| | |
|---|---|
| 氏　　　　　名 | 土(ど) 井(い) 一(かず) 幸(ゆき) |
| 博士の専攻分野の名称 | 博　士（理　学） |
| 学　位　記　番　号 | 第　２３５４８　号 |
| 学位授与年月日 | 平成22年 3 月23日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第４条第１項該当<br>理学研究科数学専攻 |
| 学　位　論　文　名 | Special solutions of nonlinear dispersive equations and their stability<br>（非線型分散型方程式の特殊解とその安定性） |
| 論文審査委員 | （主査）<br>教　授　林　　仲夫<br>（副査）<br>教　授　土居　伸一　　教　授　西谷　達雄　　准教授　砂川　秀明<br>教授　久保　英夫（東北大学情報科学研究科） |

## 論文内容の要旨

本論文の主な目的は、初期値を定数関数としたときの３次の非線型項を伴うシュレディンガー方程式に対する定常解の安定性について考察することである。この方程式は、非線型光学において、非線型媒質に光波を照射したときに、伝播する光波が満たすべきものとして現れる。特に非線型項の係数がある条件を満たせば、媒質が凸レンズのように働き、その結果として光ビームの強度の強いところに光のエネルギーがさらに集中する「自己集束」という現象が観測される。

上記の問題について、第４章では、初期値の定数関数に平面波摂動を加えたときに、定常解が不安定化しないための条件を求めた。より詳しくは、非線型項の係数と初期値の定数、および摂動する平面波の波数ベクトルがある条件を満たす場合に、任意の時刻に対して(それに応じて摂動を小さくすれば)その時刻までの解が摂動分の影響しか受けないことを示す。すなわち、解が定常項に加えて、摂動平面波に対応する項と特殊な形の誤差項で表されることを示す。この考察は、非線型光学における自己集束と密接に関連している。

上記の問題について、解の存在性は第３章の結果を適用することにより保証される。第３章では、上述の初期値問題をより一般的な枠組みで議論する。具体的には、初期値については係数に重みを課した平面波の重ね合わせとし、方程式については非線型項の係数と冪指数の一般化に加えて、線型部分は分散性を保持させつつ一般化したものを扱う。我々は、この問題に対する解が初期値に与えられた平面波を重ね合わせたものとして表現されることを見る。さらに、互いに有理数体上線型独立な波数ベクトルを持つ平面波を重ね合わせた関数を初期値として与える問題も考察する。

第２章では、第３章で考えた初期値をより限定し、初期値を単一平面波として初期値問題を考察する。このとき、特殊解の陽的な表示式が得られ、これにより解の時間大域的な挙動も容易に観察することができる。ここで、初期値を限定したことで、扱うことのできる非線型項の範囲はより広範になり、線型部分についても分散性以外の性質を持つものまで考察の対象にすることができることに注意する。典型例として、非線型シュレディンガー方程式のほかに、非線型熱方程式が挙げられる。第２章および第３章の結果は、第５章で考察する問題の証明方

針を用いることで証明される。

第５章では初期値をデルタ関数の重ね合わせとする消散型非線型シュレディンガー方程式を考察する。時間局所解の存在を示すために、元の問題を常微分方程式系に帰着する方針をとる。また、非線型項の係数によっては解が有限時刻爆発を起こすことが分かるが、消散項の効果を大きくすることにより、爆発現象を制御できるという結果を得た。

## 論文審査の結果の要旨

本論文は、非線型偏微分方程式の特殊解の構成とその安定性について論じたものである。著者は、初期値として平面波を与えると、ある対称性を持つ広いクラスの非線型方程式の解を陽的に表現できる事を明らかにし、更に、方程式が非線型シュレディンガー方程式の場合に、初期値が平面波である特殊解が不安定化しない為の条件を導いた。本論文はこれらの成果をまとめたもので、全文５章よりなる。

第１章では、本論文の主たる目的とこれ以降の章の内容について概観し、頻繁に用いられる記号の定義を行っている。

第２章では、初期値が単独の平面波の場合に、ある対称性を持つ広いクラスの非線型方程式の解を具体的に与えている。更に、その具体的な表示を用いて、解の定量的な性質について考察を加えている。

第３章では、初期値として与える平面波がある方向に関して周期函数となる場合を扱っている。この場合には、解は空間変数についてフリーエ級数展開した形で与えられ、そのフリーエ係数は時間変数にのみ依存し、ある常微分方程式系を満たすものとして特徴付けられている。また、初期値として与える平面波が、二つの方向に関して周期的な場合も考察している。それら二つの方向が一次独立な場合や、一方が他方の有理数倍の時には、議論を平行して進める事ができるが、一方が他方の無理数倍の時には、非線型項にある種の正値性を保障するような条件が必要となる。

第４章では、第２章と第３章の内容とが交錯するような考察がなされている。より具体的には、方程式を非線型シュレディンガー方程式に限定し、初期値が平面波である特殊解の安定性について調べている。物理的には、自己収束という現象が起こるため、加える摂動も平面波とするのが自然である。これにより、摂動を受けた解の構成に第３章での議論が応用できる事になる。初期摂動の周波数が低ければ、摂動解の一次近似が不安定化するという先行研究がある。逆に、そうでなければ、摂動解の一次近似が不安定化することはなく、また、初期摂動の振幅を絞れば、与えられた任意の時刻まで解が構成できることを明らかにした。

第５章では、初期値がデルタ函数の場合に、第２章と第３章の考察に対応するものを展開している。平面波とデルタ函数はポワソンの和公式が示すように双対的な関係であるので、この様な考察は意味あるものと言える。また、連立系に対しても本論文で用いられた議論を適用する事が可能な例を挙げている。

以上により、本論文は非線型方程式の解を具体的に与えるというユニークな視点から出発し、周期函数に対する考察を踏まえ、特殊解の安定性の研究に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。