Title	割引和基準と平均極限基準 : ℝ^∞上の選好としての連続性について
Author(s)	永谷, 裕昭; 薬師寺, 彰
Citation	大阪大学経済学. 2012, 62(3), p. 37-47
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/57099
rights	
Note	

割引和基準と平均極限基準：$\mathbb{R}^\infty$上の選好としての連続性について

永　谷　裕　昭[†]・薬 師 寺　　彰[‡]

概　　要

本論文では，実数列評価の基準としてよく知られる「割引和基準」（discounting criterion）および「平均極限基準」（limit of means criterion）について，それらを，$\mathbb{R}^\infty$上の選好とみて，それぞれの選好の連続性について考察する。具体的には，（i）通常は$\mathbb{R}^\infty$の部分集合にのみ適用される割引和基準を$\mathbb{R}^\infty$上の選好として適用範囲を広げること，（ii）$\mathbb{R}^\infty$の部分集合上の位相空間であるl_p空間を，$\mathbb{R}^\infty$上の位相空間に拡張すること，（iii）位相空間と選好の組み合わせごとに選好の連続性または不連続性を確認することを行う。結果はおよそ以下の通りである:（i）積位相を仮定したとき，割引和基準，平均極限基準ともに不連続である（ただし，割引因子0の割引和基準を除く）。（ii）l_pを一般化した位相空間では，平均極限基準は連続，割引和基準は，割引因子δが$0 < \delta < 1$のとき連続，$1 < \delta$のとき不連続である。

1. はじめに

経済学やゲーム理論において，しばしば，数列を比較・評価する問題が生じる。たとえば，2つの投資プロジェクトについて，それぞれのプロジェクトが実現するキャッシュフローの列を比較して，いずれが優れているかを判断することや，あるいは，繰り返しゲームにおいて，利得の無限列同士の優劣を論じることが行われる（Luenberger（1998）, Osborne-Rubinstein（1994）, Mailath-Samuelson（2006））。さらにまた，マクロ経済動学では，集計された年々の消費の列を評価することが行われる（Stokey-Lucas（1989））。これらの比較・評価は，いずれも，数列同士のある種の順序付け，あるいは実数列の集合上の選好によるものであると考えることができる。本論文では，数列同士の評価の基準としてよく知られている「割引和基準」（discounting criterion）と「平均極限基準」（limit of means criterion）のそれぞれを 集合$\mathbb{R}^\infty$上の選好と考え，さらに，$\mathbb{R}^\infty$に様々な位相を仮定して，これらの選好が連続性の条件を満たしているかどうかを判定する[1]。

本論文の割引和基準は，$\mathbb{R}^\infty$の部分集合上で定義された通常の割引和基準を$\mathbb{R}^\infty$上の選好に一般化したものである。本論文の扱う問題を説明するため，まず，通常の割引和基準から始めよう。

実数列$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$および実数$\delta$, $0 < \delta < 1$を考える。このとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} x_i$が実数値をと

† 大阪大学大学院経済学研究科教授
‡ 大阪大学大学院経済学研究科研究生

1 $\mathbb{R}^\infty$は加算無限個の$\mathbb{R}$の直積を表す。

るのであれば，この実数値を実数列$\boldsymbol{x}$の割引因子（discount factor）δでの割引和（discounted sum）という[2]。2つの実数列$\boldsymbol{x}$および$\boldsymbol{y}$について，$\boldsymbol{x}$の割引和が$\boldsymbol{y}$の割引和より大きいとき，$\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{y}$より高位であるとするのが通常の割引和基準である。

実数列$\boldsymbol{x}$が与えられたとき，この実数列が割引和を持つこともあればそうでないこともある。これは，数学における級数の収束についての問題である。たとえば，$|x_i| < M, i = 1, 2, \ldots,$なる正の実数$M$が存在するのであれば，この級数は収束することが知られている。経済学やゲーム理論においては，しばしば問題設定を工夫してこの収束を保証する。言い換えれば，この収束が保証される列のみを分析すれば足りるようになっている。しかしながら，本論文では，このような工夫とは切り離して，一般的な$\mathbb{R}^\infty$上の問題として，$\mathbb{R}^\infty$上の選好に関する知識を獲得することを第一義とする。経済学やゲーム理論への適用においては，ここで得られた$\mathbb{R}^\infty$上の結果を適宜その部分集合に適用すると考えるのである。

分析の対象を，$\mathbb{R}^\infty$に拡張することから本論文の割引和基準は，通常の基準を一般化することとなる。この一般化された割引和基準は対象を割引和を持つものに制限したときには，通常の割引和基準と一致するものである。このことによって，本論文で得られた $\mathbb{R}^\infty$上の結論は，$\mathbb{R}^\infty$をその適当な部分集合に置き換えることによって通常の割引和基準にも適用することが可能である。

選好の連続性とは，$\boldsymbol{x}$がその選好により$\boldsymbol{y}$より高位であるとき，$\boldsymbol{x}$に近い$\boldsymbol{x}'$と$\boldsymbol{y}$に近い$\boldsymbol{y}'$について$\boldsymbol{x}'$は$\boldsymbol{y}'$より高位に評価されるということである（Mas-Colell（1974），Hildenbrand（1974））。この連続性を考えるためには，$\mathbb{R}^\infty$に位相を仮定しなければならない。本論文では，$\mathbb{R}^\infty$の代表的な位相として，まず，$\mathbb{R}$の自然な位相の積位相空間を考える。積位相空間の位相は粗く，そのため，選好の連続性については否定的な結果が得られる。$\mathbb{R}^\infty$の位相として本論文の大部分で仮定されるのは，$\mathbb{R}^\infty$の部分位相空間である l_p空間，$p \in \mathbb{R}_{++}$，を$\mathbb{R}^\infty$に一般化したものである[3]。この一般化された位相において，一般化された割引和基準を表す選好は，割引因子が1より小さいときに連続，1より大きいときに不連続，等の結果が示される。

平均極限基準の選好は局所的に，十分1に近い割引因子の割引和基準の選好で近似されることが知られている（Osbone-Rubinstein（1994）等）。本論文では直接この近似には関わらないが，平均極限基準による選好についても割引和基準と同様に分析する。その結果，平均極限基準による選好は連続であることが示される。

本論文の構成について記しておこう。第2節は，一般化された割引和基準を$\mathbb{R}^\infty$上の選好として定義し，また，選好としての平均極限基準を示す。第3節は$\mathbb{R}^\infty$上の積位相について解説し，さらにl_p空間を$\mathbb{R}^\infty$上に拡張する。第4節は一般化された割引和による選好および平均極限による選好について，$\mathbb{R}^\infty$の位相に応じて選好の連続性を確認する。第5節は，本論文で得られた結果をまとめる。特に，本論文の主要結果である選好の連続性・不連続性についての分類結果を見やすい図にまとめる。さらに，この図と同様の結果が，$\mathbb{R}^\infty$の部分空間上の選好にもあてはまることを示す。

2. 選好

2.1　選好とは

非空集合X上の2項関係$\succ$が推移性と非反射

---

[2] 本論文では，実数列$\boldsymbol{x}$の各成分x_iが，経済学やゲーム理論で　何を表すかを具体的に示すことはない。しかし，割引和を考えるときには，$(x_1, x_2, \ldots)$の添え字は時間変数と見るのが普通である。

[3] $\mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_{+} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$ である。

性を満たすとき，すなわち，

(i) すべての$x \in X, y \in X, z \in X$について，
$x \succ y$かつ$y \succ z \ \Rightarrow x \succ z$

(ii) すべての$x \in X$について，$x \not\succ x$

であるとき，$x \succ y$を「xをyより選好する」と理解し，$\succ$はX上の選好（preference on X）であると言う[4, 5]。

本論文では，$\mathbb{R}^\infty$上の選好，または，その部分集合上の選好について分析する。以下，記号Xは$\mathbb{R}^\infty$を表すものとする。Xの各要素は実数列である。$\boldsymbol{x} \in X$のi番目の成分をx_iと表す。$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$である。

2.2 2項関係の定義

$\delta \in \mathbb{R}_+$なるそれぞれのδについて，X上の2項関係$\succ_\delta$を以下の通り定義する。すなわち，それぞれの$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$について，

$$(1)\quad \boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{y} \ \Leftrightarrow \ \liminf_T \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$$

とする。ただし，この定義式においては，$\delta = 0$の場合，$\delta^0 = 1$と約束する[6]。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$がともに，有界数列でありしかも，$\delta \in (0,1)$のとき，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$も有界であるから，

$$\liminf_T \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - y_i) = \lim_{T\to\infty} \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - y_i)$$
$$= \lim_{T\to\infty} \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1} x_i - \lim_{T\to\infty} \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1} y_i$$

となる。したがって，$\succ_\delta, \delta \in (0,1)$は，割引和基準（discounting criterion）の一般化であると言える。本論文ではこの一般化された基準を，改めて，割引和基準と呼ぶ。

X上の2項関係$\succ_{\mathrm{LM}}$を以下の通り定義する。すなわち，

$$(2)\quad \boldsymbol{x} \succ_{\mathrm{LM}} \boldsymbol{y} \ \Leftrightarrow \ \liminf_T \sum_{i=1}^{T} \frac{1}{T}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$$

とする。平均極限基準（limit of means criterion）である（Osborne-Rubinstein（1994）, Mailath-Samuelson（2006））。

2.3 2項関係の性質

容易に確かめられることであるが，実数列$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^\infty$について，$\liminf_i w_i \in \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$なることと、ある$\varepsilon > 0$および$i^* \in \mathbb{N}$について、

$$i \geqq i^* \Rightarrow w_i > \varepsilon$$

となることは同値である。このことから直ちに，2項関係$\succ_\delta$および$\succ_{\mathrm{LM}}$は推移的であるといえる[7]。また，$\liminf_T 0 = 0$であるから，それらは非反射的である。以上より，$\succ_\delta$および$\succ_{\mathrm{LM}}$はともに選好である。

$\succ_\delta, \succ_{\mathrm{LM}}$は，$X$上の2項関係であるから，$X \times X$の部分集合である。$X$の非空部分集合$X'$を考えよう。このとき，$\succ_\delta \cap (X' \times X')$は$X'$上の選好関係（すなわち，推移性

4 $\succ$がX上の2項関係であるとは，$\succ \subset X \times X$なることである。$(x, y) \in \succ$を$x \succ y$と表す。また，$(x, y) \notin \succ$を$x \not\succ y$と表す。X上の2項関係$\succ$と$\preccurlyeq := X \times X \setminus \succ$は1対1に対応する。このことから，$\succ$と，それに対応する2項関係$\preccurlyeq = X \times X \setminus \succ$を同一視して，$\succ$が選好であるという代わりに$\preccurlyeq$が選好であると言ってもよい

5 どのような2項関係を選好と呼ぶかは専門用語として定着しているわけではない。本論文の選好の定義はHildenbrand（1974）と同じものである。Fishburn（1970）はこれをstrict partial orderと呼んだ。

6 巾計算において，0^0は不定として定義から除外されることが多い。しかし，本論文の，$\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - y_i)$は有限和$(x_1 - y_1) + \delta(x_2 - y_2) + \ldots + \delta^{T-1}(x_T - y_T)$を表しているものであり，この有限和を本文のように$\sum$記号で略記するときには，初項$(x_1 - y_1)$の係数は$0^0 = 1$となるのである。

7 $\boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \succ_\delta \boldsymbol{z}$とする。ある$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, T_1, T_2 \in \mathbb{N}$について，$T \geqq T_1$のとき，$\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - y_i) > \varepsilon_1$，$T \geqq T_2$のとき，$\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(y_i - z_i) > \varepsilon_2$となる。従って，$T \geqq \max\{T_1, T_2\}$のとき，$\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - z_i) > \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$となる。したがって，$\boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{z}$である。$\succ_{\mathrm{LM}}$についても同様である。 □

と非反射性を満たす）である。同様に，$\succ_{\mathrm{LM}} \cap (X' \times X')$ も X' 上の選好である。

3. $\mathbb{R}^\infty$ の位相

3.1 X の位相と選好の連続性

$X = \mathbb{R}^\infty$ は位相空間であるとしよう。$\succ$ は X 上の選好であるとしよう。すなわち，$\succ$ は集合 $X \times X$ の部分集合であり，かつ，$\succ$ は推移性と非反射性を満たすとする。$X \times X$ には位相空間 X の積位相を考える。このとき，$\succ$ が $X \times X$ の開集合であることを選好 $\succ$ は連続（continuous）であるという[8]。

積集合の定義から，選好の連続性は次の条件と同値である。すなわち，$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ であれば，ある $\boldsymbol{x}$ の開近傍 U および，ある $\boldsymbol{y}$ の開近傍 V について，

$$\boldsymbol{x}' \in U,\ \boldsymbol{y}' \in V \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}' \succ \boldsymbol{y}'$$

が成立する。

本論文では以下，集合 X に具体的な位相を考えて，その位相の下で，具体的な選好 $\succ_\delta$ および選好 $\succ_{\mathrm{LM}}$ の連続性の正否について明らかにする。

3.2 積位相

$X = \mathbb{R}^\infty$ には，$\mathbb{R}$ の積位相（各点収束位相 topology of pointwise conergence）を考えることができる。この位相は，$\boldsymbol{x} \in X$ にその第 i 成分を対応させる射影関数 $\boldsymbol{x} \mapsto x_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ を連続とする最小の位相であって，その開集合はかならず，$\mathbb{R}^n$ の開集合 U によって，$U \times \mathbb{R}^\infty$ と表すことができる。以下で，明らかにするところであるが，このことは，本論文のテーマである $\mathbb{R}^\infty$ 上の選好を論じるにはかなり制約的である。

[8] Mas-Colell（1974），Hildenbrand（1974）の用語法に従った。また，ある種の選好を効用関数で表現できるかと言う問題において，Debreu（1954, 1959），Koopmans（1972）などが類似の条件を選好の連続性の定義して採用した。

3.3 l_p 空間

$\mathbb{R}^\infty$ の線形部分空間上に位相を与えるものとして l_p 空間が知られている。本論文では，l_p 空間の位相をもとに，X 上の位相を考える。そこで，後の議論に簡便な形で，l_p 空間の定義を紹介しよう。

$p \in (0, +\infty]$ とする。X の部分集合 l_p を

$$l_p := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \in \mathbb{R}_+ \right\},\ p \in (0, +\infty) \text{ のとき},$$

$$l_{+\infty} := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \,\middle|\, \sup_i |x_i| \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

と定義する。$l_{+\infty}$ を l_∞ とも表す。l_p は $\mathbb{R}^\infty$ の線形部分空間である。$p \leqq p',\ p \in (0, +\infty],\ p' \in (0, +\infty]$ のとき，$l_p \subset l_{p'}$ が成立する[9]。

各 $\boldsymbol{x} \in X$ について，$\|\boldsymbol{x}\|_p \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ を

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},\ \ p \in (0, +\infty) \text{ のとき},$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_{+\infty} := \sup_i |x_i|$$

と定義する。$\| \ \|_{+\infty}$ を $\| \ \|_\infty$ とも表す。$\boldsymbol{x} \in l_p$ のとき $\|\boldsymbol{x}\|_p \in \mathbb{R}_+$，$\boldsymbol{x} \in X \setminus l_p$ のとき $\|\boldsymbol{x}\|_p = +\infty$ である。

$p \in [1, +\infty]$ のとき，$\boldsymbol{x} \in l_p$ に $\|\boldsymbol{x}\|_p$ を対応させる関数はノルムであることが知られている。l_p にこのノルムおよびこのノルムにより生成される位相を考えたものを l_p 空間という[10]。

$p \in (0, 1)$ のときには，関数 $x \mapsto \|\boldsymbol{x}\|_p$ はノルムの三角不等式を満たさない。しかし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in l_p \times l_p$ に $\left(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p\right)^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p$ を対応させる関数は l_p 上の距離であることが知

[9] $p = +\infty$ の場合および $p = p'$ の場合は自明であるから，以下，$p \in (0, +\infty),\ p' \in (p, +\infty]$ とする。$\boldsymbol{x} \in l_p$ とする。有限個の i を除いて，$|x_i| < 1$ である。したがって，ある i^* について，$i > i^* \Rightarrow |x|_i < 1$ が成立する。したがって，$\boldsymbol{x} \in l_\infty$ である。$p' \in (p, +\infty)$ とすると，$i > i^* \Rightarrow |x_i|^{p'} < |x_i|^p$ となるので，$\boldsymbol{x} \in l_{p'}$ となる。□

[10] $l_p,\ p \in [1, \infty]$，は Banach space である（Schaefer（1966），Luenberger（1969），Aliprantis-Border（2006））。

られている（Aliprantis-Border (2006), p. 535)。$p \in (0,1)$のときには，l_pにこの距離とこの距離によって生成される位相を考えたものをl_p空間という。

3.4　位相空間$(X, \mathcal{T}_p)$

$\boldsymbol{x} \in X,\ p \in (0,+\infty],\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$とする。このとき，$\|\ \|_p$を用いて，$X$の部分集合$B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon)$を

$$B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon) := \left\{ \boldsymbol{x}' \in X \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|_p < \varepsilon \right\}$$

と定義する。さらに，

$$\mathcal{B}_p := \{\, B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon) \mid \boldsymbol{x} \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{++} \}$$

とする。

命題 1　$\mathcal{B}_p$は基底としてX上の位相を生成する。

［証明］（i）$\cup\mathcal{B}_p = X$であることおよび，（ii）$\boldsymbol{x} \in B_1 \cap B_2, B_1 \in \mathcal{B}_p, B_2 \in \mathcal{B}_p$であれば$\boldsymbol{x} \in B \subset B_1 \cap B_2$なる$B \in \mathcal{B}_p$が存在することを示せばよい。(i) は自明である。以下，(ii) を示す。

$p \in [1,+\infty]$のとき：$B_1 := B_p(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon_1)$，$B_2 := B_p(\boldsymbol{x}_2,\varepsilon_2)$とする。

$$\varepsilon := \min\left\{\varepsilon_1 - \|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}\|_p,\ \varepsilon_2 - \|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}\|_p\right\}, \quad B := B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon)$$

とする。Bの要素$\boldsymbol{w}$をとる。$\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{w}-\boldsymbol{x} \in l_p, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1 \in l_p$であり，また，$l_p$は線形空間であるから，$\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}_1 \in l_p$である。したがって，ノルムの三角不等式により，$\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}_1\|_p \leqq \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\|_p < \left(\varepsilon_1 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\|_p\right) + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\|_p = \varepsilon_1$となる。したがって，$\boldsymbol{w} \in B_1$である。同様にして，$\boldsymbol{w} \in B_2$である。

$p \in (0,1)$のとき：上記の場合と同様である。ただし，$\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|_p$はノルムではないこと，および$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p{}^p$が距離であることに注意して，上記の$\varepsilon$の定義を

$$\varepsilon := \left(\min\left\{\varepsilon_1{}^p - \|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}\|_p{}^p,\ \ \varepsilon_2{}^p - \|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}\|_p{}^p\right\}\right)^{\frac{1}{p}}$$

と改める。□

$\mathcal{B}_p$が生成するX上の位相空間を$\mathcal{T}_p$と表す。また，この位相空間XをX_pと表す。

$\boldsymbol{x} \in l_p$としよう。このとき，$\boldsymbol{x}' \in B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon)$とすると，$\boldsymbol{x}' \in l_p$となる。したがって，$B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon) \subset l_p$となる。このことから，$l_p$空間の位相は，$\{B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon) \mid \boldsymbol{x} \in l_p, \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}\}$を基底として生成される位相であるといえる。この位相については次の命題が成立する。

命題 2　l_pはX_pの部分位相空間である。

［証明］l_p空間の開集合Uをとる。Uはl_p空間の基底によって，$U = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in U} B_p(\boldsymbol{x},\varepsilon(\boldsymbol{x}))$となるので，$X_p$の開集合である。$U = U \cap l_p$であるから，$U$は部分位相空間における開集合である。逆に，$U$を相対位相空間における開集合とする。$X_p$の開集合$V$によって，$U = V \cap l_p$となる。$\boldsymbol{x} \in U$とする。$\boldsymbol{x} \in V$であるから，ある，$\boldsymbol{x}' \in X_p$と$\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$によって，$\boldsymbol{x} \in B_p(\boldsymbol{x}',\varepsilon) \subset V$となる。$\boldsymbol{x} \in l_p$であるから，$\boldsymbol{x}' \in l_p$であり，$B_p(\boldsymbol{x}',\varepsilon) \subset l_p$となる。したがって，$\boldsymbol{x} \in B_p(\boldsymbol{x}',\varepsilon) \subset V \cap l_p = U$この$\boldsymbol{x}'$と$\varepsilon$は$\boldsymbol{x}$に応じて存在するものであるから，これらを$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}), \varepsilon(\boldsymbol{x})$と表すと，任意の$\boldsymbol{x} \in U$について，$\boldsymbol{x} \in B_p(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}),\varepsilon(\boldsymbol{x})) \subset U$となる。したがって，$U = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in U} B_p(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}),\varepsilon(\boldsymbol{x}))$となるので$U$は$l_p$の開集合である。□

3.5　調和級数

$\boldsymbol{h} := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) \in X$とする。級数$\|\boldsymbol{h}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$は調和級数（harmonic seriese）と言われる。$\|\boldsymbol{h}\|_1 = +\infty$であること，および，すべての$p \in (1,\infty]$について，$\|\boldsymbol{h}\|_p \in \mathbb{R}_{++}$なることが知られている[11]。したがって，$\boldsymbol{h} \notin l_1$であり，ま

[11]　(i) $r \in \mathbb{N}$とする。$2^{r-1} \leqq i < 2^r$なる$i \in \mathbb{N}$について，$h'_i := \frac{1}{2^r}$として，$\boldsymbol{h}' \in X$を定義する。すべての，$i \in \mathbb{N}$について，$h_i > h'_i$である。したがって，

た，すべての$p \in (1,+\infty]$について，$\boldsymbol{h} \in l_p$である。このことを一般化した次の命題は次節での分析に繰り返し用いられる。

命題 3　$p \in (0,\infty)$, $\boldsymbol{h}_p := \left(\frac{1}{1^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}}, \dots\right)$とする。このとき，すべての$p' \in (0,p]$について，$\boldsymbol{h}_p \notin l_{p'}$であり，すべての$p' \in (p,+\infty]$について，$\boldsymbol{h}_p \in l_{p'}$である。

［証明］$\|\boldsymbol{h}_p\|_p^p = \|\boldsymbol{h}\|_1 = +\infty$であるから，$\boldsymbol{h}_p \notin l_p$である。$p' \in (0,p]$とすると，$l_{p'} \subset l_p$であるから，$\boldsymbol{h}_p \notin l_{p'}$である。$p' \in (p,+\infty]$のとき，$p'' := \frac{p'}{p}$とすると，$p'' \in (1,+\infty]$かつ$\left(\|\boldsymbol{h}_p\|_{p'}\right)^{p'} = \left(\|\boldsymbol{h}\|_{p''}\right)^{p''} \in \mathbb{R}_+$である。したがって，このときには，$\boldsymbol{h}_p \in l_{p'}$である。□

4. 選好$\succ_\delta$および$\succ_{\mathrm{LM}}$の連続性

4.1　選好の連続性とは

位相空間X上の選好$\succ$が$X \times X$の開集合であるとき，選好$\succ$は連続であると言うのであった(3.1)。本節では，$X = \mathbb{R}^\infty$上の選好$\succ_\delta$および$\succ_{\mathrm{LM}}$がXに$\mathbb{R}$の積位相空間を考える場合および位相空間$\mathcal{T}_p$を考える場合のそれぞれについて連続であるかという問題について考察する。

まず，$X = \mathbb{R}^\infty$に$\mathbb{R}$の自然な位相（usual topology）の積位相を仮定しよう。3.2で指摘したように，Xの開集合は，適当な$n \in \mathbb{N}$と$\mathbb{R}^n$の開集合Uによって，$U \times \mathbb{R}^\infty$と表すことができる。このことから，次の命題が従う。

命題 4　Xに$\mathbb{R}$の自然な位相の積位相を仮定する。このとき，

(i) $\succ_0$は連続である。

(ii) $\succ_\delta$, $\delta \in (0,+\infty)$, および$\succ_{\mathrm{LM}}$は連続でない。

［証明］　(i) Xから$\mathbb{R}$への関数$\boldsymbol{x} \mapsto x_1$を$\pi_1$と表す。$X$には$\mathbb{R}$の積位相を仮定しているので，$\pi_1$は連続である。したがって，$X \times X$（位相空間$X$の積位相空間）から，$\mathbb{R}$への関数$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto \pi_1(\boldsymbol{x}) - \pi_1(\boldsymbol{y})$も連続である。また，$\boldsymbol{x} \succ_0 \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \pi_1(\boldsymbol{x}) - \pi_1(\boldsymbol{y}) > 0$である。したがって，$X$の2要素$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$において，$\boldsymbol{x} \succ_0 \boldsymbol{y}$が成立するのであれば，

$$(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') \in U \times V \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}' \succ_0 \boldsymbol{y}'$$

を満たす$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$の開近傍$U,V$が存在する。

(ii) $\succ \in \{\succ_\delta \mid \delta \in (0,+\infty]\} \cup \{\succ_{\mathrm{LM}}\}$とする。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$について$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$とする。$\boldsymbol{x}$および$\boldsymbol{y}$の任意の開近傍は，ある$n \in \mathbb{N}$および，$\mathbb{R}^n$の開集合$U,V$によって，それぞれ，$U \times \mathbb{R}^\infty$, $V \times \mathbb{R}^\infty$と表すことができる。$\boldsymbol{x}$の最初の$n$個の成分はそのままで，$n+1$番目以降の成分をすべてゼロに置き換えたものを$\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}$の最初のn個の成分はそのままで，$n+1$番目以降の成分をすべてαに置き換えたものを$\boldsymbol{y}(\alpha)$と表す。$\boldsymbol{x}_0 \in U \times \mathbb{R}^\infty$, $\boldsymbol{y}(\alpha) \in V \times \mathbb{R}^\infty$である。十分大きい$\alpha > 0$について，$\boldsymbol{y}(\alpha) \succ \boldsymbol{x}_0$となる。これは，$\succ$の連続性に反する。□

以下，項を改めて，位相空間X_pの場合について考える。

$$\sum_{i=2^{r-1}}^{2^r-1} |h_i| > \sum_{i=2^{r-1}}^{2^r-1} |h_i'| = \frac{1}{2^r}\left[(2^r-1) - \left(2^{r-1}-1\right)\right] = \frac{1}{2}$$

となる。したがって，

$$\sum_{i=1}^{2^r-1} |h_i| > \frac{1}{2} r$$

である。このことから，$\|\boldsymbol{h}\|_1 = +\infty$である。

(ii) $p \in (0,1)$, $\tilde{\boldsymbol{h}} := \left(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \dots\right) = \left(\frac{1}{1^p}, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots,\right)$とする。$\left(\|\boldsymbol{h}\|_p\right)^p = \left\|\tilde{\boldsymbol{h}}\right\|_1$であるから，以下，$\left\|\tilde{\boldsymbol{h}}\right\|_1 \in \mathbb{R}_+$を示す。$r \in \mathbb{N}$とする。$2^{r-1} \leqq i < 2^r$なる$i \in \mathbb{N}$について，$\tilde{h}_i' := \frac{1}{2^{(r-1)p}}$として，$\tilde{\boldsymbol{h}}' \in X$を定義する。すべての$i \in \mathbb{N}$について，$\tilde{h}_i \leqq \tilde{h}_i'$であり，

$$\sum_{i=2^{r-1}}^{2^r-1} \left|\tilde{h}_i\right| \leqq \sum_{i=2^{r-1}}^{2^r-1} \left|\tilde{h}_i'\right| = \frac{1}{2^{(r-1)p}}\left[(2^r-1) - \left(2^{r-1}-1\right)\right] = \frac{1}{2^{(p-1)(r-1)}}$$

である。したがって，

$$\sum_{i=1}^{2^r-1} \left|\tilde{h}_i\right| \leqq \sum_{r'=1}^{r} \frac{1}{2^{(p-1)(r'-1)}} < \sum_{r'=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)(r'-1)}} = \frac{1}{1-2^{1-p}}$$

である。

(iii) $p = +\infty$の場合は，$\|\boldsymbol{h}\|_\infty = 1$であるから，$\boldsymbol{h} \in l_\infty$である。□

4.2　$p \in (0, +\infty], \delta = 0$のとき

$\delta = 0$ のとき，$\boldsymbol{x} \succ_0 \boldsymbol{y} \iff x_1 > y_1$ であった。次の命題が成立する。

命題 5　$p \in (0, +\infty], \delta = 0$ とする。このとき，位相空間$(X, \mathcal{T}_p)$において，$\succ_\delta$は連続である。

［証明］ $\boldsymbol{x} \succ_0 \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in X$ とする。$x_1 > y_1$ である。$\eta := \frac{1}{2}(x_1 - y_1)$とする。$\boldsymbol{x}' \in B_p(\boldsymbol{x}, \eta)$, $\boldsymbol{y}' \in B_p(\boldsymbol{y}, \eta)$とする。

$$x_1' - y_1' = (x_1 - y_1) + (x_1' - x_1) - (y_1' - y_1) > 2\eta - \eta - \eta = 0$$

となる。したがって，$\boldsymbol{x}' \succ_0 \boldsymbol{y}'$である。すなわち，$\succ_0$は連続である。 □

4.3　$p \in (0, +\infty], \delta \in (0, 1)$のとき

命題 6　$p \in (0, +\infty], \delta \in (0, 1)$ とする。このとき，位相空間$(X, \mathcal{T}_p)$において，$\succ_\delta$は連続である。

［証明］ $\boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in X$ とする。$\boldsymbol{x}' \in X$, $\boldsymbol{y}' \in X$とする。$\boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{y}$であるから，ある$\varepsilon > 0$と$T^*$について，

$$T \geqq T^* \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - y_i) > \varepsilon$$

が成立する。従って，$T \geqq T^*$なるすべての T について，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i' - y_i') &= \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i - y_i) + \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i' - x_i) - \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(y_i' - y_i) \\ &> \varepsilon - \left|\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i' - x_i)\right| - \left|\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(y_i' - y_i)\right|\end{aligned}$$

が成立する。$\boldsymbol{x}' \in B_p(\boldsymbol{x}, \eta), \eta > 0$とすると，全ての $i \in \mathbb{N}$について，$|x_i' - x_i| < \eta$が成立する。そこで，$\eta := (1 - \delta)\frac{\varepsilon}{3}$とすると，

$$\left|\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i' - x_i)\right| \leqq \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}|x_i' - x_i| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

となる。同じηによって，$\boldsymbol{y}' \in B_p(\boldsymbol{y}, \eta)$とすると，同様にして，

$$\left|\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(y_i' - y_i)\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

となる。従って，$T \geqq T^*$なる全てのTについて，

$$\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}(x_i' - y_i') > \frac{\varepsilon}{3}$$

が成立する。従って，$\boldsymbol{x}' \succ_\delta \boldsymbol{y}'$である。$B_p(\boldsymbol{x}, \eta)$および$B_p(\boldsymbol{y}, \eta)$は$(X, \mathcal{T}_p)$における，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の開近傍であるから，$\succ_\delta$のグラフは開である。 □

4.4　$p \in (0, +\infty], \delta = 1$のとき

命題 7　$p \in (0, +\infty]$とする。このとき，位相空間$(X, \mathcal{T}_p)$において，$\succ_1$が連続であるためには，$p \in (0, 1]$なることが必要十分である。

［証明］十分性: $p \in (0, 1]$とする。$\boldsymbol{x} \succ_1 \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in X$とする。$\boldsymbol{x} \succ_1 \boldsymbol{y}$であるから，ある$\varepsilon > 0$と$T^*$について，

$$T \geqq T^* \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{T}(x_i - y_i) > \varepsilon$$

が成立する。$\eta := \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{p}}, 1\right\}, \boldsymbol{x}' \in B_p(\boldsymbol{x}, \eta)$, $\boldsymbol{y}' \in B_p(\boldsymbol{y}, \eta)$とする。$T \geqq T^*$なるすべての$T$について，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T}(x_i' - y_i') &= \sum_{i=1}^{T}(x_i - y_i) + \sum_{i=1}^{T}(x_i' - x_i) - \sum_{i=1}^{T}(y_i' - y_i) \\ &> \varepsilon + \sum_{i=1}^{T}(x_i' - x_i) - \sum_{i=1}^{T}(y_i' - y_i) \\ &\geqq \varepsilon - \left|\sum_{i=1}^{T}(x_i' - x_i)\right| - \left|\sum_{i=1}^{T}(y_i' - y_i)\right| \\ &\geqq \varepsilon - \sum_{i=1}^{T}|x_i' - x_i| - \sum_{i=1}^{T}|y_i' - y_i| \\ &\geqq \varepsilon - \sum_{i=1}^{\infty}|x_i' - x_i| - \sum_{i=1}^{\infty}|y_i' - y_i|\end{aligned}$$

が成立する。$x' \in B_p(\boldsymbol{x}, \eta)$および$\eta \leqq 1$より，

$$|x_i' - x_i| \leqq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i' - x_i|^p < 1$$

である。したがって，すべての$i \in \mathbb{N}$について，$|x_i' - x_i| < 1$ となる。$p \in (0, 1]$ より，$|x_i' - x_i| \leqq |x_i' - x_i|^p$となる。これと，$\eta \leqq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$より，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|x'_i - x_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{\infty}\left|x'_i - x_i\right|^p < \left(\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \frac{\varepsilon}{3}$$

となる。同様に，$\sum_{i=1}^{\infty}\left|y'_i - y_i\right| < \frac{\varepsilon}{3}$である。以上より，$T \geqq T^*$なる任意の$T$について，

$\sum_{i=1}^{T}\left(x'_i - y'_i\right) > \frac{\varepsilon}{3}$となる。すなわち，$\boldsymbol{x}' \succ_1 \boldsymbol{y}'$である。以上より，$\succ_1$は連続である。

必要性:（i）$p \in (1, +\infty)$とする。$\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in X$かつ，$\lim_T \sum_{i=1}^{T}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++}$とする[12]。$\boldsymbol{x} \succ_1 \boldsymbol{y}$である。$\boldsymbol{h} := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$とする。$U, V$を$(X, \mathcal{T}_p)$における，$\boldsymbol{x}$および$\boldsymbol{y}$の近傍とする。$\boldsymbol{h} \in l_p$であるから，ある$\alpha \in \mathbb{R}_{++}$について，$\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{h} \in U$かつ$\boldsymbol{y}' := \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{h} \in V$となる。全ての$T \in \mathbb{N}$について，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T}\left(y'_i - x'_i\right) &= \sum_{i=1}^{T}\left(y'_i - y_i\right) - \sum_{i=1}^{T}\left(x'_i - x_i\right) - \sum_{i=1}^{T}\left(x_i - y_i\right)\\ &= 2\alpha\sum_{i=1}^{T}h_i - \sum_{i=1}^{T}\left(x_i - y_i\right)\end{aligned}$$

である。$\lim_T \sum_{i=1}^{T} h_i = \|\boldsymbol{h}\|_1 = +\infty, \lim_T \sum_{i=1}^{T}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++}$であるから，$\liminf_T \sum_{i=1}^{T}\left(y'_i - x'_i\right) = +\infty$である。したがって，$\boldsymbol{y}' \succ_1 \boldsymbol{x}'$である。これは，$\succ_1$の連続性に反する。

（ii）$p = +\infty$とする。$\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in X$かつ，$\lim_T \sum_{i=1}^{T}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++}$とする。$\boldsymbol{x} \succ_1 \boldsymbol{y}$である。$\boldsymbol{e} := (1, 1, 1, \dots)$とする。$U, V$を$(X, \mathcal{T}_\infty)$における，$\boldsymbol{x}$および$\boldsymbol{y}$の近傍とする。$\boldsymbol{e} \in l_\infty$であるから，ある$\alpha \in \mathbb{R}_{++}$について，$\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{e} \in U$かつ$\boldsymbol{y}' := \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{e} \in V$となる。全ての$T \in \mathbb{N}$について，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T}\left(y'_i - x'_i\right) &= \sum_{i=1}^{T}\left(y'_i - y_i\right) - \sum_{i=1}^{T}\left(x'_i - x_i\right) - \sum_{i=1}^{T}\left(x_i - y_i\right)\\ &= 2\alpha T - \sum_{i=1}^{T}\left(x_i - y_i\right)\end{aligned}$$

である。$\lim_T \sum_{i=1}^{T}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++}$であるから，$\liminf_T \sum_{i=1}^{T}\left(y'_i - x'_i\right) = +\infty$である。したがって，$\boldsymbol{y}' \succ_1 \boldsymbol{x}'$である。以上より，$\succ_1$は連続でない。

□

4.5　$\delta \in (1, +\infty)$のとき

命題8　$\delta \in (1, +\infty), p \in (0, +\infty]$とする。このとき，位相空間$(X, \mathcal{T}_p)$において，$\succ_\delta$は連続でない。

［証明］（i）$p \in (0, +\infty)$とする。$\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in X$かつ，$\lim_T \sum_{i=1}^{T}\delta^{i-1}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++}$とする。$\boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{y}$である。$\hat{\boldsymbol{h}} := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{\delta^1 2}, \frac{1}{\delta^2 3}, \dots\right)$とする。

$$\sum_{i=1}^{T}\left|\hat{h}_i\right|^p = \sum_{i=1}^{T}\left(\frac{1}{\delta^p}\right)^{i-1}\frac{1}{i^p} \leqq \sum_{i=1}^{T}\left(\frac{1}{\delta^p}\right)^{i-1} \leqq \frac{1}{1 - \frac{1}{\delta^p}}$$

であるから，$\hat{\boldsymbol{h}} \in l_p$である。$U, V$を$(X, \mathcal{T}_p)$における，$\boldsymbol{x}$および$\boldsymbol{y}$の近傍とする。ある$\alpha \in \mathbb{R}_{++}$について，$\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} - \alpha\hat{\boldsymbol{h}} \in U$かつ$\boldsymbol{y}' := \boldsymbol{y} + \alpha\hat{\boldsymbol{h}} \in V$となる。全ての$T \in \mathbb{N}$について，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T}\delta^i\left(y'_i - x'_i\right) &= \sum_{i=1}^{T}\delta^i\left(y'_i - y_i\right) - \sum_{i=1}^{T}\delta^i\left(x'_i - x_i\right) - \sum_{i=1}^{T}\delta^i\left(x_i - y_i\right)\\ &= 2\alpha\sum_{i=1}^{T}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{T}\delta^i\left(x_i - y_i\right)\end{aligned}$$

である。$\lim_T \sum_{i=1}^{T}\frac{1}{i} = \|\boldsymbol{h}\|_1 = +\infty, \lim_T \sum_{i=1}^{T}\delta^i(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++}$であるから，$\limsup_T \sum_{i=1}^{T}\delta^i\left(y'_i - x'_i\right) = +\infty$である。したがって，$\boldsymbol{y}' \succ_1 \boldsymbol{x}'$である。これは，$\succ_1$の連続性に反する。

（ii）$p = +\infty$とする。$\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in X$かつ，$\lim_T \sum_{i=1}^{T}\delta^{i-1}(x_i - y_i) \in \mathbb{R}_{++}$とする。$\boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{y}$で

---

[12] この条件を満たす$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$の存在は明らかである。たとえば$i^* \in \mathbb{N}$を所与として，$x_i > y_i, i = 1, 2, \dots, i^*$，$x_i = y_i, i = i^* + 1, i^* + 2, \dots$とすればよい。

ある。$\boldsymbol{e} := (1,1,1,\dots)$とする。

U, Vを$(X, \mathcal{T}_\infty)$における，$\boldsymbol{x}$および$\boldsymbol{y}$の近傍とする。$\boldsymbol{e} \in l_\infty$であるから，ある$\alpha \in \mathbb{R}_{++}$について，$\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{e} \in U$ かつ$\boldsymbol{y}' := \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{e} \in V$となる。全ての$T \in \mathbb{N}$について，

$$\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}\left(y_i' - x_i'\right) = \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}\left(y_i' - y_i\right) - \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}\left(x_i' - x_i\right) - \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}\left(x_i - y_i\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}\left(x_i - y_i\right)$$

である。$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} = +\infty$，$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1}\left(x_i - y_i\right) \in \mathbb{R}_{++}$であるから，$\liminf_{T} \sum_{i=1}^{T} \delta^{i-1}\left(y_i' - x_i'\right) = +\infty$である。したがって，$\boldsymbol{y}' \succ_\delta \boldsymbol{x}'$である。以上より，$\succ_\delta$は連続でない。 □

4.6 $\succ_{\mathrm{LM}}$

命題 9　全ての$p \in (0, +\infty]$について，$\succ_{\mathrm{LM}}$は位相空間$(X, \mathcal{T}_p)$上で連続である。

［証明］ $\boldsymbol{x} \succ_{\mathrm{LM}} \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in X$とする。ある$\varepsilon > 0$と$T^*$について，

$$T \geqq T^* \;\Rightarrow\; \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(x_i - y_i\right) > \varepsilon$$

が成立する。$\boldsymbol{x}' \in B_p\left(\boldsymbol{x}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, $\boldsymbol{y}' \in B_p\left(\boldsymbol{y}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$とする。全ての$i \in \mathbb{N}$について，$|x_i' - x_i| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y_i' - y_i| < \frac{\varepsilon}{3}$が成立する。したがって，$T \geqq T^*$なるすべての$T$について，

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(x_i' - y_i'\right) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(x_i - y_i\right) + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(x_i' - x_i\right) - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(y_i' - y_i\right)$$

$$> \varepsilon + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(x_i' - x_i\right) - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(y_i' - y_i\right)$$

$$\geqq \varepsilon - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left|x_i' - x_i\right| - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left|y_i' - y_i\right|$$

$$> \frac{\varepsilon}{3}$$

が成立する。従って，$\boldsymbol{x}' \succ_{\mathrm{LM}} \boldsymbol{y}'$である。$B_p\left(\boldsymbol{x}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$および$B_p\left(\boldsymbol{y}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$は$(X, \mathcal{T}_p)$における，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の開近傍であるから，$\succ_{\mathrm{LM}}$のグラフは開である。 □

5. おわりに

本論文の結果をまとめておこう。

実数列の比較・評価の基準として「割引和基準」は$\mathbb{R}^\infty$の部分集合上の選好と考えられるが，これを$\mathbb{R}^\infty$上の選好$\succ_\delta$として一般化した（第 2 節）。

$\mathbb{R}^\infty$の部分空間であるl_p空間の位相を用いて，$\mathbb{R}^\infty$上の位相を定義することによりX_p空間を得た（第 3 節）。

一般化された割引和基準を表す選好$\succ_\delta$および，平均極限基準を表す$\succ_{\mathrm{LM}}$について，それらを，直積空間としての$\mathbb{R}^\infty$上の選好あるいはX_p空間上の選好と見て，それらの連続性について検討した（第 4 節）。命題 4 から命題 9 のとおりである。

命題 4 から命題 9 を見やすくするためにまとめると，**図**のようになる。横軸には位相（積位相，X_p位相），縦軸には選好（$\succ_{\mathrm{LM}}, \succ_\delta$）をとっている。**図**において陰をつけたところ，太い実線で示したところ，●で示したところが連

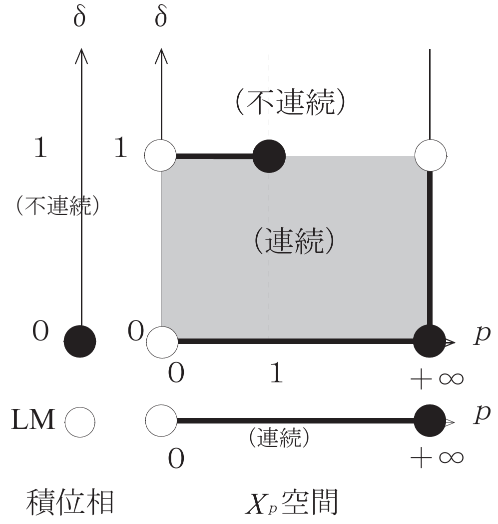

図　選好の連続性と不連続性

続な選好と位相の組である。そのほかの領域は連続ではない。積位相で見ると，$\delta = 0$の場合を除いて不連続となる。これは，積位相が粗い位相であることによる。l_p空間については，$\delta \in [0, 1)$で連続，$\delta \in (1, +\infty)$で不連続となっている。$\delta = 1$のときは，overtaking criteria と呼ばれるが，このときは，pの値に応じて連続であったり不連続であったりする。

以上は，集合$X = \mathbb{R}^\infty$上の選好に関するものであるが，X上の選好$\succ$と任意の非空部分集合X'について，$\succ' := \succ \cap (X' \times X')$は$X'$上の選好となる。$\succ$が連続であると，$X \times X$の開集合，したがって$\succ'$は $X' \times X'$の開集合，すなわちX'上の連続な選好である。したがって，**図**で連続と表示されている選好と位相の組については，同じ選好を部分位相空間 X'上の選好とみたものについてもやはり連続となる。特に，l_p空間はX_pの部分位相空間であるから，l_p空間においても図は同様なものになる[13]。

参考文献

Aliprantis, Charalambos D. and Kim C. Border (2006), *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, 3rd ed. (Springer-Verlag).

Debreu, Gerard (1954), "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function," in, R. M. Thrall, C. H. Coombs and R. L. Davis, eds., *Decision Processes* (Wiley), pp. 159-165.

Debreu, Gerard (1959), *Theory of Value* (John Wiley and Sons, Inc.).

Fishburn, Peter C. (1970), *Utility Theory for Decision Making* (John Wiley and Sons, Inc.).

Hildenbrand, Werner (1974), *Core and Equilibria of Large Economy* (Princeton University Press).

Koopmans, Tjalling C. (1972), "Representation of Preference Orderings over Time," in, C. B. McGuire and Roy Radner, eds., *Decision and Organization* (North-Holland Publishing Company), Chapter 4, pp. 79-100.

Luenberger, David G. (1969), *Optimization by Vector Space Methods* (John Wiley & Sons, Inc.), pp. 29-31.

Luenberger, David G. (1998), *Investment Science* (Oxford University Press, Inc.).

Mas-Colell, Andreu (1974), "An Equiribrium Existence Theorem Without Complete or Transitive Preferences," *Journal of Mathematical Economics,* **1**, pp. 237-246.

Mailath, George J. and Larry Samuelson (2006), *Repeated Games and Reputations* (Oxford University Press).

Osborne, Martin J. and Ariel Rubinstein (1994), *A Course in Game Theory* (The MIT Press).

Schaefer, Helmut H. (1966), *Topological Vector Spaces* (Springer-Verlag).

Stokey, Nancy L. and Robert E. Lucas, Jr. with Edward C. Prescott (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics* (Harvard University Press).

---

13 $\succ_\delta$が連続でないことを証明するには，$\boldsymbol{x} \succ_\delta \boldsymbol{y}$なる$\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in X$に対して，$\boldsymbol{x}$および$\boldsymbol{y}$の近傍に$\boldsymbol{y}' \succ_i \boldsymbol{x}'$なる$\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$が存在することを示した。このことから明らかなように，部分集合X'の選好を考えるのであれば，X'上に$\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$がとれることを示さなければならない。したがって，**図**で不連続とされた組について，X'上で連続となることはあり得る。

Discounting and Limit of Means Criteria
–Preferences on $\mathbb{R}^\infty$ and Their Continuity–

Hiroaki Nagatani and Akira Yakushiji

The discounting criterion and the limit of means criterion are well-known as devises to evaluate sequences of real numbers. In this paper, we consider them as preferences on $\mathbb{R}^\infty$ and examine whether each of the preferences is continuous or not. (i) Though domain of the discounting criterion is usually limited to the sequences with finite discounted values, we generalize the criterion as preferences on $\mathbb{R}^\infty$. (ii) We extend l_p spaces which are linear subspaces of $\mathbb{R}^\infty$ to cover whole $\mathbb{R}^\infty$. (iii) We check the continuity of the limit of means preference and the generalized discounting preferences. The continuity results are: (i) When we assume the product topology, none of the limit of means preference and the generalized discounting preferences is continuous (except for the discounting preference with discount factor 0). (ii) In the generalized l_p spaces, the limit of means preference is open, and the generalized discounting preferences are open if the discounting factor δ is $0 < \delta < 1$, and are not open if $1<\delta$.

JEL classification: C73, D01, D11, D91
Key words: discounting criterion, limit of means, continuity of preferences, preference over sequences of real numbers, time preference, time discounting