

Title	Gröbner bases of binomial ideals associated with finite graphs and polyominoes
Author(s)	鹿間, 章宏
Citation	大阪大学, 2016, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/55853">https://doi.org/10.18910/55853</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 論文内容の要旨

氏名 ( 鹿間 章宏 )	
論文題名	Gröbner bases of binomial ideals associated with finite graphs and polyominoes (有限グラフとポリオミノに付随する二項式イデアルのグレブナー基底)
論文内容の要旨	
<p>二項式イデアルは純粋数学や応用数学の様々な分野に関連して研究がなされていて、特に、代数幾何、可換代数、組合せ論、代数的統計の視点からの研究が盛んに行われてきた。可換代数の視点からは、トーリック環の定義イデアルであるような二項式イデアルについてよく研究されている。本論文では、二項式イデアルと二項式イデアルによって定義される剰余環の代数的な諸性質、とくに、Krull次元、正規性、Cohen-Macaulay性などについて述べる。本論文では、二つのクラスの二項式イデアルを研究対象とする。一つは有限連結単純グラフに付随するトーリックイデアルで、もう一方はポリオミノイデアルである。</p> <p>本論文は全3章で構成され、その内容は以下の通りである。第1章では、二項式イデアルの研究の背景知識、ならびに先の二つの二項式イデアルについての先行研究での結果について要約する。第2章では、グラフに付随するトーリックイデアルについての研究を展開する。第2章の主結果は、グラフに付随するトーリックイデアルで、性質(*)『二次二項式からなる生成系を持つが、二次式のみからなるグレブナー基底を持たない』を満たす例の無限系列を構成したことである。性質(*)を満たすようなグラフの例は、先行研究において一例のみが知られていた。また、既存のいくつかのソフトウェアを統合し、性質(*)を満たす8頂点以下のグラフを分類する。</p> <p>第3章では、ポリオミノイデアルの代数的な性質を研究する。ポリオミノとは、同じ大きさの正方形の辺同士を結合してできる図形である。ポリオミノイデアルとは、ポリオミノの inner 2-minor で生成されるイデアルのことである。先行研究に於いて、素イデアルとなるポリオミノイデアルの分類問題は盛んに研究されてきた。特に、ポリオミノが simple (つまり、穴がない) であるならば、そのポリオミノイデアルは素イデアルという予想は懸案の問題であった。第3章における主結果として、まずポリオミノが balanced であるならば、そのポリオミノイデアルは素イデアルであることを示す。のちに関連研究で、simple なポリオミノは balanced であることが示されている。これは先の予想の解決を導く。</p> <p>また一般に、二項式イデアルが素イデアルことは、そのイデアルが或るトーリック環の定義イデアルであることと同値であることが知られている。素イデアルであるような二項式イデアルが与えられたとき、そのイデアルの剰余環としてのトーリック環の表示を見つける問題が考えられる。第3章における二つ目の主結果として、ポリオミノが simple などとき、長方形から凸を取り除いた形であるときについて、そのポリオミノイデアルを定義イデアルとして持つトーリック環の表示を特定する。</p>	

## 論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( 鹿間 章宏 )			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	教授	日比 孝之
	副 査	教授	和田 昌昭
	副 査	准教授	村井 聡
	副 査	教授	大杉 英史 (関西学院大学)

## 論文審査の結果の要旨

鹿間章宏の学位論文では、二次生成な二項式イデアル、および、その剰余環の代数的諸性質、特に、そのイデアルのグレブナー基底と、そのイデアルが素イデアルであるときの剰余環のトーリック環としての表示に関する具象的な研究が展開されている。

本論文の第一部は、有限グラフに付随するトーリックイデアルに関する研究である。条件(☆)「二次生成であるが、二次式から成るグレブナー基底を持たない」を満たす二項式イデアルを発掘することは1990年代後半から議論されている懸案の研究課題の一つである。従来の研究では、条件(☆)を満たすトーリックイデアルの幾つかの例が散在的に発見されていたが、本学位論文では、有限グラフに付随するトーリックイデアルで条件(☆)を満たすものの無限系列を構成することに成功している。加えて、頂点の個数が8個以下の有限グラフのトーリックイデアルで条件(☆)を満たすものを計算機実験により完全に分類し、トーリックイデアルが二次生成であることと二次式から成るグレブナー基底を持つことの乖離を理解するための貴重な情報を提供している。

第二部は、ポリオミノイデアルに関する研究である。ポリオミノイデアルは、可換代数における伝統的な研究対象である、二次の行列式イデアルなどを包括する概念であり、その代数的基礎理論は、2012年、Ayesha Qureshiの学位論文で樹立された。ポリオミノイデアルに関する懸案の研究課題の一つは、単純なポリオミノイデアルは素イデアルである、という予想の解決であった。本学位論文では、単純なポリオミノイデアルが、コスツル二部グラフのトーリックイデアルに一致することを示し、その予想を肯定的に解決することに成功している。更に、長方形から凸なポリオミノを除去した、非単純なポリオミノイデアルの剰余環のトーリック環としての表示を発見し、そのような非単純なポリオミノイデアルが素イデアルであることを証明している。後者は、今後、素イデアルとなる非単純なポリオミノイデアルの分類問題に挑戦する際の、土台を築く仕事である。

よって、博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。