【19】

氏　　　　　名	川　谷　康太郎（かわ たに こう た ろう）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学 位 記 番 号	第　２４３１４　号
学位授与年月日	平 成 23 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Stability conditions and μ-stable sheaves on K3 surfaces with Picard number one （ピカール数1のK3曲面上の安定性条件とμ-安定層）
論 文 審 査 委 員	（主査） 教 授　藤木　　明 （副査） 京都大学教授　並河　良典　　教 授　臼井　三平 教 授　小木曽啓示　　教 授　今野　一宏

論 文 内 容 の 要 旨

X と Y を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影多様体とする．X(や Y) 上の連接層のなす圏を $\mathrm{Coh}(X)$, $\mathrm{Coh}(X)$ の有界導来圏を $D(X)$ で書く．1980 年の向井茂の仕事以来, 良く知られている事であるが, X とは異なる多様体でも, $D(X)$ と $D(Y)$ は圏同値に成る事がある．このような Y を本稿では Fourier-向井パートナーと呼ぶ．また, 以下では特に Calabi-Yau 曲面, 即ち, K3 曲面またはアーベル曲面の場合を扱う．

さて Bridgeland は, 一般の三角圏 $\mathcal{D}$ について安定性条件という概念を定義した．これは古くから知られている連接層に対する μ-安定の概念の拡張と見なす事が出来る．これにより, 導来圏の対象 $E \in D(X)$ と, $D(X)$ 上の安定性条件 σ ごとに「E が σ-安定」という概念が定まる．また彼は, Calabi-Yau 曲面の導来圏 $D^b(X)$ の場合に安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(X)$ のの中で特別な安定性条件達の集まり $U(X)$ を具体的に記述している．ここで, $U(X)$ とは次である．

$$U(X) := \{\sigma \in \mathrm{Stab}(X) | \forall \mathcal{O}_x \text{ is } \sigma\text{-stable and } \sigma \text{ is ``good''}.\}$$

ただし, $x \in X$ は X の (閉) 点である．

安定性条件は, 導来圏に対して定義されていたが, $U(X)$ の記述は初めに決めた曲面 X を踏み台にして行われている．X とは同型ではない曲面 Y で, $D^b(X) \sim D^b(Y)$ となる Y は存在する．従って, 導来圏 $\mathcal{D} = D(X)$ を保ったまま, 多様体 X を取り替えるとどうなるか？という問を考える．すなわち, 圏同値 $\Phi : D(Y) \to D(X)$ が与えられた時に, Φ が誘導する $\mathrm{Stab}(Y)$ と $\mathrm{Stab}(X)$ の間の射 Φ_* により, $\Phi_* U(Y) = U(X)$ となる Φ はどれくらいあるかを調べる．

X がアーベル曲面の場合は, 任意の圏同値 $\Phi : D(Y) \to D(X)$ で条件を満たす事が分かる．ところが X が K3 曲面の場合がは, もっとも易しい Fourier-向井変換しか許さない事が分かった．

定理 1. X をピカール数 1 の射影的 K3 曲面, $\Phi : D(Y) \to D(X)$ を圏同値とする．$\Phi_* U(Y) = U(X)$ ならば Φ は以下のように書ける: $\Phi(-) = L \otimes f_*(-)[n]$．ただし, L は X 上の直線束, $f : Y \to X$ は同型写像, n は整数である．

また, 射影的なピカール数 1 の K3 曲面 X について, いくつかの X 上の μ-安定層が Bridgeland の安定性条件の意味で安定である事も示した．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

偏極射影的代数多様体上の連接層に対する(半)安定性の概念は，それらのモジュライ空間の構成の視点から Mumford により 1960 年代に導入されたが，それ以来今日に至るまで，代数幾何学のもっとも重要な研究主題のひとつとして無数の研究論文の対象となってきた． これに対し，最近 Bridgeland はこれらの安定性が，実は多様体の個々の連接層に対してではなく，多様体 X の上の連接層全体から生じる導来圏 D(X) 上に定義されるものであるとの考え方から，一般の抽象的な三角圏上に安定性の概念を導入し，そのような安定性条件の空間 Stab(X) が複素多様体の構造を持つことを示した．特に，X が（射影的)K3 曲面である場合に，Bridgeland はこの安定性の空間内に，ある特殊な部分集合 U(X) を特定したが，申請者はこの集合 U(X) と X の Fourier-向井 partner の関連に着目し，次の定理を証明した．

定理：X と Y を一般の(すなわち Picard 数が 1 である)射影的 K3 曲面とし，対応する有界導来圏 D(X) と D(Y) の間に圏同値 Φ：D(X) → D(Y) で U(X) を U(Y) に写すものが，存在するとする．このとき実は X と Y の間の同型 f：X → Y が存在し，Φ は f から誘導される．

定理は，Bridgeland の安定性が導来圏上定義されているにも関わらず，上記の特別な部分集合については D(X) のみでは決まらず多様体自身に強く依存していることを示している． このことは特に，X，Y がアーベル曲面の場合，すべての圏同値 Φ が U(X) を U(Y) を写すという事実と比較すると大変大変興味深い現象である．

さて，定理の証明は，それ自体興味のあるもう一つの別の定理から導かれる． すなわち，通常の連接層に対し，旧来の安定性（μ-安定性，Giesekar 安定性)と，これを導来圏の元とみなした時の Bridgeland のσ-安定性との関係である．

定理：X を Picard 数が 1 である射影的 K3 曲面とし，Picard 群の生成元である直線束を L とする．E をねじれを持たない X 上の連接層でその向井ベクトルの交点数が 0 であるとする．このとき，L の次数に関するある条件を仮定すると，E の μ-安定性 ないし Gieseker 安定性から，E を導来圏の元とみたときのσ-安定性がしたがう． ただし，σ は U(X) の明示的にあたえられる部分集合に属する Bridgeland による安定性である．

これらの研究は，代数幾何学の最前線で急速に展開している分野において，独自の問題意識によって，結果を定式化し，新しい現象を発掘した点で，本論文は博士(理学)の学位論文として十分な価値があるものと認める．