

Title	Class numbers of pure quintic fields
Author(s)	小林, 弘知
Citation	大阪大学, 2016, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/56049
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

論文内容の要旨

氏名 (小林 弘知)

論文題名

Class numbers of pure quintic fields
(純五次体の類数)

論文内容の要旨

p を有理素数とする。 m を 1 より大きな正整数であって、1 でない正整数の p 乗で割れないものとする。純 p 次体とは有理数体に m の実 p 乗根を添加した代数拡大体のこととして定義する。一般の代数拡大体 K に対して、 K の整数環の分数イデアル全体のなすアーベル群を単項分数イデアルからなる部分群で割って得られる剰余群を K のイデアル類群と言ひ、その位数は有限で K の類数という。一般の代数拡大体の類数の性質を調べる研究はこれまでも数多くなされてきたが、その結果として類数には捉えやすい簡単な性質がないことがわかっている。ただし、例外的に規則的なふるまいをする類数をもつ代数拡大体の系列がいくつか知られており、例えば純二次体の類数が 2 で割れるかどうかは m の素因数分解を見て完全に判定出来ることが知られてきた。

当論文では純 p 次体の類数が p で割れるかどうかを問題とする。上述のとおり $p = 2$ の場合は古くから完全に決定出来ることが知られていたが、純二次体は有理数体上アーベル拡大体でもあるから特別であってその手法はそのまま三次以上の場合に適用できなかつた。結果だけ述べると、 $p = 3$ の場合はブラウアー・クロダの関係式から、純三次体に 1 の原始三乗根を添加した体の類数が 3 の倍数であることがはじめの純三次体の類数が 3 の倍数であることと必要十分なことがわかり、さらにこの添加して出来た体の類数が 3 の倍数であるかどうかをヒルベルト記号の計算から具体的に決定できるため、解決された。この手法を $p = 5$ の場合に適用する研究が続いたものの、この場合になると既に不明瞭な場合がいくつか残されてしまうことがわかっている。こうした研究背景のもと、当論文ではこの $p = 5$ の残された不明瞭な場合のいくつかにおいて明示的な結果を与えることを目標とした。その主結果は簡潔明瞭に述べることができて、 m が 5 で割って 4 余る素数を因数に持つなら m の実五乗根を添加して得られる純五次体の類数は 5 の倍数である、ということになる。以下証明の概略を簡単に述べる。純五次体 K は m の実五乗根から生成されるものとし、 K に 1 の原始五乗根を添加して生成された代数拡大体の最大実部分体を L とおく。まずブラウアー・クロダの関係式を計算して K の類数が 5 で割れることと L の類数が 5 で割れることが同値であることを示した。そして L の類数が 5 の倍数でないときに L の単数群を調べ、 L の基本単数系の持つ代数的な性質を詳しく決定出来た。最後に m が 5 で割って 4 余る素因数 t を持ち、 L の類数が 5 で割れないと仮定する。このとき、得られた基本単数系の代数的性質を用いて t 上にある L の素イデアルから構成した単数を基本単数の積で表すと矛盾が生じてしまうことがわかつた。こうして背理法から L の類数は 5 の倍数であり、従つて K の類数も 5 の倍数であることが帰結される。主結果の類似として、 $p > 2$ の時 m が p で割って 1 余る素因数を持つなら、 m の実 p 乗根を添加して得られる純 p 次体の類数が p で割れることが知られているが、この結果の $p = 5$ の場合の別証明を副産物として与えることもできた。また、主結果の一般化として $p > 3$ の時、 m が p で割って $p - 1$ 余る素因数を有するならば、 m の実 p 乗根を添加して得られる純 p 次体の類数が p で割れるのではないかという問題を予想として提出した。主結果はこの予想の $p = 5$ の場合に相当する。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (小林 弘知)			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	教授	今野 一宏
	副 査	教授	渡部 隆夫
	副 査	教授	高橋 篤史
	副 査	准教授	安田 正大
論文審査の結果の要旨			
<p>題目： Class numbers of pure quintic fields (和訳： 純5次体の類数)</p> <p>純5次体の類数に関する研究である。一般に、pを素数とすると、1より真に大きいどんな自然数のp乗でも割り切れないような自然数mに対して、mの実p乗根を有理数体に付加することによって、純p次体が得られる。この体の類数がpで割り切れるか否かという自然な問が生じる。しかし、pが2と3の場合を除いて解答は得られていなかった。本論文では、この未解決問題を純5次体の場合に考察し、ある条件下で解決した。pが2と3の場合には、当該問題は特異類公式、Brauer-Kuroda関係式という2つの基本的な等式を用いることによって、比較的容易に示すことができる。実際pが2の場合は特異類公式から純2次体の類数は偶数であることが直ちに従い、純3次体の場合は1971年に Honda により解決されている。一方、pが5の場合には同じ論法を用いることができない。Brauer-Kuroda 関係式から導かれる等式がそれほど有効でないからである。この技術的困難を克服するために、本論文では問題の純5次体のガロア閉包に含まれる最大の実体を補助的に考えて、その基本単数系を代数的に記述することに成功した。そして5を法として-1に等しいmの素因子の上にある素イデアルから作った、その体の単数を詳細に調べ上げ、類数が5で割り切れなければ、矛盾が生じることを証明したのである。これによって純5次体において未解決のケースとして Parry が分類を与えた6つの場合のうち、3つが肯定的に解決されたことになる。特筆すべきは、従来、最も難しいとされていたケースをも含んでいることである。</p> <p>以上の業績は、当該研究分野に新たな知見をもたらすものである。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。</p>			