フォン・ノイマン型成長モデルの拡張と環境質ならびに世代間衡平性問題をともなう世代重複モデルへの適用

浦井　憲[†]・景山　悟[‡]

要　旨

環境質の問題は，これまでしばしば世代重複モデルの枠組みの下，世代間衡平性の問題とともに取り扱われて来た。本稿では，我々はこの問題を主として生産サイドから，世代重複モデルを動学的な最適計画の問題として再構築しつつ，Overtaking Criterion といった判断基準を用いながら分析しうる可能性についての検討を与える。また，そのような最適な定常計画を特徴づけるために，古典的フォン・ノイマン成長モデルの設定を，拡張しつつ用いる。

Keywords : Overtaking Criterion; Inter-Generational Equity; Environmental Quality, von Neumann Growth Model

1. イントロダクション

一般に，**地球環境**といった問題を考える場合，**持続可能性**，あるいは**無限に多くの将来の人々に対してもそれが等しく引き継がれる**ような技術的な可能性について考えること（代表的には世代重複モデルが持つ特徴であるが）は，しばしば非常に重要なことがらとして強調に値するところである。そしてそのような定式化において，しばしば見られる現象として，最適な状態というものを単純に価格メカニズムによって特徴づけできないということが，Samuelson（1958）における有名な結論として知られている。

本稿では，そういった「定常的な最適状態」に焦点を当て，それをGale（1967）的なOvertaking Criterion の下で，言い方を変えれば単なる世代重複の博愛的な選好に基づくよりも，強く世代間衡平性という正義に基づいた選好によって特徴づける。[1]

このような問題設定において特徴的であるのは，それが動学的問題として世代間衡平性の概念により，(1) 最適解における**目的関数の非有界性**が予想されること，(2) そしておそらく**No Ponzi 条件の導入といったことも**（**Double Infinity によって**）**恣意的**ならざるを得ないであろうということ，(3) しかしながらその反面，あらかじめ**最適な状態としての定常性**が予期される，ということである。従って，かつて斉一成長の議論や生産のターンパイクにおいてなされた議論をもう一度ここで再検討すること

† 大阪大学大学院経済学研究科教授
E-mail: urai@econ.osaka-u.ac.jp
‡ 大阪大学大学院工学研究科博士後期課程
E-mail: s-kageyama@mit.eng.osaka-u.ac.jp

1 あるいは次のように言い換えることもできる。ここで言う正義とは，単に自分に近い子供，孫についての幸福を，それ以下の子孫の犠牲の下で願うような博愛的選好より，遠く自らの子孫の全体に心を配るような博愛的選好の方を重視する，ということである。

は，十分な見返りと意義があるものと考えられる。

ここでは，世代重複モデルによる通常の世代間衡平性を取り扱う設定を，消費者の状況を生産の問題に埋め込むために，フォン・ノイマン成長モデルへと変換し，その結果を再度世代モデルとして解釈するという方法を取る。

数学的概念，記法としてはSchaefer（1971）におけるものを標準として用いる。またNによって非負整数の全体を表し，Rによって実数の全体からなる集合を表す。各$n \in N$に対して，R^nはn-次元のユークリッド空間を表し，R^n上には以下の3通りの順序を表現する関係，$\leqq$, $<$, そして$\ll$が，それぞれ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$, $(x \leqq y) \iff (\forall i = 1, 2, \ldots, n, x_i \leqq y_i)$, $(x < y) \iff (x \leqq y \text{ and } x \neq y)$, そして$(x \ll y) \iff (\forall i = 1, 2, \ldots, n, x_i < y_i)$として定義されているものとする。加えて$R^n_+$および$R^n_{++}$でもって，我々は$\{x \in R^n \mid 0 \leqq x\}$および$\{x \in R^n \mid 0 \ll x\}$をそれぞれ表すものとする。

2. モデル

環境質の問題は，これまでしばしば世代重複モデルの枠組みの下，世代間衡平性の問題とともに取り扱われて来た。本稿では，我々はこの問題を主として生産サイドから，世代重複モデルをGale（1967）的な動学的な最適計画の問題として再構築することにより，分析することを試みる。また，そのような最適な定常計画を特徴づけるために，古典的なフォン・ノイマン成長モデルの設定von Neumann（1937）を，拡張しつつ用いることにする。

2.1 基礎的なフォン・ノイマンモデルの拡張

von Neumann 型成長モデルにおいて，財の名称としてQとHを特別なものとし，Q-型とH-型と名づける次のような2系統の生産技術工程が存在するとする。Q-型の工程とは，その投入および産出において財Hと無関係に操業できる技術工程の全体であり，H-型の技術工程とは財Qと無関係に操業できる工程の全体とする。

当面，全技術工程はこの2系統の工程のいずれかに属するものと考える。財の数はn種類とし，その1番めおよび2番めは，それぞれ財QおよびHを表すものとする。Q-型およびH-型の工程をそれぞれ次のように表現することができる。

		投入		産出
(1)	Q-型の第i工程	$(a^q_{i1},\ 0\ , a^q_{i3}, \ldots, a^q_{in})$	$\to$	$(b^q_{i1},\ 0\ , b^q_{i3}, \ldots, b^q_{in})$
(2)	H-型の第i工程	$(\ 0\ , a^h_{i1}, a^h_{i3}, \ldots, a^h_{in})$	$\to$	$(\ 0\ , b^h_{i1}, b^h_{i3}, \ldots, b^h_{in})$

上のベクトル中で，0と記した成分は，上左からa^q_{i2}および上右b^q_{i2}，そして下左a^h_{i1}および下右b^h_{i1}とも書く。工程の数として，我々は添字i をQ-型H-型ごとにそれぞれ$i \in I^q$あるいは$i \in I^h$（I^q, I^hはコンパクト距離空間で$I^q \cap I^h \neq \emptyset$），両方合わせて$i \in I = I^q \cup I^h$として連続無限個あるものと想定する。これは一般に$R^n_+$上で想定されるConstant Returns to Scaleを満たすようなテクノロジーでも，その投入物の定義域を（足して1のような）コンパクト集合に限定することで，議論の範疇に入れることができるようにするためである。[2]

上述のH-型工程およびQ-型工程の全体を，以下4つの非可算無限行n列型行列A^q, B^q, A^h, B^hを用いて表す。即ち，A^q, B^q, A^h, B^hとは，それぞれそのi行j列がa^q_{ij}, b^q_{ij}, a^h_{ij}, b^h_{ij}であるものをさす。また，これらをまとめて

[2] 例えば投入物が2種類で産出物が1種類であるようなCRS関数$x_3 = f(x_1, x_2)$であれば，$I = [0, 1]$として，$(x_1, x_2, x_3) = (i, 1-i, f(i, 1-i))$, $i \in I$でfの特徴の全てが代表される。fが3変数以上の場合，Iの次元を1にしておくことは議論上窮屈になるので，少なくともR^nのコンパクト部分集合という程度にはIを一般化しておくことが望ましい。

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix}A^q\\A^h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vdots & 0 & \vdots & \dots & \vdots\\ a^q_{i1} & \vdots & a^q_{i3} & \dots & a^q_{in}\\ \vdots & 0 & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \vdots & a^h_{i'2} & a^h_{i'3} & \dots & a^h_{i'n}\\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B^q\\B^h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vdots & 0 & \vdots & \dots & \vdots\\ b^q_{i1} & \vdots & b^q_{i3} & \dots & b^q_{in}\\ \vdots & 0 & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \vdots & b^h_{i'2} & b^h_{i'3} & \dots & b^h_{i'n}\\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\end{bmatrix}$$

と書く。以下の仮定を用いる。

Assumption 1: A^q, B^q, A^h, B^hの全ての要素は非負実数値である。

Assumption 2: $I=I^q\cup I^h$は統一された距離空間上で共通部分を持たない２つのコンパクト部分集合I^qとI^hの和集合として表現されているようなコンパクト距離空間であるとする。A^q, B^qの全ての列は$i\in I^q$の関数と見て，A^h, B^hの全ての列は$i\in I^h$の関数と見て，それぞれ連続である。

Assumption 3: A^q, B^qは全ての$i\in I^q$および２以外の$j=1,3,4,\dots,n$について$a^q_{ij}+b^q_{ij}>0$を満たし，A^h, B^hは全ての$i\in I^h$および１以外の$j=2,3,\dots,n$について$a^h_{ij}+b^h_{ij}>0$を満たす。

これらはいずれも標準的設定である。Assumption 2 はiが有限個（I^q, I^hが離散集合）の場合，制約として無いのと同じである。Assumption 3はフォン・ノイマンモデルでは通常全体に対して課されているものを，Q-型，H-型それぞれに分け，部分的に課してあるため，弱められている。（そのため本稿ではQ-型H-型それぞれに応じた成長率が存在しうるモデル設定になっている。）

ここで財Qや財Hが表現しようとしているものは，しばしばマクロ的に**環境質**といった名称で表現されようとしているものである。これは漠然と「天然資源や自然環境も含めた広い意味での生産および生活のための環境」のようなものをマクロ的に集合財的に表した概念であるが，通常それは生産にも不可欠に用いられ，また生産の結果とともに（環境へのメンテナンスといった意味で）補填されなければ減少してしまうような，（更に加えて，それ自体の各期の存在が効用に正の外部性を持つといういかにも「自然環境」らしい特徴を除けば），非常に資本と似た形で導入されるものである。ここではそれを「投入・産出分析」的に言えば「部門」として，あるいはフォン・ノイマン成長モデル的な枠組みで（労働のような本源的生産要素もあたかも１部門とするような意味で）言えば一つの財として取り扱う。しかも，そのために２種類の財（部門）QとHが用意されているのは，今その国が**２つの異なる「環境質部門」あるいは「資本財部門」の選択に直面している**という状況をモデル化しようとしているものである。

2.2. 拡張型フォン・ノイマンモデルにおけるアクティビティならびにプライス

以下，**操業水準 activity** xはコンパクト距離空間I上の Borel σ-Algebra$\mathcal{B}_I$上に与えられた確率測度（以後その全体を$\mathfrak{M}(I)$で表す）であるものとする。$\mathfrak{M}(I)$ は良く知られるように**弱位相 weak toplogy**（「fをI上の任意の連続関数—I がコンパクトなので当然有界—として，$\int fdx^\nu\to\int fdx^*$」の時，その時に限り「$x^\nu\to x^*$」とする）の下でコンパクト距離空間となる（例えばParthasarathy（1967；Theorem 6.5, P.45）などを見よ）。$I=I^q\cup I^h$の定義から，$x\in\mathfrak{M}(I)$ はいつでも$x=x^q+x^h$（x^qはxのI^qへの，x^hはI^hへの，それぞれ制限とする）と，一意的に分解される。

財の種類はnであるので，**価格水準**yはR^nにおける$n-1$次元標準単体$\Delta=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in R^n_+|\ \sum_{j=1}^n y_j=1\}$と同一視できる。

操業水準$x\in\mathfrak{M}(I)$，価格$y\in\Delta$，成長率を表す定数$\alpha\geqq 0$，そして利子率を表す定数$\beta\geqq 0$からなる組が以下の条件を満たすとき，これを**拡張型フォン・ノイマンモデルの均衡**と呼ぶ。

AおよびBの(i,j)要素をそれぞれ簡単にa_{ij}およびb_{ij}で表すことにすると

$$(4)\quad \langle x, B-\alpha A\rangle \stackrel{\text{def}}{=} [\int b_{i1}-\alpha a_{i1}dx \quad \dots \quad \int b_{in}-\alpha a_{in}dx] \geqq 0$$

$$(5)\quad \langle B-\beta A, y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} y_j(b_{ij}-\beta a_{ij}) \\ \vdots \end{bmatrix} \leqq 0$$

$$(6)\quad \forall j \in \{1,2,\dots,n\}, \int b_{ij}-\alpha a_{ij}dx > 0 \Longrightarrow y_j = 0$$

$$(7)\quad x(\{i \in I | \sum_{j=1}^{n} y_j(b_{ij}-\beta a_{ij}) < 0\}) = 0$$

式（4）の$\geqq$は$1\times n$ 行列（あるいはn次元ベクトル）としての大小関係であり，式（5）の$\leqq$はI上の実数値関数としての非正性である。条件式（6）は（4）への，（7）は（5）へのそれぞれ追加条件であり，（7）の$\{i \in I | \sum_{j=1}^{n} y_j(b_{ij}-\beta a_{ij}) < 0\}$が仮定により（連続関数の和から決まる集合であるので）$\mathcal{B}_I$可測であることは容易に確認される。

2.3　矩形零和ゲームとの関係

本稿ではフォン・ノイマンモデルの均衡をしばしば零和矩形ゲームの鞍点解としても取り扱う関係上，以下の事実に着目しておくことが有益である。$C(i,j)$を$I\times\{1,2,\dots,n\}$で定まる実数値関数で，任意のjにつき$C(i,j)$は$i\in I^q$および$i \in I^h$に関して連続とする。このとき以下の２式が成り立つ。

$$(8)\quad F^C(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y\in\Delta}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \int C(i,j)dx\right) = \min_{j=1,2,\dots,n}\left(\int C(i,j)dx\right)$$

$$(9)\quad G^C(y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathfrak{M}(I)}\left(\int \sum_{j=1}^{n} y_j C(i,j)dx\right) = \max_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j C(i,j)\right)$$

実際，式（8）について，左辺minの存在はΔのコンパクト性から保証され，$\leqq$は第j単位ベクトル$e^j\in\Delta$ for each $j=1,2,\dots,n$であるから当然であり，また$\geqq$であることは右辺をδとすると，任意のjおよびyについて$y_j\int C(i,j)dx \geqq y_j\delta$であることと$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$であることから従う。式（9）については，まずmaxをとるいずれの範囲もコンパクトであり，対象は連続関数であるので，max値の存在については問題が無い。等号の成立についても，$\geqq$はsingleton $\{i\}$が（距離空間において１点は閉集合であるから）ボレル集合であるので，xを$\{i\}$に確率１を与える測度とすればmaxの定義より当然従う。最後に$\leqq$であることは，右辺の値をδとすると任意の$x\in\mathfrak{M}(I)$について$\sum_{j=1}^{n} y_j \int C(i,j)dx = \int \sum_{j=1}^{n} y_j C(i,j)dx \leqq \int \mathrm{Const}_\delta dx = \delta$（ここで$\mathrm{Const}_\delta$は値が$\delta$の定値写像）。

これらを元にして更に次の数値を定める。これらは関数Cに依存している。

$$(10)\quad v_1(C) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathfrak{M}(I)} F^C(x)$$

$$(11)\quad v_2(C) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y\in\Delta} G^C(y)$$

関数F^Cの連続性は明らかであり，またG^Cの連続性は経済学理論ではよく用いられる Berge の Maximum Theorem（たとえばIchiishi（1983）を見よ）から明らかである。よってv_1およびv_2の右辺にある最大値，最小値はそれぞれきちんと存在する。

定義式（8）および（9）から（実は任意の(x,y)について常に$F^C(x)\leqq G^C(y)$なので）直ちに$v_1(C)\leqq v_2(C)$であることが分かるが，実はCのここまで満たしている条件により

$$(12)\quad v_1(C) = v_2(C)$$

が成り立っている。実際，$K(x,y)=\sum_{j=1}^{n} y_j\int C(i,j)dx$と置いて，対応$\varphi:\mathfrak{M}(I)\times\Delta\to\mathfrak{M}(I)\times\Delta$を

$$(13)\quad \varphi:\mathfrak{M}(I)\times\Delta \ni (x,y)\mapsto \{x'|K(x',y)\geqq K(x,y)\}\times\{y'|K(x,y')\leqq K(x,y)\}$$

と定めると，φは非空，閉，凸値で閉グラフを持つ。故に（$\mathfrak{M}(I)$はI上の測度全体が作るベクトル空間に対してI上の実数値有界連続関数のつくるベクトル空間$C(I)$との双対を用いた弱位相を入れた場合の部分集合であり，またΔ

はR^nの部分空間であるから）Glicksberg の不動点定理（Glicksberg（1952））によって，不動点(x^*,y^*)を持つ。すると

$$(14)\quad v_2(C)=\min_{y\in\Delta}G^C(y)\leqq G^C(y^*)\leqq K(x^*,y^*)$$
$$=\min_{y\in\Delta}K(x^*,y)=F^C(x^*)\leqq v_1(C)$$

となって，式（12）の成立することが分かる。上でも一部利用したが，φの不動点(x^*,y^*)の持つ次の性質

$$(15)\quad K(x,y^*)\leqq K(x^*,y^*)\leqq K(x^*,y)\ \text{for all}\ (x,y)\in\mathfrak{M}(I)\times\Delta$$

を指して，(x^*,y^*)は$K(x,y)$の**鞍点**であると言う。

以上の結果は，２人の異なるプレイヤー甲乙を考え，$C(i,j)$を単純戦略(i,j)に対する甲の利得であり同時に乙の損失を表現しているものと見た，**拡張型零和矩形ゲーム**についての定理として，次のようにまとめることができる。

Theorem 1: $C(i,j)$を利得行列と見做した**拡張型零和矩形ゲームのゲームの値**は$v(C)=v_1(C)=v_2(C)$と**確定**である。また，その値は混合戦略$x\in\mathfrak{M}(I)$および$y\in\Delta$の下での甲の利得（乙の損失）を表す$K(x,y)=\sum_{j=1}^n y_j\int C(i,j)dx$の**鞍点**$(x^*,y^*)$をもって$v(C)=K(x^*,y^*)$のように得られる。

2.4 拡張型フォン・ノイマンモデルの解の存在

条件式（4）－（7）を満たす$x\in\mathfrak{M}(I)$, $y\in\Delta$, $\alpha\geqq 0$, そして$\beta\geqq 0$の存在を示すにあたって，まずいったんAssumption 3よりも強い下のAssumption 4の下で均衡の存在を示す。

Assumption 4: A,B は全ての$i\in I$および$j\in\{1,2,\dots,n\}$について$a_{ij}+b_{ij}>0$を満たす。

これは通常のフォン・ノイマンモデルにおいて想定される仮定を素直に現在の設定に適用したものである。この仮定の下で，**ノイマン型零和ゲーム**として問題を定式化するために，次の２種類の比の最小化，最大化に着目する。

$$(16)\quad \bar F(x)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \min_{y\in\Delta}\left[\frac{\sum_{j=1}^n y_j\int b_{ij}dx}{\sum_{j=1}^n y_j\int a_{ij}dx}\right]=\min_{j=1,2,\dots,n}\left[\frac{\int b_{ij}dx}{\int a_{ij}dx}\right]$$

$$(17)\quad \bar G(y)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \max_{x\in\mathfrak{M}(I)}\left[\frac{\int\sum_{j=1}^n y_jb_{ij}dx}{\int\sum_{j=1}^n y_ja_{ij}dx}\right]=\max_{i\in I}\left[\frac{\sum_{j=1}^n y_jb_{ij}}{\sum_{j=1}^n y_ja_{ij}}\right]$$

鈎括弧内の比は，場合によって分母が0となるケースがあるが，その場合はAssumption 4によって分子は正の値を必然的にとるので（式（16）においてはa_{ij}およびb_{ij}のiに関する連続性が必要である），値として$+\infty$まで認める（$\bar F,\bar G$をともに値を extended real line $\bar R=[-\infty,+\infty]$にとる関数と考えて）とすれば，すべての$\min$および$\max$をとる作業は確定である。（16）における等式の成立については，$\leqq$については定義から自明，$\geqq$については右辺を実現するのがj，その時の値を$\delta<\infty$とすれば（∞なら，全$j=1,\dots,n$で∞なので左辺も∞となり証明すべきことは残っていない），$\int b_{ij}dx=\delta\int a_{ij}dx$および$\int b_{ij'}dx\geqq\delta\int a_{ij}dx$を，左辺に代入すれば良い。（17）における等式成立は，$\geqq$が定義より自明，$\leqq$は右辺の値を$\delta<\infty$として（∞なら証明すべき事は残っていない），その値を実現するiについては$\sum_{j=1}^n y_jb_{ij}=\delta\sum_{j=1}^n y_ja_{ij}$，それ以外の$i'$については$\sum_{j=1}^n y_jb_{i'j}\leqq\delta\sum_{j=1}^n y_ja_{i'j}$を左辺に代入して整理すれば良い。

ここで，やはり$+\infty$までとる値を拡張した利得関数$\bar K(x,y)$を

$$(18)\quad \bar K(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\sum_{j=1}^n y_j\int b_{ij}dx}{\sum_{j=1}^n y_j\int a_{ij}dx}=\frac{\int\sum_{j=1}^n y_jb_{ij}dx}{\int\sum_{j=1}^n y_ja_{ij}dx}$$

と定義し，甲乙２人から成る零和２人ゲームを考えると，現在のフォン・ノイマンモデル（B/Aと表す）に依存したゲームについての次の数値が定まる。

(19) $$\bar{v}_1(B/A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathfrak{M}(I)} \bar{F}(x)$$

(20) $$\bar{v}_2(B/A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y\in\Delta} \bar{G}(y)$$

$\bar{F}(x)$および$\bar{G}(y)$の定義式から任意のx, yについてて$\bar{F}(x) \leqq K(x,y) \leqq \bar{G}(y)$であることが分かるので，実は常に$\bar{v}_1(B/A) \leqq \bar{v}_2(B/A)$が成り立つ。

もしも，ある$\hat{x} \in \mathfrak{M}(I)$ および$\hat{y} \in \Delta$の下で$v_1(B/A) = v_2(B/A)$であったとすると，もしもその値が有限であれば，その値を$\alpha = \beta = \hat{\alpha} = \hat{\beta}$として$\bar{F}$および$\bar{G}$の定義から，式（4）−（7）が成立するので，$x = \hat{x}$, $y = \hat{y}$, $\alpha = \hat{\alpha}$, $\beta = \hat{\beta}$が拡張型フォン・ノイマンモデルの均衡であることが分かる。$v_1(B/A) = v_2(B/A)$の値が無限大になる場合は，経済学的には意味が無い（成長率が無限大で生産活動も価格も何でも良いという状況である）ので，次の仮定を入れて，生産活動に意義を付与する。

Assumption 5: 全ての$i \in I$について何らかの$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$についての投入$a_{ij} > 0$は不可欠である。

この仮定と，a_{ij}のiについての連続性は，$\bar{F}$の定義式（16）において右辺の最小値を（xが何であろうと）有限にする。この仮定は元々のフォン・ノイマンモデルには置かれていないが，上述した通り経済学理論的には（モデルの解として意味があるためには）必要である。

次の定理を示すことができる。

Theorem 2： Assumption 1, 2, 4, 5 の下で，拡張型フォン・ノイマンモデルの解，式（4）−（7）を満たす$\hat{x} \in \mathfrak{M}(I)$, $y \in \Delta$, $\hat{\alpha} \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \infty)$が存在する。

Proof： フォン・ノイマンの証明方法と基本的に同じであるが，xの定義域$\mathfrak{M}(I)$が弱位相でのコンパクト集合（局所凸線形位相空間の部分集合としてコンパクト）であるので以下にあげるフォン・ノイマン一致点定理の局所凸線形位相空間への拡張定理を用いる。$S = \mathfrak{M}(I)$, $T = \Delta$と置き，$V \subset S \times T$および$W \subset S \times T$をそれぞれ次のように定める。Vの$x \in S$セクションは，式（16）の最右辺におけるミニマムを実現して**いない**jについては0を，それ以外のjについては何も要請しない$T = \Delta$の要素の全体とする。このときVが閉グラフになり，Vの任意のxセクションが非空・凸・コンパクトとなることは（従来のフォン・ノイマンモデルの場合と同じく）容易に確かめられる。Wの$y \in T$セクションは，式（17）の最右辺におけるマックスを実現して**いない**ような$i \in I$の全体（これは関数a_{ij}およびb_{ij}のiに関する連続性からIの開部分集合になる）に対して0を与えるような確率測度$x \in \mathfrak{M}(I)$の全体とする。これはIの閉部分集合（コンパクト集合）に確率1を与える測度の全体とも言えるから，やはり弱位相でコンパクトであり，またそのIの閉部分集合は（必ずどこかでマックスは実現されているので）空集合ではありえないため，非空・凸・コンパクト集合となる。Wの閉グラフ性も明らかである。よって，次定理（フォン・ノイマン一致点定理）からVとWには一致点$(\hat{x}, \hat{y}) \in V \cap W$が存在する。この点は定義から容易に確かめられるように$\bar{K}$の鞍点，すなわち任意の$x \in S = \mathfrak{M}(I)$ および$y \in T = \Delta$について

(21) $$\bar{K}(x, \hat{y}) \leqq \bar{K}(\hat{x}, \hat{y}) \leqq \bar{K}(\hat{x}, y)$$

となっている。ここから$\bar{K}(\hat{x}, \hat{y}) = \bar{F}(\hat{x}) \leqq \bar{v}_1(B/A)$かつ$\bar{v}_2(B/A) \leqq \bar{G}(\hat{y}) \leqq \bar{K}(\hat{x}, \hat{y})$より$\bar{v}_1(B/A) = \bar{v}_2(B/A)$となり，Assumption 5と本定理直前の注意によって，フォン・ノイマン均衡の存在が示されたことになる。■

上の証明で利用されたフォン・ノイマン一致点定理の局所凸線形空間への拡張定理とその証明を以下に付け加えておく。

Theorem 3:（フォン・ノイマン一致点定理：局所凸線形位相空間） SおよびTを局所凸線形空間の非空・凸・コンパクト集合とする。VおよびWを$S\times T$の閉部分集合とし，Vの任意の$x\in S$セクションならびにWの任意の$y\in T$セクションはそれぞれ非空・凸・コンパクトとする。このとき，ある$(x,y)\in S\times T$で$(x,y)\in V\cap W$なるものが存在する。

Proof： $S\times T$からそれ自身への写像φを$\varphi(x,y)=\{(x',y')|(x',y)\in W,(x,y')\in V\}$と定義すれば，$\varphi$は閉グラフを持ち，非空・凸・コンパクト値の対応であるから Glicksberg の不動点定理により不動点$(\hat{x},\hat{y})\in S\times T$を持つ。$\varphi$の定義から，この不動点は$(\hat{x},\hat{y})\in V\cap W$を満たす。 ■

ここまで述べたことは，Assumption 4 の下での拡張型フォン・ノイマンモデルの均衡の存在であった。Assumption 4 を 3 に代えた場合，それがいかなる種類の均衡の存在を保証するかを以下述べよう。

Assumption 3 はI^qあるいはI^hごとに Assumption 4 と同じ状況が成立していることを要請している。またQ-型工程，H-型工程はそれぞれ式（1）（2）で定義されたようにH財とQ財に関して完全に排他的（投入及び産出に関して互いに無関係に操業できる）な工程であった。従って，仮にI^qもしくはI^hを空集合と考えた場合，それぞれは先の定理 2 の仮定を満たすことになり，それぞれに独自の成長率α^qおよびα^hを持つことになる。今このタイプのフォン・ノイマン均衡の一意性（次節で扱う）を仮定して，$\alpha^q>\alpha^h$であるものとすると，Q-型の技術とH-型の技術を少しずつ操業水準において強制的に混在させる，といった要請は，α^qとα^hの間における均衡成長率をどのようなものにするだろうか。この問題は 4 節において数値例を用いて取り扱われる。

3. フォン・ノイマン均衡の一意性

Assumption 4 を満たす世界では，拡張型フォン・ノイマン均衡において成長率（＝利子率）が一意的であることを示す。フォン・ノイマンの原モデルにおいて同様の一意性が証明されているが，その証明とは異なる。フォン・ノイマンの一意性証明は，最大成長率である$\bar{K}$を利得とするゼロ和ゲームの解であることを前提としているが，それは経済学的均衡の満たすべき条件を超えており，純粋に均衡成長率の一意性証明としては再考を要する。

Theorem 4： Assumption 4 の下で，フォン・ノイマン均衡$\hat{x},\hat{y},\alpha<\infty,\beta<\infty$が存在するとき，$\alpha$および$\beta$は等しく非負，しかも一意的である。[3]

Proof： フォン・ノイマン均衡を表す式（4）－（7）を満たす 2 種類の変数組，$\hat{x},\hat{y},\hat{\alpha}<\infty,\hat{\beta}<\infty$および$\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\alpha}<\infty,\tilde{\beta}<\infty$が与えられたとする。まず$\hat{\alpha}=\hat{\beta}$（同様に$\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}$）でなければならないことを示す。まず，$\hat{x},\hat{y},\hat{\alpha}<\infty,\hat{\beta}<\infty$に対する式 (4) ならびに (6) から，

$$(22)\quad \sum_{j=1}^{n}\hat{y}_j\int b_{ij}d\hat{x}=\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_j\int\hat{\alpha}a_{ij}d\hat{x}$$

が言える。次に，式（5）ならびに（7）から，

$$(23)\quad \int(\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_jb_{ij})d\hat{x}=\int(\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_j\hat{\beta}a_{ij})d\hat{x}$$

である。式（22）および（23）の両辺に$\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_j\int a_{ij}d\hat{x}=\int(\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_ja_{ij})d\hat{x}$を加えてそれぞれ整理すると

3　本証明にあたっては，Nikaido（1965）におけるフォン・ノイマン均衡の一意性証明と，そこでの不十分な議論に関する村上裕美氏（大阪大学）の示唆に感謝する。

(24)　$$\sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j \int (a_{ij}+b_{ij})d\hat{x} = (1+\hat{\alpha}) \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j \int a_{ij}d\hat{x}$$

(25)　$$\int (\sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j(a_{ij}+b_{ij}))d\hat{x} = (1+\hat{\beta}) \int (\sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j a_{ij})d\hat{x}$$

上２式の左辺は等しく，しかもAssumption 4から正であるので

(26)　$$1+\hat{\alpha} = 1+\hat{\beta} > 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j \int a_{ij}d\hat{x} = \int (\sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j a_{ij})d\hat{x} > 0$$

が従う。更に$\sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j \int a_{ij}d\hat{x} > 0$を式（22）に戻せば$\hat{\alpha} \geqq 0$も従う。

以下，$0 \leqq \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{k}$ および$0 \leqq \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \tilde{k}$は得られたものとして，両者の一意性を示す。$\tilde{k} \leqq \hat{k}$として一般性を失わない。まず先と同様に式 (4) が $\hat{x}, \hat{y}, \hat{k}$で成立することから，任意の$j = 1, 2, \ldots, n$について

(27)　$$\int b_{ij}d\hat{x} \geqq \int \hat{k} a_{ij}d\hat{x}$$

が成り立つ。ここで$\tilde{y}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$は全て非負であるから，これを両辺にかけながら全て加えると

(28)　$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j \int b_{ij}d\hat{x} \geqq \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j \int \hat{k} a_{ij}d\hat{x}$$

を得る。先ほどと同様，両辺に$\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j \int a_{ij}d\hat{x}$を加えると，次式を得る。

(29)　$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j \int (a_{ij}+b_{ij})d\hat{x} \geqq \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j \int (1+\hat{k})a_{ij}d\hat{x}$$

更に，式 (5) が$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{k}$について成立することから，任意の$i$について

(30)　$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j b_{ij} \leqq \tilde{k} \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j a_{ij}$$

も成り立つ。故に両辺を$\hat{x} \in \mathfrak{M}(I)$ で積分すれば

(31)　$$\int (\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j b_{ij})d\hat{x} \leqq \int (\tilde{k} \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j a_{ij})d\hat{x}$$

となる。ここで更に両辺に$\int (\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j a_{ij})d\hat{x}$を加えると

(32)　$$\int (\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j(a_{ij}+b_{ij}))d\hat{x} \leqq \int ((1+\tilde{k}) \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j a_{ij})d\hat{x}$$

を得る。式（29）と（32）の左辺は等しく，式（32）の右辺は$\tilde{k} \leqq \hat{k}$という仮定から，式（29）の右辺以下である。よって式（29）と（32）の全ての辺は互いに等しく，またAssumption 4から左辺は全て正である。よって

(33)　$$1+\hat{k} = 1+\tilde{k}, \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j \int a_{ij}d\hat{x} > 0$$

が言える。つまり$\hat{k} = \tilde{k}$である。　■

この結果と先の矩形ゲームの解についての議論を合わせると, 上記証明中の$\hat{x}, \tilde{y}$や$\tilde{x}, \hat{y}$もまたフォン・ノイマン均衡であることが確認できよう。

4. 環境質問題・世代間衡平性を考慮した世代重複モデルへの適用例

前節までのフォン・ノイマンモデルの拡張および均衡の存在と一意性の取扱いは，それだけで種々経済学的意味を示唆するものであるが，ここではそれを特に「環境質」および「世代間衡平性」を考慮した「世代重複モデル」による社会観の下での均衡の取扱い問題に適用する場合の可能性について，概略ながら注意を促しておきたい。まず，**世代間衡平性**という問題は，**斉一成長**という対応物により取り扱われるであろう。**目的関数の非有界性**やポンジーゲームの存在を排除しないことが，**Overtaking Criterion**を考慮することによって，取り扱われている。そして**資源配分の最適性とその実現**についての議論は，**最大斉一成長経路とフォン・ノイマン価格の存在，そしてターンパイク性**によって，議論の範疇に入ることとなろう。

拡張型フォン・ノイマンモデルで取り扱うことが適切な問題の例は様々あろうが，それが

(1) 定常性ということが解において重要な意義を持つ問題であること。

(2) 有界な目的関数では捉えられない永続解

の厚生概念があること。

(3) 価格および市場による問題解決可能性を最終的には見たいこと。

といった特徴を持つ場合には，我々が本論文でここまで扱ってきた拡張型のフォン・ノイマンモデルによるアプローチへの書き換えが有効と言えるだろう。上述した通り，環境質問題分野のアプローチは，この特性を備えている。

環境質の世代重複的な問題を最適成長論的な問題に組み替えることは世代重複モデルの側から言えば，例えば期ごとの効用の加法性を仮定するなど，いくらかのモデルの一般性を犠牲にすることにはなるが，フォン・ノイマン価格や生産のターンパイクといったすでに確立している豊富な理論上の結論に，世代間衡平性，環境質といった問題を関連させる利点を持つのである。いくつかの具体的な例は補論にて（極めて簡単な基本的モデルに基づいて，ターンパイク性，フォン・ノイマン価格の存在等）与えられる。本節，以下では「環境質」と「資本蓄積」の代替という問題を，フォン・ノイマンモデルの解の一意性問題と関連付けて整理するという分析例を紹介する。

4.1　環境質とその資本蓄積による技術的な代替可能性

第0期以降1期, 2期, と先に続いていく時間軸を考える。今期（t期）と来期（$t+1$期）の2期間を生きる消費主体（世代G_tで表す）を考える（$t=0,1,2,\ldots$）。

代表的なG_t（第t世代）に属する消費者は，その young 期（第 $t+1$ 期）の消費量$c_t^y \in R_+$および old 期$c_{t+1}^o \in R_+$を消費するものとする。[4]　消費財は，各期において一種類であり，その生産には各期におけるq_tおよびh_tという環境質ならびに資本財の量と，モデル上隠れた変数である労働投入といったインプットに依存している（図1参照）。

生産の状況は，Q-型の工程とH-型の工程から成るとする。Q-型の工程は環境質q_tを投入，産出に持ち，資本財h_tは用いない。H-型の工程はその逆でh_tのみを投入，産出に持つとしよう。具体的には，Q-型工程とは，再生可能エネルギーなど，環境に配慮した工程で，H-工程とは資本・技術的側面のみを考慮した工程，といった意味づけを与えても良いであろう。

これら2通りの工程が，投入および産出で互いに0の部分に表現されていることは，これらの工程が独立に操業可能なものであることを表し，それらの下でそれぞれ異なった経済の成長経路をもたらすことが考えられる。（フォン・ノイマン成長経路として，一意性の仮定を満たしていないということである。）

ではもしも，これら2つの技術（工程）をあえて同時に操業することを強いた場合（例えば法的に一定量の両者の投入を義務化するといったことが考えられる），フォン・ノイマン成長

	Periods					
	$\cdots$	$t-2$	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	$\cdots$
$\vdots$	$\cdot$						
G_{t-2}	$\cdot$	c_{t-2}^o					
		q_{t-2}					
G_{t-1}		c_{t-2}^y	c_{t-1}^o				
			q_{t-1}				
G_t			c_t^y	c_t^o			
				q_t			
G_{t+1}				c_t^y	c_{t+1}^o		
					q_{t+1}		
G_{t+2}					c_{t+1}^y	c_{t+2}^o	
						q_{t+2}	
G_{t+3}						c_{t+2}^y	$\cdot$
$\vdots$							$\cdot$
Generations							

図1　環境質と資本蓄積の世代重複モデル

---

[4] この記号法は，young ならびに old を表す添字y,oが，実際には時間を表す記号$t,t+1$が示されなくとも，t世代の young および old と言ってしまえば，その主体の消費時期は一意的に決まっているため，若干過剰である。しかし，分かりやすさのために，あえてtに加えて$t+1$を表記したこの記法を用いる。

経路は（その一意性の下）どのようなものになるであろうか。

次項およびその次の項をもって，数値例を用いて，そのような強制的な工程の混合は，経済の成長率を，その低い方より更に低いものに落としてしまうことを見る。以下では簡単化のため，Q-型およびH-型の工程はそれぞれ１種類ずつであるものとする。また，産出物のうちで消費財はqやhの量から一意的に決まってしまうものとして，計算上無視できるものとする。（従って，投入・産出マトリックスとしては，2 行 2 列のものを考えることで，済ませることにする。）

4.2　2 行 2 列型行列での一般的記述

ここでは有限の 2 行 2 列型行列について考察する。成長率を表す定数$\alpha \geqq 0$（ここでαは 1+ 斉一成長率を表す），操業水準x^q，x^h，投入を表す行列の要素a^q，a^h，産出を表す行列の要素b^q，b^hを用いて以下のように表される。

$$(34)\quad \alpha\begin{bmatrix} x^q & x^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^q & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & a^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^q & x^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^q & 0 \\ 0 & b^h \end{bmatrix}$$

ここで，前述の Assumption 1-5 が成り立ち，a^q，a^h，b^q，b^hの値は 0 をとらないものとする。それぞれ二つの工程が互いに無関係に操業された場合に持つ，本来の成長率を表す定数を$\alpha^q = \frac{b^q}{a^q}$，$\alpha^h = \frac{b^h}{a^h}$と置く。上式を整理すると，

$$(35)\quad \begin{bmatrix} \alpha a^q - b^q & \alpha\epsilon_{21} \\ \alpha\epsilon_{12} & \alpha a^h - b^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^q \\ x^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり，これが自明でない解を持つための条件は，

$$(36)\quad \begin{vmatrix} \alpha a^q - b^q & \alpha\epsilon_{21} \\ \alpha\epsilon_{12} & \alpha a^h - b^h \end{vmatrix} = 0$$

である。この行列式を解くと，αは

$$(37)\quad \alpha = \frac{2b^q b^h}{a^q b^h + a^h b^q \pm \sqrt{(a^q b^h - a^h b^q)^2 + 4\epsilon_{21}\epsilon_{12} b^q b^h}}$$

と表される。式（34）より直ちに，

$$(38)\quad x^q = \frac{-\alpha\epsilon_{21}}{\alpha a^q - b^q} x^h$$

$$(39)\quad x^q = \frac{b^h - \alpha a^h}{\alpha\epsilon_{12}} x^h$$

が得られる。操業水準が非負実数値であることを考慮すると，

$$(40)\quad \alpha < \alpha^q$$

$$(41)\quad \alpha < \alpha^h$$

となる。

式（37）において，複号のプラスとマイナスをとった場合の αをそれぞれ，α^+，α^-と置く。フォン・ノイマン均衡における成長率の一意性より，α^+とα^-のどちらかは式（34）の解でない。

$$(42)\quad \alpha^- = \frac{2b^q b^h}{a^q b^h + a^h b^q - \sqrt{(a^q b^h - a^h b^q)^2 + 4\epsilon_{21}\epsilon_{12} b^q b^h}} > \frac{2b^q b^h}{a^q b^h + a^h b^q - \sqrt{(a^q b^h - a^h b^q)^2}} = \frac{b^h}{a^h}$$

これは，条件$\alpha < \alpha^h$に反するので，α^- は解ではない。一方，α^+は解であり，

$$(43)\quad \alpha = \frac{2b^q b^h}{a^q b^h + a^h b^q + \sqrt{(a^q b^h - a^h b^q)^2 + 4\epsilon_{21}\epsilon_{12} b^q b^h}} = \frac{2\alpha^h \alpha^q}{\alpha^h + \alpha^q + \sqrt{(\alpha^h - \alpha^q)^2 + \frac{4\alpha^h \alpha^q \epsilon_{21}\epsilon_{12}}{a^q a^h}}}$$

である。すなわち，それぞれの工程を混在させて操業した場合には，それら本来の成長率よりも低い成長率をもたらし（$\alpha < \min\{\alpha^h, \alpha^q\}$），一定の$\alpha^h$，$\alpha^q$の下では，$a^h a^q$に対して$\epsilon_{12}\epsilon_{21}$が増すほど$\alpha$の値は低くなる。$Q$-型工程の産出係数$b^q$の増大が$\alpha$に及ぼす影響を調べると，$\lim_{b^q \to \infty} \alpha = \alpha^h$であり，$\alpha$はより低い成長率を表す$\alpha^h$に漸近する。また，$\lim_{b^q \to 0} \frac{\alpha}{\alpha^q} = 1$である。$\alpha \leqq 1$すなわち経済が成長しないのは，

$$(44)\quad \frac{\epsilon_{12}\epsilon_{21}}{a^q a^h} \geqq (\alpha^h - 1)(\alpha^q - 1)$$

となるときであり，特に$\alpha = 1$のときのα^qを$\alpha^{q'}$と置くと，

$$(45)\qquad \alpha^{q'} = \frac{1}{\alpha^h - 1}\left\{\frac{\epsilon_{12}\epsilon_{21}}{a^q a^h} + (\alpha^h - 1)\right\}$$

である。

4.3　2 行 2 列型行列の数値例

前節で示した混在的な操業との斉一成長との関係について，具体的な数値例を用いて考察する。今，H-型工程よりも投入係数が大きくないQ-型工程が存在し，H-型工程においてQ-型工程の産出物を一定量投入する必要があり，かつQ-型工程の産出においてもH-型工程の投入が幾つかのパターンで強いられる場合の斉一成長について考える。このような問題設定は，環境質が資本・技術的工程に投入として一定量含まれ（法的に一定量使用を強いられる，あるいはマクロ的にある種の投入と見なされる場合と見なされない場合とで本来的な成長率が等しいとみなされるようなとき），同時にこの環境的工程に対して，資本財の投入を法的にどの程度強いるべきかというような実際問題に対応するであろう。特に世代間衡平性の観点からは，仮にその投入・産出の規模が現世代では資本財より小さくても，環境的工程を生産活動に組み入れ，その上で将来世代が現世代よりも縮小した経済におかれないように混在的操業をコントロールするという，斉一成長の問題として捉えることができる。

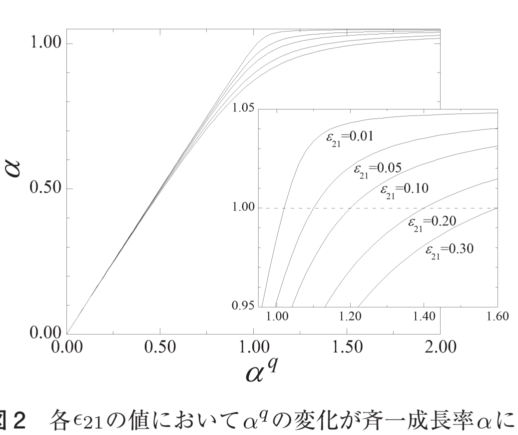

図 2　各ϵ_{21}の値においてα^qの変化が斉一成長率αに及ぼす影響

以下に示す行列について考察する。

$$(46)\ \alpha\begin{bmatrix} x^q & x^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^q & 0.01 \\ \epsilon_{21} & 1.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^q & x^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^q & 0 \\ 0 & 1.05 \end{bmatrix}$$

ここでは，H-型工程の投入係数を$a^h = 1.00$，そこでの環境質の混在を$\epsilon_{12} = 0.01$とする。H-型工程の産出係数を$b^h = 1.05$とする（H-型工程の本来の成長率は5%，すなわち$\alpha^h = 1.05$である）。この条件の下，a^q，b^q，ϵ_{21}が斉一成長率 αに及ぼす影響を見る。

図 2 に，$a^q = 0.1$と固定し，それぞれ$\epsilon_{21} = 0.01, 0.05, 0.10, 0.20, 0.30$をとるときに，$\alpha^q$の変化（すなわち$b^q$の変化）が斉一成長率に及ぼす影響を示す。この図は，$\alpha = 1$付近を拡大したものである。前節に述べたとおり，$\alpha^q \to \infty$（すなわち$b^q \to \infty$）のとき，αは$\alpha^h = 1.05$に漸近する。また，$\alpha^q \to 0$のときには，$\frac{\alpha}{\alpha^q} = 1$であり，いずれの$\epsilon_{21}$の値もほとんど斉一成長率に影響しない。$\epsilon_{21}$の値が増すほど，斉一成長率は低下している。特に，環境的工程の本来の成長率が 60%（$\alpha^q = 1.6$）のとき，$\epsilon_{21} = 0.01$をとれば斉一成長率 4.8%であるが，$\epsilon_{21} = 0.30$のときには経済は拡大せず，斉一成長率 0%（$\alpha = 1$）である。

このように，斉一成長するために最低限必要な環境的工程の本来の成長率は，投入物として資本財を混在させる量に依存する。図 1 のとおり，斉一成長率を 0%以上に保つには，$\epsilon_{21} = 0.01$のときにはわずか$\alpha^q = 1.02$でよいが，$\epsilon_{21} = 0.30$のときには$\alpha^q = 1.60$が必要である。

このような斉一成長率を 0% に保つために必要な，環境的工程の本来の成長率$\alpha^{q'}$が，投入係数a^qの大きさにどの程度影響されるか評価する。式 (45) より，

$$(47)\qquad \alpha^{q'} = \frac{1}{0.05}\left(\frac{0.01\epsilon_{21}}{a^q} + 0.05\right)$$

である。さきほど 図 2で，$a^q = 0.1$と固定し，$\epsilon_{21} = 0.01$のとき$\alpha^{q'} = 1.02$，$\epsilon_{21} = 0.30$のとき$\alpha^{q'} = 1.60$であることを確認した。図 3 に，ϵ_{21}

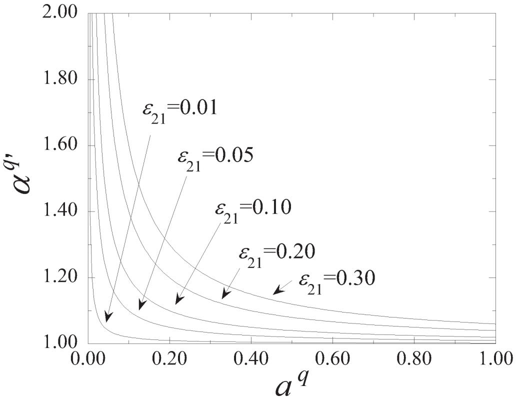

図 3　各ϵ_{21}の値においてa^qが$\alpha^{q'}$に 及ぼす影響

の各値における$\alpha^{q'}$とa^qとの関係を示す。例えば，$a^q=1$のとき，$\epsilon_{21}=0.30, 0.20, 0.10, 0.05, 0.01$の値に対し，$\alpha^{q'}=1.06, 1.04, 1.02, 1.01, 1.002$である。ところが$a^q=0.06$と比較的小さいときでは$\alpha^{q'}=2.00, 1.67, 1.33, 1.17, 1.03$である。すなわち$\epsilon_{21}$が0.01から0.30に変わると，斉一成長に最低限必要な環境的工程の本来の成長率$\alpha^{q'}$は，$a^q=1$のときには0.2%から6%へ上昇するだけであるが，$a^q=1$のときには3%から100%へと急激に上昇する。

以上，世代間衡平性を考慮した世代重複モデルで取り扱う問題設定，特に環境的工程と資本・技術的工程の選択問題を生産と斉一成長の問題としてフォン・ノイマンモデルに埋め込み，混在的操業と投入・産出規模の違いが斉一成長に大きく影響を与えることを数値的に示した。

5. 補論

5.1 R$^\infty$上の点の選好関係としての Overtaking Criterion 他の効用関数表現について

実数列$(\alpha_t)_{t=1}^{\infty} \in R^{\infty}$が$(\beta_t)_{t=1}^{\infty} \in R^{\infty}$を*overtake*するとは，ある番号$T^*$が存在して，任意の$T \geqq T^*$に関して

(48)
$$\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t - \beta_t) \geqq 0$$

が成り立つことを言う。また，実数列$(\alpha_t)_{t=1}^{\infty}$が$(\beta_t)_{t=1}^{\infty}$を*catches up*するとは，任意の$\epsilon > 0$に対して，ある番号$T^*$が存在して，任意の$T \geqq T^*$について

(49)
$$\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t - \beta_t) \geqq -\epsilon$$

が成り立つことを言う（例えばGale（1967）を見よ）。後者の条件は，

$$\lim_{T^* \to \infty}\left(\inf\{\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t - \beta_t) \mid T \geqq T^*\}\right)$$

(50)
$$= \liminf_{T \to \infty} \sum_{t=1}^{T}(\alpha_t - \beta_t) \geqq 0$$

と言い換えることもできる。

この概念を用いて，R^{∞}上の2点$x, y \in R^{\infty}$に対して，以下のような2つの2項関係を定義する。

(51)　$x \succeq y \iff$「x は y を Overtake する」

(52)　$x \succsim y \iff$「x は y を Catch Up する」

これらの2項関係が以下の2条件を満たすことは明らかである。

(a) reflexive on R^{∞}

(b) transitive on R^{∞}

従って，$\succeq$と$\succsim$はともにR^{∞}上の preordering である。更にこれらの2項関係は，以下の意味で凸性も満たす。（この凸性については次項できちんと確認する。）

(c) 任意の$y \in R^{\infty}$について，upper-contour set at yが凸

ただし，これらの2項関係は，共に一般には complete ではない。例えば次のような2数列に，上の2項関係はいずれも順序を与えない。

$(1,0,0,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,\cdots)$

$(0,1,1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,\cdots)$

同様の状況は単調数列などに対しても，その増

加，減少の速度に関して，上記２数列のような関係を与えることができるであろう。こういった不完備性により，これら２項関係がともに通常の意味で効用関数表現を持たないことは明らかである。

しかしながら，この結論（効用関数表現を持たない）がどの程度深刻な問題となってくるかについては，もう少し考察の余地がある。もしも我々が，必要に応じて，適当にその定義域を限定しさえすれば，Overtaking Criterion あるいは Catch Up Criterion に基づく選好関係は効用関数表現を持つであろう。そのような範囲は，実際さまざまな分析に耐え得るのではないだろうか。これは言い換えれば，例えば「Optimal Steady State の存在が明らかである場合，ラムジー的な代替的問題設定が，Overtaking あるいは Catch Up といった Criterion を代弁する形で，どの程度解の候補としてのパスの範囲について限定的であるか」ということでもある。

以下では，この問いに対して，非常に制限的というべき結論を与える。すなわち

> 「Overtaking Criterion あるいは Catch Up Criterion がおよそその意味を持って問題に適用されている限りにおいて，少なくとも R^∞ において大小関係にある異なる２点とその区間を含む集合上で定義されたそれら２項関係は，効用関数表現を持たない」

ということを，以下示す。

$\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^\infty$ および $\beta = (\beta_n)_{n=1}^\infty$ を R^∞ の２つの点で $\beta \leqq \alpha$ とする。ベクトル空間上の２点に効用関数を定義するのであるから，$\beta = 0$ として一般性を失わない。また α のとある座標は正であるが，便宜的に $\alpha_1 > 0$ として，これも一般性を失わないであろう。更に「Overtaking」あるいは「Catch Up」の判断基準が「意味を持って問題に適用されている」という条件として，「α という数列は summable でない $(\sum_{i=1}^\infty \alpha_i = +\infty)$」とする。

以下，Overtake あるいは Catch Up の criterion について，その厳密な成立（一方が一方に対しては成り立つが逆は成り立たないという意味において）を表す $\prec$ $(irreflexive)$ を用いて，その効用関数表現がありえないことを示す。

実際，区間 $\{x | \beta \leqq x \leqq \alpha\}$ における $\prec$ の効用関数表現 u が存在したとする。任意の $a, b \in (0,1)$, $b < a$ について，次の事が成り立つのに注意する。

$$b\alpha \prec a\alpha \tag{53}$$

$$a\alpha - (a\alpha_1, 0, \ldots) \prec a\alpha \tag{54}$$

$$b\alpha \prec a\alpha - (a\alpha_1, 0, \ldots) \tag{55}$$

最後の式（55）は $\sum_{i=1}^\infty (b-a)\alpha = +\infty$ なることによる。そこで，式（54）から，$a \in (0,1)$ に対して一つの有理数 $r(a)$ を

$$r(a) \in (u(a\alpha - (a\alpha_1, 0, \ldots)), u(a\alpha)) \tag{56}$$

となるように選ぶことができる。選択公理を用いれば r は実開区間 $(0,1)$ 上から有理数への関数であり，上３式から明らかなように $b < a$ ならば $r(b) < r(a)$ すなわち１対１である。言うまでもなく，このことは実開区間 $(0,1)$ の濃度が有理数の濃度以下であることを意味し，矛盾である。

5.2　選好関係としての Overtaking Criterion 他の凸性について

Catch Up Criterion について，$\varphi(x) = \{y \in R^\infty | x \precsim y\}$ とすると，φ は凸値である。実際，$v, w \in \varphi(x)$, $(v = (v_1, v_2, \ldots)$, $w = (w_1, w_2, \ldots), x = (x_1, \ldots))$ とし，

$$\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^T (v_t - x_t) \geqq 0 \tag{57}$$

$$\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=1}^T (w_t - x_t) \geqq 0 \tag{58}$$

と書ける。$\liminf$ の定義によって，$\epsilon > 0$ に対して T^* を十分大きくとると，$\forall T > T^*$ について

$$\sum_{t=1}^T (v_t - x_t) \geqq -\epsilon \tag{59}$$

$$(60)\qquad \sum_{t=1}^{T}(w_t - x_t) \geqq -\epsilon$$

よって$\forall T > T^*, \forall \alpha \in (0,1)$,

$$(61)\qquad \sum_{t=1}^{T}(\alpha v_t + (1-\alpha)w_t - x_t)$$

$$(62)\qquad = \sum_{t=1}^{T}(\alpha v_t - \alpha x_t) + \sum_{t=1}^{T}\big((1-\alpha)w_t + (1-\alpha)x_t\big)$$

$$(63)\qquad = \alpha\sum_{t=1}^{T}(v_t - x_t) + (1-\alpha)\sum_{t=1}^{T}(w_t - x_t) \geqq -\epsilon$$

$$(64)\qquad \therefore \liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(\alpha v_t + (1-\alpha)w_t - x_t) \geqq 0.$$

$\preceq$に関しては，上のϵを0にとれて，式(59)－(63)が同様に成り立つことから，同様に凸性が確かめられる。

$\succ$を（前節とは異なり）Overtaking by a finite amount すなわち

$$(65)\qquad (v \succ x) \iff \left(\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(v_t - x_t) > 0\right)$$

と定義すると，$\Psi(x) = \{v | v \succ x\}$もまた凸である。[5]　実際，$v, w \in \Psi(x)$として

$$(66)\qquad \epsilon = \frac{1}{2}\min\{\liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(v_t - x_t), \liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(w_t - x_t)\} > 0$$

とすると，lim inf の定義により，十分大きなT^*をとれば$\forall T \geqq T^*$について

$$(67)\qquad \sum_{t=1}^{T}(v_t - x_t) \geqq \epsilon$$

$$(68)\qquad \sum_{t=1}^{T}(w_t - x_t) \geqq \epsilon$$

よって$\forall T > T^*, \forall \alpha \in (0,1)$,

$$(69)\qquad \sum_{t=1}^{T}(\alpha v_t + (1-\alpha)w_t - x_t)$$

$$(70)\qquad = \sum_{t=1}^{T}(\alpha v_t - \alpha x_t) + \sum_{t=1}^{T}\big((1-\alpha)w_t + (1-\alpha)x_t\big)$$

$$(71)\qquad = \alpha\sum_{t=1}^{T}(v_t - x_t) + (1-\alpha)\sum_{t=1}^{T}(w_t - x_t) \geqq \epsilon$$

$$(72)\qquad \therefore \liminf_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}(\alpha v_t + (1-\alpha)w_t - x_t) \geqq \epsilon > 0.$$

5.3　これら Criterion の Open Lowersection Property について

前々項に述べたとおり，これらの Criterion が効用関数表現を持つことはかなり困難であるとしても，前項におけるようにその Upper Contour Set の凸性が言えるのであれば，例えばΨ（Overtaking by a finite amount $\succ$による better set correspondence）の Opern Lower Section Property の成立といったことに期待する（Compact Set 上の maximal point の存在保証に関して）ことができる。本項ではその可能性について考える。

5.3.1

まずR^∞上に積位相（各点収束トポロジー）では，Ψは Open Lower-section Property（OLS）を持たない。実際，任意の$y \in R^\infty$に対して，$\Psi^{-1}(y) = \{x \in R^\infty | y \succ x\}$を考えると，積位相の Base element $O_0 \times O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_T \times R \times R \times R \times \ldots$をいかに選んでも，$T+1$以降の座標の大きさを押さえることはできないため，Overtaking Criterion でyよりも大きくなる要素を含んでしまう。

5.3.2

定義域をl_1, l_2, などの部分空間に限定することは世代間衡平性にそぐわないので，$l_\infty \subset R^\infty$上に位相$\sigma(l_\infty, l_1)$を与えたものあたりで考えてみる。このとき，$y$も$l_\infty$にとって　$\|y\| = K$，　$\Psi^{-1}(y) = \{x \in l_\infty | y \succ x\}$　としてみる。$\sigma(l_\infty, l_1)$ の Base element を決めるl_1の要素を$p^1, \ldots, p^n \in l_1$とすると，任意の$\varepsilon > 0$に対して十分大きな番号Tをとって$2K\sum_{t \geqq T}|p_t^1|, \ldots, 2K\sum_{t \geqq T}|p_t^n|$がすべて$\varepsilon$より小さくなるようにできる。これはつまり$\sigma(l_\infty, l_1)$-Topology の任意の Base に番号$T$以降$2K$という値をとるような数列（$y$より$\succ$の意味で大）が入

[5] 前節のように$\prec$を$\precsim$あるいは$\preceq$から定義される厳密な2項関係とした場合，その凸性を保証するのは困難である。実際，$\liminf_{t\to\infty}(-a_t) = -\limsup_{t\to\infty} a_t$を用いて，lim inf に対して不等号が成り立たないという条件をlim supに言い換えることになるが，lim supについて$\geqq$という条件は，ある番号以降の「全ての」，という形に言い換えることができない。

り込むことを意味するので，やはり OLS は無理である。

5.3.3

実はl_∞に$\|\cdot\|_\infty$ノルム位相を入れてもφの OLS 性は望めない。x をyより有限個の座標だけ小さくなるようにとると，$y \succ x$だが，εをどれだけ小さくとっても$x + \{v | \|v\|_\infty < \varepsilon\}$の中には$y$より$\succ$の意味で大きい要素が入り込む。

5.3.4

そこで，Overtaking（by a finite amount）Criterion $\succ$が OLS 性を持つための工夫として，R^∞に次のような位相を入れる。

各点$x \in R^\infty$と$\varepsilon > 0$に対して

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in R^\infty | \sum_{t=0}^{\infty} |y_t - x_t| < \varepsilon\} \tag{73}$$

を考え，$\mathcal{S} = \{U_\varepsilon(x) | \varepsilon \in R, x \in R^\infty\}$ を Subbase とするトポロジー$\mathcal{T}_l$を考える。（実は Base になる。）位相$\mathcal{T}_o$が以下の性質を満たすことは容易に確かめられる。

1. $\mathcal{T}_o$はハウスドルフ位相である。（実際 $x, y \in R^\infty, x \neq y$とすれば，ある座標$t$について$|x_t - y_t| > \varepsilon$, for some $\varepsilon > 0$. よって$\mathcal{S}$の要素$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$，$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$が 2 点を分離する。）
2. $\mathcal{T}_l$は加法に関しては連続である（スカラー積に関しては必ずしも連続ではない）。実際 $(x, y) \mapsto x + y$ について $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) + U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset U_\varepsilon(x + y)$ を用いれば，ベクトル加法の連続性が言える。
3. $\mathcal{T}_l$は凸の Base を持つ。実際 $U_x(\varepsilon)$は凸である。
4. Catch Up Criterion $\precsim$による Upper Contour Set$\{y | x \precsim y\}$は$\mathcal{T}_o$-closed である。
5. Overtaking by a finite amount $\succ$による Lower Contour Set $\{x | y \succ x\}$ は$\mathcal{T}_o$-open である。

以上のことから，$(R^\infty, \mathcal{T}_o)$はハウスドルフ局所凸線型位相空間（l.c.s）ではないものの，それに近いいくつかの性質を持つ。（さらに，Ordered Linear Space としてR^∞をとらえた場合，l_∞に制限して Non-negative Cone に内点がある。また，$\mathcal{T}_o$は第一可算公理を満たす。）

5.3.5

$(R^\infty, \mathcal{T}_o)$のコンパクト部分集合について考える。経済学上有効に使えそうな$(R^\infty, \mathcal{T}_o)$のコンパクト集合を見つけたい。

まず，$[0,1]^\infty$が$(R^\infty, \mathcal{T}_o)$でコンパクトでないことは，$(1, 0, \ldots)$，$(0, 1, 0, \ldots)$，$(0, 0, 1, 0, \ldots)$, ... という点列の収束する部分列が（$\mathcal{T}_o$の意味で）無いことから明らか。

$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in l_{1+}$ をとり，閉区間$[0, a] = \{x \in R^\infty | 0 \leqq x \leqq a\}$を考える。$([0, a], \mathcal{T}_l)$は第一可算公理を満たすので，収束概念はすべて点列で考えて一般性を失わない。（実際，範囲さえ限ればl_1ノルムと同じであり完備な距離空間である。）$\{b^\nu = (b_0^\nu, b_1^\nu, \ldots)\}_{\nu=0}^\infty$を［0,a］内の点列とする。$\forall t = 0, 1, 2, \ldots$について$\{b_t^\nu\} \in [0, a_t]$が収束先$b_t^* \in [0, a_t]$を持つような（即ち，$R^\infty$の各点収束の条件を満たすような）部分列を取ることができるが，選択公理と対角線論法によって，$\{b^\nu\}_{\nu=1}^\infty$自体がそのような点列であるとしておく。このとき任意の$\varepsilon > 0$に対して，十分大きくTをとると，$\sum_{t \geqq T} |a_t| < \frac{\varepsilon}{2}$がそもそも成立するので，$\forall \mu, \nu$について$\sum_{t \geqq T} |b_t^\mu - b_t^\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$。また，この$T$番目の座標までについては，十分大きく$\bar{\nu}$をとると，$\forall \mu, \nu \geqq \bar{\nu}$，$\sum_{0 \leqq t \leqq T} |b_t^\mu - b_t^\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$（各点収束性より）と言えるから，結局$\forall \mu, \nu \geqq \bar{\nu}$,

$$\sum_{t=0}^{\infty} |b_t^\mu - b_t^\nu| < \varepsilon$$

即ち，$\{b^\nu\}_{\nu=1}^\infty$はコーシー列である。$([0, a], \mathcal{T}_o)$は（l_1と同じなので）完備な距離空間であり，コーシー列は収束する。（この収束事実を直接確認することも容易である。）よって$\{b^\nu\}_{\nu=0}^\infty$は収束するが，これは$[0, a]$の点列コンパクト性に他ならない。（つまり，各期あるいは各世代の最大効用があって，そこに満たない差の合計が有限のようなところに話を限れば，Overtaking Criterion はコンパクト Set 上の OLS 特性を持つ凸値 φ の maximal element として Characterize 可能ということである。）

更に，$a, b \in R^\infty$を任意の点として，区間$K = [a, b]$を考え，Kの部分集合として以下の条件を満たすようなものを考える。

$X \subset K$であり，任意の$\epsilon > 0$に対して，十分大きく番号T^*を取ると，$\forall x = (x_t)_{t=1}^\infty$, $y = (y_t)_{t=1}^\infty \in X$, $\sum_{t \geq T^*} |(x_t - y_t)| \leqq \epsilon$とすることができる。

このような集合$X \subset K$が$(R^\infty, \mathcal{T}_o)$のコンパクト部分集合であることは，上と全く同様の方法で証明できる。

5.4　最も簡単な環境質モデルでの分析

5.4.1

多部門問題，Valuational Equilibrium と Pareto Optimal 問題への拡張は当然考えられる。まず最も基本的なモデルで出発する。

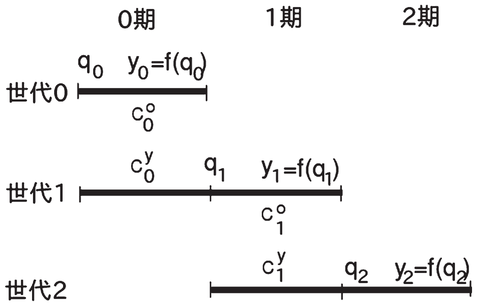

図4　環境質を含んだ簡単な世代重複モデル

各世代1名ずつが2期間生きる世代重複モデルを考える。各期において，t期の生産についての$f(q_{t-1}) = q_t + c_t$および消費の分配についての$c_t = c_t^o + c_t^y$を制約とする。各世代には基礎的効用関数としてuが与えられる。即ち，第0世代に$u(-, q_0, -, c_0^o)$，第1世代に$u(q_0, q_1, c_0^y, c_1^o)$，第2世代に$u(q_1, q_2, c_1^y, c_2^o)\ldots$（ここで第0世代の定義されてない独立変数については，後の議論で例えば定常均衡が問題とされる場合においてはその定常値のように，適宜代入されるものとする）といった形で，各世代の効用が与えられる。

今，世代tが，$t+1$，$t+2$，$t+3$，$\ldots$の効用を上のように基礎効用に基づく形で overtaking criterion により評価しようとしているとする。このような各人の選好（最終的な）は$(q_0, q_1, q_2, \ldots, c_0^o, c_0^y, c_1^o, c_1^y, c_2^o, \ldots)$に対する選好と見ることができるが，これは当該補論ここまでの各項に見て来た通り，連続性の仮定（OLS など）を一般には満たさない。（定義域を限定するか，$\mathcal{T}_o$のような位相を入れないといけない。）

この選好を$\prec_t$で表す（これは前節の Overtaking by a finite amount によるものとする）。すると$\prec_t$は$\mathcal{T}_o$の意味で open lower-section property を持つ。また$\prec_t$は凸である。

生産の制約式$f(q_t) = q_{t+1} + c_t$に基づいて，定常状態についてのグラフを次のように描くことができる。

定常状態について考える場合，c_tに下限$\bar{c}$が存在するとして良いであろう。その場合q_tに長期的な意味での上限$\hat{q}$が存在すると考えてよい。また長期的に維持しうるc_tの上限$\hat{c}$も存在する。実はそのときの$\bar{q}$は，長期的に維持しうるq_tの下限でもある。

定常状態 Steady state は$(\bar{c}, \hat{q})$，(c, q)，$(\hat{c}, \bar{q})$において$\bar{c} \leqq c \leqq \hat{c}$および$\hat{q} \geqq q \geqq \bar{q}$の範囲で連続的に存在する。このうち基礎効用$u(q, q, c^y, c^o)$を最大にするもの（$c^y + c^o = c$として）を$q^*$，$c^* = c^{*y} + c^{*o}$とする。最大化問題 Steady State Maximization は以下のようなものである。

$\max u(q, q, c^y, c^o)$

Sub. to

(74)　$c = c^y + c^o$

(75)　$q = f(q) - c$

(76)　$\bar{c} \leqq c \leqq \hat{c}$

(77)　$\bar{q} \leqq q \leqq \hat{q}$

これについて，解が存在すると考えることは全く限定的では無い。更に解を内点解とすると（微分可能性も入れて）極値条件を

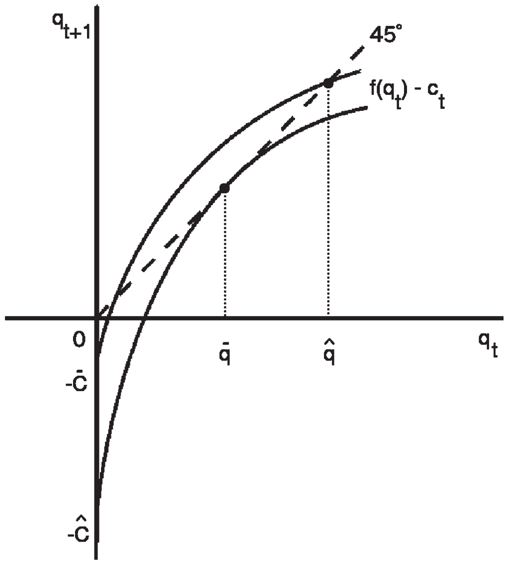

図5　簡単な世代重複環境質モデルにおける定常均衡

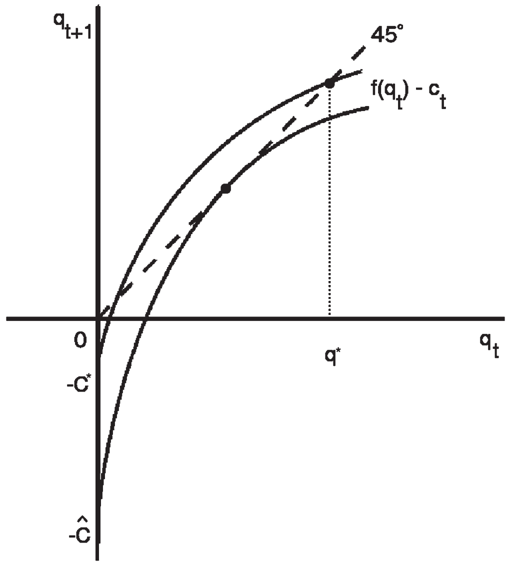

図6　定常均衡 (q^*, c^{*y}, c^{*o})

(78) $\mathcal{L}_{c^y,c^o,\lambda,q} = u(q,q,c^y,c^o) + \lambda(f(q) - q - c^y + c^o)$

とできる。

5.4.2

前項の設定を引き継ぎ，$q_0 = q^*$として，(q^*, c^{*y}, c^{*o})というSteady State Passの$\prec_t$の意味でのOptimalityとの関係，そしてまたその最大化条件について，以下まとめておく。

まずOptimalでないとすると，ある$(q_t, q_{t+1}, c_t^y, c_t^o, c_{t+1}^y, c_{t+1}^o)_{t=0}^{\infty}$で，feasibleなものが，これを凌駕している。このとき，$\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \big(u(q_t, q_{t+1}, c_t^y, c_{t+1}^o) - u(q^*, q^*, c^{*y}, c^{*o})\big) = +\infty$はありえない。実際それが可能であるには無限に多くのTについて，T番目までの和が$\sum_{t=0}^{T} u(q^*, q^*, c_t^{*y}, c_{t+1}^{*o})$より任意に大きくとれなければならないが，このとき特に，あるTがあって$|u(q_t, q_{t+1}, c_t^y, c_{t+1}^o)|$（$t = T^*$のときの）以上に$T^* + 1$番目までの和（*が付かない基礎効用の和）がもう一方（*が付く方の和）より大きくできる。そうするとT^*期でのterminal条件をq^*にしたMaximizationの解が一意的に(q^*, c^*)である（★）（と仮定することはここでの想定上全く制限的でないのでそうするならば）ことに矛盾。

故に$\liminf_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \big(u(q_t, q_{t+1}, c_t^y, c_{t+1}^o) - u(q^*, q^*, c_t^{*y}, c_{t+1}^{*o})\big) = \varepsilon > 0$として良い。全く同じ議論を繰り返して，$\limsup_{T\to\infty}$についても同じことが言えるので，上の$\varepsilon$のような$\delta > 0$が$\limsup$にもある（というよりも，上の議論で述べているのはむしろはじめから$\limsup$についての条件である。また定義により，εはδ以下である）。

よって上記（★）が保証されている限り，とある区間（cの最大値と最小値）内のパスにおいて，和がSteady Stateから$\max\{\epsilon, \delta\}$以内にあるという範囲（これは前節においてT_0コンパクト）におけるMaximum Theoremを適用することにより，Turnpike性が保証される。（両パスに関して，真の意味でのOptimalityは，実のところ本質ではない。）

先のsteady state maximization条件から

(79) $\lambda = \dfrac{\partial u^*}{\partial c^y} = \dfrac{\partial u^*}{\partial c^o} = \Big(\dfrac{\partial u^*}{\partial q_1} + \dfrac{\partial u^*}{\partial q_2}\Big) \times \dfrac{1}{1 - f'(q^*)}$

上で＊は(q^*, c^*)での偏導値であることを表す。

初期条件を$(c_0^o, q_0, c_0^y) = (c^{*o}, q^*, c^{*y})$とし，$T$期後における終期条件を$(c_T^o, q_T, c_T^y) = (c^{*o}, q^*, c^{*y})$とした$\sum_{t=0}^{T-1} u(q_t, c_t^y, c_{t+1}^o, q_{t+1})$の最大化問題は

$T-1$期までのMaximization

(80) $$\max \sum_{t=0}^{T-1} u(q_t, c_t^y, c_{t+1}^o, q_{t+1})$$

Sub. to

(81) $$c_{t+1} = c_{t+1}^y + c_{t+1}^o \ (t = 0, \ldots, T-1)$$

(82) $$q_{t+1} \leqq f(q_t) - c_{t+1} \ (t = 0, \ldots, T-1) \cdots \ (※)$$

(83) $$\bar{c} \leqq c_t \leqq \hat{c} \ (t = 0, \ldots, T)$$

(84) $$\bar{q} \leqq q_t \leqq \hat{q} \ (t = 0, \ldots, T)$$

(85) $$(c_0^o, q_0, c_0^y) = (c_T^o, q_T, c_T^y) = (c^{*o}, q^*, c^{*y})$$

(86) $$\mathcal{L} = \cdots + u(q_{t-1}, c_{t-1}^y, c_t^o, q_t) + u(q_t, c_t^y, c_{t+1}^o, q_{t+1}) + \cdots$$
$$+\lambda_{t-1}(f(q_{t-1}) - q_t - c_t^o - c_t^y) + \lambda_t(f(q_t) - q_{t+1} - c_{t+1}^o - c_{t+1}^y) + \cdots$$

（$t = 1, 2, \ldots, T-1$と見て，Lagrangeanを見ると）上のようになっている（世代重複モデルの状況は図7にて確認せよ）。

以下簡単のため，uが時間について加法分離的である$u(q_t, c_t^y, c_{t+1}^o, q_{t+1}) = u_1(q_t, c_t^y) + u_2(c_{t+1}^o, q_{t+1})$と仮定する。$f$を one one で単調増加的，$u_1$，$u_2$を狭義単調増加的とすると，Terminal条件から（$t+1=T$）として

(87) $$f(q_t) = q_{t+1} + c_{t+1}^o + c_{t+1}^y = q^* + c^*$$

なので必然的に$q_t = q^*$。また最終期も含めて（※）は等号成立していないと最大化条件に矛盾する。故に

(88) $$\lambda_{t-1} = \frac{\partial u_2(c_t^o, q^*)}{\partial c_t^o} =$$
$$= \frac{\partial u_1(q^*, c_t^y)}{\partial c_t^y} =$$
$$= \frac{\partial u_2(c_t^o, q^*)}{\partial q_t} + \frac{\partial u_1(q^*, c_t^y)}{\partial q_t} + \lambda_t f'(q^*)$$

(89) $\lambda_t \geqq 0$，$\lambda_t(f(q_t) - q_{t+1} - c_{t+1}^o - c_{t+1}^y) = 0$

なる条件を得ることになる。

ここで，$u_2(c_t^o, q_t) + u_1(q_t, c_t^y)$は，$(c_t^o, q_t, c_t^y)$への効用とも見なせることから，少し立場を変えて，次項では生産のターンパイクという立場で議論してみよう。

5.4.3

先の環境質を含んだ世代重複モデル（図7）での設定における，対応$x(t+1) \in H(x(t))$を一般化して考える。

$H : R_+^3 \mapsto R_+^3$（非空値とする）について：

1. 規模の収穫非逓増：
   $\forall \alpha \in [0,1], (x, y) \in H \Rightarrow (\alpha x, \alpha y) \in H$
2. Free disposal：
   $(x, y) \in H \Rightarrow (w, z) \in H$ for all $x \leqq w, 0 \leqq z \leqq y$.
   （この条件は最終的には不要）
3. 原点を含まない compact 集合上にHを制限すると，そのグラフは$R_+^3 \times R_+^3$の有界閉集合。
4. 基底コンパクト集合$\Delta \subset R_+^3 \{0\}$が存在（$\forall x \in \Delta, (x, y) \in H \Rightarrow y = \lambda z$ for some $z \in \Delta, \lambda \in R_+$）。（この条件は最終的には不要）
5. 一次独立狭凸性（u，vが一次独立で，$(u, y) \in H$かつ$(v, z) \in H$のとき，$\forall \alpha \in (0, 1)$,

Periods

	$\cdots$	$t-2$	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	$\cdots$
$\vdots$	.						
	.						
G_{t-2}	.	c_{t-2}^o					
		q_{t-2}					
G_{t-1}		c_{t-2}^y	c_{t-1}^o				
			q_{t-1}				
G_t			c_t^y	c_t^o			
				q_t			
G_{t+1}				c_t^y	c_{t+1}^o		
					q_{t+1}		
G_{t+2}					c_{t+1}^y	c_{t+2}^o	
						q_{t+2}	
G_{t+3}						c_{t+2}^y	.
							.
$\vdots$							.

Generations

☆ $x(t+1) \in H(x(t))$ $\big(x(k) = (q_k, c_k^o, c_k^y)$ for $k = 0, 1, 2, \ldots\big)$
$H : R_+^3 \mapsto R_+^3$
$\big(c_{t+1}^o + q_{t+1} + c_{t+1}^y = f(q_t)\big)$

図7　簡単な世代重複環境質モデル

$\exists w(\alpha)$, $(\alpha u+(1-\alpha)v,\ w(\alpha))\in H, w(\alpha)>\alpha y+(1-\alpha)z$)。

コンパクト集合$P_r=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3_+|x_1+x_2+x_3=r\}$を考え，$r>0$を所与として，対応

(90) $\Phi_r: x\in P_r\mapsto\Big\{\Big(\dfrac{x_i+ry_i}{1+\sum_{i=1}^3 y^i}\Big)_{i=1}^3|(x,y)\in H\Big\}\in P_r$

を考える。

このΦ_rの不動点集合を$Fix(\Phi_r)$とする。（これは条件3により非空である。）このとき，

(91) $$\frac{1}{r}Fix(\Phi_r)\supset\frac{1}{s}\ \text{for all}\ 0<r<s.$$

が言える。（不動点$x^{s*}\in P_s$では$x^{s*}\dfrac{\sum y_i}{s}=y$，$(x^{s*},y)\in H$が成立。また$r<s$なら$(\frac{r}{s}x^{s*},\frac{r}{s}y)\in H$，つまり$(\frac{r}{s}x^{s*},\frac{r}{s}x^{s*}\dfrac{\sum y_i}{s})\in H$が成立。）故に

(92) $$\bigcap_{r>0}\frac{1}{r}Fix(\Phi_r)\neq 0$$

が成立する（compact setのnestなので）。

そこで

(93) $\lambda^*=\lambda(H)=\max\{\lambda|(x,\lambda x)\in H\ \text{for some}\ x\in\bigcap_{r>0}\dfrac{1}{r}Fix(\Phi_r)\}$

とし（上で$\lambda(H)$はフロベニウス根である），λ^*とむすびつく$\bigcap_{r>0}\frac{1}{r}Fix(\Phi_r)$の要素を$x^*$とする。

このようにすれば，$(x^*,\lambda^* x^*)$の生成するのが maximal balanced growth pass（von Neumann ray）である。ここに加えて5があれば，これは一意的である。

x^*とλ^*の性質から$\{x^*-\lambda^* y|(x^*,y)\in H\}$は凸で，$R^3_{++}$の要素を「CRS ならば」持たない。目下 CRS までは仮定していないがもしそこまで限定すれば，von Neumann Price, $p^*(x-\lambda^* y)\leqq 0$ for all $(x,y)\in H$ は$x=x^*$と限定して存在することが言える。

（*Graduate School of Economics, Osaka University, Toyonaka, Osaka, JAPAN, and Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita, Osaka, JAPAN.*）

REFERENCES

Gale, D. (1967): "On Optimal Development in a Multi-sector Economy," *Review of Economic Studies 34*(1), 1-18.

Glicksberg, K. K. (1952): "A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points," *Proceedings in the American Mathematical Society 3*, 170-174.

Ichiishi, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis*. Academic Press, New York.

二階堂 副包（1965）:『現代経済学の数学的方法』岩波書店, Tokyo.

Parthasarathy, K. R. (1967): *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press, New York/San Francisco/London.

Samuelson, P. A. (1958): "An exact consumption loans model of interest with or without social contrivance of money," *Journal of Political Economy 66*(6), 467-482.

Schaefer, H. H. (1971): *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, New York/Berlin.

von Neumann, J. (1937): "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brower'schen Fixpunktsatzes," *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums viii*. English translation: "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies, xiii,* (1945-6), pp. 1-9.

An Extension of von Neumann Growth Model and its Application to Overlapping-Generations Models with the Environmental Quality and the Inter-generational Equity Problems

Ken Urai and Satoru Kageyama

The environmental quality problem has often been treated under the generations-overlapping framework together with the inter-generational equity problem. In this paper, we analyse the same problem mainly from the production side and reorganize overlapping-generations models to the steady state production-turnpike settings under the optimal dynamic economic plannings. To characterize such optimal stationary states, we also utilize an extension of the classical von Neumann economic growth tools and arguments.

JEL Classification: C62, D53, Q50
Keywords: Overtaking Criterion; Inter-Generational Equity; Environmental Quality, von Neumann Growth Model