The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | Fan-Browderの一致点定理および不動点定理の拡張 |
| Author(s) | 浦井, 憲; 塩澤, 康平 |
| Citation | 大阪大学経済学. 2014, 64(2), p. 228-234 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/57116 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# Fan-Browderの一致点定理および不動点定理の拡張

浦 井　　憲[†]・塩 澤 康 平[‡]

**概　要**

数理経済学的またはゲーム理論的な均衡存在の議論における Fan-Browder の一致点定理および不動点定理（Browder 1968，Fan 1969）の有用性はよく知られている。これら一連の結果は著名な不動点定理の一つである Browder の不動点定理に基づくものである。本稿で我々は，Browder（1968）および Fan（1969）にみられる一致点定理と不動点定理を拡張する。また，我々の結果がHausdorff 実線形位相空間における角谷の不動点定理の拡張のうちで，最も一般的なものの一つを示すのに用いることができることを示す。

JEL 分類：C 62

キーワード：Fan-Browder Coincidence Theorem; Kakutani's Fixed-Point Theorem; Urai-Hayashi Fixed-Point Theorem

## 1　はじめに

数理経済学的またはゲーム理論的な均衡存在の議論における Fan-Browder の一致点定理および不動点定理（Browder 1968，Fan 1969）の有用性はよく知られている。これら一連の結果は著名な不動点定理の一つである Browder の不動点定理に基づくものである。Browder の不動点定理とは以下に挙げるものである。

**Theorem 1:**（Browder 1968; Theorem 1）。$X$を Hausdorff 線形位相空間$E$の非空かつコンパクトな凸集合とする。$T : X \to X$は以下の条件をみたす対応であるとする。

(i) 任意の$x \in X$に対して，$T(x) \subset X$は非空かつ凸集合である；

(ii) 任意の$y \in X$に対して，$T^{-1}(y) \overset{\text{def.}}{=} \{x \in X \mid y \in T(x)\}$は$X$の開集合である。

このとき$T : X \to X$は不動点$x^* \in X$をもつ。すなわち，ある$x^* \in X$が存在して$x^* \in T(x^*)$をみたす。

この定理において，線形位相空間$E$は Hausdorff 空間と仮定されてはいるが，局所凸空間である必要はないということに注意されたい。

数理経済学的な議論において，線型空間の双対性はしばしば商品空間と価格空間との双対性として解釈される。そのような解釈に基づくと，経済学的均衡の存在保証に関していえば，商品空間に関する位相的な仮定を，価格に対す

† 大阪大学大学院経済学研究科教授
E-mail: urai@econ.osaka-u.ac.jp
‡ 大阪大学大学院経済学研究科博士後期課程
E-mail: nge013sk@student.econ.osaka-u.ac.jp

る各経済主体の行動に関係する自然な仮定に帰着させて弱めることができる。我々はこれまでも，このような観点から角谷の不動点定理の拡張を行い，その経済学的な均衡存在議論への応用を試みてきた。(Urai and Hayashi（2000），Urai（2000），Urai and Yoshimachi（2004），Urai and Yokota（2005），Urai（2010））.

本稿で我々は，Browder（1968）および Fan（1969）にみられる一致点定理と不動点定理を拡張する。証明は，上に挙げた基本的な不動点定理である Browder の不動点定理に基づくものである。また，我々の結果は，Hausdorff 実線形位相空間における角谷の不動点定理の拡張のうちで，最も一般的なものの一つを示すのに用いることができる。

## 2 Fan-Browder の一致点定理の拡張：特殊形

まず，Fan-Browder の一致点定理の簡単な拡張が Browder の不動点定理のみから直接得られることをみる。この結果は，与えられた対応$F$と$G$から新たにつくる対応$x \mapsto x + (F(x) - G(x))$の値域が，その定義域$X$の部分集合となるような場合に成り立つものである。

**Theorem 2:** (Fan-Browderの一致点定理の拡張：特殊形)。$X$を Hausdorff 実線形位相空間$E$の非空かつコンパクトな凸集合とする。$F : X \to E$と$G : X \to E$は非空値の対応で，以下の性質をもつとする。

(i)任意の$x \in X$に対して，$x + (F(x) - G(x)) \subset X$；
(ii)$0 \notin F(x) - G(x)$をみたすような任意の$x$にたいして，$E$の位相的双対$E'$の要素$p_x$と$x$の開近傍$U(x)$が存在して，$\langle p_x, y\rangle > 0$（$\forall y \in F(z) - G(z)$，$\forall z \in U(x)$）が成り立つ。

このとき，ある点$x^* \in X$が存在して，$F(x^*) \cap G(x^*) \neq \emptyset$をみたす。

**Proof:** 結論が成り立たないと仮定せよ。このとき，任意の$x \in X$にたいして$F(x) \cap G(x) = \emptyset$，したがって$0 \notin F(x) - G(x)$が成立する。また，条件 (i) より，非空な値を持つ対応$\varphi : X \to X$を$\varphi(x) \overset{\text{def.}}{=} x + (F(x) - G(x))$と定義することができる。冒頭の仮定より，任意の$x \in X$に対して$x \notin \varphi(x)$となることに注意せよ。

任意に$x \in X$を固定する。条件 (ii) より，$x$の開近傍$U(x)$と，ある要素$p_x \in E'$が存在し，$\langle p_x, z\rangle > 0$が任意の$x' \in U(x)$と$z \in F(x') - G(x')(= \varphi(x') - x')$に対して成立する。このとき$\{U(x) \mid x \in X\}$はコンパクト集合$X$の開被覆であり，したがってこれらのうち有限個の要素からなる部分開被覆$\{U(x_1), \ldots, U(x_n)\}$をとることができる。$\{U(x_1), \ldots, U(x_n)\}$に対する1の分解を$\{\alpha_i : X \to [0,1] \mid i = 1, \ldots, n\}$とし，対応$\Psi : X \to X$を$\Psi(x) \overset{\text{def.}}{=} \{x + z \in X \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \langle p_{x_i}, z\rangle > 0\}$ $(\forall x \in X)$として定義せよ。定義より明らかに$\varphi(x) \subset \Psi(x)$，したがって特に$\Psi(x) \neq \emptyset$が任意の$x \in X$で成り立つ。同じく定義から明らかに，任意の$x \in X$に対して，$\Psi(x)$は凸集合である。さらに，任意の$y \in X$に対して，$\Psi^{-1}(y)$が$X$の開集合であることがわかる。実際，任意に$x \in \Psi^{-1}(y)$をとると，$y = x + z$かつ$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \langle p_{x_i}, z\rangle > 0$が，すなわち，$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \langle p_{x_i}, y\rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \langle p_{x_i}, x\rangle > 0$が成立する。この不等式の左辺は$x$について連続なので，$x$の近傍$V$が存在し$x' \in V \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i(x') \langle p_{x_i}, y\rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i(x') \langle p_{x_i}, x'\rangle > 0$をみたす。これはすなわち，$x \in V \subset \Psi^{-1}(y)$を意味し，したがって，$\Psi^{-1}(y)$が$X$の開集合であることがわかった。そこで Browder の不動点定理により$\Psi$は不動点$x^* \in X$をもつ。しかし，これは$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x^*) \langle p_{x_i}, x^* - x^*\rangle > 0$なる不等式の成立を意味し，この左辺は0であるので矛

盾である。■

この定理により Urai and Hayashi（2000）における角谷の不動点定理の拡張を得ることができる：

**Theorem 3:**（Urai and Hayashi 2000, Theorem 4）。$X$を Hausdorff 実線形位相空間$E$の非空かつコンパクトな凸集合とする。$F: X \to X$は非空値の対応で，以下の性質をもつものとする。

(K) $x \notin F(x)$をみたす任意の$x \in X$に対して，$E$の位相的双対$E'$のある要素$p_x$と，$x$の開近傍$U(x)$が存在して，$\langle p_x, y\rangle > 0$ $(\forall y \in F(z) - z,\ \forall z \in U(x))$ が成立する。

このとき$F: X \to X$は不動点$x^* \in X$をもつ。すなわち，ある$x^* \in X$が存在して$x^* \in F(x^*)$をみたす。

**Proof:** 前定理において，$G: X \to E$を恒等写像とせよ。すると前定理の条件 (i) は明らかにみたされる。また$F: X \to X$に対する条件 (K) が前定理の条件 (ii) を含意することも容易にわかる。そして，前定理により一致点$x \in F(x^*) \cap G(x^*)$が得られるが，$G$は恒等写像であるから$x = x^*$。よってこれは$F$の不動点にほかならない。■

この定理において線形位相空間$E$は局所凸空間でなくとも良いことに注意せよ。（Urai and Hayashi（2000）の Theorem 4 においては局所凸空間が仮定されているが，その証明においてこの仮定は使われていない。）

## 3　Fan-Browder の一致点定理の拡張

つづいて，Fan-Browder の一致点定理の一般的な拡張を次の 2 定理を用いることによって示す。（Theorem 4 は Browder（1968）の Theorem 2 の仮定を抽象化したものであり，Theorem 5 と Theorem 6 は，それぞれ Fan（1969）の Theorems 5 と Theorem 6 の拡張になっている。）

**Theorem 4:** $X$を Hausdorff 実線形位相空間$E$の非空かつコンパクトな凸集合とする。$\Psi: X \to E'$を一価写像とする。（ただし$E'$は$E$の位相的双対である。）任意に$y \in X$を固定したときに，関数$f(x) \overset{\text{def.}}{=} \langle \Psi(x), y - x\rangle$が$x \in X$に関して連続であるとき，以下の条件をみたす$x_0 \in X$が存在する。

$$\langle \Psi(x_0), y - x_0\rangle \leqq 0 \qquad \forall y \in X.$$

**Proof:** 結論が成り立たないと仮定せよ。すると，任意の$x_0 \in X$に対して$y \in X$が存在して$\langle \Psi(x_0), y - x_0\rangle > 0$が成立する。そこで対応$T: X \to X$を以下のように定義する。

$$T(x_0) \overset{\text{def.}}{=} \{y \in X \mid \langle \Psi(x_0), y - x_0\rangle > 0\}, \quad \forall x_0 \in X.$$

冒頭の仮定により，任意の$x_0 \in X$に対して$T(x_0) \neq \emptyset$であり，定義より明らかに$T(x_0)$は凸集合である。さらに，任意の$y \in X$について$T^{-1}(y) \overset{\text{def.}}{=} \{x \in X \mid y \in T(x)\}$は$X$の開集合であることがわかる。実際，$x \in T^{-1}(y) \Longrightarrow y \in T(x) \Longrightarrow \langle \Psi(x), y - x\rangle > 0 \Longrightarrow x$の近傍$U(x)$が存在し，任意の$x' \in U(x)$に対して，$\langle \Psi(x'), y - x'\rangle > 0$が成立$\Longrightarrow$任意の$x' \in U(x)$に対して$y \in T(x') \Longrightarrow U(x) \subset T^{-1}(y)$。

Browder の不動点定理により，ある点$x^* \in X$で$x^* \in T(x^*)$をみたすものが存在する。これは不等式$0 < \langle \Psi(x^*), x^* - x^*\rangle = \langle \Psi(x^*), 0\rangle = 0$ の成立を意味し，したがって矛盾である。■

**Theorem 5:** $X$を Hausdorff 実線形位相空間$E$の非空かつコンパクトな凸集合とする。$F: X \to E$と$G: X \to E$は非空値の対応で，以下の性質をもつとする。

(i) 任意の$x \in X$に対して，
$\bigcup_{\lambda>0}(x+\lambda(F(x)-G(x)) \cap X \neq \emptyset$；
(ii) 集合$F(x)$と$G(x)$がある閉超平面によって厳密に分離されるような任意の$x$に対して，$E$の位相的双対$E'$の要素$p_x$と$x$の開近傍$U(x)$が存在して，$\langle p_x, y\rangle > 0$（$\forall y \in F(z)-G(z)$，$\forall z \in U(x)$）が成立する。

このとき，ある$x^* \in X$に対する集合$F(x^*)$と$G(x^*)$は閉超平面によって厳密には分離できない。

**Proof:** 任意の$x \in X$に対して，$F(x)$と$G(x)$とがある閉超平面によって厳密に分離されると仮定する。すると条件 (ii) により，$p_x \in E'$と$x$の開近傍$U(x)$が存在して，$\langle p_x, y\rangle > 0$（$\forall y \in F(z)-G(z)$，$\forall z \in U(x)$）が成立する。$\{U(x)\}_{x\in X}$はコンパクト集合$X$の開被覆なので，そのうち有限個の要素からなる部分開被覆$\{U(x_i)\}_{i=1}^n$をもつ。そこで$\{U(x_1),\ldots,U(x_n)\}$に対する1の分解$\{\alpha_i : X \to [0,1] \,|\, i=1,\ldots,n\}$をとり，一価写像$\Psi : X \to E'$を$\Psi(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) p_{x_i}, (\forall x \in X)$によって定義する。ここで「$\alpha_i(x) > 0 \Longrightarrow x \in U(x_i) \Longrightarrow \langle p_{x_i}, y\rangle > 0$ $(\forall y \in F(x)-G(x))$」に注意すると

$$\langle \Psi(x), y\rangle > 0 \ \ \forall x \in X, \forall y \in F(x)-G(x), \quad (1)$$

また，同じことだが，

$$\langle \Psi(x), u-v\rangle > 0$$
$$\forall x \in X, \ \forall u \in F(x), \ \forall v \in G(x), \quad (2)$$

が成り立つことがわかる。

ところで，$\langle \Psi(x), y-x\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\langle p_{x_i}, y-x\rangle$であり任意に$y \in X$を固定すると$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \Psi(x), y-x\rangle$は$x \in X$に関する連続関数となっていることがわかる。したがって Theorem 4 により，ある点$x_0 \in X$が存在して以下の条件をみたす。

$$\langle \Psi(x_0), y-x_0\rangle \leqq 0 \quad \forall y \in X \quad (3)$$

一方で条件 (i) により，三点$u_0 \in F(x_0)$, $v_0 \in G(x_0), y_0 \in X$と実数値$\lambda > 0$が存在して，$x_0 + \lambda(u_0 - v_0) = y_0$が成立し，また，同じことであるが，$u_0 - v_0 = \frac{1}{\lambda}(y_0 - x_0)$が成立する。したがって (3) とあわせて，以下の不等式が得られる。

$$\langle \Psi(x_0), u_0 - v_0\rangle = \tfrac{1}{\lambda}\langle \Psi(x_0), y_0 - x_0\rangle \leqq 0 \quad (4)$$

ただし$x_0 \in X$, $u_0 \in F(x_0)$，かつ$v_0 \in G(x_0)$である。これは明らかに (2) と矛盾する。■

さて，以上の準備により Fan-Browder の一致点定理の拡張を示す。証明は Theorem 5 の直接適用による。

**Theorem 6:** (Fan-Browder の一致点定理の拡張：その1)。$X$を局所凸な Hausdorff 実線形位相空間$E$の非空かつコンパクトな凸集合とする。$F : X \to E$と$G : X \to E$は非空値の対応で，以下の性質をもつとする。

(i) 任意の$x \in X$に対して，三点$y \in X$, $u \in F(x), v \in G(x)$と実数値$\lambda > 0$が存在して$y - x = \lambda(u - v)$が成り立つ；
(ii) 集合$F(x)$と$G(x)$がある閉超平面によって厳密に分離されるような任意の$x$に対して，$E$の位相的双対$E'$の要素$p_x$と$x$の開近傍$U(x)$が存在して，$\langle p_x, y\rangle > 0$（$\forall y \in F(z)-G(z)$，$\forall z \in U(x)$）が成立する；
(iii) 任意の$x \in X$に対して，$F(x)$と$G(x)$は$E$の閉凸集合であり，少なくとも一方はコンパクトである。

このとき，$F : X \to E$と$G : X \to E$は一致点をもつ。すなわち，ある点$x^* \in X$が存在して，$F(x^*) \cap G(x^*) \neq \emptyset$が成り立つ。

**Proof:** 前定理の条件が全て満たされていることに注意せよ。(特に，前定理の条件 (i) と本定理の条件 (i) とは同値である。) したがって，定理の結論は以下のよく知られた事実の成立に帰着される：局所凸空間において，二つの交点をもたない閉凸集合の少なくとも一方がコンパクトであれば，それらはある閉超平面によって厳密に分離される。∎

Theorem 6 と Theorem 5 における条件 (ii) は，$F$ と $G$ の upper demi-continuity よりも弱い仮定である。一方で，Theorem 6 の条件 (ii) の代わりとして，Theorem 2 で用いられているような「原点0と集合 $F(x)-G(x)$ との関係」による条件を用いることもできる。

**Theorem 7:** (Fan-Browder の一致点定理の拡張：その2)。$X$ を Hausdorff 実線形位相空間 $E$ の非空かつコンパクトな凸集合とする。$F:X\to E$ と $G:X\to E$ は非空値の対応で，以下の性質をもつとする。

(i)任意の $x\in X$ に対して，三点 $y\in X$, $u\in F(x)$, $v\in G(x)$ と実数値 $\lambda>0$ が存在して $y-x=\lambda(u-v)$ が成り立つ；
(ii)$0\notin F(x)-G(x)$ をみたすような任意の $x$ にたいして，$E$ の位相的双対 $E'$ の要素 $p_x$ と $x$ の開近傍 $U(x)$ が存在して，$\langle p_x,y\rangle>0$ ($\forall y\in F(z)-G(z)$, $\forall z\in U(x)$) が成り立つ。

このとき，$F:X\to E$ と $G:X\to E$ は一致点をもつ。すなわち，ある点 $x^*\in X$ が存在して，$F(x^*)\cap G(x^*)\neq\emptyset$ が成り立つ。

**Proof:** 結論が成り立たないと仮定せよ。任意の $x\in X$ に対して，$F(x)\cap G(x)=\emptyset$ が，したがって $0\notin F(x)-G(x)$ が成り立つ。すると，条件 (ii) により $p_x\in E'$ と $x$ の開近傍 $U(x)$ が存在して，$\langle p_x,y\rangle>0$ ($\forall y\in F(z)-G(z)$, $\forall z\in U(x)$) が成立する。$\{U(x)\}_{x\in X}$ はコンパクト集合 $X$ の開被覆なので，そのうち有限個の要素からなる部分開被覆 $\{U(x_i)\}_{i=1}^n$ をもつ。そこで $\{U(x_1),\ldots,U(x_n)\}$ に対する1の分解 $\{\alpha_i:X\to[0,1]\,|\,i=1,\ldots,n\}$ をとり，一価写像 $\Psi:X\to E'$ を $\Psi(x)\overset{\text{def.}}{=}\sum_{i=1}^n\alpha_i(x)p_{x_i}$, $(\forall x\in X)$ によって定義する。ここで「$\alpha_i(x)>0\Longrightarrow x\in U(x_i)\Longrightarrow\langle p_{x_i},y\rangle>0$ ($\forall y\in F(x)-G(x)$)」に注意すると

$$\begin{aligned}&\langle\Psi(x),y\rangle>0\\&\forall x\in X,\ \forall y\in F(x)-G(x),\end{aligned}\tag{5}$$

また，同じことだが，

$$\begin{aligned}&\langle\Psi(x),u-v\rangle>0\\&\forall x\in X,\ \forall u\in F(x),\ \ \forall v\in G(x),\end{aligned}\tag{6}$$

が成り立つことがわかる。

ところで，$\langle\Psi(x),y-x\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i(x)\langle p_{x_i},y-x\rangle$ であり任意に $y\in X$ を固定すると $f(x)\overset{\text{def.}}{=}\langle\Psi(x),y-x\rangle$ は $x\in X$ に関する連続関数となっていることがわかる。したがって Theorem 4 により，ある点 $x_0\in X$ が存在して以下の条件をみたす。

$$\langle\Psi(x_0),y-x_0\rangle\leqq 0\qquad\forall y\in X.\tag{7}$$

一方で条件 (i) により，三点 $u_0\in F(x_0)$, $v_0\in G(x_0)$, $y_0\in X$ と実数値 $\lambda>0$ が存在して，$x_0+\lambda(u_0-v_0)=y_0$ が成立し，また，同じことであるが，$u_0-v_0=\frac{1}{\lambda}(y_0-x_0)$ が成立する。したがって (7) とあわせて，以下の不等式が得られる。

$$\langle\Psi(x_0),u_0-v_0\rangle=\tfrac{1}{\lambda}\langle\Psi(x_0),y_0-x_0\rangle\leqq 0\tag{8}$$

ただし $x_0\in X$, $u_0\in F(x_0)$, かつ $v_0\in G(x_0)$ である。これは明らかに (6) と矛盾する。∎

本稿の第二節において Theorem 2 が角谷の不動点定理の最も一般的な拡張のひとつを示すのに用いられたのと同様に，Theorem 7 を Urai-Hayashi の不動点定理の拡張に用いることもできる。

**Theorem 8:** (Urai-Hayashi の不動点定理の拡張)。$X$ を Hausdorff 実線形位相空間 $E$ の非空かつコンパクトな凸集合とする。$F : X \to E$ は非空値の対応で，以下の性質をもつとする。

(i) $x \notin F(x)$ をみたすような任意の $x$ に対して，二点 $y \in X$, $u \in F(x)$ と実数値 $\lambda > 0$ が存在して $y - x = \lambda(u - x)$ が成り立つ；

(K) $x \notin F(x)$ をみたす任意の $x \in X$ に対して，$E$ の位相的双対 $E'$ のある要素 $p_x$ と，$x$ の開近傍 $U(x)$ が存在して，$\langle p_x, y \rangle > 0$ $(\forall y \in F(z) - z, \forall z \in U(x))$ が成立する。

このとき $F : X \to E$ は不動点 $x^* \in X$ をもつ。すなわち，ある $x^* \in X$ が存在して $x^* \in F(x^*)$ をみたす。

**Proof:** Theorem 7 の $G : X \to E$ を恒等写像と考えると，本定理の条件 (i) が Theorem 7 の条件 (i) を含意することがわかる。また $F : X \to E$ に対する条件 (K) から Theorem 7 の条件 (ii) がみたされることも容易に示される。したがって一致点 $x \in F(x^*) \cap G(x^*)$ が存在するが，$G$ は恒等写像であるから $x = x^*$。よってこれは $F$ の不動点にほかならない。∎

## REFERENCES


Browder, F. (1968): "The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces," *Mathematical Annals 177*, 283-301.

Fan, K. (1969): "Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder," *Mathematische Zeitschrift 112*, 234-240.

Urai, K. (2000): "Fixed point theorems and the existence of economic equilibria based on conditions for local directions of mappings," *Advances in Mathematical Economics 2*, 87-118.

Urai, K. (2010): *Fixed Points and Economic Equilibria* vol. 5 of *Series of Mathematical Economics and Game Theory*. World Scientific Publishing Company, New Jersey/London/Singapore.

Urai, K. and Hayashi, T. (2000): "A generalization of continuity and convexity conditions for correspondences in the economic equilibrium theory," *The Japanese Economic Review 51*(4), 583-595.

Urai, K. and Yokota, K. (2005): "Generalized dual system structure and fixed point theorems for multivalued mappings," in Kokyuroku, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

Urai, K. and Yoshimachi, A. (2004): "Fixed point theorems in Hausdorff topological vector spaces and economic equilibrium theory," *Advances in Mathematical Economics 6*, 149-165.

# Further Extensions of Fan-Browder Coincidence and Fixed-Point Theorems

Ken Urai and Kohei Shiozawa

The fixed-point and coincidence theorems of F. Browder and K. Fan (Browder (1968), Fan (1969)) are well known and frequently used in mathematical economics and game-theoretic equilibrium arguments. A series of their results are based on the *Browder's fixed-point theorem*. In the context of economics, the vector space duality is often interpreted as the duality between commodities and prices. Some natural assumptions on agents' behaviors in response to prices would therefore enable us to utilize rather weak topological conditions on the commodity space to ensure the existence of an equilibrium. From this motivation, the authors have studied several extensions of Kakutani's fixed-point theorem and their applications to the economic equilibrium theory. In this paper, we provide several extensions of the coincidence and fixed-point theorems in Browder (1968) and Fan (1969). Moreover, it can be seen that our results directly show one of the most general kinds of Kakutani's fixed-point theorem on Hausdorff topological vector spaces that are not necessarily assumed to be locally convex. Our main theorem (Theorem 7) is as follows:

**Theorem** (An Extension of the Fan-Browder Coincidence Theorem). Let $X$ be a non-empty compact convex set in a Hausdorff topological vector space $E$ over $R$. Let $F : X \to E$ and $G : X \to E$ be two non-empty valued correspondences. Assume the following two conditions:

(i) For each $x \in X$, there exist three points $y \in X, u \in F(x), v \in G(x)$ and a real number $\lambda > 0$ such that $y - x = \lambda(u - v)$;

(ii) For each $x$ such that $0 \notin F(x) - G(x)$, there exist an element $p_x$ in the topological dual $E'$ of $E$ and an open neighborhood $U(x)$ of $x$ such that $\langle p_x, y\rangle > 0$ for all $y \in F(z) - G(z)$ and $z \in U(x)$.

Then there exists a point $x^* \in X$ for which $F(x^*)$ and $G(x^*)$ have a non-empty intersection.

JEL Classification: C62

Keywords: Fan-Browder Coincidence Theorem; Kakutani's Fixed-Point Theorem; Urai-Hayashi Fixed-Point Theorem