

Title	数学的モデリングを包括する数学教育
Author(s)	河崎, 哲嗣
Citation	大阪大学, 2016, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/56028">https://hdl.handle.net/11094/56028</a>
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉</a> 大阪大学の博士論文について <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈/a〉</a> をご参照ください。

***Osaka University Knowledge Archive : OUKA***

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 論文内容の要旨

氏名 ( 河崎 哲嗣 )

論文題名

数学的モデリングを包括する数学教育

## 論文内容の要旨

現代社会は、高度情報化社会であり、グローバルな知識基盤社会でもある。日本の青少年には、現実生活の問題に対し、数学を活用して解決したり、数学的に表現したりする能力が必要とされている。そこで本論文では、次の4つの目的を設定した。

①日本の数学教育の数学体系を整理し、その問題点を明らかにする。②日常生活における自然現象や社会現象を数学モデルで表現する教材を開発する。③数学的モデリングを扱うための初等教育から中等教育までの数学教育の内容面を検討して提案する。④学校における数学的モデリングの指導ができる教員の育成を目指すために、小学校教員養成課程を持つ大学・学部の問題点を明らかにし、大学での数学的モデリング授業の指導内容を提案する。

数学的モデリングとは、「現実の問題場面から条件整理をして、数学に基づくモデルを作る。このモデルを元の場面にあてはめた結果が合わなければ、さらに条件整理をしてモデルの修正を行う思考の過程」を問題解決学習に採り入れた学習活動である。

緒言では問題の所在を示し、第1章では目的と方法及び本論文の構成を示した。

目的①の研究は、日本の初等中等教育における科学を志向した数学教育を中心に、理数教育と技術教育の文献研究を行い、歴史を踏まえたこれからの数学教育を検討した。

まず、第2章第1節では、SSH・SGH構想に至るまでの日本における理科教育及び技術教育を含めた数学教育の歴史区分を整理した。その上で、現在の日本の解析教育と図形教育を中心に理数教育としての問題点を検討した。次に、第2節では、最近の先進的な科学教育の取組を把握するために、京都府のSSH事業の現状を整理した。第3節では、数学的モデリングの歴史的経過から世界の動向についてまとめ、その課題を整理した。そして先行研究を調べ、新たな研究領域の意義を考察した。

その結果、明治・大正・昭和より、数学教育は、実験・観察から生み出される課題には入り込まず、真理の探究や普遍的法則を定める概念を中心に扱ってきたことを文献より確認した。また理科教育は、普遍的な原理・法則・自然観には深く立ち入らず、個別的な実物についての知識・実験・観察の内容や指導を中心としてきたことを文献で確認した。また技術教育は、日常生活の欲求を満たすものづくりや役に立つ仕組みが内容の中心であったことを文献で確認した。つまりそれぞれの教科領域が、他教科との関係の矛盾・齟齬を問わないようになってきた。

また学校で行う数学教育では、これまで主に数学のみで一意的に解を求めることができる問題を準備し、数値や式を求めたりグラフを描いたりすることが授業の主流であった。しかし、人類の智慧と知識で作りに上げてきた現実世界がより高度化・複雑化が進むと、数学以外の分野や領域の知識がなければ解が求められなくなり、いくつもの解が現れたりするような場面が増えてきた。そこで教科や学問領域を補完・融合・統合しながら、自然科学や日常生活などの課題に対応できる教育内容が必要となってきた。このような日常現象を表現して、課題を解決する数学的モデリングの教育研究は1980年頃から盛んになり、次の4つを課題とする現在の世界動向を文献より示した。(1)いかに問題を解決するのかという「問題解決」と、生活の世界と記号の世界、あるいは現実の世界と数学の世界を行き来する「数学的モデリング」を統合する。(2)児童・生徒がモデリング思考の過程を振り返る在り方を検討する。(3)児童・生徒にとって現実的に感じられ、将来の現実的な問題にも繋げる。(4)数学の世界の中で垂直方向の数学化(数学の体系を意識して数学的な処理や再構築をする)を実現する。

さて日本の学校教育における数学的モデリング実践の先行研究においても、教科横断領域の問題を生徒達が学んだ数学を用いて解けるように改良した中学校での実践(生徒がリアリティーとして感じる日常現象から数学の世界へ導く水平方向の数学化)であり、また技術教育の情報分野の取り組みの1つとして、コンピュータ・シミュレーションを使ってモデルをデザインする教材集であった。

目的②の研究は、学校での解析・図形・統計教育の体系を意識したモデリング教材開発の実践研究を行い、教材の

有用性（数学的分析・教材構成の吟味・設定問題の価値・児童生徒の様子・到達目標と学力保障の評価等）を検討した（第4章から第7章までを参照）。

第4章では、自然科学の現象のひとつである惑星の楕円軌道の運動モデルを表現する教育実践を、高校生を対象に行った。まず惑星の楕円軌道を表現する実践を行い、ヨハネス・ケプラーが観測データを分析したように、39名の高校3年生が直定規を使って火星の楕円軌道を描いた。しかし多くの生徒が、惑星運動の表現を示すことができなかった。そこでこの表現に興味を持った3名の高校3年生が、惑星運動を表現する微分方程式を扱う特別授業に参加し、プログラミングを使った惑星運動の様子を容易く表すことができた。このことから高校生でもプログラミングを有効的に使えば、微分方程式の解（近似解）をモデルとして理解できるという成果があった。

第5章では、日常生活における事例の1つである宅急便の最適な配達箱を表現する教育実践を、高校生を対象に行った。まず現実事象を数学の活用によって解決するためには、中高生からの2変数関数も必要であることを文献によって示した。しかし2変数関数の問題を直接解かず1変数関数で解けるように条件整理をした問題を扱っていることも文献によって示した。そこで15名の高校3年生が宅配用の箱モデルの最適解を求める課題に取り組んだ。表計算ソフトや立体モデルを使ったデザイン（近似解）と手計算によって考えるデザイン（厳密解）の2つの方法で解を考え、特に学力の高い生徒達が手計算で厳密解を求める活動に興味を示した。しかし、近似解を求める活動の方にも、知識・理解や興味・関心の高い評価を示した。このことから高校生において、偏微分や重積分を用いた解法は彼らの興味・欲求・学力等に個人差があったが、表計算ソフトや立体モデルを使えば、より簡単に易しい算数・数学の知識を用いるだけで、十分に最適値を求めることができるという成果があった。

第6章では、平面図形に関する直観力を育てる題材のひとつとして、L字型廊下を通過できる最大面積のソファの形を表現する教育実践を、小学校高学年を対象に行った。まず(a) 図形教育から「性質」「計量」「空間」「運動」「論理」を有機的に繋ぐ教材の必要性、(b) 関数教育からデータをグラフにプロットして傾向を見る方法が数学と理科のそれぞれの教育で異なる、という2つ課題を文献で示した。そこで8名の小学校5・6年生が、L字型廊下を通過できるソファの形を厚紙で自由創作して、「形と大きさの変化の様子」を調べながら最大面積となるモデルを検討した。児童達は50分程度で半円形のモデルを作ったが、それ以上に適した図形モデルを見つけることができなかった。そこで教員の指導や質疑・発表を通して、児童達は解答への道筋を発見することができた。電卓で計算した細かな面積データを、グラフ上にプロットしたいくつかの点を結んで描く理科の観察・観測授業の方法を使い、最大面積となるソファの図形モデルを表現した。このことから、小学校5・6年生が関数による最大値の数学的な考え方を使って求めることはできないが、工作実験を通して電卓やグラフを有効的に使えば求めることができるという成果があった。

第7章では、現実社会の中から抽出されたデータを分析・特徴付けるように思考する過程を用いた統計的モデリングの教材を開発した。すなわち、(i) 滞空時間の長い理想の紙ヘリコプターのモデルづくりの教育実践を、小・中学生を対象に行った。次に(ii) 現実事象と類似したデータ分布を表現する教育実践を、高校生を対象に行った。さらに(iii) 日影曲線のモデル作りに必要な空間認識の調査を小学生～大学生まで行い、その課題を検討した。そして日影曲線を表現するモデリングの教育実践を、高校生を対象に行った。

(i)では、22名の小学校5・6年生と2名の中学校1年生が、滞空時間の長い理想の紙ヘリコプターのモデルを検討した。まず動物の体重と翼の面積の関係を学んでから、紙ヘリコプターの落下実験をグループで行い、翼の長さや滞空時間の関係を発見した。その後、関数グラフ電卓を用いた線形回帰によるモデルを考えながら、理想の紙ヘリコプターを作り、日常現象における数学の有用性を高く評価した。これらのことから、回帰直線や統計法則の専門知識を理解しなくても、関数グラフ電卓等の統計グラフ機能を使えば、児童・生徒達は現実事象の傾向を判断できるという成果があった。

(ii)では、統計的モデリングの教材を開発し、21名の高校3年生が、稀少なデータから直観的にポアソン分布のモデルを作った。その後、各人が興味・関心のあるテーマを考え、観察・観測によってデータを集め、現実事象にあてはまる統計的モデルを作る教材を開発した。つまり、稀少データからポアソン分布の直観的な統計的モデルを作る経験は、観察・観測を行った現実の事象にあてはめてモデルを考える活動において有効であった。

(iii)では、日影曲線に関する教材を開発した。地球と太陽の位置に関する内容は、小学校3年生の理科では太陽に照らして地面にできる物の影、小学校5年生の社会で地球の緯度・経度、そして中学校3年生の理科で地球上の各地点での自然現象モデルとして纏められることを文献で示した。しかし、数学内容として扱う空間内の直線・平面・球面の位置関係や図形の性質・要素からの関与が小さいことも文献で示した。また多くの高校生や大学生が、この自然現象を数学の知識として解釈できず、理科の知識も身につけていないことが認識調査から明らかとなった。したがって、日影曲線は彼らの多様な生活問題に結び付いているにも関わらず、季節毎の影の軌跡を直観でも描けない状況で

あった。そこで大学の授業で赤道型日時計を作る活動を行い、学生達の太陽高度及び北極星の高度と方角に関する知識を改善した。さらに高校の授業では、太陽の高度と方位角のデータを集めて、35名の高校2年生が日影曲線のモデルの表現を検討した。そのことによって、多くの生徒達の季節毎の太陽の軌跡とそれに伴う日影曲線のモデルに対する知識を改善した。これらのことから、数学内容の球面三角法を使わずに、表計算ソフトによる太陽の位置観測データ処理が、高校生の日影曲線の理解を深める効果があった。

目的③の研究は、目的②で得られた知見を基に、初等中等教育における数学の図形分野と関数分野の教育内容を考察した。

第3章第2節において、日常現象から数学の世界へ導く「水平方向の数学化」と数学の体系を意識した「垂直方向の数学化」を行う数学的モデリングを統合して、内容面とその系統を提案した。そこでは情報メディアを有効に活用して、第2章で明らかになった数学教育の歴史的背景と現状の改善を考慮した。内容面を構成する個々の教材については、第4章～第7章に示した。

すなわち、明確になった問題は「日常生活における自然・社会現象を、厳密解を使った数学モデルで忠実に表現するためには、限りなく高度な数学の知識とそれによって求められたモデルの証明が必要となる。しかし現代は、その厳密解だけでは表現・解決できない複雑な現象が増えており、また多くの児童・生徒に高度で難解な数学の獲得を目指すこともできなくなった。現象が発展すればその厳密解も対応できなくなり、いずれは近似解の1つとなる。反面敢えて既習の数学を使って簡易的な数学モデルに落とし込めば、現実事象に対する厳密性を諦めて、それはもはや、現実事象からは離れる」であった。そこで、これらを打開する教育内容の構成を検討した。つまり新たな数学体系の構築や数学内容の知識獲得を意識した厳密解だけを要求するのではなく、プログラミング・表計算ソフト・回帰グラフ・3Dモデル等を用いたシミュレーションによる近似解も扱うことによって、児童・生徒がリアリティーとして感じる日常現象に跨がる問題に対応できる教育内容を開発すべき方向性を示した。

目的④の研究は、小学校教員養成課程を持つ大学・学部における授業における指導内容を考えるために、学生の基礎学力に関する調査研究を行った。

数学的モデリングで現実世界を表現する教育内容を普及・定着するためには指導者育成も重要であると考え、第2章第4節と第7章第2節において、小学校教員養成課程を持つ大学・学部の学生実態を明らかにした。そして第3章第2節において、小学校で数学的モデリングを指導できる教員を育成する大学授業の指導内容を提案した。

すなわち、数学的モデリングを活用するための学力に満たない大学生達が、小学校教員養成課程に顕在することが明らかとなり、数学的モデリングの活動の前に、数学を学び直す演習を採り入れた指導内容の必要性を示した。

以上のとおり本論文では、Mathematics for Societyを目指す数学教育を実現し、初等中等教育段階と小学校教員養成系の大学教育において数学的モデリングで表現する数学教育の内容を検討した。

結語は4つの目的をまとめ、数学的モデリングで表現する教育を実践する上で、次の4点を展望とした。

1. 問題を解決する前に、問題意識を持つ習慣と問題発見能力の育成が重要である。
2. 数学的モデリングを用いて現実世界を表現するとき、個人やグループの数学の知識・理解の状況に合わせて、情報テクノロジーを積極的かつ有効的に活用しなければ表現できない状況がこれから増えてくる。しかし、情報テクノロジーを過剰に信頼して依存するのではなく、科学的・数学的な考え方も背景にして現実世界を表現する教育内容も備えておく必要がある。
3. 解決のアイデアは優れた一個人からよりも、分野の全く異なる多様な相手との協働から多く生まれる。これを可能とするチームワーク能力と学習環境の整備が必要である。
4. 数学的モデリングでは数値データからその特徴を計算・解析し、近似的な「数や式」で表現する教育内容が主流であった。目に見えるだけでなく、人の意識や思考等のような目に見えないものまでも大凡の空間的特徴から近似的な「図形」で表現する教育の研究が新たに望まれる。

## 論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( 河 崎 哲 嗣 )			
論文審査担当者		(職)	氏 名
	主 査	教授	前迫孝憲
	副 査	教授	三宮真智子
	副 査	准教授	西森年寿

## 論文審査の結果の要旨

申請者は、初等中等教育段階の数学関連教育に着目し、スーパーサイエンスハイスクール(SSH)等に至る日本における理数教育の変遷を丹念に辿ると共に、Mathematics for Societyを目指し、実生活と関連づけた数学の有用性を実感できる問題解決学習に必要となる数学的モデリング(現実世界の問題について、数学的内容を含むモデルを通じて科学的に解決を図る)を扱う数学教育の開発を試みている。

第1章では、研究の目的と構成を示している。第2章では、第1節で明治時代から数学教育の現代化運動に至る変遷について、理科教育や技術科教育も含めた形で文献調査を行っている。そして、数学教育は現実場面には深入りせず体系化された抽象的な世界を扱い、教科間の矛盾や齟齬を問わない背景のあったことを明らかにしている。また、日本の教科担当制では、英国における数学と物理の融合教科であるMechanicsやドイツのような合科授業が成立し難いという課題のあることを示している。第2節では「科学技術・理科大好きプラン」施策に基づくSSH事業により展開された理数教育の内容について、京都府の複数の高校の事例を綿密に調査し分析を行っている。第3節では、1980年代後半からドイツ・オランダを中心とした西欧諸国とオーストラリアを拠点として発展した数学的モデリングの教育に関する概念と動向の整理を行っている。さらに問題解決学習や協働学習、デザイン思考教育や大学における教員養成との関連についても論じている。第3章では数学的モデリングを包括する教育内容について述べている。そこでは、日常の現象を介して数学の世界に導く教科横断的・数学体系を意識した学齢縦断的な教材を準備して、シミュレーションをはじめとする情報技術等の活用を促している。また、小学校教員養成課程における教職科目の指導内容の提案も行っている。第4章から第7章では、具体的な教材を開発して実践を行った過程を詳細に述べている。自然科学を扱った第4章では、高校生(39名)を対象に、観測データから惑星の楕円軌道を描画する実践を行い、多数の生徒が楕円軌道の数学的背景を理解し、意欲を持って取り組んだことを示している。また、一部の生徒はオイラー法を用いたプログラミングにより、微分方程式から解曲線を描画出来たという成果を得ている。日常生活を扱った第5章では、高校生(15名)を対象に、宅配使用の箱の容量が最大となる形状(立方体)を求める実践を行い、コンピュータ・シミュレーションによる近似解や、手計算で偏微分による厳密解に達することを確認している。この時、高い学力を有する生徒は表計算ソフト等の使用経験が少なく、厳密解に満足したことを見出している。生活用品のデザインを扱った第6章では、小学生(8名)を対象に紙工作等を併用して、L字型廊下を通過できるソファの最大面積を求める実践を行ったところ、教員の指導や協働学習、電卓やグラフの活用等で解決可能という成果を得ている。現象からデータを抽出・分析して特徴付けるモデルを扱った第7章では、小学生(22名)と中学生(2名)を対象に滞空時間の長い紙ヘリコプターを作る実践を行い、翼の長さや滞空時間の関係を見つけ出し、関数グラフ電卓を用いた線形回帰モデル作りを通して、数学の有用性を体感出来ることを見出している。また、高校生(21名)に対するポアソン分布モデルの事例を考える体験によって、日常現象の観測結果をモデル化する活動が可能であることを示している。さらに、太陽の天球上の通り道の季節変動と日陰曲線との関係について、大学生(79名)を対象とした赤道型日時計の制作実践や高校生(35名)を対象に日影曲線のモデルを表現する実践を行い、太陽と地球の位置関係の理解が改善され、観測データの表計算ソフトによる処理等で日影曲線のモデルに対する理解が深まるという結果を得ている。

結語では、実践に用いた情報メディアで高度な内容の数学を学習した生徒が確認されたこと等を成果としており、今後の課題として、問題解決能力に加えて問題発見能力育成の必要性や地域一体型学習共同体の構築方法などを上げている。

数学的モデリングを扱う数学教育の開発や有用性の解明には更なる研究の積み重ねが必要と思われるが、本論文はその可能性を十分に論じていると評価できる。

以上により、本論文は博士(人間科学)の学位授与にふさわしいと判定した。