\left(\int_0^x s(y)\sin\sqrt{\Lambda}y\,dy+c_1\right)+\frac{\sin\sqrt{\Lambda}x}{\sqrt{\Lambda}}\left(\int_0^x s(y)\cos\sqrt{\Lambda}y\,dy+c_2\right)
$$

と表せる．ここで，c_1, c_2 は定数である．条件 (5.1.9) のもとで，$r\in X$ となるようにこれらの定数を選べることを示す．明らかに，$r(0)=-\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}c_1$ であり，$s(x)\sin\sqrt{\Lambda}x$ が周期 L の奇関数であることにより，$r(L)=-\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}c_1$ となり，$r(0)=r(L)$．また，

$$
\begin{aligned}
r'(x)&=\sin\sqrt{\Lambda}x\left(\int_0^x s(y)\sin\sqrt{\Lambda}y\,dy+c_1\right)-\frac{\cos\sqrt{\Lambda}x}{\sqrt{\Lambda}}s(x)\sin\sqrt{\Lambda}x\\
&\quad+\cos\sqrt{\Lambda}x\left(\int_0^x s(y)\cos\sqrt{\Lambda}y\,dy+c_2\right)+\frac{\sin\sqrt{\Lambda}x}{\sqrt{\Lambda}}s(x)\cos\sqrt{\Lambda}x\\
&=\sin\sqrt{\Lambda}x\left(\int_0^x s(y)\sin\sqrt{\Lambda}y\,dy+c_1\right)+\cos\sqrt{\Lambda}x\left(\int_0^x s(y)\cos\sqrt{\Lambda}y\,dy+c_2\right)
\end{aligned}
$$

より，条件 (5.1.9) を用いると $r'(0)=r'(L)=c_2$ もしたがう．以上により，r は L-周期的である．最後に，$s(x)\sin\sqrt{\Lambda}x$, $s(x)\cos\sqrt{\Lambda}x$ がそれぞれ奇関数，偶関数であることを用いると，

$$
r(-x)=-\frac{\cos\sqrt{\Lambda}x}{\sqrt{\Lambda}}\left(\int_0^x s(y)\sin\sqrt{\Lambda}y\,dy+c_1\right)+\frac{\sin\sqrt{\Lambda}x}{\sqrt{\Lambda}}\left(\int_0^x s(y)\cos\sqrt{\Lambda}y\,dy-c_2\right)
$$

となるから，$c_2=0$ ととれば $r(x)=r(-x)$ となり，$r\in X$ となる．したがって，$s\in R(D_rH(\lambda,0))$ である．□

$u\in Z$ に対して，

$$
(Pu)(x)=u(x)-\frac{2}{L}\left(\int_0^L u(y)\cos\frac{2\pi k}{L}y\,dy\right)\cos\frac{2\pi k}{L}x
$$

により，Z における有界線形作用素を定める．

$$
\int_0^L\left(\cos\frac{2\pi k}{L}y\right)^2 dy=\frac{L}{2}
$$

により, $P\left(\cos\frac{2\pi k}{L}x\right)=0$, したがって, $P^2=P$ となり, P は Z における射影作用素となる. $u\in R(P)$, つまり, $Pu=u$ となるためには,

$$\int_0^L u(y)\cos\frac{2\pi k}{L}y\,dy=0$$

が成り立つことが必要十分であり, **補題5.1.1** により, これは

$$u\in R(D_rH(\lambda,0))$$

と同値である. 一方, $\ker P$ は $\cos\frac{2\pi k}{L}x$ で張られる Z の部分空間であるから, $\ker(D_rH(\lambda,0))$ と一致する. 以上により, 直和分解 (5.1.8) が成立する.

以上により, 関数方程式 (5.1.7) に Crandall-Rabinowitz の理論が適用可能となった. 適用の結果, $\mathbf{R}\times\Omega$ の点 $(\lambda,r)=\left(\frac{1}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2,0\right)$, $k=1,2,3,\ldots$, を分岐点として自明解から分かれ出る分岐解 $(\lambda_k(s),r_k(s,\cdot))$ の存在がわかる. ここで, λ_k, r_k は $s=0$ を含む開区間で定義され, それぞれ, $\mathbf{R}$, X の値をとる C^∞ 関数であって,

$$\begin{cases}\lambda_k(0)=\dfrac{1}{f'(0)}\left(\dfrac{2\pi k}{L}\right)^2,\\ r_k(0,x)=0,\quad \partial_s r_k(0,x)=\cos\dfrac{2\pi k}{L}x\end{cases}\tag{5.1.10}$$

を満たしている. 分岐点の近傍では, 関数方程式の解は, 自明解か分岐解かのいずれかである.

分岐解が $\lambda=\lambda_k(0)$ からみて λ の増加減少いずれの方向に存在するかを調べるために, 分岐解が満たす方程式

$$\partial_x^2 r_k(s,x)+\lambda_k(s)f(r_k(s,x))=0\tag{5.1.11}$$

をパラメータ s で繰り返し微分してみる.

$$r_k^{(j)}(x)=\partial_s^j r_k(0,x),\quad j=0,1,2,3,\ldots,$$

とおく. (5.1.10) より,

$$r_k^{(0)}(x)=0,\quad r_k^{(1)}(x)=\cos\frac{2\pi k}{L}x$$

である. まず, 方程式 (5.1.11) を s で 2 回微分して $s=0$ を代入し, 整理すると,

$$\partial_x^2 r_k^{(2)}(x)+\lambda_k(0)f'(0)r_k^{(2)}(x)=-2\lambda_k'(0)f'(0)r_k^{(1)}(x)-\lambda_k(0)f''(0)\left(r_k^{(1)}(x)\right)^2\tag{5.1.12}$$

が得られる. 等式の両辺は $R(D_rH(\lambda_k(0),0))$ に属している. **補題5.1.1** より, 方程式 (5.1.12) の右辺に $\cos\frac{2\pi k}{L}x$ をかけて区間 $[0,L]$ 上で積分すると,

$$\int_0^L\left\{-2\lambda_k'(0)f'(0)\left(\cos\frac{2\pi k}{L}x\right)^2-\frac{f''(0)}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi k}{L}x\right)^3\right\}dx=0$$

がしたがう. 積分を計算すると,

$$-L\lambda_k'(0)f'(0)=0$$

となり,

$$\lambda_k'(0) = 0 \tag{5.1.13}$$

がしたがう. これを (5.1.12) 式に代入すると,

$$\partial_x^2 r_k^{(2)}(x) + \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 r_k^{(2)}(x) = -\frac{f''(0)}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi k}{L}x\right)^2$$

となり, $r_k^{(2)} \in R(D_r H(\lambda_k(0), 0))$ に注意してこれを解くと,

$$r_k^{(2)}(x) = \frac{f''(0)}{6f'(0)}\cos\frac{4\pi k}{L}x - \frac{f''(0)}{2f'(0)}.$$

次に, 方程式 (5.1.11) を s で 3 回微分して $s=0$ を代入し, (5.1.13) を用いて整理すると,

$$\begin{aligned}
&\partial_x^2 r_k^{(3)}(x) + \lambda_k(0) f'(0) r_k^{(3)}(x) \\
&= -3\lambda_k''(0) f'(0) r_k^{(1)}(x) - \lambda_k(0) f'''(0)(r_k^{(1)}(x))^3 - 3\lambda_k(0) f''(0) r_k^{(1)}(x) r_k^{(2)}(x) \\
&\in R(D_r H(\lambda_k(0), 0)).
\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

方程式 (5.1.14) の右辺に $\cos\frac{2\pi k}{L}x$ をかけて区間 $[0, L]$ 上で積分すると, **補題5.1.1** より,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \Bigg\{ & -3\lambda_k''(0) f'(0)\left(\cos\frac{2\pi k}{L}x\right)^2 - \frac{f'''(0)}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi k}{L}x\right)^4 \\
& -\frac{3f''(0)}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi k}{L}x\right)^2\left(\frac{f''(0)}{6f'(0)}\cos\frac{4\pi k}{L}x - \frac{f''(0)}{2f'(0)}\right)\Bigg\}\, dx = 0
\end{aligned}$$

が成り立ち, 積分を計算すると,

$$-\frac{3}{2}\lambda_k''(0) f'(0) - \frac{3}{8}\frac{f'''(0)}{f'(0)}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{f''(0)}{f'(0)}\right)^2\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{f''(0)}{f'(0)}\right)^2\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 = 0$$

となる. これを $\lambda_k''(0)$ について解くと,

$$\lambda_k''(0) = \frac{-3f'''(0)f'(0) + 5(f''(0))^2}{12(f'(0))^3}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 \tag{5.1.15}$$

が得られる. これを (5.1.14) 式に代入すると,

$$\partial_x^2 r_k^{(3)}(x) + \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 r_k^{(3)}(x) = -\frac{1}{4}\left\{\frac{f'''(0)}{f'(0)} + \left(\frac{f''(0)}{f'(0)}\right)^2\right\}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2\cos\frac{6\pi k}{L}x$$

となり, $r_k^{(3)} \in R(D_r H(\lambda_k(0), 0))$ に注意してこれを解くと,

$$r_k^{(3)}(x) = \frac{1}{32}\left\{\frac{f'''(0)}{f'(0)} + \left(\frac{f''(0)}{f'(0)}\right)^2\right\}\cos\frac{6\pi k}{L}x$$

を得る.

(5.1.13) より $\lambda_k'(0)=0$ であるから, $\lambda_k''(0)$ の符号で解が分岐する方向が決まる. (5.1.15) により, $\lambda_k''(0)$ の符号は

$$\begin{aligned}
&-3f'''(0)f'(0)+5(f''(0))^2\\
&=-\frac{3}{\gamma}\left(-\frac{1}{\gamma}-1\right)\left(-\frac{1}{\gamma}-2\right)\frac{1}{\gamma}+5\left\{\frac{1}{\gamma}\left(-\frac{1}{\gamma}-1\right)\right\}^2\\
&=\frac{(1+\gamma)(2-\gamma)}{\gamma^4}
\end{aligned}$$

の符号と一致するから, $1\leq\gamma<2$ のときは分岐点からみて λ が増加する方向に分岐が起こり, $\gamma>2$ のときは λ が減少する方向に分岐が起こる. $\lambda=\frac{4\pi GV^\gamma}{a}$ であったから条件 $\lambda_k(0)<\lambda$, $\lambda_k(0)>\lambda$ はそれぞれ

$$\gamma\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2<\frac{4\pi GV^\gamma}{a},\quad \gamma\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2>\frac{4\pi GV^\gamma}{a},$$

すなわち,

$$V>\left(\frac{a\gamma\pi k^2}{GL^2}\right)^{1/\gamma},\quad V<\left(\frac{a\gamma\pi k^2}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$$

と比体積の平均 V を用いて書き表せる.

因みに, これらの条件をオイラー座標系における周期 $l=LV$ と平均密度 $\bar\rho=1/V$ を用いて書き直すと, $1\leq\gamma<2$, $\gamma>2$ のいずれの場合も

$$\bar\rho>\left(\frac{a\gamma\pi k^2}{Gl^2}\right)^{1/(2-\gamma)}$$

となり, 平均密度が増加する向きに分岐が起こることが分かる. $\gamma=2$ の場合, オイラー座標系における定常問題は線形の固有値問題となる:

$$\partial_x^2\rho=-\frac{2\pi G}{a}(\rho-\bar\rho).$$

$2\pi G/a=(2\pi k/l)^2$, すなわち, $k=\sqrt{(Gl^2)/(2\pi a)}$ が整数となる場合に限り, 平均密度 $\bar\rho$ の値を指定するごとに,

$$\rho(x)=\bar\rho\left(1+s\cos\frac{2\pi k}{l}x\right),\quad -1<s<1,$$

の形の解をもつ.

5.1.2　分岐解の大域的延長

本小節では, 前小節において自明解からの分岐によって局所的に得られた平衡解を延長して, 平衡解全体の構造を明らかにする. すでにみたように, 定常問題は方程式

$$\partial_x^2 r(x)+\lambda f(r(x))=0,\qquad r(x)>-1,\tag{5.1.16}$$

の L-周期解を求める問題に帰着される. ここで,

$$\lambda = \frac{4\pi G V^\gamma}{a}, \qquad f(r) = 1 - (1+r)^{-1/\gamma}$$

である. $r > -1$ の関数 F を

$$F(r) = \int_0^r f(s)\,ds = \begin{cases} r - \log(1+r), & \gamma = 1, \\ r - \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\left\{(1+r)^{1-1/\gamma} - 1\right\}, & \gamma > 1, \end{cases}$$

と定めると,

$$E = \frac{1}{2}(\partial_x r(x))^2 + \lambda F(r(x)) \tag{5.1.17}$$

は方程式 (5.1.16) の第 1 積分である. なぜなら,

$$\begin{aligned} E'(x) &= \partial_x r(x)\partial_x^2 r(x) + \lambda F'(r(x))\partial_x r(x) \\ &= \partial_x r(x)(\partial_x^2 r(x) + \lambda f(r(x))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つからである. 第 1 積分 E は方程式 (5.1.16) の解軌道のエネルギーと呼ばれる. $r > -1$ のとき, $F(r) \geq 0$ により, $E \geq 0$ であり, $E = 0$ となるのは方程式 (5.1.16) の自明解 $r = 0$ に限られる. $\mathbf{R}$ 全体で $r > -1$ を満たす方程式 (5.1.16) の解は周期解となることに注意する. 周期解の最大値 $r_{\max}$ ならびに最小値 $r_{\min}$ は関係

$$E = \lambda F(r_{\max}) = \lambda F(r_{\min}), \quad -1 < r_{\min} < 0 < r_{\max}$$

により解軌道のエネルギーと対応している. $F(r)$ は, $-1 < r \leq 0$ と $r \geq 0$ においてそれぞれ狭義単調減少, 狭義単調増加であるから, これらの対応は 1 対 1 対応である. したがって, 解の周期は解軌道のエネルギーによって一意に定まる. さらに, 最小値 $r_{\min}$ に関する制約 $-1 < r_{\min} < 0$ から, 方程式 (5.1.16) が非自明な周期解をもつような解軌道のエネルギーの値の範囲もわかる:

$$0 < E < \lim_{r \to -1+0} \lambda F(r) = \begin{cases} \infty, & \gamma = 1, \\ \dfrac{\lambda}{\gamma - 1}, & \gamma > 1. \end{cases} \tag{5.1.18}$$

本小節では, 解軌道のエネルギーと周期のあいだの関係を調べて, 方程式 (5.1.16) が L-周期解をもつための V に関する条件を導く.

はじめに, 周期を解軌道のエネルギーの関数として表す. 条件 (5.1.18) のもとで, 方程式 (5.1.17) を $\partial_x r$ について解くと,

$$\partial_x r(x) = \pm\sqrt{2(E - \lambda F(r(x)))}$$

を得る. エネルギー E をもつ解軌道の周期を T とし $r(x_0) = r_{\min}$ とすれば, 解 r の軸対称性から $r(x_0 + T/2) = r_{\max}$ となり, $x_0 < x < x_0 + T/2$ において, $\partial_x r(x) > 0$ となる. したがって, この区間で x は r の関数となって,

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{\sqrt{2(E - \lambda F(r))}}$$

が成り立つ．これより,

$$\frac{T}{2} = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2(E-\lambda F(r))}},$$

つまり,

$$T = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2(E-\lambda F(r))}}$$

となる．この積分を, 区間 $r_{\min} < r < 0$, および, 区間 $0 < r < r_{\max}$ 上の積分に分け,

$$T_+ = 2\int_0^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2(E-\lambda F(r))}}, \tag{5.1.19}$$

$$T_- = 2\int_{r_{\min}}^0 \frac{dr}{\sqrt{2(E-\lambda F(r))}} \tag{5.1.20}$$

の和で表す: $T = T_+ + T_-$. $r \geq 0$ において $F(r)$ が狭義単調増加であることに注意して,

$$f_+(r) = f(r), \quad F_+(r) = F(r)$$

で $r \geq 0$ の関数を定め, (5.1.19) の積分に変数変換 $y = (\lambda/E)F_+(r)$ を施すと, $dy = (\lambda/E)f_+(r)\,dr = (\lambda/E)f_+\left(F_+^{-1}\left((E/\lambda)y\right)\right)\,dr$ より,

$$\begin{aligned} T_+ &= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2(E-Ey)}}\frac{E}{\lambda f_+(F_+^{-1}((E/\lambda)y))}\,dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sqrt{\frac{E}{\lambda}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{f_+(F_+^{-1}((E/\lambda)y))}\,dy \end{aligned}$$

を得る．さらに $\theta = \sqrt{E/\lambda}$ とおくと,

$$T_+ = I_{\gamma,+}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\theta\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{f_+(F_+^{-1}(\theta^2 y))}\,dy \tag{5.1.21}$$

と表せる．$I_{\gamma,+}(\theta)$ は $\theta > 0$ で定義されている．次に, $0 \leq \tilde{r} < 1$ の関数を

$$f_-(\tilde{r}) = -f(-\tilde{r}) = (1-\tilde{r})^{-1/\gamma} - 1, \quad F_-(\tilde{r}) = F(-\tilde{r})$$

と定め, T_- の表現 (5.1.20) において, 積分変数の変換 $\tilde{r} = -r$ を施すと,

$$T_- = 2\int_0^{-r_{\min}} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{2(E-\lambda F_-(\tilde{r}))}}$$

となる．$0 \leq \tilde{r} < 1$ において $F_-(\tilde{r})$ が狭義単調増加であること, および, $\lambda F_-(-r_{\min}) = \lambda F(r_{\min}) = E$ に注意して, $y = (\lambda/E)F_-(\tilde{r})$ と変数変換し $\theta = \sqrt{E/\lambda}$ とおくと, $F_-' = f_-$ より,

$$T_- = I_{\gamma,-}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\theta\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{f_-(F_-^{-1}(\theta^2 y))}\,dy \tag{5.1.22}$$

が得られる．$I_{\gamma,-}(\theta)$ は $\gamma = 1$ の場合, $\theta > 0$ において, $\gamma > 1$ の場合, $0 < \theta < (\gamma-1)^{-1/2}$ において定義されている．

以上により,

$$T = I_{\gamma,+}(\theta) + I_{\gamma,-}(\theta), \quad \theta = \sqrt{\frac{E}{\lambda}}$$

となり, 周期 T のエネルギー E への依存性を調べるには, 関数

$$I_{\gamma}(\theta) = I_{\gamma,+}(\theta) + I_{\gamma,-}(\theta), \quad 0 < \theta < \begin{cases} \infty, & \gamma = 1, \\ (\gamma-1)^{-1/2}, & \gamma > 1, \end{cases} \tag{5.1.23}$$

の挙動を調べればよいことになる.

$I_{\gamma,\pm}$ の単調性　関数 $I_{\gamma,+}$ の挙動を調べる. (5.1.21) 式より,

$$I'_{\gamma,+}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{f_+(F_+^{-1}(\theta^2 y))}\, dy + \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{f_+(F_+^{-1}(\theta^2 y))}\right) dy.$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}\right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{f_+(F_+^{-1}(\theta^2 y))\right\}}{f_+(F_+^{-1}(\theta^2 y))^2}$$

であり,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{f_+(F_+^{-1}(\theta^2 y))\right\} = 2\theta y \left.\frac{d}{d\xi}F_+^{-1}(\xi)\right|_{\xi=\theta^2 y} f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right),$$

ならびに,

$$\frac{d}{d\xi}F_+^{-1}(\xi) = \frac{1}{F'_+\left(F_+^{-1}(\xi)\right)} = \frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\xi)\right)}$$

を用いると,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}\right) = -\frac{2\theta y f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^3}$$

となり,

$$\begin{aligned} I'_{\gamma,+}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}\, dy - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{2\theta y f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}{f_+\left(F_+^{-1}(\mu^2 y)\right)^3}\, dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^2 - 2\theta^2 y f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^3}\, dy \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

が得られる. ここで, $z > 0$ の関数

$$G_+(z) = \frac{f_+(z)^2 - 2F_+(z) f'_+(z)}{f_+(z)^3}$$

を用いると, (5.1.24) の被積分関数は $\frac{G_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}{\sqrt{1-y}}$ と表される. $z > 0$ において $G_+(z)$ の符号が一定ならば $I'_{\gamma,+}(\theta)$ の符号も一定となり, $I_{\gamma,+}(\theta)$ の単調性がしたがうことになる. これを確かめる

ために, $z > 0$ のとき $f_+(z) > 0$ より分母の $f_+(z)^3$ が正であることに注意して, 分子の $g_+(z) := f_+(z)^2 - 2F_+(z)f'_+(z)$ の符号を調べる.

$$g'_+(z) = 2f_+(z)f'_+(z) - 2f_+(z)f'_+(z) - 2F_+(z)f''_+(z) = -2F_+(z)f''_+(z)$$

において, $f_+(z) = 1-(1+z)^{-1/\gamma}$ より

$$f''_+(z) = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)(1+z)^{-1/\gamma-2}$$

であるから, $z>0$ のとき, $f''_+(z) < 0$. これと $F_+(z) > 0$ から $g'_+(z) > 0$ となり, g_+ は $z>0$ で単調に増加する. $g_+(0) = f_+(0)^2 - 2F_+(0)f'_+(0) = 0$ により, $z>0$ に対して $g_+(z) > 0$ を得る. これより, $z>0$ のとき, $G_+(z) > 0$ となって $I'_{\gamma,+}(\theta) > 0$ が結論される.

次に, 関数 $I_{\gamma,-}$ の挙動を調べる. $I'_{\gamma,+}(\theta)$ の計算と同様にして,

$$I'_{\gamma,-}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)^2 - 2\theta^2 y f'_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)^3}\,dy \tag{5.1.25}$$

を得る. $0<z<1$ で定められた関数

$$G_-(z) = \frac{f_-(z)^2 - 2F_-(z)f'_-(z)}{f_-(z)^3}$$

を用いると, (5.1.25) の被積分関数は $\frac{G_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}{\sqrt{1-y}}$ と表される. $f_-(z) = (1-z)^{-1/\gamma} - 1 > 0$, $0<z<1$, より, $G_-(z)$ の分母の $f_-(z)^3$ は正. 分子の $g_-(z) := f_-(z)^2 - 2F_-(z)f'_-(z)$ については,

$$g'_-(z) = -2F_-(z)f''_-(z)$$

であるが,

$$f''_-(z) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)(1-z)^{-1/\gamma-2}$$

より, $0<z<1$ のとき, $f''_-(z) > 0$. これと $F_-(z) > 0$ から $g'_-(z) < 0$ となり, g_- は $0<z<1$ で単調に減少する. $g_-(0) = f_-(0)^2 - 2F_-(0)f'_-(0) = 0$ により, $0<z<1$ のとき, $g_-(z) < 0$, したがって, $G_-(z) < 0$ となる. これより $I'_{\gamma,-}(\theta) < 0$ がしたがう.

以上の結果, $I'_{\gamma,+} > 0$, $I'_{\gamma,-} < 0$ となった. 両者の和である I'_γ の符号はこのままでは判別不能である. そこで, $\theta \to +0$ のときの $I'_{\gamma,\pm}(\theta)$ の極限を求めてみる. l'Hospital の定理を繰り返し使えば,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to+0} G_+(z) &= \lim_{z\to+0}\frac{f_+(z)^2 - 2F_+(z)f'_+(z)}{f_+(z)^3} \\
&= \lim_{z\to+0}\frac{-2F_+(z)f''_+(z)}{3f_+(z)^2 f'_+(z)} \\
&= \lim_{z\to+0}\frac{F_+(z)}{f_+(z)^2}\frac{-2f''_+(0)}{3f'_+(0)} \\
&= \lim_{z\to+0}\frac{f_+(z)}{2f_+(z)f'_+(z)}\frac{-2f''_+(0)}{3f'_+(0)} \\
&= -\frac{1}{3}\frac{f''_+(0)}{f'_+(0)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(1+\gamma)$$

となる．このことに注意して, (5.1.24) の積分にルベーグの収束定理を適用すると,

$$\lim_{\theta \to +0} I'_{\gamma,+}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \left\{ \frac{1}{3}(1+\gamma) \right\} dy = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left\{ \frac{2}{3}(1+\gamma) \right\} \tag{5.1.26}$$

を得る．同様に, l'Hospital の定理より,

$$\lim_{z \to +0} \frac{f_-(z)^2 - 2F_-(z) f'_-(z)}{f-(z)^3} = -\frac{1}{3} \frac{f''_-(0)}{f'_-(0)^2} = -\frac{1}{3}(1+\gamma)$$

となるから, (5.1.25) の積分にルベーグの収束定理を適用して

$$\lim_{\theta \to +0} I'_{\gamma,-}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \left\{ -\frac{1}{3}(1+\gamma) \right\} dy = -\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left\{ \frac{2}{3}(1+\gamma) \right\} \tag{5.1.27}$$

を得る．(5.1.26), (5.1.27) より

$$\lim_{\theta \to +0} I'_\gamma(\theta) = 0$$

となるから, I'_γ が単調であれば, I'_γ の符号が一定となり, I_γ の単調性がしたがうことになる．

$I'_{\gamma,\pm}$ の単調性　$I''_{\gamma,+}(\theta)$ を求めるために, $G_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)$ を θ で微分すると,

$$\frac{2f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) \frac{2\theta y}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)} - 4\theta y f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) - 2\theta^2 y f''_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) \frac{2\theta y}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^3}$$
$$+ \frac{-3f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^2 f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) \frac{2\theta y}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)} \left\{ f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^2 - 2\theta^2 y f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) \right\}}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^6}$$
$$= 2\theta y \times \frac{2\theta^2 y \left(3f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^2 - f''_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) \right) - 3f'_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right) f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^2}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)^5}$$

となる．$z > 0$ の関数

$$J_+(z) = \frac{2F_+(z)\left(3f'_+(z)^2 - f''_+(z) f_+(z)\right) - 3f'_+(z) f_+(z)^2}{f_+(z)^5}$$

を用いると,

$$I''_{\gamma,+}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{2\theta y J_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}{\sqrt{1-y}} dy$$

と表せる．$J_+(z)$ の符号は

$$K_+(z) := 2F_+(z)\left(3f'_+(z)^2 - f''_+(z) f_+(z)\right) - 3f'_+(z) f_+(z)^2$$

の符号で決まる．以下, $\gamma = 1$ と $\gamma > 1$ の場合に分けて $K_+(z)$ の符号を調べる．

$\gamma = 1$ の場合

$$f_+(z) = 1 - \frac{1}{1+z}, \quad f_+'(z) = \frac{1}{(1+z)^2}, \quad f_+''(z) = -\frac{2}{(1+z)^3}, \quad F_+(z) = z - \log(1+z)$$

であるから, $(1+z)^{-1} = \zeta$ とおくと, $K_+(z)$ は以下のように表せる:

$$\begin{aligned} K_+(z) &= 2\left(\zeta^{-1} - 1 - \log\zeta^{-1}\right)\left\{3\zeta^4 + 2\zeta^3(1-\zeta)\right\} - 3\zeta^2(1-\zeta)^2 \\ &= \zeta^2(-5\zeta^2 + 4\zeta + 2\zeta^2\log\zeta + 4\zeta\log\zeta + 1). \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

$z > 0$ のとき, $0 < \zeta < 1$ となることに注意して, この区間で関数

$$H(\zeta) = -5\zeta^2 + 4\zeta + 2\zeta^2\log\zeta + 4\zeta\log\zeta + 1$$

の符号を調べる.

$$H'(\zeta) = -8\zeta + 4\zeta\log\zeta + 4\log\zeta + 8.$$

これより, $H'(1) = -8 + 8 = 0$ を得る. さらに微分すると,

$$H''(\zeta) = -8 + 4\log\zeta + 4 + 4\zeta^{-1} = 4\log\zeta - 4 + 4\zeta^{-1}$$

となり, $H''(1) = -4 + 4 = 0$ を得る. もう一度微分すると,

$$H'''(\zeta) = 4\zeta^{-1} - 4\zeta^{-2} = 4\zeta^{-2}(\zeta - 1)$$

となり, $0 < \zeta < 1$ のとき, $H'''(\zeta) < 0$ である. このことから, $0 < \zeta < 1$ において, H'' は単調減少し, $H''(1) = 0$ であるから, $H''(\zeta) > 0$ を得る. これより, $0 < \zeta < 1$ において, H' が単調増加し, $H'(1) = 0$ と合わせれば, $H'(\zeta) < 0$ が得られる. したがって, $0 < \zeta < 1$ において, H は単調減少し, $H(1) = 0$ と合わせて $H(\zeta) > 0$ が成り立つことが示せた.

$\gamma > 1$ の場合

$$f_+(z) = 1 - (1+z)^{-1/\gamma}, \quad f_+'(z) = \frac{1}{\gamma}(1+z)^{-1/\gamma-1}, \quad f_+''(z) = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)(1+z)^{-1/\gamma-2},$$
$$F_+(z) = \int_0^z f_+(s)\,ds = z - \frac{\gamma}{\gamma-1}\left\{(1+z)^{-1/\gamma+1} - 1\right\}$$

であるから, $(1+z)^{-1/\gamma} = \zeta$ とおくと, $K_+(z)$ は,

$$\begin{aligned} &K_+(z) \\ &= 2\left(\zeta^{-\gamma} - 1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\zeta^{1-\gamma} - \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left\{\frac{3}{\gamma^2}\zeta^{2+2\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\zeta^{1+2\gamma} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\zeta^{2+2\gamma}\right\} \\ &- \frac{3}{\gamma}\zeta^{1+\gamma}(1-\zeta)^2 \\ &= \frac{\zeta^{1+\gamma}}{\gamma}\left\{\frac{-2(1+\gamma)(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}\zeta^2 + \frac{2(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{1+\gamma} - \frac{2(1+\gamma)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{\gamma} + \frac{2-\gamma}{\gamma}\right\} \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

と表せる. $0<\zeta<1$ において

$$H(\zeta)=\frac{-2(1+\gamma)(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\zeta^2+\frac{2(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{1+\gamma}-\frac{2(1+\gamma)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{\gamma}+\frac{2-\gamma}{\gamma}$$

の符号を調べる. まず,

$$H'(\zeta)=\frac{-2(1+\gamma)(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}+\frac{2(1+\gamma)}{1-\gamma}\zeta+\frac{2(\gamma-2)(\gamma+1)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{\gamma}-\frac{2(1+\gamma)}{1-\gamma}\zeta^{\gamma-1}$$

となり,

$$H'(1)=\frac{-2(1+\gamma)(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}+\frac{2(1+\gamma)}{1-\gamma}+\frac{2(\gamma-2)(\gamma+1)}{\gamma(1-\gamma)}-\frac{2(1+\gamma)}{1-\gamma}=0.$$

さらに微分すると,

$$H''(\zeta)=\frac{2(1+\gamma)}{1-\gamma}+\frac{2(\gamma-2)(\gamma+1)}{1-\gamma}\zeta^{\gamma-1}+2(1+\gamma)\zeta^{\gamma-2}$$

となり,

$$H''(1)=\frac{2(1+\gamma)}{1-\gamma}+\frac{2(\gamma-2)(\gamma+1)}{1-\gamma}+2(1+\gamma)=0.$$

もう一度微分すると,

$$\begin{aligned}H'''(\zeta)&=-2(1+\gamma)(\gamma-2)\zeta^{\gamma-2}+2(\gamma-2)(\gamma+1)\zeta^{\gamma-3}\\&=2(1+\gamma)(\gamma-2)\zeta^{\gamma-3}(1-\zeta)\end{aligned}$$

となり, $1<\gamma<2$ の場合, $0<\zeta<1$ のとき, $H'''(\zeta)<0$ であり, H'' は単調減少し, $H''(1)=0$ より $H''(\zeta)>0$ となる. したがって, $0<\zeta<1$ において, H' は単調増加し, $H'(1)=0$ から $H'(\zeta)<0$ を得る. したがって, $0<\zeta<1$ において, H は単調減少し, $H(1)=0$ より $H(\zeta)>0$ となる. $\gamma>2$ の場合も同様にして, $0<\zeta<1$ において $H(\zeta)<0$ となる.

以上, まとめると, $1\le\gamma<2$ の場合, $z>0$ のとき $G_+(z)>0$ であり, $I''_{\gamma,+}>0$ となる. 一方, $\gamma>2$ の場合, $z>0$ のとき $G_+(z)<0$ であり, $I''_{\gamma,+}<0$ となる.

$I''_{\gamma,-}$ の符号も同様にして調べることができる. $I''_{\gamma,+}$ の計算と同様にして,

$$I''_{\gamma,-}(\theta)=\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^1\frac{2\theta yJ_-\left(F_-^{-1}(\theta^2y)\right)}{\sqrt{1-y}}\,dy$$

となる. ここで, $J_-(z)$ は $0<z<1$ で定められた関数

$$J_-(z)=\frac{2F_-(z)\left(3f'_-(z)^2-f''_-(z)f_-(z)\right)-3f'_-(z)f_-(z)^2}{f_-(z)^5}$$

である. $f_-(z)>0$ より $J_-(z)$ の符号は

$$K_-(z):=2F_-(z)\left(3f'_-(z)^2-f''_-(z)f_-(z)\right)-3f'_-(z)f_-(z)^2$$

の符号と一致する. $f_-(z)=(1-z)^{-1/\gamma}-1$ および,

$$F_-(z)=\begin{cases}-z-\log(1-z), & \gamma=1,\\ -z-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\left\{1-(1-z)^{-1/\gamma+1}\right\}, & \gamma>1,\end{cases}$$

に注意して, $(1-z)^{-1/\gamma}=\zeta$ とおくと, $K_-(z)$ は,
$\gamma=1$ のとき

$$K_-(z)=\zeta^2(-5\zeta^2+4\zeta+2\zeta^2\log\zeta+4\zeta\log\zeta+1)$$

$\gamma>1$ のとき

$$K_-(z)=\frac{\zeta^{1+\gamma}}{\gamma}\left\{\frac{-2(1+\gamma)(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\zeta^2+\frac{2(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{1+\gamma}-\frac{2(1+\gamma)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{\gamma}+\frac{2-\gamma}{\gamma}\right\}$$

と表される. $0<z<1$ に対応する ζ の範囲は $\zeta>1$ となるが, このことを除けば ζ による $K_-(z)$ の表現は, $K_+(z)$ の表現 (5.1.28) ($\gamma=1$ の場合), (5.1.29) ($\gamma>1$ の場合) と同じであり, 今度は,

$$H(\zeta)=\begin{cases}-5\zeta^2+4\zeta+2\zeta^2\log\zeta+4\zeta\log\zeta+1, & \gamma=1\\ \dfrac{-2(1+\gamma)(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta+\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\zeta^2+\dfrac{2(\gamma-2)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{1+\gamma}-\dfrac{2(1+\gamma)}{\gamma(1-\gamma)}\zeta^{\gamma}+\dfrac{2-\gamma}{2}, & \gamma>1\end{cases}$$

の符号を $\zeta>1$ において調べることになる. $H(\zeta)$ の 3 階までの導関数を用いると, $1\le\gamma<2$ の場合, $\zeta>1$ において, $H'''(\zeta)>0$ となって, H'' は単調増加. このことと $H''(1)=0$ から, $\zeta>1$ において, $H''(\zeta)$ は正で H' は単調増加し, $H'(1)=0$ と合わせて $H'(\zeta)>0$ を得る. したがって, $\zeta>1$ において, H は単調増加で, $H(1)=0$ より, $H(\zeta)>0$ である. 一方, $\gamma>2$ の場合, $H(\zeta)<0$ となる.

以上, 結果をまとめると, $1\le\gamma<2$ の場合は $I''_{\gamma,\pm}>0$ となり, $I''_{\gamma}>0$, したがって, 方程式 (5.1.16) の周期解の周期は, 解軌道のエネルギーの狭義単調増加関数となる. 一方, $\gamma>2$ の場合は狭義単調減少関数となる.

最後に, $1\le\gamma<2$ の場合に, 解軌道のエネルギーが周期解を許容する範囲 (5.1.18) にあるときの周期 T がとりうる値の範囲を調べる. すでにみたように, (5.1.21), (5.1.22), (5.1.23) で関数 I_γ を定めると, 解軌道のエネルギーが E の周期解の周期は,

$$T=\sqrt{\frac{2}{\lambda}}I_\gamma\left(\sqrt{\frac{E}{\lambda}}\right)$$

で与えられる. $1\le\gamma<2$ のとき, I_γ は狭義単調増加関数であるから, T がとり得る値の範囲は,

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{2}{\lambda}}I_\gamma(+0)<T<\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\lim_{\theta\to+\infty}I_\gamma(\theta), && \gamma=1\ \text{のとき},\\ &\sqrt{\frac{2}{\lambda}}I_\gamma(+0)<T<\sqrt{\frac{2}{\lambda}}I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0), && 1<\gamma<2\ \text{のとき},\end{aligned}$$

となる. ここで, $I_\gamma(+0)$ の値, および, $\gamma=1$ の場合に極限 $\lim\limits_{\theta\to+\infty}I_\gamma(\theta)$ を計算する. $z=F_+^{-1}(\theta^2y)$ とおき,

$$\frac{\theta}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2y)\right)}=\frac{\sqrt{\frac{F_+(z)}{y}}}{f_+(z)}=\sqrt{\frac{F_+(z)}{f_+(z)^2y}} \tag{5.1.30}$$

と表す. l'Hospital の定理により,

$$\lim_{z\to+0}\frac{F_+(z)}{f_+(z)^2}=\lim_{z\to+0}\frac{f_+(z)}{2f_+(z)f'_+(z)}=\frac{1}{2f'_+(0)}=\frac{1}{2f'(0)} \tag{5.1.31}$$

となるから,

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}=\frac{1}{\sqrt{2f'(0)y}}$$

を得る. 同様にして $z=F_-^{-1}(\theta^2 y)$ とおき,

$$\frac{\theta}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}=\sqrt{\frac{F_-(z)}{f_-(z)^2 y}} \tag{5.1.32}$$

と表すと,

$$\lim_{z\to+0}\frac{F_-(z)}{f_-(z)^2}=\frac{1}{2f_-'(0)}=\frac{1}{2f'(0)} \tag{5.1.33}$$

により

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}=\frac{1}{\sqrt{2f'(0)y}}$$

これは, パラメータ θ に依存する, 区間 $(0,1)$ 上の関数

$$y\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{\theta}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)},\quad y\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{\theta}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}$$

が $\theta\to+0$ のとき, それぞれ θ によらない可積分関数で各点的に上から評価され, 各点収束することを示している. よって, ルベーグの収束定理により,

$$\begin{aligned}
I_\gamma(+0)&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{2f'(0)y}}\,dy+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{2f'(0)y}}\,dy\\
&=2\int_0^1\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\\
&=\sqrt{2\gamma}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\
&=\sqrt{2\gamma}\pi.
\end{aligned} \tag{5.1.34}$$

次に, $\gamma=1$ のとき, $z=F_+^{-1}(\theta^2 y)$ とおくと,

$$\frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}=\frac{1}{f_+(z)}=\frac{1+z}{z}$$

と表せる. $\theta\to+\infty$ のとき, $z\to+\infty$ より,

$$\lim_{\theta\to+\infty}\frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}=1$$

を得る. 同様にして, $z=F_-^{-1}(\theta^2 y)$ とおくと, $\theta\to+\infty$ のとき, $z\to 1-0$ となり,

$$\frac{1}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}=\frac{1}{f_-(z)}=\frac{1-z}{z}$$

により,

$$\lim_{\theta\to+\infty}\frac{1}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}=0$$

である．これらを (5.1.31), (5.1.33) とあわせると, パラメータ θ に依存する区間 $(0,1)$ 上の関数

$$y \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}, \quad y \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}$$

は $\theta \to +\infty$ のとき, それぞれ θ によらない可積分関数で各点的に上から評価され, 各点収束する．したがって, ルベーグの収束定理により,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to +\infty} \frac{I_\gamma(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \to +\infty} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{f_+\left(F_+^{-1}(\theta^2 y)\right)}\, dy + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{f_-\left(F_-^{-1}(\theta^2 y)\right)}\, dy \right\} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\, dy \\
&= 2
\end{aligned}$$

を得て, $\displaystyle\lim_{\theta \to +\infty} I_\gamma(\theta) = +\infty$ となる．

なお, $1 < \gamma < 2$ のときは, $I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)$ は有限値である．なぜなら, (5.1.30), (5.1.32) において $F_+(z)/f_+(z)^2$, $F_-(z)/f_-(z)^2$ がそれぞれ区間 $0 < z < F_+^{-1}((\gamma-1)^{-1}-0)$, $0 < z < F_-^{-1}((\gamma-1)^{-1}-0)$ において有界だからである．

以上により, 方程式 (5.1.16) の周期解の周期 T がとり得る値の範囲は

$$\begin{cases} 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}} < T < \infty, & \gamma = 1, \\ 2\pi\sqrt{\dfrac{\gamma}{\lambda}} < T < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}} I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0), & 1 < \gamma < 2, \end{cases}$$

である．方程式 (5.1.16) の非自明な L-周期解は最小の周期 L/k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, をもつ．このような L-周期解が存在するための λ に関する条件は,

$$\begin{cases} 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}} < \dfrac{L}{k}, & \gamma = 1, \\ 2\pi\sqrt{\dfrac{\gamma}{\lambda}} < \dfrac{L}{k} < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}} I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0), & 1 < \gamma < 2, \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi^2 k^2}{L^2} < \lambda < \infty, & \gamma = 1, \\ \dfrac{4\gamma\pi^2 k^2}{L^2} < \lambda < \dfrac{2 I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2 k^2}{L^2}, & 1 < \gamma < 2, \end{cases} \tag{5.1.35}$$

となる．

分岐解との関係　方程式 (5.1.16) に関して, 本小節で得られた周期解が 5.1.1 節で得られた分岐解の大域的延長を与えることを示す．条件 (5.1.35) を満たす λ に対して, 最小周期 L/k の周期解の解軌道のエネルギー E_k は,

$$\frac{L}{k} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} I_\gamma\left(\sqrt{\frac{E_k}{\lambda}}\right), \text{ すなわち, } E_k = \lambda\left(I_\gamma^{-1}\left(\frac{L}{k}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\right)^2$$

で与えられる. $\lambda_k = \frac{4\gamma\pi^2 k^2}{L^2}$ とおくと, (5.1.34) より,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_k+0} \lambda \left(I_\gamma^{-1} \left(\frac{L}{k} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right) \right)^2 = \lambda_k \left(I_\gamma^{-1} \left(\sqrt{2\gamma}\pi + 0 \right) \right)^2 = 0$$

となるから, 解軌道のエネルギーは $\lambda \to \lambda_k + 0$ のとき 0 に収束し, 周期解の最大値 $r_{\max}$ と最小値 $r_{\min}$ も 0 に収束する. したがって, 周期解は自明解に C^2_{per} において収束する. 一方,

$$\frac{4\gamma\pi^2\tilde{k}^2}{L^2} < \frac{4\gamma\pi^2 k^2}{L^2} < \begin{cases} \infty, & \gamma = 1, \\ \dfrac{2I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2} - 0)^2\tilde{k}^2}{L^2}, & 1 < \gamma < 2, \end{cases}$$

を満たす自然数 $\tilde{k}$ に対して, 方程式 (5.1.16) は $\lambda = \lambda_k$ の近傍で最小周期 $L/\tilde{k}$ の周期解をもつが, その解軌道のエネルギー $E_{\tilde{k}} = \lambda \left(I_\gamma^{-1} \left(\frac{L}{\tilde{k}} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right) \right)^2$ について

$$\lim_{\lambda\to\lambda_k} E_{\tilde{k}} = \lambda_k \left(I_\gamma^{-1} \left(\frac{k}{\tilde{k}} \sqrt{2\gamma}\pi \right) \right)^2 > 0$$

となるから, $\lambda = \lambda_k$ の近傍でこの周期解は C^2_{per} において自明解から離れている.

以上より, $\mathbf{R} \times C^2_{\mathrm{per}}$ において点 $(\lambda_k, 0)$ の近傍を適当に小さく選ぶと, この近傍に含まれる方程式 (5.1.16) の非自明解 (λ, r) は最小周期 L/k をもつ r ばかりから成る. このことは, 分岐点 $(\lambda_k, 0)$ の近傍で局所的に構成された関数方程式 (5.1.7) の分岐解は, 分岐点の近傍で最小周期 L/k をもつ周期解から成り, (5.1.35) で表される λ の範囲に大域的に延長されることを意味している.

5.2 平衡解の線形化安定性

本節では, エネルギー形式による平衡解の安定性の概念を導入し, 前節で調べた平衡解についてその安定性を調べる.

5.2.1 エネルギー形式の挙動と安定性

はじめに, 4.2 節において方程式 (5.1.1) に対して導入したエネルギー形式を思い起こす:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v,u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2} + \mathcal{E}(v), \\ \mathcal{E}(v) &= \int_0^L \Phi(v)\,dx - \frac{2\pi G}{\bar{v}} \int_0^L \int_0^L K_L(x,y)(v(x)-\bar{v})(v(y)-\bar{v})\,dxdy. \end{aligned}$$

ここで, $\Phi(v)$ は,

$$\Phi(v) = \begin{cases} a\left(\dfrac{v}{\bar{v}} - 1 - \log\dfrac{v}{\bar{v}} \right), & \gamma = 1, \\ a\left\{ \left(\dfrac{v}{\bar{v}} - 1 \right) \bar{v}^{1-\gamma} - \dfrac{v^{1-\gamma} - \bar{v}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right\}, & \gamma > 1, \end{cases}$$

と定めている．方程式 (5.1.1) の解 $(v(t,\cdot),u(t,\cdot))$ に対して, (4.2.3), すなわち,

$$E(t)=\mathcal{E}(v(t,\cdot),u(t,\cdot))$$

によって $E(t)$ を定めると, 等式 (4.2.4), すなわち,

$$\frac{dE}{dt}(t)=-\mu\int_0^L\frac{(\partial_x u)^2}{v}\,dx\le 0$$

が成り立ち, 解の軌道に沿ってエネルギー形式の値は非増加である．このことは, 以下に説明するような意味で方程式 (5.1.1) の平衡解の安定性と結びついている．

方程式 (5.1.1) の平衡解 $(\tilde{v},0)$ の近傍において

$$\bar{v}=\frac{1}{L}\int_0^L v(t,x)\,dx=\bar{\tilde{v}},\quad \bar{u}=\frac{1}{L}\int_0^L u(t,x)\,dx=0$$

を満たす方程式 (5.1.1) の解 $(v(t,\cdot),u(t,\cdot))$ の挙動を考える．このために, 平衡解からの擾乱を

$$\phi(t,x)=v(t,x)-\tilde{v}(x),\quad \psi(t,x)=u(t,x)$$

により導入し, 擾乱の振幅 $\|\phi(t,\cdot)\|_{L^\infty}$, $\|\psi(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ が小さいものとして $E(t)$ を $\phi(t,\cdot)$, $\psi(t,\cdot)$ に関して展開して表す.

一般に, $\bar{\phi}=0$ を満たし, ノルム $\|\phi\|_{L^\infty}$ が十分に小さい L-周期関数に対して,
$\gamma=1$ のとき,

$$\log\frac{\tilde{v}(x)+\phi(x)}{\tilde{v}(x)}=\frac{\phi(x)}{\tilde{v}(x)}-\frac{1}{2}\frac{\phi(x)^2}{\tilde{v}(x)^2}+\mathcal{O}(|\phi(x)|^3),$$

$\gamma>1$ のとき,

$$\frac{(\tilde{v}(x)+\phi(x))^{1-\gamma}-\tilde{v}(x)^{1-\gamma}}{1-\gamma}=\frac{\phi(x)}{\tilde{v}(x)^\gamma}-\frac{\gamma}{2}\frac{\phi(x)^2}{\tilde{v}(x)^{\gamma+1}}+\mathcal{O}(|\phi(x)|^3)$$

が成り立つから, $\bar{\tilde{v}}=V$ とおくと, $\gamma>1$ の場合,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(\tilde{v}+\phi)\\
&=\mathcal{E}(\tilde{v})-a\int_0^L\frac{(\tilde{v}(x)+\phi(x))^{1-\gamma}-\tilde{v}(x)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,dx\\
&\quad-\frac{2\pi G}{V}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\left\{(\tilde{v}(x)+\phi(x)-V)(\tilde{v}(y)+\phi(y)-V)-(\tilde{v}(x)-V)(\tilde{v}(y)-V)\right\}dxdy\\
&=\mathcal{E}(\tilde{v})+\int_0^L\left(-\frac{a}{\tilde{v}(x)^\gamma}-\frac{4\pi G}{V}\int_0^L K_L(x,y)(\tilde{v}(y)-V)\,dy\right)\phi(x)\,dx\\
&\quad+\frac{a\gamma}{2}\int_0^L\frac{\phi(x)^2}{\tilde{v}(x)^{\gamma+1}}\,dx-\frac{2\pi G}{V}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\phi(x)\phi(y)\,dxdy+\mathcal{O}(\|\phi\|_{L^\infty})\|\phi\|_{L^2}^2 \qquad (5.2.1)
\end{aligned}$$

と表せる．$\gamma=1$ の場合も同様の結果を得る．ここで, 平衡解 $(\tilde{v},0)$ が

$$\partial_x\left(-a\tilde{v}(x)^{-\gamma}-\frac{4\pi G}{V}\int_0^L K_L(x,y)(\tilde{v}(y)-V)\,dy\right)=0$$

を満たし, 定数 C があって

$$-a\tilde{v}(x)^{-\gamma} - \frac{4\pi G}{V}\int_0^L K_L(x,y)(\tilde{v}(y)-V)\,dy = C$$

が成り立つことに着目する. 辺々を区間 $[0,L]$ 上で積分し, (2.2.6) より

$$\int_0^L K_L(x,y)\,dx = 0$$

に注意すると,

$$-\int_0^L a\tilde{v}(x)^{-\gamma}\,dx = LC$$

となり, 平衡解の方程式 (5.1.2) の別形が得られる:

$$-a\tilde{v}(x)^{-\gamma} + \frac{1}{L}\int_0^L a\tilde{v}(y)^{-\gamma}\,dy - \frac{4\pi G}{V}\int_0^L K_L(x,y)(\tilde{v}(y)-V)\,dy = 0. \tag{5.2.2}$$

これを用いると, (5.2.1) は次のように整理できる:

$$\mathcal{E}(\tilde{v}+\phi) = \mathcal{E}(\tilde{v}) + \frac{1}{2}Q[\phi] + \mathcal{O}(\|\phi\|_{L^\infty})\|\phi\|_{L^2}^2. \tag{5.2.3}$$

ここで, Q は $\bar{\varphi}=0$ を満たす L-周期関数にたいする 2 次形式を表す:

$$Q[\varphi] = a\gamma\int_0^L \frac{\varphi(x)^2}{\tilde{v}(x)^{\gamma+1}}\,dx - \frac{4\pi G}{V}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,dxdy. \tag{5.2.4}$$

(5.2.3) を $\phi=\phi(t,\cdot)$ に適用すると,

$$\begin{aligned} E(t) &= \mathcal{E}(\tilde{v}+\phi(t,\cdot),\psi(t,\cdot)) \\ &= \mathcal{E}(\tilde{v}) + \frac{1}{2}\|\psi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}Q[\phi(t,\cdot)] + \mathcal{O}(\|\phi(t,\cdot)\|_{L^\infty})\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

を得る. この表現は, $E(t)$ の減少によってもたらされる擾乱の挙動について次のことを示唆している.

(i) Q が正定値, すなわち, 正定数 δ があって

$$Q[\varphi] \geq \delta\|\varphi\|_{L^2}^2$$

が成り立つ場合, 擾乱の振幅が小さい限り, 擾乱のノルム $\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2}$, $\|\psi(t,\cdot)\|_{L^2}$ は減衰し得る.

(ii) Q が負の値をとる場合,

$$\overline{\varphi_0} = 0, \quad Q[\varphi_0] < 0$$

を満たす φ_0 をとれば, $|\varepsilon| \neq 0$ が十分小さいとき,

$$\mathcal{E}(\tilde{v}+\varepsilon\varphi_0, 0) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q[\varphi_0] + \mathcal{O}(|\varepsilon|^3) < \mathcal{E}(\tilde{v},0)$$

となり, 平衡解 $(\tilde{v},0)$ への初期擾乱 $(\phi,\psi)=(\varepsilon\varphi_0,0)$ は減衰せず, 擾乱が成長し得る.

このことに鑑みて, 本論文では

(i) の場合, 平衡解は線形安定,

(ii) の場合, 平衡解は線形不安定,

とよぶことにする.

5.2.2　定常問題の線形化とスペクトル

2 次形式 Q は, 平衡解の方程式の別形 (5.2.2) と以下のように結びついている.

$$\lambda = \frac{4\pi G V^\gamma}{a}, \quad \tilde{w}(x) = \frac{\tilde{v}(x) - V}{V}$$

とおくと, 方程式 (5.2.2) は

$$-\frac{1}{(1+\tilde{w}(x))^\gamma} + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{dy}{(1+\tilde{w}(y))^\gamma} - \lambda \int_0^L K_L(x,y)\tilde{w}(y)\,dy = 0 \tag{5.2.5}$$

と表せる. 関数空間 $Y = \{w \in C^0_{\mathrm{per}}\,;\, \bar{w} = 0\}$ の開集合 Ω を

$$\Omega = \{w \in Y\,;\, w > -1\}$$

と定め, $\mathbf{R} \times \Omega$ 上で定義された Y 値写像を

$$\Theta(\lambda, w)(x) = -\frac{1}{(1+w(x))^\gamma} + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{dy}{(1+w(y))^\gamma} - \lambda \int_0^L K_L(x,y)w(y)\,dy \tag{5.2.6}$$

で定めると, $\tilde{w}$ は関数方程式

$$\Theta(\lambda, \tilde{w}) = 0$$

を満たす. 写像 Θ は Fréchet 微分可能で, w に関する Fréchet 微分は

$$\begin{aligned}
&(D_w\Theta(\lambda, w)\varphi)(x) \\
&= \frac{\gamma}{(1+w(x))^{\gamma+1}}\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy - \lambda \int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad \varphi \in Y,
\end{aligned}$$

となる. これはヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \{\varphi \in L^2_{\mathrm{per}}\,;\, \bar{\varphi} = 0\}$ 上の自己共役作用素 $T_{\lambda,w}$ に一意的に拡張される:

$$\begin{aligned}
&(T_{\lambda,w}\varphi)(x) \\
&= \frac{\gamma}{(1+w(x))^{\gamma+1}}\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy - \lambda \int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad \varphi \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

ここで, 任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ に対して $(T_{\lambda,w}\varphi, \psi)_{L^2}$ は

$$\begin{aligned}
(T_{\lambda,w}\varphi, \psi)_{L^2} = &\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}(x))^{\gamma+1}}\varphi(x)\psi(x)\,dx - \int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy \int_0^L \psi(x)\,dx \\
&- \lambda \int_0^L \int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\psi(x)\,dydx
\end{aligned}$$

と表されるが, $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = 0$ と K_L の対称性から,

$$\begin{aligned}
= &\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}(x))^{\gamma+1}}\psi(x)\varphi(x)\,dx - \int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}(y))^{\gamma+1}}\psi(y)\,dy \int_0^L \varphi(x)\,dx \\
&- \lambda \int_0^L \int_0^L K_L(x,y)\psi(y)\varphi(x)\,dydx
\end{aligned}$$

とも表され,

$$(T_{\lambda,w}\varphi,\psi)_{L^2}=(\varphi,T_{\lambda,w}\psi)_{L^2}$$

が成り立つことから, $T_{\lambda,w}$ の自己共役性がしたがう. 2 次形式 Q は, 作用素 $T_{\lambda,\tilde{w}}$ を用いて

$$Q[\varphi]=\frac{a}{V^{\gamma+1}}\int_0^L (T_{\lambda,\tilde{w}}\varphi)(x)\varphi(x)\,dx$$

と表せる.

一般に, ヒルベルト空間 H 上の自己共役作用素 T に対してそのスペクトルを $\sigma(T)$ で表すとき, 次が成り立つ. [13] を参照のこと.

補題 5.2.1 $\inf\limits_{\|\varphi\|_H=1}(T\varphi,\varphi)_H=\inf\sigma(T)$

この補題により, 2 次形式 Q の符号を考えるうえで, $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $T_{\lambda,\tilde{w}}$ のスペクトルの下限を調べられることが鍵となる. その際, 有用な事実を以下, 本小節でまとめておく. 一般に, ヒルベルト空間 H 上の自己共役作用素 T に対してその固有値全体を $\sigma_p(T)$ で表す.

補題 5.2.2 $w\in\Omega$ とし, $\alpha\in\mathbf{R}$ に対して, $w_\alpha\in\Omega$ を

$$w_\alpha(x)=w(x-\alpha)$$

で定める. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\sigma(T_{\lambda,w_\alpha})=\sigma(T_{\lambda,w})$

(ii) $\sigma_p(T_{\lambda,w_\alpha})=\sigma_p(T_{\lambda,w})$

証明 (i) スペクトル $\sigma(T_{\lambda,w_\alpha})$, $\sigma(T_{\lambda,w})$ の一致を示すには, レゾルベント集合 $\varrho(T_{\lambda,w_\alpha})=\mathbf{C}\backslash\sigma(T_{\lambda,w_\alpha})$, $\varrho(T_{\lambda,w})=\mathbf{C}\backslash\sigma(T_{\lambda,w})$ の一致を示せばよい. このために, $\psi\in\mathcal{H}$, $\Lambda\in\mathbf{C}$ に対して, $\mathcal{H}$ における方程式

$$T_{\lambda,w_\alpha}\varphi-\Lambda\varphi=\psi \tag{5.2.7}$$

の一意可解性を考える. 方程式 (5.2.7) は,

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{(1+w(x-\alpha))^{\gamma+1}}\varphi(x)-\frac{1}{L}\int_0^L\frac{\gamma}{(1+w(y-\alpha))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy\\&\quad-\lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy-\Lambda\varphi(x)=\psi(x)\end{aligned}$$

と表せる. x を $x+\alpha$ に置き換えると,

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{(1+w(x))^{\gamma+1}}\varphi(x+\alpha)-\frac{1}{L}\int_0^L\frac{\gamma}{(1+w(y-\alpha))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy\\&\quad-\lambda\int_0^L K_L(x+\alpha,y)\varphi(y)\,dy-\Lambda\varphi(x+\alpha)=\psi(x+\alpha).\end{aligned}$$

(2.2.6) より, $K_L(x,y)$ は変数 y に関して L-周期的で $K_L(x+\alpha, y+\alpha) = K_L(x,y)$ を満たす. これと w, φ の L-周期性を用いると,

$$\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y-\alpha))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy = \int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y+\alpha)\,dy,$$
$$\int_0^L K_L(x+\alpha,y)\varphi(y)\,dy = \int_0^L K_L(x+\alpha,y+\alpha)\varphi(y+\alpha)\,dy = \int_0^L K_L(x,y)\varphi(y+\alpha)\,dy$$

と書き換えられる. $\varphi_{-\alpha} = \varphi(\cdot+\alpha)$, $\psi_{-\alpha} = \psi(\cdot+\alpha)$ とおくと, (5.2.7) と同値な次の方程式が得られた:

$$T_{\lambda,w}\varphi_{-\alpha} - \Lambda\varphi_{-\alpha} = \psi_{-\alpha}.$$

ここで, $\Lambda \in \varrho(T_{\lambda,w})$ とすると,

$$\varphi_{-\alpha} = (T_{\lambda,w} - \Lambda)^{-1}\psi_{-\alpha}$$

である. したがって, 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して方程式 (5.2.7) は一意解

$$\varphi = ((T_{\lambda,w} - \Lambda)^{-1}\psi_{-\alpha})(\cdot+\alpha)$$

をもち, $\Lambda \in \varrho(T_{\lambda,w_\alpha})$ となる. これより, $\varrho(T_{\lambda,w}) \subset \varrho(T_{\lambda,w_\alpha})$ がしたがう. $w = (w_\alpha)_{-\alpha}$ であるから, $\varrho(T_{\lambda,w_\alpha}) \subset \varrho(T_{\lambda,w})$ もしたがい, $\varrho(T_{\lambda,w_\alpha}) = \varrho(T_{\lambda,w})$ を得る.

(ii) $\Lambda \in \sigma_p(T_{\lambda,w})$ とし, $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi \neq 0$ を固有値 Λ に付随する固有関数とする.

$$T_{\lambda,w}\varphi - \Lambda\varphi = 0,$$

すなわち,

$$\frac{\gamma}{(1+w(x))^{\gamma+1}}\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy - \Lambda\varphi(x) = 0$$

が成り立つ. x を $x-\alpha$ に置き換えると,

$$\frac{\gamma}{(1+w(x-\alpha))^{\gamma+1}}\varphi(x-\alpha) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy$$
$$-\lambda\int_0^L K_L(x-\alpha,y)\varphi(y)\,dy - \Lambda\varphi(x-\alpha) = 0.$$

さらに, w, φ, K_L の周期性, ならびに, $K_L(x-\alpha, y-\alpha) = K_L(x,y)$ を用いると,

$$\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy = \int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y-\alpha))^{\gamma+1}}\varphi(y-\alpha)\,dy,$$
$$\int_0^L K_L(x-\alpha,y)\varphi(y)\,dy = \int_0^L K_L(x-\alpha,y-\alpha)\varphi(y-\alpha)\,dy = \int_0^L K_L(x,y)\varphi(y-\alpha)\,dy$$

と書き換えられるから, $\varphi_\alpha = \varphi(\cdot-\alpha)$ とおくと,

$$T_{\lambda,w_\alpha}\varphi_\alpha - \Lambda\varphi_\alpha = 0$$

が成り立つ．これは, $\Lambda \in \sigma_p(T_{\lambda,w_\alpha})$ であり, φ_α が T_{λ,w_α} の固有値 Λ に付随する固有関数であることを示している．よって, $\sigma_p(T_{\lambda,w}) \subset \sigma_p(T_{\lambda,w_\alpha})$. $w = (w_\alpha)_{-\alpha}$ であるから, $\sigma_p(T_{\lambda,w_\alpha}) \subset \sigma_p(T_{\lambda,w})$ もしたがい, $\sigma_p(T_{\lambda,w_\alpha}) = \sigma_p(T_{\lambda,w})$ が得られる．□

次の補題は, $T_{\lambda,w}$ のスペクトルの下限を調べるうえで作用素の固有値が重要な役割を果たすことを示している．

補題 5.2.3 $\sigma(T_{\lambda,w}) \cap (-\infty, \gamma(1+\max w)^{-\gamma-1})$ は $T_{\lambda,w}$ の固有値からなる．

証明 $\Lambda < \gamma(1+\max w)^{-\gamma-1}$ に対して, 作用素 $T_{\lambda,w} - \Lambda$ の可逆性を考える．このために, $\psi \in \mathcal{H}$ を任意に与えて, $\mathcal{H}$ における方程式

$$(T_{\lambda,w} - \Lambda)\varphi = \psi,$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\gamma}{(1+w(x))^{\gamma+1}} - \Lambda\right\}\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy \\ - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy = \psi(x)\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

を考える．この方程式を Riesz-Schauder の交代定理が適用可能な形に書き直す．まず, (5.2.8) の左辺の第 1 項, 第 2 項を取り出して $\mathcal{H}$ 上の作用素 P_Λ を定める:

$$(P_\Lambda\varphi)(x) = \left\{\frac{\gamma}{(1+w(x))^{\gamma+1}} - \Lambda\right\}\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+w(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy.$$

この作用素は任意の $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ に対して $(P_\Lambda\varphi_1, \varphi_2)_{L^2} = (\varphi_1, P_\Lambda\varphi_2)_{L^2}$ を満たすから自己共役作用素で, さらに,

$$(P_\Lambda\varphi, \varphi)_{L^2} = \int_0^L \left\{\frac{\gamma}{(1+w(x))^{\gamma+1}} - \Lambda\right\}\varphi(x)^2\,dx \geq \left\{\gamma(1+\max_x w)^{-\gamma-1} - \Lambda\right\}\int_0^L \varphi(x)^2\,dx$$

より正定値であり, 有界な逆をもつ．次に, 作用素 $\mathcal{K}$ を

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy$$

と定める．$\|\varphi\|_{L^2} \leq 1$ を満たす $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して,

$$|(\mathcal{K}\varphi)(x)| \leq \left(\int_0^L K_L(x,y)^2\,dy\right)^{1/2}\left(\int_0^L \varphi(y)\,dy\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^L K_L(x,y)^2\,dy\right)^{1/2}.$$

同様にして

$$|(\mathcal{K}\varphi)(x_1) - (\mathcal{K}\varphi)(x_2)| \leq \left(\int_0^L \left(K_L(x_1,y) - K_L(x_2,y)\right)^2\,dy\right)^{1/2}$$

であるから, 作用素 $\mathcal{K}$ による $\mathcal{H}$ の単位球の像 $\{\mathcal{K}\varphi;\, \|\varphi\|_{L^2} \leq 1\}$ は一様有界かつ同程度連続である．したがって, Ascoli-Arzela の定理より, $\{\mathcal{K}\varphi;\, \|\varphi\|_{L^2} \leq 1\}$ から一様収束する列を選び出すことがで

きる. この列は L^2_{per} においても強収束するから, $\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素である. これら P_Λ と $\mathcal{K}$ を用いて (5.2.8) を表すと,

$$P_\Lambda\varphi - \lambda\mathcal{K}\varphi = \psi$$

となり, さらに両辺に P_Λ^{-1} を作用させると,

$$\varphi - \lambda P_\Lambda^{-1}\mathcal{K}\varphi = P_\Lambda^{-1}\psi,$$

よって, $S = \lambda P_\Lambda^{-1}\mathcal{K}$ とおくと,

$$(I-S)\varphi = P_\Lambda^{-1}\psi$$

を得る. ここで, $\mathcal{K}$ がコンパクト作用素, P_Λ^{-1} が有界作用素であるから, $S = \lambda P_\Lambda^{-1}\mathcal{K}$ はコンパクト作用素となる. コンパクト作用素 S に Riesz-Schauder の交代定理 ([39] を参照のこと) を適用すると, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つ.

(i) $I-S$ は有界な逆作用素をもつ.

(ii) $I-S$ は可逆でない, すなわち, $\ker(I-S) \neq \{0\}$.

(i) の場合, 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して方程式 (5.2.8) は一意解

$$\varphi = (I-S)^{-1}P_\Lambda^{-1}\psi$$

をもつ. $\mathcal{H}$ 上の有界作用素 $(I-S)^{-1}P_\Lambda^{-1}$ が対応 $\psi \mapsto \varphi$ を定め, $T_{\lambda,w} - \Lambda$ の有界な逆作用素を与える:

$$(T_{\lambda,w} - \Lambda)^{-1} = (I-S)^{-1}P_\Lambda^{-1}.$$

したがって, Λ は作用素 $T_{\lambda,w}$ のレゾルベント集合に属している.

(ii) の場合, $(I-S)\varphi = 0$ を満たす $\mathcal{H}$ の元 $\varphi \neq 0$ が存在する. 両辺に P_Λ を作用させると, $(P_\Lambda - \lambda\mathcal{K})\varphi = 0$, すなわち, $(T_{\lambda,w} - \Lambda)\varphi = 0$ が得られる. これは $T_{\lambda,w} - \Lambda$ が可逆ではなく, Λ が $T_{\lambda,w}$ の固有値であることを示している.

以上のことから, $\sigma(T_{\lambda,w}) \cap \big(-\infty, \gamma(1+\max w)^{-\gamma-1}\big)$ は作用素 $T_{\lambda,w}$ の固有値のみからなる. □

5.2.3　スペクトルの下限

本小節では, 方程式 (5.2.5) の解 $\tilde{w}$ に対して, ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \{\varphi \in L^2_{\mathrm{per}}\,;\, \bar{\varphi} = 0\}$ 上の自己共役作用素

$$(T_{\lambda,\tilde{w}}\varphi)(x) = \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}(x))^{\gamma+1}}\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy$$

のスペクトルの下限を調べる.

はじめに, 自明解 $\tilde{w} = 0$ の場合を調べる. この場合, $T_{\lambda,\tilde{w}}$ のスペクトルは具体的に求まる.

補題 5.2.4 $\sigma(T_{\lambda,0}) = \sigma_p(T_{\lambda,0}) \cup \{\gamma\}$, $\sigma_p(T_{\lambda,0}) = \left\{\gamma - \lambda\dfrac{L^2}{4\pi^2 n^2}\,;\, n = 1, 2, \ldots,\right\}$

証明 $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して,

$$\begin{aligned}(T_{\lambda,0}\varphi)(x) &= \gamma\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \gamma\varphi(y)\,dy - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy \\ &= \gamma\varphi(x) - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy\end{aligned}$$

であり, 作用素 $(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy$ が $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素であるから, Riesz-Schauder の交代定理より, γ を除いて $\sigma(T_{\lambda,0})$ は $T_{\lambda,0}$ の固有値からなる. そこで固有値問題

$$T_{\lambda,0}\varphi = \Lambda\varphi \tag{5.2.9}$$

を考える. 方程式 (5.2.9) の両辺に $-\partial_x^2$ を施すと, $-\partial_x^2\int_0^L K_L(x,y)\varphi(y)\,dy = \varphi(x)$ より,

$$\gamma\partial_x^2\varphi + \lambda\varphi = \Lambda\partial_x^2\varphi,$$

すなわち,

$$(\gamma-\Lambda)\partial_x^2\varphi + \lambda\varphi = 0 \tag{5.2.10}$$

が得られる. $\Lambda = \gamma$ のとき, 明らかに $\varphi = 0$. $\Lambda \neq \gamma$ のとき, 方程式 (5.2.10) の解は,

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1\cos\sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma-\Lambda}}x + c_2\sin\sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma-\Lambda}}x, & \Lambda < \gamma, \\ c_1\exp\left(\sqrt{\dfrac{\lambda}{\Lambda-\gamma}}x\right) + c_2\exp\left(-\sqrt{\dfrac{\lambda}{\Lambda-\gamma}}x\right), & \Lambda > \gamma, \end{cases}$$

と表せる.

$\Lambda > \gamma$ の場合, φ が L-周期性をもつのは $c_1 = c_2 = 0$, したがって, $\varphi = 0$ の場合に限られる.

$\Lambda < \gamma$ の場合, φ が L-周期性を満たすための条件は,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma-\Lambda}}} = \frac{L}{n}$$

を満たす自然数 n が存在することである. これを Λ について解くと, 作用素 $T_{\lambda,0}$ の固有値が求まる:

$$\Lambda = \gamma - \lambda\frac{L^2}{4\pi^2 n^2}, \quad n = 1,2,3,\dots. \tag{5.2.11}$$

以上より, 作用素 $T_{\lambda,0}$ のスペクトルは固有値 (5.2.11) にその集積点 γ をあわせた

$$\sigma(T_{\lambda,0}) = \left\{\gamma - \lambda\frac{L^2}{4\pi^2 n^2}\ ;\ n = 1,2,\dots,\right\} \cup \{\gamma\}$$

である. □

補題5.2.4 より直ちに, 作用素 $T_{\lambda,0}$ のスペクトルの下限は固有値 $\gamma - \lambda\frac{L^2}{4\pi^2}$ である.

$k=1,2,\ldots,$ に対して,

$$\lambda_k=\frac{4\gamma\pi^2k^2}{L^2},\quad \Lambda_k=\begin{cases}\infty, & \gamma=1,\\ \dfrac{2I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2k^2}{L^2}, & 1<\gamma<2,\end{cases}$$

とおく. 5.1.2 節の条件 (5.1.35) で導かれているように, $\lambda_k\le\lambda<\Lambda_k$ に対して, 定常問題の別形 (5.2.5) は最小周期 L/k の周期解をもつ. 周期解のグラフは変数のシフトで重なり合う. このような周期解のうちで $\max_x\tilde{w}=\tilde{w}(0)$ を満たす (唯ひとつの) 解を $\tilde{w}_\lambda$ とかく. $D_w\Theta(\lambda,\tilde{w}_\lambda)$ の $\mathcal{H}$ 上への拡張 $T_{\lambda,\tilde{w}_\lambda}$ を簡単のため, T_λ と記すことにする. 作用素 T_λ のスペクトルの下限の符号を調べたい. **補題5.2.4** により,

$$\sigma(T_{\lambda_k})=\left\{\gamma\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\ ;\ n=1,2,\ldots,\right\}\cup\{\gamma\}$$

であるから,

$$\inf\sigma(T_{\lambda_k})=\gamma(1-k^2)$$

となる. 以下, これを手がかりに $\lambda_k\le\lambda<\Lambda_k$ に対して $\inf\sigma(T_\lambda)$ の符号を調べる.

まず, 注目すべきことは, $\sigma(T_\lambda)$ の下限が λ に関して連続的に変化することである.

補題 5.2.5 区間 $[\lambda_k,\Lambda_k)$ 上の関数 $\lambda\mapsto\inf\sigma(T_\lambda)$ は連続である.

証明　**補題5.2.1** から

$$\inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1}(T_\lambda\varphi,\varphi)_{L^2},$$

つまり,

$$\inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1}\left(\int_0^L\frac{\gamma\varphi(x)^2}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}\,dx-\lambda\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,dxdy\right)$$

が λ の連続関数となることを示せばよい. このために, $\lambda_k\le\lambda<\Lambda_k$, $\varphi\in\mathcal{H}$ に対して,

$$J(\lambda,\varphi)=\int_0^L\frac{\gamma\varphi(x)^2}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}\,dx-\lambda\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,dxdy$$

と定める. $\lambda_k\le\lambda$, $\lambda'<\Lambda_k$ のとき, $J(\lambda,\varphi)$ と $J(\lambda',\varphi)$ の差は,

$$\begin{aligned}|J(\lambda,\varphi)-J(\lambda',\varphi)|&=\left|\int_0^L\left\{\frac{\gamma\varphi(x)^2}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}-\frac{\gamma\varphi(x)^2}{(1+\tilde{w}_{\lambda'}(x))^{\gamma+1}}\right\}dx\right.\\&\qquad\left.-(\lambda-\lambda')\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,dxdy\right|\\&\le\int_0^L\left|\frac{1}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}-\frac{1}{(1+\tilde{w}_{\lambda'}(x))^{\gamma+1}}\right|\gamma\varphi(x)^2\,dx\\&\qquad+|\lambda-\lambda'|\int_0^L\int_0^L|K_L(x,y)\varphi(x)\varphi(y)|\,dxdy\end{aligned}$$

$$\le \gamma \sup_x \left| \frac{1}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}} - \frac{1}{(1+\tilde{w}_{\lambda'}(x))^{\gamma+1}} \right| \int_0^L \varphi(x)^2\,dx$$
$$+ |\lambda - \lambda'| \left(\int_0^L \int_0^L K_L(x,y)\,dxdy \right)^{1/2} \int_0^L \varphi(x)^2\,dx \qquad (5.2.12)$$

と評価される. ここで, $f(\xi) = \xi^{-\gamma-1}$ とおくと, $1 + \tilde{w}_\lambda(x)$ と $1 + \tilde{w}_{\lambda'}(x)$ のあいだの数 c を用いて

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}} - \frac{1}{(1+\tilde{w}_{\lambda'}(x))^{\gamma+1}} \right| \\
&= |f(1+\tilde{w}_\lambda(x)) - f(1+\tilde{w}_{\lambda'}(x))| \\
&= |f'(c)||(1+\tilde{w}_\lambda(x)) - (1+\tilde{w}_{\lambda'}(x))| \\
&\le \frac{(\gamma+1)\max_x |\tilde{w}_\lambda - \tilde{w}_{\lambda'}|}{(1+\min\{\min_x \tilde{w}_\lambda, \min_x \tilde{w}_{\lambda'}\})^{\gamma+2}}
\end{aligned}$$

と評価できる. $M = \left(\int_0^L \int_0^L K_L(x,y)\,dxdy \right)^{1/2}$ とおくと, $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ のとき, (5.2.12) から

$$|J(\lambda,\varphi) - J(\lambda',\varphi)| \le H_{\lambda,\lambda'} \equiv \frac{\gamma(\gamma+1)\max_x |\tilde{w}_\lambda - \tilde{w}_{\lambda'}|}{(1+\min\{\min_x \tilde{w}_\lambda, \min_x \tilde{w}_{\lambda'}\})^{\gamma+2}} + M|\lambda - \lambda'| \qquad (5.2.13)$$

がしたがう.

ここで, C^0_{per} において $\tilde{w}_\lambda$ が λ に連続的に依存していることを示す. 5.1.2 節で示したように, 方程式 (5.1.6) の解 r について, 解軌道のエネルギー E と r の最大値 $r_{\max}$ のあいだには関係

$$E = \lambda F_+(r_{\max})$$

が成り立ち, $r_{\max}$ は

$$r_{\max} = F_+^{-1}\left(\frac{E}{\lambda}\right)$$

と表される. F_+^{-1} の連続性により, $r_{\max}$ は λ, E に関して連続であり, 解 r の軌道は λ, E に連続的に依存する. 解 r の周期 T は, (5.1.21), (5.1.22), (5.1.23) で定義される関数 I_γ を用いて

$$T = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\, I_\gamma \left(\sqrt{\frac{E}{\lambda}} \right)$$

と表せるから, $T = L/k$ の場合,

$$E = \lambda \left(I_\gamma^{-1} \left(\sqrt{\frac{\lambda L^2}{2k^2}} \right) \right)^2$$

となり, E は λ の連続関数である. 以上のことから, 方程式 (5.1.16) の周期 L/k の解 $r_\lambda = (1+\tilde{w}_\lambda)^{-\gamma} - 1$ は λ に関して C^0_{per} において連続であり, したがって, $\tilde{w}_\lambda = (1+r_\lambda)^{-1/\gamma} - 1$ も λ に関して C^0_{per} において連続である. このことから直ちに, $\lambda \to \lambda'$ のとき, $H_{\lambda,\lambda'} \to 0$ がしたがう.

これをもとに, $\inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda,\varphi)$ の λ に関する連続性を示す. $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ を満たす $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して, $J(\lambda,\varphi) = J(\lambda,\varphi) - J(\lambda',\varphi) + J(\lambda',\varphi)$ と表すと, (5.2.13) より

$$J(\lambda,\varphi) \le H_{\lambda,\lambda'} + J(\lambda',\varphi)$$

を得る．よって,

$$\inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda,\varphi) \le H_{\lambda,\lambda'} + \inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda',\varphi),$$

すなわち,

$$\inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda,\varphi) - \inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda',\varphi) \le H_{\lambda,\lambda'}$$

が成り立つ．全く同様にして,

$$\inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda',\varphi) - \inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda,\varphi) \le H_{\lambda',\lambda} = H_{\lambda,\lambda'}$$

が成り立つから,

$$\left| \inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda,\varphi) - \inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda',\varphi) \right| \le H_{\lambda,\lambda'}$$

となり, $\lambda \to \lambda'$ のとき,

$$\left| \inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda,\varphi) - \inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda',\varphi) \right| \to 0$$

が得られる．これは, $\inf_{\|\varphi\|_{L^2}=1} J(\lambda,\varphi) = \inf \sigma(T_\lambda)$ が λ の連続関数であることを示している．□

次に注目すべきことは, $\lambda_k \le \lambda < \Lambda_k$ において, T_λ が常に 0 を固有値にもつことである．$\lambda = \lambda_k$ の場合は**補題5.2.4** より明らか．$\lambda_k < \lambda < \Lambda_k$ の場合, 方程式 (5.2.5) の解は平行移動しても解であることから, 定数 α に対して $\tilde{w}_\lambda(x+\alpha)$ は

$$-\frac{1}{(1+\tilde{w}_\lambda(x+\alpha))^\gamma} + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{dy}{(1+\tilde{w}_\lambda(y+\alpha))^\gamma} - \lambda \int_0^L K_L(x,y)\tilde{w}_\lambda(y+\alpha)\,dy = 0$$

を満たす．両辺を α で微分して $\alpha = 0$ を代入すると,

$$\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}\tilde{w}_\lambda'(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\tilde{w}_\lambda'(y)\,dy - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\tilde{w}_\lambda'(y)\,dy = 0$$

となり, $T_\lambda \tilde{w}_\lambda' = 0$ が成り立つからである．$\tilde{w}_\lambda' \ne 0$ は固有値 0 に付随する固有関数となる．このことから $\inf \sigma(T_\lambda) \le 0$ であり, **補題5.2.3** より $\inf \sigma(T_\lambda)$ は T_λ の固有値であることもわかる．

T_λ の最小の固有値の符号を調べるために, ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \{\varphi \in L^2_{\mathrm{per}}; \bar{\varphi} = 0\}$ を奇関数からなる閉部分空間

$$\mathcal{H}^{\mathrm{o}} = \{\varphi \in \mathcal{H}; \varphi(-x) = -\varphi(x)\}$$

と偶関数からなる閉部分空間

$$\mathcal{H}^{\mathrm{e}} = \{\varphi \in \mathcal{H}; \varphi(-x) = \varphi(x)\}$$

の直和に分解する:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{o}} \oplus \mathcal{H}^{\mathrm{e}}$$

補題 5.2.6 $\varphi \in \mathcal{H}^{\mathrm{o}}$ のとき, $T_\lambda\varphi \in \mathcal{H}^{\mathrm{o}}$．$\varphi \in \mathcal{H}^{\mathrm{e}}$ のとき, $T_\lambda\varphi \in \mathcal{H}^{\mathrm{e}}$.

証明 $\tilde{w}_\lambda$ が偶関数であるから, $\gamma(1+\tilde{w}_\lambda)^{-\gamma-1}$ もまた偶関数であることに注意する.

$\varphi \in \mathcal{H}^{\mathrm{o}}$ のとき, $\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy = 0$ より,

$$(T_\lambda\varphi)(-x) = -\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}\varphi(x) - \lambda\int_0^L K_L(-x,y)\varphi(y)\,dy$$

である. 変数変換 $y=-z$ を行い, (2.2.6) より $K_L(-x,-z)=K_L(x,z)$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\int_0^L K_L(-x,y)\varphi(y)\,dy &= -\int_0^{-L} K_L(-x,-z)\varphi(-z)\,dz\\ &= \int_0^{-L} K_L(x,z)\varphi(z)\,dz\\ &= -\int_0^{L} K_L(x,z)\varphi(z)\,dz\end{aligned}$$

と表せ, $(T_\lambda\varphi)(-x) = -(T_\lambda\varphi)(x)$ となり, $T_\lambda\varphi$ は奇関数である.

次に, $\varphi \in \mathcal{H}^{\mathrm{e}}$ のとき,

$$(T_\lambda\varphi)(-x) = \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}\varphi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\varphi(y)\,dy - \lambda\int_0^L K_L(-x,y)\varphi(y)\,dy$$

となるが, 右辺第 3 項は

$$\begin{aligned}\int_0^L K_L(-x,y)\varphi(y)\,dy &= -\int_0^{-L} K_L(-x,-z)\varphi(-z)\,dz\\ &= -\int_0^{-L} K_L(x,z)\varphi(z)\,dz\\ &= \int_0^{L} K_L(x,z)\varphi(z)\,dz\end{aligned}$$

となるから, $T_\lambda\varphi$ は偶関数である. □

補題5.2.6 より, T_λ を $\mathcal{H}^{\mathrm{o}}$, $\mathcal{H}^{\mathrm{e}}$ 上に制限すれば, それぞれ $\mathcal{H}^{\mathrm{o}}$, $\mathcal{H}^{\mathrm{e}}$ 上の作用素 T_λ^{o}, T_λ^{e} が得られる. これらの作用素に対して, **補題5.2.3** の証明を繰り返せば, $\sigma(T_\lambda^{\mathrm{o}}) \cap (-\infty, \gamma(1+\max\tilde{w}_\lambda)^{-\gamma-1})$, $\sigma(T_\lambda^{\mathrm{e}}) \cap (-\infty, \gamma(1+\max\tilde{w}_\lambda)^{-\gamma-1})$ がそれぞれ, T_λ^{o}, T_λ^{e} の固有値からなることが示され, **補題5.2.5** の証明を繰り返せば, 作用素 T_λ^{o}, T_λ^{e} のスペクトルの下限が区間 $[\lambda_k, \Lambda_k)$ 上連続であることも示される. さらに,

$$\inf\sigma(T_\lambda) = \min\{\inf\sigma(T_\lambda^{\mathrm{e}}), \inf\sigma(T_\lambda^{\mathrm{o}})\}$$

が成り立つ. $\inf\sigma(T_\lambda) \geq \min\{\inf\sigma(T_\lambda^{\mathrm{e}}), \inf\sigma(T_\lambda^{\mathrm{o}})\}$ を示せばよい. $\mu_\lambda = \inf\sigma(T_\lambda)$ は T_λ の固有値であるから, 付随する固有関数 $\varphi_\lambda \neq 0$ がある: $T_\lambda\varphi_\lambda = \mu_\lambda\varphi_\lambda$.

$$\varphi_\lambda = \varphi_\lambda^{\mathrm{e}} + \varphi_\lambda^{\mathrm{o}}, \qquad \varphi_\lambda^{\mathrm{e}} \in \mathcal{H}^{\mathrm{e}}, \quad \varphi_\lambda^{\mathrm{o}} \in \mathcal{H}^{\mathrm{o}},$$

と分解すると, $T_\lambda(\varphi_\lambda^{\mathrm{e}} + \varphi_\lambda^{\mathrm{o}}) = \mu_\lambda(\varphi_\lambda^{\mathrm{e}} + \varphi_\lambda^{\mathrm{o}})$ より,

$$T_\lambda^{\mathrm{e}}\varphi_\lambda^{\mathrm{e}} - \mu_\lambda\varphi_\lambda^{\mathrm{e}} = -(T_\lambda^{\mathrm{o}}\varphi_\lambda^{\mathrm{o}} - \mu_\lambda\varphi_\lambda^{\mathrm{o}})$$

が得られる. 等式の左辺は偶関数, 右辺は奇関数だから, $T_\lambda^{\mathrm{e}}\varphi_\lambda^{\mathrm{e}} = \mu_\lambda\varphi_\lambda^{\mathrm{e}}$, $T_\lambda^{\mathrm{o}}\varphi_\lambda^{\mathrm{o}} = \mu_\lambda\varphi_\lambda^{\mathrm{o}}$ となる. $\varphi_\lambda \neq 0$ より $\varphi_\lambda^{\mathrm{e}}$, $\varphi_\lambda^{\mathrm{o}}$ が同時に 0 になることはない. したがって, μ_λ は T_λ^{e} もしくは T_λ^{o} の固有値である.

以上により, 問題は T_λ^{o}, T_λ^{e} のスペクトルの下限を調べることに帰着された. 次の命題が成り立つ.

命題 5.2.1 (i) T^{o}_λ のスペクトルの下限に関して,

- $k=1$ のとき, $\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_\lambda)=0$, $\lambda_1\le\lambda<\Lambda_1$,
- $k=2,3,\ldots,$ のとき, $\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_\lambda)<0$, $\lambda_k\le\lambda<\Lambda_k$.

(ii) T^{e}_λ のスペクトルの下限に関して,

- $k=1$ のとき, $\begin{cases}\inf\sigma(T^{\mathrm{e}}_\lambda)=0, & \lambda=\lambda_1,\\ \inf\sigma(T^{\mathrm{e}}_\lambda)>0, & \lambda_1<\lambda<\Lambda_1,\end{cases}$
- $k=2,3,\ldots,$ のとき, $\inf\sigma(T^{\mathrm{e}}_\lambda)<0$, $\lambda_k\le\lambda<\Lambda_k$.

証明　(i) まず $k=1$ の場合を考える. $\lambda=\lambda_k$ のときは,

$$\sigma(T^{\mathrm{o}}_{\lambda_1})=\left\{\gamma\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,;\,n=1,2,\ldots,\right\}\cup\{\gamma\}$$

より, $\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_{\lambda_1})=0$ である.

次に, $\lambda_1<\lambda<\Lambda_1$ のとき, $\tilde{w}'_\lambda\in\mathcal{H}^{\mathrm{o}}$ より, T^{o}_λ が固有値 0 をもつことに着目してこれがスペクトルの下限を与えることを示す. 背理法によることとし, ある $\tilde{\lambda}\in(\lambda_1,\Lambda_1)$ について

$$\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_{\tilde{\lambda}})<0 \tag{5.2.14}$$

を仮定する. $\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_\lambda)$ は λ の連続関数であるから, 区間 $[\lambda_1,\tilde{\lambda})$ に含まれる $\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_\lambda)$ の零点のうち最大のものがある. これを λ_* とおくと,

$$\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_{\lambda_*})=0,\qquad \inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_\lambda)<0,\ \ \lambda_*<\lambda\le\tilde{\lambda},$$

が成り立つ. $\lambda_*<\lambda\le\tilde{\lambda}$ に対して $\mu_\lambda=\inf\sigma(T^{\mathrm{o}}_\lambda)$ とおき, φ_λ を T^{o}_λ の負の固有値 μ_λ に付随する固有関数で $\|\varphi_\lambda\|_{L^2}=1$ を満たすものとする. $n_0\in\mathbf{N}$ を $n_0>(\tilde{\lambda}-\lambda_*)^{-1}$ ととると, $\{\varphi_{\lambda_*+1/n};n=n_0,n_0+1,n_0+2,\ldots,\}$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{o}}$ の有界列を成すから, ある部分列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ と $\varphi_{\lambda_*}\in\mathcal{H}^{\mathrm{o}}$ が存在して, $\{\varphi_{\lambda_*+1/n_k};k=1,2,\ldots,\}$ は φ_{λ_*} に弱収束する. このとき, φ_{λ_*} が作用素 T_{λ_*} の固有値 0 に付随する固有関数となることを示す. $T^{\mathrm{o}}_\lambda\varphi_\lambda=\mu_\lambda\varphi_\lambda$ を具体的に表現すると,

$$\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}\varphi_\lambda(x)-\frac{1}{L}\int_0^L\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\varphi_\lambda(y)\,dy-\lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi_\lambda(y)\,dy=\mu_\lambda\varphi_\lambda(x)$$

である. 部分列 $\{\lambda_*+1/n_k;k=1,2,\ldots,\}$ に沿って極限をとるとき, 各項が L^2_{per} で強収束することが以下のようにして確かめられる. まず, 左辺第 2 項は奇関数の積分で 0. 左辺第 3 項は, 作用素 $\mathcal{K}$ のコンパクト性からある L^2_{per} の元に強収束する. また, $\mu_\lambda\to 0$ より, 右辺は L^2_{per} において 0 に強収束する. よって, 左辺第 1 項も L^2_{per} で強収束する.

$$\varphi_\lambda=\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda)^{\gamma+1}}\varphi_\lambda\times\frac{(1+\tilde{w}_\lambda)^{\gamma+1}}{\gamma}$$

と表すと, $\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda)^{\gamma+1}}\varphi_\lambda$ は L^2_{per} において強収束し, $\frac{(1+\tilde{w}_\lambda)^{\gamma+1}}{\gamma}$ は C^0_{per} で収束するから, φ_λ は L^2_{per} において強収束する. したがって, $\|\varphi_{\lambda_*}\|_{L^2}=1$ であって,

$$\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_*}(x))^{\gamma+1}}\varphi_{\lambda_*}(x)-\frac{1}{L}\int_0^L\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_*}(y))^{\gamma+1}}\varphi_{\lambda_*}(y)\,dy-\lambda_*\int_0^L K_L(x,y)\varphi_{\lambda_*}(y)\,dy=0$$

が成り立ち, φ_{λ_*} は作用素 $T^{\circ}_{\lambda_*}$ の固有値 0 に付随する固有関数となる.

次に, $\lambda_1 < \lambda < \Lambda_1$ に対して $\psi_\lambda = \frac{\tilde{w}'_\lambda}{\|\tilde{w}'_\lambda\|_{L^2}}$ とおく. ψ_λ は T°_λ の固有値 0 に付随する固有関数で $\|\psi_\lambda\|_{L^2} = 1$ を満たすから, これまでと同様の議論により, 必要なら部分列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を取り直すことによって, 列 $\left\{\psi_{\lambda_*+1/n_k}; k = 1, 2, \ldots,\right\}$ を $T^{\circ}_{\lambda_*}$ の固有値 0 に付随する固有関数 ψ_{λ_*} に L^2_{per} において強収束させることができる. ここで, $\lambda_* < \lambda \le \tilde{\lambda}$ のとき,

$$\mu_\lambda(\psi_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2} = (\psi_\lambda, \mu_\lambda\varphi_\lambda)_{L^2} = (\psi_\lambda, T_\lambda\varphi_\lambda)_{L^2} = (T_\lambda\psi_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2} = 0$$

であるから, $(\psi_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2} = 0$. さらに, 部分列に沿って極限をとると $(\psi_{\lambda_*}, \varphi_{\lambda_*})_{L^2} = 0$ を得る. とくに, φ_{λ_*} と ψ_{λ_*} は線形独立となるが, これは以下に述べるように矛盾を引き起こす.

まず, $T^{\circ}_{\lambda_*}\psi_{\lambda_*} = 0$, すなわち,

$$\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_*}(x))^{\gamma+1}}\psi_{\lambda_*}(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_*}(y))^{\gamma+1}}\psi_{\lambda_*}(y)\,dy - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\psi_{\lambda_*}(y)\,dy = 0$$

に対して両辺に ∂_x^2 を施すと, ψ_{λ_*} に関する次の 2 階線形微分方程式が得られる:

$$\partial_x^2\left\{\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_*}(x))^{\gamma+1}}\psi_{\lambda_*}(x)\right\} + \lambda\psi_{\lambda_*}(x) = 0.$$

ψ_{λ_*} は奇関数であるから $\psi_{\lambda_*}(0) = 0$ であるが, $\psi_{\lambda_*} \ne 0$ より $\psi'_{\lambda_*}(0) \ne 0$ である. 同様に, $T^{\circ}_{\lambda_*}\varphi_{\lambda_*} = 0$ より, φ_{λ_*} は ψ_{λ_*} と同じく 2 階線形微分方程式

$$\partial_x^2\left\{\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_*}(x))^{\gamma+1}}\varphi_{\lambda_*}(x)\right\} + \lambda_*\varphi_{\lambda_*}(x) = 0$$

を満たし, φ_{λ_*} は奇関数であるから $\varphi_{\lambda_*}(0) = 0$ となる. $c = \frac{\varphi'_{\lambda_*}(0)}{\psi'_{\lambda_*}(0)}$ とおくと, $x = 0$ における初期値に線形従属関係

$$\varphi_{\lambda_*}(0) = c\psi_{\lambda_*}(0) = 0, \quad \varphi'_{\lambda_*}(0) = c\psi'_{\lambda_*}(0)$$

が成り立つ. したがって, 方程式の線形性と初期値問題の解の一意性により, ふたつの解 $\varphi_{\lambda_*}, \psi_{\lambda_*}$ のあいだには線形従属関係 $\varphi_{\lambda_*} = c\psi_{\lambda_*}$ が成り立つ. しかしながら, これは矛盾である. 仮定 (5.2.14) に誤謬があり, 背理法により, $\lambda_1 < \lambda < \Lambda_1$ に対して $\inf\sigma(T^{\circ}_\lambda) = 0$ が結論される.

次に, $k = 2, 3, \ldots,$ の場合を考える. ある $\tilde{\lambda} \in (\lambda_k, \Lambda_k)$ に対して

$$\inf\sigma(T^{\circ}_{\tilde{\lambda}}) \ge 0$$

を仮定すると, $\inf\sigma(T^{\circ}_\lambda)$ の連続性と $\inf\sigma(T^{\circ}_{\lambda_k}) = \gamma\left(1-k^2\right) < 0$ により,

$$\inf\sigma(T^{\circ}_\lambda) < 0, \quad \lambda_k \le \lambda < \lambda_*, \qquad \inf\sigma(T^{\circ}_{\lambda_*}) = 0$$

を満たす $\lambda_* \in (\lambda_k, \Lambda_k)$ が存在する. $\lambda_k < \lambda < \lambda_*$ に対して, T°_λ の負の固有値 $\mu_\lambda = \inf\sigma(T^{\circ}_\lambda)$ に付随する固有関数 φ_λ を, $\|\varphi_\lambda\|_{L^2} = 1$ を満たすようにとる. $n_0 \in \mathbf{N}$ を $n_0 > (\lambda_* - \lambda_k)^{-1}$ ととれば, $\{\varphi_{\lambda_*-1/n}; n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ は $\mathcal{H}^{\circ}$ の有界列を成し, ある部分列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $\{\varphi_{\lambda_*-1/n_k}; k = 1, 2, \ldots,\}$ は $\varphi_{\lambda_*} \in \mathcal{H}^{\circ}$ に弱収束する. $k = 1$ の場合と同じ議論により, この収束は実は L^2_{per} における強収束で, $\|\varphi_{\lambda_*}\|_{L^2} = 1$ が成り立ち, φ_{λ_*} は $T^{\circ}_{\lambda_*}$ の固有値 0 に付随する固有関数となる.

一方, $\lambda_k < \lambda < \Lambda_k$ に対して, $\tilde{w}'_\lambda$ は T^{o}_λ の固有値 0 に付随する固有関数であるから, $k=1$ の場合と同様の議論により, $\lambda_k < \lambda < \lambda_*$ のとき, $\mu_\lambda(\tilde{w}'_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2} = 0$ となり, $(\tilde{w}'_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2} = 0$ が得られる. 部分列に沿って極限をとれば $(\tilde{w}'_{\lambda_*}, \varphi_{\lambda_*})_{L^2} = 0$ であり, $\tilde{w}'_{\lambda_*}$ と φ_{λ_*} は線形独立である. ところが, $k=1$ のときと同様, $\tilde{w}'_{\lambda_*}$ と φ_{λ_*} は同じ 2 階線形微分方程式を満たし, 初期条件が線形従属となることから, $\tilde{w}'_{\lambda_*}$ と φ_{λ_*} は線形従属となって矛盾が生じる. 背理法により, $\lambda_k < \lambda < \Lambda_k$ に対して $\inf \sigma(T^{\mathrm{o}}_\lambda) < 0$ を得る.

(ii) つづいて, T^{e}_λ のスペクトルの下限を調べる. 次の補題が示すように, T^{o}_λ との違いは, $\lambda \neq \lambda_k$ のとき, T^{e}_λ が 0 を固有値に持たないことである.

補題 5.2.7 $\lambda_k < \lambda < \Lambda_k$ のとき, T^{e}_λ は 0 を固有値にもたない.

証明　背理法で示す. T^{e}_λ が 0 を固有値にもつと仮定し, 固有値 0 に付随する固有関数を φ_λ とする. $T^{\mathrm{e}}_\lambda \varphi_\lambda = 0$ の両辺に ∂_x^2 を施すと, 方程式

$$\partial_x^2 \left\{ \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}} \varphi_\lambda(x) \right\} + \lambda \varphi_\lambda(x) = 0$$

が得られる. φ_λ は偶関数だから, $\partial_x \varphi_\lambda(0) = 0$ である. 一方, 微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_x^2 \left\{ -(1+w)^{-\gamma} \right\} + \lambda w = 0, \\ w(0) = \xi > 0, \\ \partial_x w(0) = 0 \end{cases} \tag{5.2.15}$$

の解を $w(x,\xi)$ と記すと, $\psi(x,\xi) = \partial_\xi w(x,\xi)$ は変分方程式

$$\begin{cases} \partial_x^2 \left\{ \dfrac{\gamma}{(1+w(x,\xi))^{\gamma+1}} \psi(x,\xi) \right\} + \lambda \psi(x,\xi) = 0, \\ \psi(0,\xi) = 1, \\ \partial_x \psi(0,\xi) = 0 \end{cases}$$

を満たす. したがって, $\tilde{w}_\lambda(x) = w(x,\xi)$ を満たす ξ に対して, $\varphi_\lambda(x)$ は $\psi(x,\xi)$ と同じ 2 階線形微分方程式の解となり, 両者の $x=0$ における初期条件の線形従属関係により, $\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(0)\psi(x,\xi)$ が成り立つことになる.

このような ξ を決定するために, $r(x) = (1+w(x,\xi))^{-\gamma} - 1$ が

$$\begin{cases} \partial_x^2 r + \lambda \left\{ 1 - (1+r)^{-1/\gamma} \right\} = 0, \\ r(0) = (1+\xi)^{-\gamma} - 1, \\ \partial_x r(0) = -\gamma(1+w(0))^{-\gamma-1} \partial_x w(0) = 0 \end{cases}$$

を満たすことに着目する. 解 r の解軌道のエネルギーは ξ の関数

$$E(\xi) = \lambda \int_0^{(1+\xi)^{-\gamma}-1} \left\{ 1 - (1+s)^{-1/\gamma} \right\} ds \tag{5.2.16}$$

で与えられる．5.1.2 節で示したように, r, したがって, $w(\cdot, \xi)$ が最小周期 L/k をもつような解軌道のエネルギーの値 E_λ が一意に決まり, $E(\xi_\lambda) = E_\lambda$ により $\xi_\lambda > 0$ を定めると, $\tilde{w}_\lambda(x) = w(x, \xi_\lambda)$ となって,

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(0)\psi(x, \xi_\lambda)$$

が成り立つ．

実は $\psi(\cdot, \xi_\lambda)$ が L を周期にもたず, したがって, φ_λ は L を周期にもちえず, 矛盾が生じることを示す．ξ が ξ_λ の近傍を動くとき, $w(x, \xi)$ は方程式の (5.2.15) の周期解となる．その最小周期を $L(\xi)$ とすると, $kL(\xi)$ もまた周期となるから

$$\begin{cases} w(0, \xi) = w(kL(\xi), \xi) = \xi, \\ (\partial_x w)(0, \xi) = (\partial_x w)(kL(\xi), \xi) = 0 \end{cases} \tag{5.2.17}$$

が成り立つ．(5.2.17) の第 1 式を ξ で微分すると,

$$(\partial_\xi w)(0, \xi) = (\partial_x w)(kL(\xi), \xi)kL'(\xi) + (\partial_\xi w)(kL(\xi), \xi) = 1$$

となり, 第 2 式を用いて $\psi(0, \xi) = \psi(kL(\xi), \xi) = 1$ を得る．同様に, $(\partial_x w)(0, \xi) = 0$ より, $(\partial_x \psi)(0, \xi) = 0$ がしたがう．ところが, $(\partial_x \psi)(kL(\xi), \xi) \neq 0$ である．これを示す．(5.2.15) の第 1 式を展開すると,

$$-\gamma(\gamma+1)(1 + w(x, \xi))^{-\gamma-2}(\partial_x w(x, \xi))^2 + \gamma(1 + w(x, \xi))^{-\gamma-1}(\partial_x^2 w)(x, \xi) + \lambda w(x, \xi) = 0$$

となり, これに $x = kL(\xi)$ を代入すると (5.2.17) より,

$$\gamma(1 + \xi)^{-\gamma-1}(\partial_x^2 w)(kL(\xi), \xi) + \lambda\xi = 0$$

となるから,

$$(\partial_x^2 w)(kL(\xi), \xi) = -\frac{\lambda\xi}{\gamma}(1 + \xi)^{\gamma+1} \tag{5.2.18}$$

を得る．(5.2.17) の第 2 式を ξ で微分すると,

$$(\partial_x^2 w)(kL(\xi), \xi)kL'(\xi) + (\partial_x \partial_\xi w)(kL(\xi), \xi) = 0$$

となり, (5.2.18) とあわせて

$$(\partial_x \psi)(kL(\xi), \xi) = -(\partial_x^2 w)(kL(\xi), \xi)kL'(\xi) = \frac{k\lambda}{\gamma}\xi(1 + \xi)^{\gamma+1}L'(\xi)$$

を得る．ここで, (5.1.21), (5.1.22), (5.1.23) で定まる関数 I_γ を用いると,

$$L(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\, I_\gamma(\theta), \quad \theta = \sqrt{\frac{E(\xi)}{\lambda}}$$

と表せるから,

$$L'(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\, I'_\gamma(\theta)\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{\lambda}I'_\gamma(\theta)\frac{E'(\xi)}{\sqrt{2E(\xi)}}$$

となる．5.1.2 節の結果より, $I'_\gamma(\theta) > 0$ であるから, $L'(\xi)$ の符号は $E'(\xi)$ の符号と一致する．(5.2.16) より,

$$E'(\xi) = -\gamma\lambda\left\{1 - (1 + \xi)\right\}(1 + \xi)^{-\gamma-1} = \lambda\gamma\xi(1 + \xi)^{-\gamma-1} > 0$$

となり, $L'(\xi) > 0$, したがって, $(\partial_x\psi)(kL(\xi),\xi) > 0$ である.

以上で得られた関係

$$(\partial_x\psi)(0,\xi) = 0 \neq (\partial_x\psi)(kL(\xi),\xi)$$

において, $\xi = \xi_\lambda$ ととれば, $(\partial_x\psi)(0,\xi_\lambda) \neq (\partial_x\psi)(L,\xi_\lambda)$ となり, $\psi(\,\cdot\,,\xi_\lambda)$ は周期 L をもたない. □

補題5.2.7 を用いて, $T_\lambda^{\rm e}$ のスペクトルの下限の符号を調べる. まず $k=1$ の場合を考える. 関数 $\lambda \mapsto \inf\sigma(T_\lambda^{\rm e})$ は連続で $\lambda_1 < \lambda < \Lambda_1$ に零点をもたないから, $\inf\sigma(T_\lambda)$ の符号はこの区間で正か負かのいずれかで一定である.

$$\inf\sigma(T_\lambda) < 0, \quad \lambda_1 < \lambda < \Lambda_1,$$

を仮定する. $T_\lambda^{\rm e}$ の負の固有値 $\mu_\lambda = \inf\sigma(T_\lambda^{\rm e})$ に付随する固有関数 φ_λ を $\|\varphi_\lambda\|_{L^2} = 1$ を満たすようにとり, 部分列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ と $\varphi_{\lambda_1} \in \mathcal{H}^{\rm e}$ を選んで $\{\varphi_{\lambda_1+1/n_k}; k = 1,2,\ldots,\}$ を φ_{λ_1} に弱収束させる. (i) における議論と同じく, 部分列に沿って方程式 $T_\lambda^{\rm e}\varphi_\lambda = \mu_\lambda\varphi_\lambda$ の各項の極限をとる. 項 $\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\varphi_\lambda(y)\,dy$ については, $\tilde{w}_{\lambda_1} = 0$ と $\overline{\varphi_\lambda} = \overline{\varphi_{\lambda_1}} = 0$ を用いて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\varphi_\lambda(y)\,dy - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_1}(y))^{\gamma+1}}\varphi_{\lambda_1}(y)\,dy\\&= \frac{1}{L}\int_0^L \gamma\left\{\frac{1}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}} - 1\right\}\varphi_\lambda(y)\,dy\end{aligned}$$

と表すと, $\lambda \to \lambda_1 + 0$ のとき, $\frac{1}{(1+\tilde{w}_\lambda)^{\gamma+1}} - 1$ が一様に 0 に収束するから,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1+0}\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\varphi_\lambda(y)\,dy = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_{\lambda_1}(y))^{\gamma+1}}\varphi_{\lambda_1}(y)\,dy = 0$$

である. 残りの項は, (i) と同様の議論により部分列に沿って $L^2_{\rm per}$ において強収束するから, φ_λ は φ_{λ_1} に強収束し, $\|\varphi_{\lambda_1}\|_{L^2} = 1$, および, $T_{\lambda_1}^{\rm e}\varphi_{\lambda_1} = 0$ が成り立つ.

一方, $\lambda - \lambda_1 > 0$ が十分小さいとき, $T_\lambda^{\rm e}$ は, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1+0}\hat{\mu}_\lambda = 0$ をみたす固有値 $\hat{\mu}_\lambda > 0$ をもつ. これを示すために, (5.2.6) で定められる写像を偶関数からなる空間

$$Y^{\rm e} = \left\{w \in C^0_{\rm per}; w(-x) = w(x), \bar{w} = 0\right\}$$

に制限したものを $\Theta^{\rm e}$ と定め, 5.1.1 節においてパラメータ s の 0 近傍で定められた関数方程式 (5.1.7) の局所分岐解 $(\lambda_1(s), r_1(s,\,\cdot\,))$ に対して,

$$w_1(s,x) = (1 + r_1(s,x))^{-\gamma} - 1$$

とおく. すると, $(\lambda_1, w_1(s,\,\cdot\,))$ は, 方程式

$$\Theta^{\rm e}(\lambda, w) = 0$$

の自明解 $(\lambda, 0)$ から分かれ出る分岐解を与えている. **補題5.2.4** の証明によれば, Fréchet 微分 $D_w\Theta^{\rm e}(\lambda_1, 0)$ は単純固有値 0 をもつから, Crandall-Rabinowitz[6] による固有値の摂動論によれば, 作用素 $D_w\Theta^{\rm e}(\lambda_1(s), w_1(s,\,\cdot\,))$ は s に関して C^∞ 級で $\lim\limits_{s\to 0}\hat{\mu}(s) = 0$ を満たす単純固有値 $\hat{\mu}(s)$ をもつ. さらに, (5.1.3) より $\lambda_1'(0) = 0$, (5.1.5) より $1 \le \gamma < 2$ の場合, $\lambda_1''(0) > 0$ であるから, $\hat{\mu}(s) > 0$ とと

れることも示されている. [15], Proposition I. 7. 2 も参照のこと. 同じ理由によって, $\lambda - \lambda_1 > 0$ が十分小さいとき, $\lambda = \lambda_1(s_\lambda)$, および, $\lim_{\lambda \to \lambda_1+0} s_\lambda = 0$ を満たす s_λ を $w_1(s_\lambda, \cdot)$ が $\tilde{w}_\lambda$ に一致するように選ぶことができる. このとき, T^{e}_λ は $D_w\Theta^{\mathrm{e}}(\lambda, \tilde{w}_\lambda) = D_w\Theta^{\mathrm{e}}(\lambda_1(s_\lambda), w_1(s_\lambda, \cdot))$ の拡張となるから, $\hat{\mu}_\lambda = \hat{\mu}(s_\lambda)$ が求める固有値である.

固有値 $\hat{\mu}_\lambda$ に付随する固有関数 ψ_λ を $\|\psi_\lambda\|_{L^2} = 1$ ととり, 適当な部分列に沿って方程式 $T_\lambda\psi_\lambda = \hat{\mu}_\lambda\psi_\lambda$ の各項の極限をとれば, ψ_λ が $T^{\mathrm{e}}_{\lambda_1}$ の固有値 0 に付随する固有関数 ψ_{λ_1} に L^2_{per} において強収束することが示せる.

$$\mu_\lambda(\varphi_\lambda, \psi_\lambda)_{L^2} = (\mu_\lambda\varphi_\lambda, \psi_\lambda)_{L^2} = (T_\lambda\varphi_\lambda, \psi_\lambda)_{L^2} = (\varphi_\lambda, T_\lambda\psi_\lambda)_{L^2} = (\varphi_\lambda, \hat{\mu}_\lambda\psi_\lambda)_{L^2} = \hat{\mu}_\lambda(\varphi_\lambda, \psi_\lambda)_{L^2}$$

と $\mu_\lambda < 0 < \hat{\mu}_\lambda$ から, $(\varphi_\lambda, \psi_\lambda)_{L^2} = 0$ が成り立つ. 部分列に沿って極限をとれば, $(\varphi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_1})_{L^2} = 0$ となり, φ_{λ_1} と ψ_{λ_1} は線形独立である. ところが, $T^{\mathrm{e}}_{\lambda_1}\varphi_{\lambda_1} = 0$, $T^{\mathrm{e}}_{\lambda_1}\psi_{\lambda_1} = 0$ より, φ_{λ_1} と ψ_{λ_1} は定数係数 2 階線形微分方程式 $\partial_x^2\varphi + \lambda_1\varphi = 0$ の偶関数解である. 両者は $\cos\frac{2\pi}{L}x$ の定数倍で表されるがこれは矛盾である. 背理法により, $\lambda_1 < \lambda < \Lambda_1$ に対して, $\inf\sigma(T^{\mathrm{e}}_\lambda) > 0$ がしたがう.

最後に, $k = 2, 3, \ldots,$ の場合を考える. $k = 1$ の場合と同様, **補題5.2.7** と関数 $\lambda \mapsto \inf\sigma(T^{\mathrm{e}}_\lambda)$ の連続性により, $\lambda_k < \lambda < \Lambda_k$ において $\inf\sigma(T^{\mathrm{e}}_\lambda)$ の符号は一定である. $\lambda = \lambda_k$ のとき,

$$\inf\sigma(T_{\lambda_k}) = \gamma(1 - k^2) < 0$$

であるから, $\inf\sigma(T^{\mathrm{e}}_\lambda) < 0$ である. ゆえに**命題 5.2.1** が示せた. □

平衡解の線形化安定性　以上, スペクトルの下限に関して得られた結果を用いて平衡解の安定性を判定する.

方程式 (5.2.5) の自明解については, **補題5.2.4** により,

$$\inf\sigma(T_{\lambda,0}) = \gamma - \lambda\frac{L^2}{4\pi^2}$$

であって. したがって, 自明な平衡解 $(V, 0)$ の安定性について次の結果を得る:

- $\gamma > \lambda\frac{L^2}{4\pi^2}$ のとき, すなわち, $V < \left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$ のとき, 線形安定
- $\gamma < \lambda\frac{L^2}{4\pi^2}$ のとき, すなわち, $V > \left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$ のとき, 線形不安定

$\gamma = \lambda\frac{L^2}{4\pi^2}$, すなわち, $V = \left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$ の場合は, $\inf\sigma(T_{\lambda,0}) = 0$ となり, 自明解の線形安定性は判定不能であることを注意しておく.

次に非自明な平衡解の安定性を判定する. $k = 1, 2, 3, \ldots,$ とし, $\lambda_k < \lambda < \Lambda_k$ に対して, $\frac{1}{L}\int_0^L \tilde{v}(x)\,dx = V$ を満たし, 最小周期が L/k で $x = 0$ において値が最大となる非自明な平衡解を $(\tilde{v}_\lambda, 0)$ と記す. この解は, 方程式 (5.2.5) の解 $\tilde{w}_\lambda$ を用いて $\tilde{v}_\lambda = V(1 + \tilde{w}_\lambda)$ と表され, $\frac{1}{L}\int_0^L \tilde{v}(x)\,dx = V$ を満たす最小周期 L/k の平衡解の全体は集合

$$S^{(k)}_\lambda = \left\{(\tilde{v}^\alpha_\lambda, 0)\,;\, 0 \le \alpha < \frac{L}{k}\right\}$$

となる. ここに, $\tilde{v}^\alpha_\lambda = \tilde{v}_\lambda(\cdot - \alpha)$ である.

$$\tilde{w}^\alpha_\lambda = \frac{\tilde{v}^\alpha_\lambda - V}{V}$$

とおき, $\mathcal{H}$ 上の作用素 $T_{\lambda,\tilde{w}_\lambda^\alpha}$ を T_λ^α と記す. **補題5.2.2** により

$$\inf\sigma(T_\lambda^\alpha) = \inf\sigma(T_\lambda)$$

である. **命題5.2.1** により,

- $k = 2, 3, \ldots,$ の場合, $\inf\sigma(T_\lambda) < 0$ であるから, $\inf\sigma(T_\lambda^\alpha)$ は作用素 T_λ^α の負の固有値である. したがって, 平衡解 $(\tilde{v}_\lambda^\alpha, 0)$ は線形不安定である.

ところが,

- $k = 1$ の場合, $\inf\sigma(T_\lambda) = 0$ であるから, (5.2.4) で定められる 2 次形式 Q は非負だが正定値ではない. したがって, 個々の平衡解 $(\tilde{v}_\lambda^\alpha, 0)$ は線形安定とはいえない.

しかしながら, 平衡解の族 $S_\lambda^{(1)}$ は以下に示す意味で線形安定である.

5.2.4　平衡解族の安定性

方程式 (5.1.1) の解軌道上の点 $(v(t,\cdot), u(t,\cdot))$ が平衡解の族 $S_\lambda^{(1)}$ の小さな近傍内にあるとき, $\alpha_0 \in [0, L)$ を

$$\min_\alpha \|v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^\alpha\|_{L^2} = \|v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}\|_{L^2}$$

を満たすようにとり, エネルギー形式の値 $E(t) = \mathcal{E}(v(t,\cdot), u(t,\cdot))$ を平衡解 $(\tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}, 0)$ のまわりの小さな擾乱 $(v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}, u(t,\cdot))$ に関して展開して表すと,

$$E(t) = \mathcal{E}(\tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}) + \frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{a}{V^{\gamma+1}}(T_\lambda^{\alpha_0}(v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}), v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^{\alpha_0})_{L^2} + (\text{高次項}) \quad (5.2.19)$$

が成り立つ. 一般に, $v \in C^0_{\mathrm{per}}$, $v > 0$ に対して, $\mathcal{E}(v(\cdot - \alpha))$ の値は $\mathcal{E}(v)$ に等しい. なぜなら, $\overline{v(\cdot - \alpha)} = \bar{v}$ より,

$$\mathcal{E}(v(\cdot - \alpha)) = \int_0^L \Phi(v(\cdot - \alpha))\,dx - \frac{2\pi G}{\bar{v}}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(v(x-\alpha) - \bar{v})(v(y-\alpha) - \bar{v})\,dxdy$$

と表されるが, 右辺第 1 項は v の周期性より $\int_0^L \Phi(v)\,dx$ に等しく, 第 2 項については v, K_L の周期性と $K_L(x+\alpha, y+\alpha) = K_L(x,y)$ より

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(v(x-\alpha) - \bar{v})(v(y-\alpha) - \bar{v})\,dxdy \\
&= \int_0^L\int_0^L K_L(x+\alpha, y+\alpha)(v(x) - \bar{v})(v(y) - \bar{v})\,dxdy \\
&= \int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(v(x) - \bar{v})(v(y) - \bar{v})\,dxdy
\end{aligned}$$

となるからである. したがって, $\mathcal{E}(\tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}) = \mathcal{E}(\tilde{v}_\lambda)$ である. また, $\alpha \mapsto \|v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^\alpha\|_{L^2}^2$ が $\alpha = \alpha_0$ で最小となることと,

$$\frac{d}{d\alpha}\|v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^\alpha\|_{L^2}^2 = \frac{d}{d\alpha}\int_0^L (v(t,x) - \tilde{v}_\lambda(x-\alpha))^2\,dx$$

$$= 2\int_0^L (v(t,x) - \tilde{v}_\lambda(x-\alpha))\tilde{v}'_\lambda(x-\alpha)\,dx$$
$$= 2V\int_0^L (v(t,x) - \tilde{v}_\lambda(x-\alpha))\tilde{w}'_\lambda(x-\alpha)\,dx$$

より,

$$\int_0^L (v(t,x) - \tilde{v}_\lambda(x-\alpha_0))\tilde{w}'_\lambda(x-\alpha_0)\,dx = 0 \tag{5.2.20}$$

が成り立つ. これは, $v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}$ が $T_\lambda^{\alpha_0}$ の固有値 0 に付随する固有関数 $\tilde{w}'_\lambda(\cdot - \alpha_0)$ と直交することを示している. 作用素 $T_\lambda^{\alpha_0}$ の零空間は $\tilde{w}'_\lambda(\cdot - \alpha_0)$ によって張られるから, $v(t,\cdot) - \tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}$ はこの零空間の直交補空間に属している.

次の補題は, $k=1$ のとき, 作用素 T_λ^α をその零空間の直交補空間に制限すれば, 正定値となることを示している.

補題 5.2.8 $k=1$ のとき, $\inf(\sigma(T_\lambda)\backslash\{0\}) > 0$.

証明 背理法で示す. $\inf(\sigma(T_\lambda)\backslash\{0\}) = 0$ を仮定すると, **補題5.2.3** より, $\mu_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ を満たす T_λ の固有値 μ_n が存在する. μ_n に付随する固有関数 φ_n を $\|\varphi_n\|_{L^2} = 1$ ととる. 必要ならば部分列をとって $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ が $\varphi \in \mathcal{H}$ に弱収束するとしてよい. 実は φ_n は φ に強収束する. $T_\lambda\varphi_n = \mu_n\varphi_n$ を具体的に表現すると

$$\frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(x))^{\gamma+1}}\varphi_n(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\gamma}{(1+\tilde{w}_\lambda(y))^{\gamma+1}}\varphi_n(y)\,dy - \lambda\int_0^L K_L(x,y)\varphi_n(y)\,dy = \mu_n\varphi_n$$

となるが, $n\to\infty$ とすると, 左辺第 2 項, 第 3 項は L^2_{per} で強収束し, 右辺は L^2_{per} において 0 に強収束するからである. これより, $T_\lambda\varphi = 0$, $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ が成り立つ. $\varphi = \varphi_{\mathrm{o}} + \varphi_{\mathrm{e}}$, $\varphi_{\mathrm{o}} \in \mathcal{H}^{\mathrm{o}}$, $\varphi_{\mathrm{e}} \in \mathcal{H}^{\mathrm{e}}$ と表すと, $T_\lambda(\varphi_{\mathrm{o}} + \varphi_{\mathrm{e}}) = 0$ より, $T_\lambda\varphi_{\mathrm{o}} = -T_\lambda\varphi_{\mathrm{e}}$ となり, 左辺は奇関数, 右辺は偶関数であることから $T_\lambda\varphi_{\mathrm{o}} = -T_\lambda\varphi_{\mathrm{e}} = 0$. **補題5.2.7** より T_λ^{e} は 0 を固有値にもたないから, $\varphi_{\mathrm{e}} = 0$, すなわち, $\varphi = \varphi_{\mathrm{o}}$ となり, φ は奇関数である. 一方, T_λ^{o} は固有値 0 をもち, 固有関数 $\tilde{w}'_\lambda$ が付随している. このことから, $n = 1, 2, \ldots,$ に対して,

$$\mu_n(\tilde{w}'_\lambda, \varphi_n) = (\tilde{w}'_\lambda, \mu_n\varphi_n) = (\tilde{w}'_\lambda, T_\lambda\varphi_n) = (T_\lambda\tilde{w}'_\lambda, \varphi_n) = 0,$$

よって, $(\tilde{w}'_\lambda, \varphi_n) = 0$ が成り立ち, 部分列に沿って極限をとって $(\tilde{w}'_\lambda, \varphi) = 0$ を得る. これは, φ と $\tilde{w}'_\lambda$ が線形独立であることを示している. ところが, $T_\lambda\varphi = 0$, $T_\lambda\tilde{w}'_\lambda = 0$ より, 5.2.3 節の論法により, φ と $\tilde{w}'_\lambda$ は同じ 2 階線形微分方程式の奇関数解で線形従属となるから矛盾が生じる. 背理法により $\inf(\sigma(T_\lambda)\backslash\{0\}) > 0$ を得る. □

補題5.2.8 より,

$$\kappa_\lambda = \inf(\sigma(T_\lambda)\backslash\{0\})$$

で正数 κ_λ を定めると, **補題5.2.2** により

$$\inf(\sigma(T_\lambda^{\alpha_0})\backslash\{0\}) = \kappa_\lambda$$

である．$T_\lambda^{\alpha_0}$ の零空間は $\tilde{w}'_\lambda(\,\cdot\,-\alpha_0)$ によって張られるから, 直交関係 (5.2.20) を用いると,

$$\begin{aligned}&(T_\lambda^{\alpha_0}(v(t,\,\cdot\,)-\tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}), v(t,\,\cdot\,)-\tilde{v}_\lambda^{\alpha_0})_{L^2}\\ &\geq \kappa_\lambda\|v(t,\,\cdot\,)-\tilde{v}_\lambda^{\alpha_0}\|_{L^2}^2\\ &= \kappa_\lambda\left(\min_\alpha\|v(t,\,\cdot\,)-\tilde{v}_\lambda^{\alpha}\|_{L^2}\right)^2\end{aligned}$$

が成り立つ．これと (5.2.19) から,

$$E(t)\geq\mathcal{E}(\tilde{v}_\lambda)+\frac{1}{2}\|u(t,\,\cdot\,)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\frac{a\kappa_\lambda}{V^{\gamma+1}}\left(\min_\alpha\|v(t,\,\cdot\,)-\tilde{v}_\lambda^{\alpha}\|_{L^2}\right)^2+(\text{高次項})$$

が得られる．このことは, エネルギー形式の値 $E(t)$ の減少により, $\|u(t,\,\cdot\,)\|_{L^2}$, $\min\limits_\alpha\|v(t,\,\cdot\,)-\tilde{v}_\lambda^{\alpha}\|_{L^2}$ が小さく保たれ, 解軌道 $(v(t,\,\cdot\,), u(t,\,\cdot\,))$ が平衡解の集合 $S_\lambda^{(1)}$ の近傍にとどまり, 平衡解のプロフィールは安定に保たれうることを示している．本論文では, この意味で, 平衡解の族 $S_\lambda^{(1)}$ を線形安定とよぶことにする．

第6章　非有界な解の存在

方程式 (5.1.1) の解の軌道に沿ってエネルギー形式の値は減少する．このことは解の軌道が近づき得る平衡解を制限する．とくに, エネルギー形式の値が平衡解におけるエネルギー形式のどの値よりも小さい状態があれば, このような状態を始点とする解軌道は平衡解に近づき得ず, 解軌道は自ら非有界となる．本章では, エネルギー形式の値を最小にする平衡解を求め, その安定性からこのような状態の存在を保証する条件を与える．

6.1　平衡解のエネルギー準位

正のパラメータ V に対して,

$$M_V = \{(v,u) \in H^1_{\mathrm{per}} \times H^1_{\mathrm{per}}; \bar{v} = V, \bar{u} = 0, v > 0\}$$

とおく．5.1.2 節の結果によれば, M_V 上に自明解 $(V,0)$ のほかに, 最小周期が異なる平衡解が複数存在する場合がある．本節では, このような場合に, M_V 上にある平衡解各々におけるエネルギー形式の値の大小を比較して, エネルギー形式の値を最小にする平衡解を求める．

6.1.1　$\gamma = 1$ の場合

$\lambda = \frac{4\pi GV}{a}$ とおく．方程式 (5.1.16) の L-周期解の存在条件 (5.1.35) により, M_V 上の平衡解は, シフトで重なり合うものを除けば,

- $\lambda \le \frac{4\pi^2}{L^2}$ のとき, 自明解 $(V,0)$ のみ,
- 自然数 $k = 1, 2, \ldots,$ に対して, $\frac{4\pi^2 k^2}{L^2} < \lambda \le \frac{4\pi^2(k+1)^2}{L^2}$ のとき, 自明解 $(V,0)$, ならびに, 最小周期が L/j の解 $(\tilde{v}^{(j)}, 0)$, $j = 1, \ldots, k$,

である．後者の場合, これらの平衡解においてエネルギー形式の値をとると,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(V) &= 0,\\
\mathcal{E}(\tilde{v}^{(j)}) &= a\int_0^L \left(\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V} - 1 - \log\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V}\right) dx\\
&\quad - \frac{2\pi G}{V}\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(\tilde{v}^{(j)}(x) - V)(\tilde{v}^{(j)}(y) - V)\, dxdy, \quad j = 1, \ldots, k,
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

となる．これらの値の大小を比較する．

はじめに, 関数 $\tilde{v}^{(j)}$ を区間 $[0, L/j]$ 上に制限して値 $\mathcal{E}(\tilde{v}^{(j)})$ を表す. まず, (6.1.1) の右辺第 1 項について, $\tilde{v}^{(j)}$ の L/j-周期性によれば,

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left(\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V} - 1 - \log\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V}\right) dx \\
&= \left(\int_0^{L/j} + \cdots + \int_{(j-1)L/j}^{L}\right)\left(\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V} - 1 - \log\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V}\right) dx \\
&= j\int_0^{L/j}\left(\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V} - 1 - \log\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V}\right) dx
\end{aligned}$$

を得る. 第 2 項について, 等式

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(\tilde{v}^{(j)}(x) - V)(\tilde{v}^{(j)}(y) - V)\,dxdy \\
&= j\int_0^{L/j}\int_0^{L/j} K_{L/j}(x,y)(\tilde{v}^{(j)}(x) - V)(\tilde{v}^{(j)}(y) - V)\,dxdy
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

が以下のようにして示される. (6.1.2) 式左辺の $[0, L] \times [0, L]$ 上の積分を 1 辺の長さが L/j の正方領域上の積分に分割すると,

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\int_0^L K_L(x,y)(\tilde{v}^{(j)}(x) - V)(\tilde{v}^{(j)}(y) - V)\,dxdy \\
&= \sum_{m,n=0}^{j-1}\int_{mL/j}^{(m+1)L/j}\int_{nL/j}^{(n+1)L/j} K_L(x,y)(\tilde{v}^{(j)}(x) - V)(\tilde{v}^{(j)}(y) - V)\,dxdy \\
&= \int_0^{L/j}\int_0^{L/j}\sum_{m,n=0}^{j-1} K_L\left(x + \frac{mL}{j}, y + \frac{nL}{j}\right)\left(\tilde{v}^{(j)}\left(x + \frac{mL}{j}\right) - V\right)\left(\tilde{v}^{(j)}\left(y + \frac{nL}{j}\right) - V\right) dxdy
\end{aligned}$$

である. $\tilde{v}^{(j)}$ は周期 L/j をもつから,

$$= \int_0^{L/j}\int_0^{L/j}\sum_{m,n=0}^{j-1} K_L\left(x + \frac{mL}{j}, y + \frac{nL}{j}\right)(\tilde{v}^{(j)}(x) - V)(\tilde{v}^{(j)}(y) - V)\,dxdy$$

となる. ここで, $0 \le x, y \le L/j$, $m, n = 0, \ldots, j-1$ のとき, $0 \le x + mL/j, y + nL/j \le L$ となることに注意して (2.2.7) を用いると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=0}^{j-1} K_L\left(x + \frac{mL}{j}, y + \frac{nL}{j}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{m,n=0}^{j-1}\left|x - y + \frac{m-n}{j}L\right| + \frac{1}{2L}\sum_{m,n=0}^{j-1}\left(x - y + \frac{m-n}{j}L\right)^2 + \frac{1}{12}Lj^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left[\sum_{m=n}|x - y| + \sum_{m>n}\left(x - y + \frac{m-n}{j}L\right) + \sum_{m<n}\left\{-\left(x - y + \frac{m-n}{j}L\right)\right\}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2L}\sum_{m,n=0}^{j-1}\left\{(x-y)^2 + \frac{2(m-n)}{j}L(x-y) + \left(\frac{m-n}{j}L\right)^2\right\} + \frac{1}{12}Lj^2
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(j|x-y| + 2\sum_{m>n}\frac{m-n}{j}L\right) + \frac{1}{2L}\left\{j^2(x-y)^2 + 2\sum_{m>n}\left(\frac{m-n}{j}L\right)^2\right\} + \frac{1}{12}Lj^2$$
$$= -\frac{1}{2}j|x-y| + \frac{1}{2L}j^2(x-y)^2 + \sum_{m>n}\left\{\left(\frac{m-n}{j}\right)^2 - \frac{m-n}{j}\right\}L + \frac{1}{12}Lj^2 \tag{6.1.3}$$

である. さらに,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m>n}\left\{\left(\frac{m-n}{j}\right)^2 - \frac{m-n}{j}\right\}L \\
&= \sum_{m=1}^{j-1}\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{m^2-2mn+n^2}{j^2} - \frac{m-n}{j}\right)L \\
&= \sum_{m=1}^{j-1}\left\{\frac{m^3}{j^2} - \frac{2m}{j^2}\frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{j^2}\frac{1}{6}m(m-1)(2m-1) - \frac{m^2}{j} + \frac{1}{j}\frac{1}{2}m(m-1)\right\}L \\
&= \sum_{m=1}^{j-1}\left(\frac{m^3}{3j^2} + \frac{m^2}{2j^2} - \frac{m^2}{2j} + \frac{m}{6j^2} - \frac{m}{2j}\right)L \\
&= \left[\frac{1}{3j^2}\left\{\frac{1}{2}j(j-1)\right\}^2 + \left(\frac{1}{2j^2} - \frac{1}{2j}\right)\frac{1}{6}j(j-1)(2j-1) + \left(\frac{1}{6j^2} - \frac{1}{2j}\right)\frac{1}{2}j(j-1)\right]L \\
&= \left(-\frac{1}{12}j^2 + \frac{1}{12}\right)L
\end{aligned}$$

であるから, (6.1.3) とあわせて

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=0}^{j-1}K_L\left(x + \frac{mL}{j}, y + \frac{nL}{j}\right) \\
&= -\frac{1}{2}j|x-y| + \frac{1}{2L}j^2(x-y)^2 - \frac{1}{12}Lj^2 + \frac{1}{12}L + \frac{1}{12}Lj^2 \\
&= j\left(-\frac{1}{2}|x-y| + \frac{1}{2\frac{L}{j}}(x-y)^2 + \frac{1}{12}\frac{L}{j}\right) \\
&= jK_{L/j}(x,y)
\end{aligned}$$

が得られる. これで, (6.1.2) が示せた.

以上より, 平衡解 $(\tilde{v}^{(j)}, 0)$ においてエネルギー形式の値が,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\tilde{v}^{(j)}) = j\Bigg\{ & a\int_0^{L/j}\left(\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V} - 1 - \log\frac{\tilde{v}^{(j)}(x)}{V}\right)dx \\
& -\frac{2\pi G}{V}\int_0^{L/j}\int_0^{L/j}K_{L/j}(x,y)(\tilde{v}^{(j)}(x)-V)(\tilde{v}^{(j)}(y)-V)\,dxdy\Bigg\}
\end{aligned}$$

と表せた.

ここで, 周期長をパラメータとみて, 一般に, $l > 0$ に対して, l 周期条件のもとで方程式

$$-a\tilde{v}(x)^{-1} + \frac{1}{l}\int_0^l a\tilde{v}(y)^{-1}\,dy - \frac{4\pi G}{V}\partial_x\int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}(y)-V)\,dy = 0 \tag{6.1.4}$$

を考える. 未知関数の変換

$$r_l(x) = V\tilde{v}_l(x)^{-1} - 1$$

により, 方程式 (6.1.4) を

$$\partial_x^2 r_l(x) + \lambda\left\{1 - (1 + r_l(x))^{-1}\right\} = 0, \quad \lambda = \frac{4\pi GV}{a} \tag{6.1.5}$$

に書き換えて 5.1.2 節の条件 (5.1.35) を適用すると,

$$l > \sqrt{\frac{\pi a}{GV}} \tag{6.1.6}$$

を満たす l に対して, 方程式 (6.1.4) には最小周期が l で $x = 0$ において最大値をとる正値非自明解 $\tilde{v}_l$ が唯ひとつ存在する.

$$\frac{1}{l}\int_0^l \tilde{v}_l(x)\,dx = V$$

も成り立つ. この解 $\tilde{v}_l$ に周期 l の周期条件のもとで定められる平衡解のエネルギー形式の値

$$\varepsilon(l) = a\int_0^l \left(\frac{\tilde{v}_l(x)}{V} - 1 - \log\frac{\tilde{v}_l(x)}{V}\right)dx - \frac{2\pi G}{V}\int_0^l\int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x) - V)(\tilde{v}_l(y) - V)\,dxdy$$

を対応させて区間 (6.1.6) 上の関数 $\varepsilon(l)$ を定める. $j = 1, 2, \ldots, k$ のとき, $L/j \geq L/k > \sqrt{\frac{a\pi}{GV}}$ に注意すると, $\tilde{v}^{(j)} = \tilde{v}_{L/j}$ であり, $\mathcal{E}(\tilde{v}^{(j)}) = j\varepsilon(L/j)$ と表せる. したがって, $j_1 \neq j_2$ に対して $\mathcal{E}\left(\tilde{v}^{(j_1)}\right)$ と $\mathcal{E}\left(\tilde{v}^{(j_2)}\right)$ の大小を比較するには, $j_1\varepsilon(L/j_1)$ と $j_2\varepsilon(L/j_2)$ の大小, つまり, $\frac{1}{L/j_1}\varepsilon(L/j_1)$ と $\frac{1}{L/j_2}\varepsilon(L/j_2)$ の大小を比較すればよいことになる.

このために, 関数 $l \mapsto \varepsilon(l)/l$ の増減を調べる.

$$\left(\frac{\varepsilon(l)}{l}\right)' = \frac{\varepsilon'(l)l - \varepsilon(l)}{l^2}$$

より, $\varepsilon'(l)l - \varepsilon(l)$ の符号を調べればよく, このために $\varepsilon'(l)l - \varepsilon(l)$ の増減を考えることにすれば,

$$(\varepsilon'(l)l - \varepsilon(l))' = \varepsilon''(l)l$$

より, $\varepsilon''(l)$ の符号を調べることが問題となる.

まず, $\varepsilon(l)$ を微分すると

$$\begin{aligned}\varepsilon'(l) = &-a\int_0^l \frac{\partial_l\tilde{v}_l(x)}{\tilde{v}_l(x)}\,dx - a\log\frac{\tilde{v}_l(l)}{V}\\ &- \frac{2\pi G}{V}\int_0^l \partial_l\int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x) - V)(\tilde{v}_l(y) - V)\,dxdy\\ &- \frac{2\pi G}{V}\int_0^l K_l(x,l)(\tilde{v}_l(x) - V)(\tilde{v}_l(l) - V)\,dx.\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

$\tilde{v}_l$ の周期性より, (6.1.7) の第 2 項は,

$$-a\log\frac{\tilde{v}_l(0)}{V},$$

第 4 項は,

$$-\frac{2\pi G}{V}\int_0^l K_l(x,l)(\tilde{v}_l(x)-V)\,dx\,(\tilde{v}_l(0)-V).$$

第 3 項を計算すると,

$$\begin{aligned}
&-\frac{2\pi G}{V}\int_0^l \partial_l \int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy \\
&=-\frac{2\pi G}{V}\int_0^l \left\{\int_0^l \Big((\partial_l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\right. \\
&\qquad\qquad \left.+K_l(x,y)(\partial_l\tilde{v}_l)(x)(\tilde{v}_l(y)-V)+K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x)-V)(\partial_l\tilde{v}_l)(y)\Big)\,dx\right\}dy \\
&\quad -\frac{2\pi G}{V}\int_0^l K_l(l,y)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dy\,(\tilde{v}_l(0)-V).
\end{aligned}$$

さらに, 対称性 $K_l(x,y)=K_l(y,x)$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\varepsilon'(l) &= -a\int_0^l \frac{\partial_l\tilde{v}_l(x)}{\tilde{v}_l(x)}\,dx - a\log\frac{\tilde{v}_l(0)}{V} \\
&\quad -\frac{2\pi G}{V}\left\{\int_0^l\int_0^l \partial_l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy\right. \\
&\qquad\qquad +2\int_0^l\int_0^l K_l(x,y)(\partial_l\tilde{v}_l)(x)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy \\
&\qquad\qquad \left.+2\int_0^l K_l(l,y)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dy\,(\tilde{v}_l(0)-V)\right\} \\
&= -a\log\frac{\tilde{v}_l(0)}{V}+(\mathrm{I})+(\mathrm{II})
\end{aligned}$$

と書き換えられる. ここで,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \int_0^l \left\{-a\tilde{v}_l(x)^{-1}-\frac{4\pi G}{V}\int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dy\right\}\partial_l\tilde{v}_l(x)\,dx \\
&\quad -\frac{4\pi G}{V}\int_0^l K_l(l,y)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dy\,(\tilde{v}_l(0)-V), \\
(\mathrm{II}) &= -\frac{2\pi G}{V}\int_0^l\int_0^l \partial_l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy.
\end{aligned}$$

(I) について: 方程式 (6.1.4) より, 第 1 項は

$$\int_0^l \left\{-a\tilde{v}_l(x)^{-1}-\frac{4\pi G}{V}\int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dy\right\}\partial_l\tilde{v}_l(x)\,dx = -\int_0^l \partial_l\tilde{v}_l(x)\,dx\left(\frac{1}{l}\int_0^l a\tilde{v}_l(y)^{-1}\,dy\right)$$

となる. ここで, $\int_0^l \tilde{v}_l(x)\,dx = Vl$ の両辺を l で微分すると,

$$\int_0^l \partial_l\tilde{v}_l(x)\,dx+\tilde{v}_l(l)=V$$

より,

$$\int_0^l \partial_l \tilde{v}_l(x)\,dx = V - \tilde{v}_l(0) \tag{6.1.8}$$

となり,

$$(\mathrm{I}) = \left(\frac{1}{l}\int_0^l a\tilde{v}_l(y)^{-1}\,dy - \frac{4\pi G}{V}\int_0^l K_l(l,y)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dy\right)(\tilde{v}_l(0)-V)$$

を得る. さらに, 方程式 (6.1.4) の値を $x=l$ でとって用いると,

$$(\mathrm{I}) = \frac{a(\tilde{v}_l(0)-V)}{\tilde{v}_l(0)}$$

と整理される.

(II) について: $K_l(x,y)$ の表現 (2.2.7) より

$$\partial_l K_l(x,y) = -\frac{1}{2l^2}(x-y)^2 + \frac{1}{12}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= -\frac{2\pi G}{V}\int_0^l\int_0^l \left\{-\frac{1}{2l^2}(x-y)^2 + \frac{1}{12}\right\}(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy \\
&= \frac{\pi G}{Vl^2}\int_0^l\int_0^l (x-y)^2(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy \\
&= \frac{\pi G}{Vl^2}\int_0^l\int_0^l (x^2-2xy+y^2)(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy \\
&= -\frac{2\pi G}{Vl^2}\left(\int_0^l x(\tilde{v}_l(x)-V)\,dx\right)^2.
\end{aligned}$$

ここで, $\tilde{v}_l(-z+l/2) = \tilde{v}_l(z+l/2)$ に注意すると, $z \mapsto z\tilde{v}_l(z+l/2)$ は奇関数となるから,

$$\begin{aligned}
\int_0^l x(\tilde{v}_l(x)-V)\,dx &= \int_{-l/2}^{l/2}\left(z+\frac{l}{2}\right)\left(\tilde{v}_l\left(z+l/2\right)-V\right)\,dz \\
&= \int_{-l/2}^{l/2}\frac{l}{2}\left(\tilde{v}_l\left(z+l/2\right)-V\right)\,dz \\
&= 0,
\end{aligned}$$

したがって, $(\mathrm{II}) = 0$ となる.

以上をあわせて,

$$\varepsilon'(l) = a\left(\log\frac{V}{\tilde{v}_l(0)} - \frac{V}{\tilde{v}_l(0)} + 1\right) < 0$$

を得る. さらに微分すると,

$$\varepsilon''(l) = a\left(-\frac{V}{\tilde{v}_l(0)}\frac{\partial_l\tilde{v}_l(0)}{V} + \frac{V\partial_l\tilde{v}_l(0)}{\tilde{v}_l(0)^2}\right) = \frac{a(V-\tilde{v}_l(0))\partial_l\tilde{v}_l(0)}{\tilde{v}_l(0)^2}.$$

ここで, $\tilde{v}_l$ は $x=0$ で最大となるから $V-\tilde{v}_l(0)<0$ となり, $\varepsilon''(l)$ の符号は, $-\partial_l\tilde{v}_l(0)$ の符号と一致する. $\partial_l\tilde{v}_l(0)$ の符号を方程式 (6.1.5) の解 r_l の l 依存性と関連付けて調べる. まず,

$$\tilde{v}_l(0)=\frac{V}{1+r_l(0)}$$

より,

$$\partial_l\tilde{v}_l(0)=-\frac{V(\partial_l r_l)(0)}{(1+r_l(0))^2}$$

となり, $\partial_l\tilde{v}_l(0)$ の符号は $-\partial_l r_l(0)$ の符号と一致する. r_l は $x=0$ において最小で $\partial_x r_l(0)=0$ となるから, $r_l(0)$ と解 r_l の軌道のエネルギー E_l との関係は,

$$E_l=\lambda\{r_l(0)-\log(1+r_l(0))\}$$

で与えられる. これを微分すると,

$$\partial_l E_l=\lambda\left(\partial_l r_l(0)-\frac{1}{1+r_l(0)}\partial_l r_l(0)\right)=\lambda\frac{r_l(0)}{1+r_l(0)}\partial_l r_l(0)$$

となり, $1+r_l(0)>0$ に注意すると, $\partial_l r_l(0)$ の符号は, $r_l(0)$ ならびに $\partial_l E_l$ の符号で決まることになる. $\tilde{v}_l(0)>V$ より

$$r_l(0)=V\tilde{v}_l(0)^{-1}-1<0$$

である. また, (5.1.21), (5.1.22), (5.1.23) が定める関数 I_γ を用いると,

$$l=\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,I_\gamma(\theta_l),\quad \theta_l=\sqrt{\frac{E_l}{\lambda}}$$

が成り立ち, 両辺を微分すると,

$$1=\sqrt{\frac{2}{\lambda}}I'_\gamma(\theta_l)\partial_l\theta_l=\frac{I'_\gamma(\theta_l)}{\lambda\sqrt{2E_l}}\partial_l E_l$$

となる. 5.1.2 節の結果より $I'_\gamma(\theta_l)>0$ であるから,

$$\partial_l E_l=\frac{\lambda\sqrt{2E_l}}{I'_\gamma(\theta_l)}>0 \tag{6.1.9}$$

が得られる. 以上より, $\partial_l r_l(0)<0$ となり, $\partial_l\tilde{v}_l(0)>0$, $\varepsilon''(l)<0$ がしたがう. このことから $\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l)$ は単調減少する.

最後に, $l\to\sqrt{\frac{a\pi}{GV}}+0$ のとき, r_l は 0 に一様収束するから, $\tilde{v}_l$ は V に一様収束する. したがって,

$$\lim_{l\to\sqrt{\frac{a\pi}{GV}}+0}(\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l))=\lim_{l\to\sqrt{\frac{a\pi}{GV}}+0}\left\{\left(\log\frac{V}{\tilde{v}_l(0)}-\frac{V}{\tilde{v}_l(0)}+1\right)l-\varepsilon(l)\right\}=0$$

となり, $l>\sqrt{\frac{\pi a}{GV}}$ において $\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l)<0$ となる.

以上をあわせて

$$\left(\frac{\varepsilon(l)}{l}\right)'<0,\quad l>\sqrt{\frac{a\pi}{GV}},$$

を得る. 関数 $l\mapsto\varepsilon(l)/l$ が狭義単調減少である.

この結果を $l=L/j$, $j=1,\dots,k$, に適用して次の補題を得る.

補題 6.1.1 自然数 $k=1,2,\dots,$ に対して, $\frac{a\pi k^2}{GL^2} < V \le \frac{a\pi(k+1)^2}{GL^2}$ のとき,

$$\mathcal{E}(\tilde{v}^{(1)}) < \mathcal{E}(\tilde{v}^{(2)}) < \cdots < \mathcal{E}(\tilde{v}^{(k)}) < \mathcal{E}(V) = 0$$

が成り立つ.

6.1.2　$1 < \gamma < 2$ の場合

$\lambda = \frac{4\pi GV^\gamma}{a}$ とおく. 方程式 (5.1.16) の L-周期解の存在条件 (5.1.35) により, M_V 上の平衡解は, シフトで重なり合うものを除けば,

- $\lambda \le \frac{4\gamma\pi^2}{L^2}$ のとき, 自明解 $(V,0)$ のみ,
- $\lambda > \frac{4\gamma\pi^2}{L^2}$ のとき, 自明解 $(V,0)$, ならびに,

  $$\frac{4\gamma\pi^2 j^2}{L^2} < \lambda < \frac{2I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2 j^2}{L^2},$$

  すなわち,

  $$2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} < \frac{L}{j} < \sqrt{\frac{2}{\lambda}} I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)$$

  を満たす整数 j が存在すれば, その最小値を $k_{\min}$, 最大値を $k_{\max}$ として, 最小周期が L/j の解 $(\tilde{v}^{(j)},0)$, $j=k_{\min},\dots,k_{\max}$,

である. これらの平衡解におけるエネルギー形式の値を比較するために, $\gamma=1$ の場合と同様に, 一般に, $l>0$ に対して方程式

$$-a\tilde{v}(x)^{-\gamma} + \frac{1}{l}\int_0^l a\tilde{v}(y)^{-\gamma}\,dy - \frac{4\pi G}{V}\partial_x \int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}(y)-V)\,dy = 0 \tag{6.1.10}$$

を考え, 最小周期 l で $x=0$ で最大値をとる正値の非自明解を $\tilde{v}_l$ とする. $\tilde{v}_l$ は,

$$\frac{4\gamma\pi^2}{l^2} < \lambda < \frac{2I_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2}{l^2},$$

すなわち,

$$\sqrt{\frac{a\gamma\pi}{GV^\gamma}} < l < \sqrt{\frac{aI_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2}{2\pi GV^\gamma}}$$

を満たす l に対して定義される.

$$\varepsilon(l) = a\int_0^l \left(\frac{\tilde{v}_l(x)-V}{V^\gamma} - \frac{\tilde{v}_l(x)^{1-\gamma}-V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)dx$$
$$- \frac{2\pi G}{V}\int_0^l\int_0^l K_l(x,y)(\tilde{v}_l(x)-V)(\tilde{v}_l(y)-V)\,dxdy$$

と定めると, $\gamma=1$ の場合と全く同様にして , $\mathcal{E}(\tilde{v}^{(j)}) = j\varepsilon\,(L/j)$, $j=k_{\min},\ldots,k_{\max}$, が成り立つから, l の関数 $l\mapsto\varepsilon(l)/l$ の増減を調べればよいことになる. このためには,

$$\left(\frac{\varepsilon(l)}{l}\right)' = \frac{\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l)}{l^2}$$

より, $\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l)$ の符号を調べればよく, そのためには, $(\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l))'=\varepsilon''(l)l$ より, $\varepsilon''(l)$ の符号が重要となる.

まず, $\gamma=1$ の場合と同様の議論により,

$$\varepsilon'(l) = a\left(-\frac{\tilde{v}_l(0)^{-\gamma+1}-V^{-\gamma+1}}{1-\gamma}+\frac{1}{\tilde{v}_l(0)^{\gamma-1}}-\frac{V}{\tilde{v}_l(0)^{\gamma}}\right)<0$$

がしたがう. $\gamma=1$ の場合と異なるのは,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dl}\int_0^l a\left(\frac{\tilde{v}_l(x)-V}{V^\gamma}-\frac{\tilde{v}_l(x)^{-\gamma+1}-V^{-\gamma+1}}{1-\gamma}\right)dx\\ &=-a\left(\int_0^l\frac{\partial_l\tilde{v}_l(x)}{\tilde{v}_l(x)^\gamma}\,dx+\frac{\tilde{v}_l(0)^{-\gamma+1}-V^{-\gamma+1}}{1-\gamma}\right)\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

となること, (6.1.8) と方程式 (6.1.10) を用いると, (6.1.11) の右辺第 2 項を除く $\varepsilon'(l)$ の部分が $a\tilde{v}_l(0)^{-\gamma}(\tilde{v}_l(0)-V)$ とまとめられる箇所のみである. さらに微分すると,

$$\varepsilon''(l) = \frac{a\gamma(V-\tilde{v}_l(0))\partial_l\tilde{v}_l(0)}{\tilde{v}_l(0)^{\gamma+1}}$$

となり, $\varepsilon''(l)$ の符号は $-\partial_l\tilde{v}_l(0)$ の符号と一致する. $\gamma=1$ の場合と同様に, $\tilde{v}_l$ の方程式 (6.1.10) を $r_l(x)=(V/\tilde{v}_l(x))^\gamma-1$ の方程式

$$\partial_x^2 r_l(x)+\lambda\left\{1-(1+r_l(x))^{-1/\gamma}\right\}=0,\quad \lambda=\frac{4\pi GV^\gamma}{a}$$

に変換し, 解軌道のエネルギー

$$E_l=\lambda\left(r_l(0)-\frac{\gamma}{\gamma-1}(1+r_l(0))^{1-1/\gamma}\right)$$

の l 依存性をもとに $\partial_l\tilde{v}_l(0)$ の符号を調べる. まず,

$$\partial_l E_l=\lambda\left\{1-(1+r_l(0))^{-1/\gamma}\right\}\partial_l r_l(0)$$

である. ここで, $(1+r_l(0))^{-1/\gamma}=\frac{\tilde{v}_l(0)}{V}>1$ であり, $\gamma=1$ の場合と全く同様に, (6.1.9) より $\partial_l E_l>0$ となるから $\partial_l r_l(0)<0$ を得る. $\tilde{v}_l(0)=V(1+r_l(0))^{-1/\gamma}$ より

$$\partial_l\tilde{v}_l(0)=-\frac{V\partial_l r_l(0)}{\gamma(1+r_l(0))^{1+\gamma/\gamma}}>0$$

となって $\varepsilon''(l)<0$ を得る. よって, $\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l)$ は単調減少である. $l\to\sqrt{\frac{a\gamma\pi}{GV^\gamma}}+0$ のとき, $\tilde{v}_l$ は V に一様収束するから,

$$\lim_{l\to\sqrt{\frac{a\gamma\pi}{GV^\gamma}}+0}(\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l))=0$$

がしたがい, $\varepsilon'(l)l-\varepsilon(l)<0$ となって, $\varepsilon(l)/l$ は狭義単調減少する.

以上により, 次の補題を得る.

補題 6.1.2 $1<\gamma<2$ とする．$V>\left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$ のとき，

$$\sqrt{\frac{a\gamma\pi}{GV^\gamma}}<\frac{L}{j}<\sqrt{\frac{aI_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2}{2\pi GV^\gamma}} \tag{6.1.12}$$

を満たす整数 j が存在すれば，その最小値を $k_{\min}$，最大値を $k_{\max}$ とする．このとき，

$$\mathcal{E}(\tilde{v}^{(k_{\min})})<\cdots<\mathcal{E}(\tilde{v}^{(k_{\max})})<\mathcal{E}(V)=0$$

が成り立つ．

6.2　初期条件と解の非有界性

補題6.1.2 は，$1<\gamma<2$ のとき，M_V 上でエネルギー形式の値がどの平衡解よりも小さい状態の集合が

$$A_V=\left\{(v,u)\in M_V\,;\,\mathcal{E}(v,u)<\begin{cases}\mathcal{E}(\tilde{v}^{(k_{\min})}, & \text{(6.1.12) を満たす整数 } j \text{ がある場合,}\\ 0(=\mathcal{E}(V)), & \text{(6.1.12) を満たす整数 } j \text{ がない場合}\end{cases}\right\} \tag{6.2.1}$$

によって与えられることを示している．方程式 (5.1.1) の解の軌道に沿ってエネルギー形式の値は減少するから，集合 A_V に属する状態 (v_0,u_0) を始点とする解 (v,u) の軌道は，どの平衡解にも近づきえず，したがって有界ではありえない:

$$\sup_{t,x} v(t,x)=\infty.$$

残された問題は，集合 A_V が空ではなく，初期条件 $(v_0,u_0)\in A_V$ が意味をなすかどうかである．本節では，5.2 節で調べた平衡解の安定性をもとに，A_V が空にならないための V に関する条件を考察し，方程式 (5.1.1) の初期値問題の解が非有界になるためのひとつの条件を提示する．

(i) $V<\left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$ の場合，方程式 (5.1.16) の L-周期解の存在条件 (5.1.35) によれば，M_V 上の平衡解は自明解 $(V,0)$ のみである．この場合，5.2.3 節の結果より自明解は線形安定であるから，少なくともその小近傍には A_V の要素は存在しない．

(ii) $\left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}<V<\left(\frac{aI_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2}{2\pi GL^2}\right)^{1/\gamma}$ の場合，(5.1.35) によれば，条件 (6.1.12) は $j=1$ で成立し，したがって，$k_{\min}=1$ である．5.2.4 節により，平衡解の族 $S_V^{(1)}=\{(\tilde{v}^{(1)}(\,\cdot-\alpha),0);0\leq\alpha<L\}$ が線形安定であるから，その小近傍に A_V の要素を見出すことは期待できない．

(iii) $V\geq\left(\frac{aI_\gamma((\gamma-1)^{-1/2}-0)^2}{2\pi GL^2}\right)^{1/\gamma}$ の場合，(5.1.35) により，

(a) 条件 (6.1.12) を満たす整数 j が存在する場合，$j\geq 2$ となり，したがって，$k_{\min}\geq 2$ である．このとき，5.2.3 節の結果より，平衡解 $(\tilde{v}^{(k_{\min})},0)$ は線形不安定である．

(b) 条件 (6.1.12) を満たす整数 j が存在しない場合，M_V 上の平衡解は自明解 $(V,0)$ に限られるが，$V>\left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$ であるから，5.2.3 節の結果より，自明解は線形不安定である．

平衡解の線形不安定性により, (a) の場合, 平衡解 $(\tilde{v}^{(k_{\min})}, 0)$ の小近傍に, (b) の場合, 自明解 $(V, 0)$ の小近傍に, それぞれ A_V の要素が存在する.

以上の考察において, (i), (ii) の場合, 平衡解の小近傍に限らず M_V 全体で探索すれば, A_V の要素が存在する可能性は残されている. また, 自明解 $(V, 0)$ の線形安定性が不明な $V = \left(\frac{a\gamma\pi}{GL^2}\right)^{1/\gamma}$ の場合も A_V が空か否かは未解決である. なお, $\gamma = 1$ の場合は, 方程式 (5.1.1) の解はすべて有界であるから, どのような $V > 0$ に対しても A_V に相当する集合は空である.

以上, 非有界な解の存在を保証する初期条件について, 定理としてまとめておく.

定理 6.2.1 $1 < \gamma < 2$ とし,

$$V \geq \left(\frac{aI_\gamma((\gamma-1)^{-1/2} - 0)^2}{2\pi GL^2}\right)^{1/\gamma} \tag{6.2.2}$$

を仮定する. このとき,

(i) (6.2.1) が定める集合 A_V は空ではない.

(ii) 初期条件 $(v_0, u_0) \in A_V$ を満たす方程式 (5.1.1) の解 (v, u) は非有界である:

$$\sup_{t,x} v(t, x) = \infty. \tag{6.2.3}$$

定理における条件 (6.2.2) をオイラー座標系における周期 $l = LV$ と平均密度 $\bar{\rho} = 1/V$ を用いて書き直すと,

$$\bar{\rho} \geq \left(\frac{aI_\gamma((\gamma-1)^{-1/2} - 0)^2}{2\pi Gl^2}\right)^{1/(2-\gamma)}$$

となる. 流体の平均密度に関する本条件のもと, (6.2.3) が意味することは, 時間の経過とともに密度がいくらでも小さな値をとる状態が出現することである.

第7章　結論

本章では, 本論文を総括し, 今後の研究の展望について述べる.

7.1　総括

宇宙空間において一様に分布する星間ガスがその自己重力により凝集を起こし, 孤立したガス塊の集まりへと状態遷移すると説く重力不安定仮説の可否をみるために, 本論文では星間ガスを一種の圧縮性流体とみなして自己重力流体の数学モデルをたて, モデル方程式の解の振る舞いを考察した. 無限一様に分布する圧縮性流体に平面波攪乱が入射して流れを生じる状況を想定し, 空間 1 次元周期的な流体運動に現れる重力現象を扱った. とくに注目して解析したのは, 圧力が密度に比例する等温流, および, 圧力が密度のべき乗に比例する等エントロピー流, 双方のモデル方程式の解の長時間挙動である. 以下, その概要を振り返る.

第 2 章では, ニュートンの重力則をもとに空間 1 次元周期流に対する自己重力のモデルを導出した. これを圧縮性粘性流体のバロトロピック流の方程式に組み込み, さらに, 方程式の記述をオイラー座標系からラグランジュ質量座標系に変換して, 本論文で扱う自己重力流体の等温流および等エントロピー流のモデル方程式を得た.

第 3 章では, 一般の外力項をもつ等温流および等エントロピー流方程式の初期値問題に対して, 周期条件のもとで解の存在と一意性を示した. 適切な関数空間において縮小写像の原理を適用して局所解を構成し, つづいて解のアプリオリ評価を導出して, これらをあわせて解の延長を行って大域解を構成した. また, この解の構成法が自己重力流体のモデル方程式に直ちに適用可能であることを説明した.

第 4 章では, 一般の外力項をもつ等温流および等エントロピー流の方程式について, 外力項の有界性を仮定して解の長時間挙動を調べた. 等温流モデルについては無条件に, 等エントロピー流については状態方程式に関する仮定, および, 解の有界性の仮定のもとに, 解軌道のある種のコンパクト性を導き出した. この結果を自己重力流体のモデル方程式に適用して, 有界な解のオメガ極限集合が空ではなく, モデル方程式の平衡解の集合に包含されることを示した.

第 5 章では, モデル方程式の平衡解を, ひとつには, Crandall-Rabinowitz の分岐理論を応用して, もうひとつには, モデル方程式の定常問題をある非線形常微分方程式の周期解に係る問題に書き換えて, それぞれ求め, 平衡解全体の構造を明らかにした. 次に, モデル方程式に付随するエネルギー形式の値が解軌道に沿って減少するという事実をふまえて, エネルギー形式の展開により平衡解または平衡解族の線形安定性の概念を導入した. これを平衡解の方程式に係る非線形作用素のスペクトル問題と結びつけて, 平衡解および平衡解族の線形安定性を判定した.

第 6 章では, モデル方程式の保存量に係る拘束下で併存する平衡解に対して, 各平衡解おけるエネルギー形式の値の大小を比較し, エネルギー値が最小の平衡解を特定した. 平衡解の安定性に関する

結果と照合してこの最小値を下回るエネルギー値の実現性を調べ, 解軌道に沿うエネルギー形式の値の減少という事実とあわせて, 等エントロピー流のモデル方程式の解が非有界となるための初期条件を提示した.

モデル方程式の解が非有界になる状況を星間ガスに当てはめて解釈すると, 星間ガスの平均密度がある臨界値以上の場合, 初期状態により必然的に, ガスの希薄化が限りなく進行する部分が現れることになる. 本論文のモデル解析の結果は, 星間ガスが孤立したガス塊に分裂して進化するという, 天文物理学が説く重力現象が起こり得ると支持を与えている.

7.2　今後の課題

まず, 本論文で扱ったモデル方程式に関して残された課題をあげる.

1. 本論文では線形安定性の概念を導入して平衡解の安定性の議論をしたが, 安定性の評価にモデル方程式の非線形性を取り入れることは解の挙動を正確につかむためにも重要である. 線形安定と判定される平衡解もしくは平衡解の族が実際に非線形安定かどうかを調べることが, まず取り組むべき課題である.

2. 等エントロピー流のモデル方程式に関して, 本論文では, 平衡解の近傍における解の挙動のみに着目して非有界な解の存在を論じた. その結果, エネルギー形式の値が最小の平衡解もしくは平衡解の族が線形安定である場合, 非有界な解の有無について判断が下せなかった. この場合に立ち入るには解軌道全般にわたる情報が不可欠である. 解の評価をもとにした従来の方法に加えて, 無限次元空間内にエネルギー形式のグラフを描き出し, その幾何構造を調べて解軌道の流れを読み取るなど, 斬新な手法の開発が望まれる.

3. 解が非有界になる過程を詳らかにすることも残された課題である. 解が振動を繰り返しつつ振幅を増大させる可能性も残されているが, 解が一定のプロフィールをもって発散することになれば, 星間ガスが真空の領域を含む特異な平衡に状態遷移することを強く支持する結果となる.

次に, 本論文のモデルの修正と拡張に関する課題をあげる.

1. 本論文では, バロトロピック流の方程式をもとにモデル解析を行い, エネルギーの保存関係は考慮に入れなかった. 流体の熱放射や化学反応など様々な要因により, 等温流や等エントロピー流とは異なる熱力学的過程にしたがって重力不安定が進行することは十分に考えられることである. この方向で注目すべき研究として, 本論文とは趣が異なる, 流体の自己重力モデルを扱った [26] があげられる. 本論文で導いた自己重力モデルに則り, 流体の温度の分布, 流れによる熱の輸送なども考慮に入れたモデル解析は有望な課題と考えられる.

2. 大きな課題としては, 流れの記述として自然な高次元流に対するモデル解析があげられる. 容易に予想されるように, 本論文で採用した 1 次元流に対する解析手法, とくに, 平衡解全体の構造や平衡解の線形安定性を導くために駆使した, 常微分方程式および常微分作用素のスペクトルに特有な議論はもはや有効ではなく, 代わりに解析が困難な非線形楕円型偏微分方程式およびこれに関連した偏微分作用素のスペクトル問題に向き合う必要が出てくる. これらの問題, および, 流体力学方程式に対する数学解析の現状に鑑み, 高次元流モデルの全体像は関連研究の

成熟を待って描き出すこととし, 本論文と関わりある課題, 例えば, すでに本論文で得られている, 1 次元的な質量分布をもつ平衡解が高次元流モデルにおいても安定性を保つかどうかなど, モデルの周辺から解析を進めるのが現実的と考えられる.

謝辞

本研究は, 大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻非線形数理講座において八木厚志教授の指導の下, 筆者が行った研究をまとめたものです. 本論文の作成にあたり, 指導教授の八木厚志教授には終始変わらぬ丁寧かつ熱心なご指導を賜りました. ここに謝意を表します. さらに, 研究発表の場を与えて頂いたり, 生活面や経済面でサポートしてくださったことも加えて感謝申し上げます.
ハノイでの研究発表をきっかけに, 八木厚志教授と共同研究できたことは良き思い出となりました.

そして指導教員の山本吉孝准教授には本研究を遂行するにあたり, 多くのご指導ご鞭撻を頂き, 日々研鑽の大切さを教わりました. 加えて, 原著論文の執筆や学外での研究発表の準備の際にも, 丁寧かつ十分なサポートを賜りました. ここに深く感謝の意を表します. 非線形数理講座での研究生活は今後の貴重な財産となりました.

また, ティーチングアシスタントの経験をさせて頂いた畠中利治助教にも心より御礼申し上げます.
所属専攻が変わり, 慣れない環境の中, 様々なアドバイスを下さったことは博士課程での学生生活において心の支えとなりました.

ここで, 情報数理学専攻の谷田純教授ならびに藤崎泰正教授には, 本論文の作成にあたり貴重なご助言を頂きました. 深く感謝の意を表します.

次いで, 学生生活において多くのご助力を頂きました事務職員の堀田有里子さんと荒井ゆかりさんにも感謝申し上げます.

そして慣れない海外での研究発表の際, 助けて頂いた Ta Viet Ton 博士とその御家族にも感謝申し上げます. また, 他専攻から移動してきた筆者を温かく受け入れてくださった内種岳詞博士をはじめとする研究室の先輩, 後輩方にも感謝致します.

最後に, これまでの長い学生生活をサポートしてくれた筆者の家族に御礼を言いたいと思います.
今まで本当にありがとうございました.

References

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.

[2] A. Ambrosetti and G.Prodi, A Primer of Nonlinear Analysis, Cambrideg University Press, 1993.

[3] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov and V. N. Monakhov, Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[4] J. Binney and S. Tremaine, Galactic Dynamics 2nd ed., Princeton University Press, 2008.

[5] M. G. Crandall and P. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, J. Funct. Anal., 8 (1971), 321-340.

[6] M. G. Crandall and P. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability, Arch. Rational Mech. Anal., 52 (1973), 161-180.

[7] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer, Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume I, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1984.

[8] M. Golubitsky and I. Stewart, The Symmetry Perspective - from Equilibrium to Chaos in Phase Space and Physical Space, Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2002.

[9] M. Golubitsky, I. Stewart and D. G. Schaeffer, Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume II, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1988.

[10] J. H. Jeans, The stability of a spherical nebula, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 199 (1902), 1-53.

[11] J. H. Jeans, Gravitational instability and the nebular hypothesis, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 213 (1914), 437-456.

[12] Ya. Kanel', On a model system of one-dimensional gas motion (Russian), Differencial'nya Uravnenija 4 (1968), 374-380.

[13] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[14] A. V. Kazhikhov and V. V. Shelukhin, Unique global solution with respect to time of initial-boundary-value problems for one-dimensional equations of a viscous gas, J. Appl. Math. Mech., 41 (1977), 273-282.

[15] H. Kielhöfer, Bifurcation Theory - An Introduction with Applications to PDEs, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2004.

[16] J. Leray, Etude de diverse equations integrales non lineares et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pure Appl., 12 (1933), 1-82.

[17] A. Matsumura and T. Nishida, Periodic solutions of a viscous gas equation, in "Recent Topics in Nonlinear PDE IV", Lecture Notes in Numerical and Applied Analysis, Vol. 10 (1989), 49-82.

[18] A. Matsumura and S. Yanagi, Uniform boundedness of the solutions for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas, Comm. Math. Phys., 175 (1996), 259-274.

[19] C. L. M. H. Navier, Memoire sur les lios du mouvement des fluides, Memoires Acad. Roy. Sci. Inst. France, 6 (1923), 389-440.

[20] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis, American Mathematical Society, Courant Institute of Mathematical Sciences, 2001.

[21] A. Novotny and I. Straskraba, Convergence to equilibria for compressible Navier-Stokes equations with large data, Ann. Mat. Pure Appl., 179 (2001), 263-287.

[22] J. C. Robinson, Infinite-Dimensional Dynamical Systems - An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors, Cambridge University Press, 2002.

[23] G. G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluid in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids, Trans. Camb. Phil. Soc., 8 (1845), Collected Papers, vol. 1, 75-129.

[24] H. Tanabe, Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1997.

[25] R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1988.

[26] M. Umehara and A. Tani, Global solution to the one-dimensional equations for a self-gravitating viscous radiative and reactive gas, J. Differential Equations, 234 (2007), 439-463.

[27] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons, New York, 1972.

[28] S. Yanagi, Asymptotic stability of the spherically symmetric solutions for an isentropic model of compressible viscous gas, Japan J. Indust. Appl. Math., 14 (1997), 215-243.

[29] K. Yoshida, Functional Analysis 6th ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[30] 江沢洋, 漸近解析入門 岩波書店, 2013.

[31] 福江純, 和田桂一, 梅村雅之, 宇宙流体力学の基礎, 日本評論社, 2014.

[32] 儀我美一, 儀我美保, 非線形偏微分方程式, 共立出版株式会社, 1999.

[33] 井川満, 偏微分方程式入門, 裳華房, 1996.

[34] 神部勉, P. G. ドレイジン, 流体力学 安定性と乱流, 東京大学出版会, 1998.

[35] 郡宏, 森田善久, 生物リズムと力学系, 共立出版, 2011.

[36] 倉本由紀, 川崎恭治, 山田道夫, 甲斐昌一, 篠本滋, 朝倉書店, 1991.

[37] 黒田成俊, 関数解析, 裳華房, 1980.

[38] 増田久弥, 非線形数学, 朝倉書店, 1985.

[39] 増田久弥, 関数解析, 裳華房, 1994.

[40] 松村昭孝, 西原健二, 非線形微分方程式の大域解 - 圧縮性粘性流の数学解析, 日本評論社, 2004.

[41] 水島二郎, 藤村薫, 流れの安定性, 朝倉書店, 2003.

[42] 岡本久, ナヴィエ-ストークス方程式の数理, 東京大学出版会, 2009.

[43] 緒方秀教, 変分法, コロナ社, 2011.

[44] 坂下志郎, 池内了, 宇宙流体力学, 培風館, 1996.

[45] 高原文郎, 宇宙物理学, 朝倉書店, 1996.

[46] 高崎哲弘, 自己重力流体の一様平衡解の安定性について, 大阪大学修士論文, 2004.

[47] 巽友正, 流体力学, 培風館, 1995.

[48] 柘植俊一, 流体の科学（上), 日刊工業新聞社, 1994.

[49] 八木厚志, 放物型発展方程式とその応用 (上), 岩波書店, 2011.

[50] 八木厚志, 放物型発展方程式とその応用 (下), 岩波書店, 2011.

[51] 吉澤徴, 流体力学, 東京大学出版, 2001.