様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　小林　弘知　）	
論文題名	Class numbers of pure quintic fields （純五次体の類数）

論文内容の要旨

ｐを有理素数とする。ｍを１より大きな正整数であって、１でない正整数のｐ乗で割れないものとする。純ｐ次体とは有理数体にｍの実ｐ乗根を添加した代数拡大体のこととして定義する。一般の代数拡大体Ｋに対して、Ｋの整数環の分数イデアル全体のなすアーベル群を単項分数イデアルからなる部分群で割って得られる剰余群をＫのイデアル類群と言い、その位数は有限でＫの類数という。一般の代数拡大体の類数の性質を調べる研究はこれまでにも数多くなされてきたが、その結果として類数には捉えやすい簡単な性質がないことがわかっている。ただし、例外的に規則的なふるまいをする類数をもつ代数拡大体の系列がいくつか知られており、例えば純二次体の類数が２で割れるかどうかはｍの素因数分解を見て完全に判定出来ることが知られてきた。

当論文では純ｐ次体の類数がｐで割れるかどうかを問題とする。上述のとおりｐ＝２の場合は古くから完全に決定出来ることが知られていたが、純二次体は有理数体上アーベル拡大体でもあるから特別であってその手法はそのまま三次以上の場合に適用できなかった。結果だけ述べると、ｐ＝３の場合はブラウアー・クロダの関係式から、純三次体に１の原始三乗根を添加した体の類数が３の倍数であることがはじめの純三次体の類数が３の倍数であることと必要十分なことがわかり、さらにこの添加して出来た体の類数が３の倍数であるかどうかをヒルベルト記号の計算から具体的に決定できるため、解決された。この手法をｐ＝５の場合に適用する研究が続いたものの、この場合になると既に不明瞭な場合がいくつか残されてしまうことがわかっている。こうした研究背景のもと、当論文ではこのｐ＝５の残された不明瞭な場合のいくつかにおいて明示的な結果を与えることを目標とした。その主結果は簡潔明瞭に述べることができて、ｍが５で割って４余る素数を因数に持つならｍの実五乗根を添加して得られる純五次体の類数は５の倍数である、ということになる。以下証明の概略を簡単に述べる。純五次体Ｋはｍの実五乗根から生成されるものとし、Ｋに１の原始五乗根を添加して生成された代数拡大体の最大実部分体をＬとおく。まずブラウアー・クロダの関係式を計算してＫの類数が５で割れることとＬの類数が５で割れることが同値であることを示した。そしてＬの類数が５の倍数でないときにＬの単数群を調べ、Ｌの基本単数系の持つ代数的な性質を詳しく決定出来た。最後にｍが５で割って４余る素因数ｔを持ち、Ｌの類数が５で割れないと仮定する。このとき、得られた基本単数系の代数的性質を用いてｔ上にあるＬの素イデアルから構成した単数を基本単数の積で表すと矛盾が生じてしまうことがわかった。こうして背理法からＬの類数は５の倍数であり、従ってＫの類数も５の倍数であることが帰結される。主結果の類似として、ｐ＞２の時ｍがｐで割って１余る素因数を持つなら、ｍの実ｐ乗根を添加して得られる純ｐ次体の類数がｐで割れることが知られているが、この結果のｐ＝５の場合の別証明を副産物として与えることもできた。また、主結果の一般化としてｐ＞３の時、ｍがｐで割ってｐ－１余る素因数を有するならば、ｍの実ｐ乗根を添加して得られる純ｐ次体の類数がｐで割れるのではないかという問題を予想として提出した。主結果はこの予想のｐ＝５の場合に相当する。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　小林　弘知　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
主 査	教授	今野　一宏
副 査	教授	渡部　隆夫
副 査	教授	高橋　篤史
副 査	准教授	安田　正大

論文審査の結果の要旨

題目： Class numbers of pure quintic fields
（和訳： 純５次体の類数）

純５次体の類数に関する研究である．一般に，ｐを素数とするとき，１より真に大きいどんな自然数のｐ乗でも割り切れないような自然数ｍに対して，ｍの実ｐ乗根を有理数体に付加することによって，純ｐ次体が得られる．この体の類数がｐで割り切れるか否かという自然な問が生じる．しかし，ｐが２と３の場合を除いて解答は得られていなかった．本論文では，この未解決問題を純５次体の場合に考察し，ある条件下で解決した． ｐが２と３の場合には，当該問題は特異類公式，Brauer-Kuroda関係式という２つの基本的な等式を用いることによって，比較的容易に示すことができる．実際ｐが２の場合は特異類公式から純２次体の類数は偶数であることが直ちに従い，純３次体の場合は１９７１年に Honda により解決されている．一方，ｐが５の場合には同じ論法を用いることができない．Brauer-Kuroda 関係式から導かれる等式がそれほど有効でないからである．この技術的困難を克服するために，本論文では問題の純５次体のガロア閉包に含まれる最大の実体を補助的に考えて，その基本単数系を代数的に記述することに成功した．そして５を法として－１に等しいｍの素因子の上にある素イデアルから作った，その体の単数を詳細に調べ上げ，類数が５で割り切れなければ，矛盾が生じることを証明したのである．これによって純５次体において未解決のケースとして Parry が分類を与えた６つの場合のうち，３つが肯定的に解決されたことになる．特筆すべきは，従来，最も難しいとされていたケースをも含んでいることである．

以上の業績は，当該研究分野に新たな知見をもたらすものである．よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．