

Title	Energy decay for damped wave equations on partially rectangular domains
Author(s)	西山, 尚志
Citation	
Issue Date	
Text Version	none
URL	<a href="http://hdl.handle.net/11094/58025">http://hdl.handle.net/11094/58025</a>
DOI	
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/repo/ouka/all/>

氏名	にし やま ひさ し 西 山 尚 志
博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	第 2 3 5 5 1 号
学 位 授 与 年 月 日	平 成 22 年 3 月 23 日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Energy decay for damped wave equations on partially rectangular domains (部分的に長方形な領域上の波動方程式のエネルギー減少について)
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 土居 伸一 (副査) 教 授 西谷 達雄 教 授 林 伸夫 准教授 砂川 秀明

### 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、摩擦項を持つ波動方程式のエネルギーの減少を扱った。特に波動方程式の解のエネルギーについて、初期値から一様な減少と摩擦項の関係について考察した。

この問題について、すべてのビリヤード軌道がある時間までに摩擦に到達するという仮定が重要である。波動の性質はビリヤード軌道で近似されるため、この仮定はすべての波動がある時間までに摩擦に触れることを表している。そのため波動方程式の解は早く減少することが期待される。実際、この仮定の下では、エネルギーは初期エネルギーから指数の速さで減少することが知られている。また、この仮定は初期エネルギーからの一様減少が成り立つための必要条件でもある。

しかしながら、この仮定が成り立たない場合についても、初期値の空間を制限し、より強いノルムからの一様な減少を考えれば、エネルギーの減少が成り立つかもしれない。これについて、摩擦が存在するという仮定を課せば、ある種の滑らかさを表すノルムから対数型の速さで一様減少することが知られている。これは、波動が先のビリヤード軌道から離れ広がっていくという現象をとらえていると考えられる。しかしながら、領域の形状や摩擦項に何の仮定も置いていないため、より波動の性質をとらえられるかが問題になる。

本論文では、この点について考えた。まず Burq と Hitrik や Phung の先行研究を受け、部分的に長方形と呼ばれる長方形の部分を持った領域に対して、長方形の部分には摩擦を課さないでどういった摩擦の条件の下でエネルギーの一様減少が起こるかを考えた。これは物理的には、長方形の領域では波はどれくらい捕捉されるかということを考えることに対応する。

本論文の結果では、Burq と Hitrik たちの結果を拡張し、内部に摩擦項をもつ波動方程式について、長方形でない領域の境界の近傍に摩擦がある場合、多項式型の減少が成り立つことを示した。また、摩擦項が長方形の部分まで有限で退化している場合についても先の場合より遅くなるものの、多項式型の一様なエネルギーの減少が起こることを示した。

また、境界条件として摩擦の効果を考慮した波動方程式についても、適当な仮定の下でこの結果の類似が成り立つことを示した。

部分的に長方形な領域として知られるスタジアムに対しては、ビリヤード軌道がエルゴード性を持つことが知られている。そのため、一般の場合に比べてエネルギーは早く減少することが期待されるが、この結果はそのことを数学的にあらわしたものである。

証明方法は、定常的な場合の波動方程式の解の生成作用素の性質を用いる。この方法では、ある種のラプラス方程式の解の評価から、エネルギーの減少を示すことになる。これについて、適当なベクトル場とラプラシアンとの交換子についての等式を用いて、適当なベクトル場をとることによって評価できることが示された。

この方法は、以前の方法に比べて初等的であり、また以前の方法では示せなかった部分が示せるようになった。

## 論文審査の結果の要旨

本論文は、有界領域 $\Omega$ において内部または境界に部分的に摩擦項をもつ波動方程式のエネルギーの時間無限大での挙動を研究したものである。摩擦項の無い波動方程式に対して解のエネルギーは時間不変であるが、摩擦項を加えると一般にそれは時間と共に単調減少し、考える空間の形状と摩擦を加える場所および強さに応じて、その減衰の仕方が変わる。

まず 1990 年代半ばまでに知られていた基本事実を説明する。一般に有界領域 $\Omega$ 上でディリクレ条件の下、摩擦項を持つ波動方程式を考えると、(1) 幾何光学の法則に従って境界で反射するビリヤード軌道が一定の有限時間内に必ず摩擦のある場所に到達する（この条件を単に幾何条件とよぶ）場合は、初期値のエネルギーが一様有界ならば解のエネルギーは時間の増加と共に指数的に一様減衰する。(2) 幾何条件が成り立たない場合は、初期値のエネルギーが一様有界だけでは解のエネルギーは一様減衰せず、初期値のより高次の偏導関数のノルムが一様有界であってはじめて、その次数に応じた対数の累乗オーダーで解のエネルギーが一様減衰する。

本論文では、上述の幾何条件が成り立たない典型例として、 $\Omega$ がユークリッド平面内の部分的に長方形である有界領域（典型例はスタジアム）の場合を取り上げ、「初期値に高次の偏導関数のノルムの一様有界性を課すと解のエネルギーが多項式オーダーで一様減衰する」ための、摩擦に関する十分条件を研究している。

本論文の主結果の一つを述べる。両翼に含まれる $\Omega$ の境界の「近傍」で摩擦が正の場合は、初期値に高次の偏導関数のノルムの一様有界性を課すと解のエネルギーが多項式オーダーで一様減衰する。しかもその一様減衰オーダーは、摩擦の退化に関する指数と初期値に一様有界性を課すノルムの次数により記述できる。これは Burq, Hitrik (2007) や Phung (2007) らによる既存の結果を大幅に一般化したものである。より重要なのは、異なる方法で証明されてきた諸結果を、汎用性がありしかも初等的な方法で統一的に導くことに成功したことである。この方法は適用範囲が広く、他の主結果として、 $\Omega$ の境界にのみ摩擦項を含む（つまり境界条件としてのみ摩擦項が表れる）波動方程式に対しても、両翼に含まれる $\Omega$ の境界上で摩擦が正ならば、初期値に高次の偏導関数のノルムの一様有界性を課すと、解のエネルギーが多項式オーダーで一様減衰することが証明されている。

以上より、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。