【20】

氏　　　　　名	北　山　秀　隆（きた やま ひで たか）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学 位 記 番 号	第　２３５５０　号
学位授与年月日	平 成 22 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Constructive aspects of inverse Galois problem （Galoisの逆問題の構成的側面）
論文審査委員	（主査） 教　授　伊吹山知義 （副査） 教　授　渡部　隆夫　　教　授　小木曽啓示　　准教授　落合　　理 准教授　森山　知則

論 文 内 容 の 要 旨

この論文の目的は、Galois の逆問題の構成的問題について得られた２種類の結果を述べる事である。ここで、Galois の逆問題とは、体 K と有限群 G が与えられたときに、Galois 群が G と同型になるような K 上の Galois 拡大が存在するかどうかを問うものであり、一般には未解決の問題である。この問題の構成的問題、すなわち、その Galois 拡大を与える多項式を明示的に構成する問題を考察した。

まず、一つ目は、“Rationality problem”の研究である。体 K とその上の n 変数有理関数体 $K(x_1,\ldots,x_n)$ を考え、n 次一般線型群 $GL(n,K)$ の有限部分群 G の $K(x_1,\ldots,x_n)$ 上の作用を変数 $x_1,\ldots,x_n$ の線型作用により定義する。この論文の一つ目の目的は、不変体 $K(x_1,\ldots,x_n)^G$ が K 上純超越的かを問う問題を考察することであり、Main Theorem 1 において、この問題の $K=\mathbb{Q}$ かつ $n=4$ の場合（以下、問題１という）のほとんど全ての結果を与えている。正確には、全部で２２７種類有る共役類のうち、先行研究の結果として引用した１２種類と未解決の４種類を除く、２１１種類全てに対して、問題１が肯定的である事を証明した。証明の主な手法は、知られている共役類の分類リストを用いて代表およびその生成元のとり方の工夫し、いくつかの場合ごとに、超越基底のうまい変換により中間不変体への商群の作用を考察し易い簡単な形に変換できる事を示し、その結果として問題１が肯定的である事を証明する事である。Main Theorem 1 の結果は、生成的多項式の構成に対して応用を持つ。ここで、与えられた体 K と有限群 G に対する生成的多項式とは、いくつかのパラメータを持つ K 上の G-多項式 (=Galois 群が G と同型な多項式) であって、パラメータの特殊化により K を含む任意の体上の任意の G-拡大 (=Galois 群が G と同型な Galois 拡大) を表せるもののことであり、その明示的構成は、Galois の逆問題の構成的研究における研究テーマの一つとなっているが、K と G の組み合わせによっては生成的多項式が存在しない場合もある事が知られていて、一般的にはまだあまり解明されていない。その中で、Main Theorem 1 で述べた問題１の肯定解は、対応

する群についての有理数体上での生成的多項式の存在を示しており、また、この結果は、明示的な計算によって導かれたものであるため、生成的多項式を具体的に作ることも可能である。

二つ目は、正則多項式の明示的構成の研究である。ここで、与えられた体 K と有限群 G に対する正則多項式とは、上の生成的多項式よりは弱い性質のものであるが、パラメータの特殊化により無限個の G-拡大を与える事ができるものである。まず、Siegel 保型形式の次数環の構造についての知られている結果から計算して、複素数体上の Galois 群が位数 25920 の単純群 $PSp_4(3)$ と同型である３パラメータ４０次多項式を具体的に構成する事ができる。そして次に、原始置換群の分類についての知られている結果を用いることにより、代数体上での Galois 群の候補を８通りに絞り込める事を見つけ、その結果いくつかの条件の考察により、求めた多項式は、$\sqrt{-3}$ を含まない体、特に有理数体上では $PGSP_4(3)$ を Galois 群として持ち、一方、$\sqrt{-3}$ を含む体上では $PSP_4(3)$ を Galois 群として持つ事が分かる。これによって、求めた３パラメータ多項式が $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 上の正則 $PSp_4(3)$ 多項式である事が証明できる。これが Main Theorem 2 である。

論文審査の結果の要旨

当研究は，関連する二つの問題，線形 Noether 問題と逆 Galois 問題，を主題とする．

線形 Noether 問題とは，体 K 及び一般線形群の有限部分群 G が与えられたときに，K 上 n 変数有理関数体への G の線形作用による不変体 が K 上純超越拡大になるかどうかを問う問題である．Noether は２変数の場合にこの問題を肯定的に解決し，それ以降多くの研究がなされている．有理数体上で n=3 の場合には２００３年に他の研究者により肯定的に解決されていたが， n=4 では，Lenstra による一般的な結果から有理数体上純超越拡大にならない G の例が存在することがわかり，３変数の場合とは状況が異なっている．今回，申請者は，有理数体上で n=4 の場合に，Lenstra の反例を含む高々６個の例外的な G を除けば，線形 Noether 問題が肯定的に解けることを示した．

逆 Galois 問題は，体 K と有限群 G が与えられたときに，Galois 群が G と同型になる K の Galois 拡大を構成する問題である．古典的問題の一つであるが，K が有理数体の場合でも一般的解決には至っていない． 前記の線形 Noether 問題の肯定性から，K 上の Galois G-拡大に関する生成的多項式の存在が従うので，この意味で先の問題と関連がある．申請者は，G が３元からなる有限体上の階数２のシンプレクティック群の場合に， １の３乗根で生成される虚２次体 K を係数にもつ３変数有理関数体上の Galois G-拡大の４０次正則多項式を具体的に構成した．これにより，K 上線形無関連な Galois G-拡大が無数に存在することが帰結する．構成の方法は，Siegel モジュラー群のレベル３の合同部分群に対応する Siegel モジュラー関数体を考え，これらの体の複素数体上の生成系を用いて，主合同部分群に対する拡大体の定義多項式を計算し，更に G が４０次対称群の部分群としてみたす原始性を用いて、複素数体から K に係数体を特殊化することによる．

以上，申請者による結果は，多くの研究がなされている線形Noether問題と逆Galois問題に新たな知見を付け加えるものであり，よって、本論分は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。