

|              |  |
|--------------|--|
| Title        | On p-divisibility of special values of L-functions of automorphic forms  |
| Author(s)    | 並川, 健一   |
| Citation     | 大阪大学, 2011, 博士論文   |
| Version Type |  |
| URL          | <a href="https://hdl.handle.net/11094/58611">https://hdl.handle.net/11094/58611</a>  |
| rights       |  |
| Note         | 著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉</a> 大阪大学の博士論文について <a>〉</a> をご参照ください。 |

***Osaka University Knowledge Archive : OUKA***

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

|            |  |
|------------|--|
| 氏名         | 並川健一   |
| 博士の専攻分野の名称 | 博士(理学)   |
| 学位記番号      | 第 24317 号  |
| 学位授与年月日    | 平成 23 年 3 月 25 日   |
| 学位授与の要件    | 学位規則第 4 条第 1 項該当<br>理学研究科数学専攻  |
| 学位論文名      | On $p$ -divisibility of special values of L-functions of automorphic forms<br>(保型L関数の特殊値の $p$ 可除性に関する研究) |
| 論文審査委員     | (主査)<br>教授 渡部 隆夫<br>(副査)<br>教授 伊吹山知義 教授 今野 一宏 准教授 森山 知則<br>准教授 落合 理                                      |

## 論文内容の要旨

L 関数は解析的に定義される一方で、その特殊値は代数的に定義される不変量と深く関わっていると予想されている。本論文では、 $GL(2)$  上の尖点形式に付随する L 関数の特殊値について研究を行った。特に  $p$  を素数としたとき、特殊値の代数部分の  $p$  可除性に関する二つの結果を得た。

まず一つ目の結果について記述する。L 関数の特殊値から代数的な情報を得る手段の一つに、L 関数の指標による捻りに対する振る舞いを調べるという方法がある。L.Washington は、指標により捻った Dirichlet L 関数の特殊値を考察することにより、アーベル体の円分  $\mathbb{Z}[1/p]$  拡大における各 layer のイデアル類群の  $p$  部分の位数が、layer によらない上界をもつことを示した。これはほとんど全ての Dirichlet 指標に対し、その指標により捻った L 関数の特殊値の代数部分が  $p$  進単数となることを示すことで証明される。Dirichlet L 関数が  $GL(1)$  の保型形式の L 関数であることを考えれば、より一般の代数群の保型形式の L 関数に対し、特殊値の指標による捻りに対する振る舞いを記述することは非常に重要な問題である。

本論文では、類数 1 の虚二次体上の  $GL(2)$  の尖点形式に付随する L 関数に対し、位数有限の Hecke 指標  $\chi$  で、 $\chi$  により捻った L 関数の特殊値の代数部分が  $p$  進単数となるようなものが、無限に存在することを示した。これは有理数体上の  $GL(2)$  の尖点形式の場合に、Ash-Stevens による定理の類似となっている。証明の手段には、Ash-Stevens に倣い、主にモジュラー記号を用いた。しかし、本論文では類体論を用いて計算を行うなど、Ash-Stevens には見られない手段も考案して、証明を行った。

次に二つ目の結果について記述する。L 関数の特殊値が代数的な意味をもつことは、広いクラスの L 関数に対して信じられているが、実際に特殊値の意味が証明されている場合はまだ少なく、特殊値に意味づけを与えることは、興味深い一方で難しい問題である。

本論文では、一般の代数体上の  $GL(2)$  上の尖点形式の Adjoint L 関数の特殊値の意味づけを与えた。より正確には、尖点形式  $f$  に対し、十分大きな代数体の素イデアルが  $f$  の Adjoint L 関数の特殊値を割るならば、その素イデアルは  $f$  の合同素イデアルとなることを示した。このような意味づけは、まず

肥田によって有理数体上の  $GL(2)$  の尖点形式の場合に与えられた。さらに肥田の結果の虚二次体上の  $GL(2)$  での類似が Urban、総実体上での類似が Ghate、Dimitrov らによって考察されてきた。本論文の結果は、Ghate の総実体上の証明で用いられた手法を基に一般の代数体で証明を行った。その際、Ghate においては狭義類数が 1 であることや尖点形式のレベルに条件がついていたのだが、これらの条件をはずした一般的な状況で証明を行った。

## 論文審査の結果の要旨

申請者は、本博士論文において、代数体  $F$  上の代数群  $GL(2)$  の保型表現に対する保型 L 関数の整数点での特殊値の  $p$  進的な性質を研究した。本論文は、2 つの主定理 (定理 A, 定理 B) からなる。どちらも L 関数の特殊値の  $p$  進付値を調べており、Birch—Swinnerton-Dyer 予想, Deligne 予想や Bloch-Kato 予想で扱われる整数論の中心的対象である。それぞれの内容を順に述べる。

定理 A は、特に基礎体  $F$  が虚 2 次体のときに、ヘッケ L 関数  $L(s, f)$  の特殊値  $L(1, f)$  を正規化された複素周期で割った代数的数の  $p$  進付値が、 $f$  を  $f$  の指標ひねりでひねったものに置き換えて動かすときに  $p$  進付値が 0 になるかを問題としており、そのような指標ひねりが無限個あることを保証する結果である。これは  $F$  が有理数体のときに Ash-Stevens によって得られた同様の結果の一般化を与えたものである。Ash-Stevens で現れた幾何学的対象である複素上半平面 (実 2 次元の空間) やその離散群による商を、この場合は双曲上半空間 (実 3 次元の空間) とその離散群による商に置き換えるなど、途中のステップまでは手法の素直な高次元化によって得られるが、最後のステップでは有理数を虚 2 次体に置き換えることで適当な数列を選ぶ補題などに本質的な困難があり、その部分は Ash-Stevens にはない新しいアイデアでうまく克服している。

定理 B は、基礎体  $F$  が一般の場合に  $f$  の adjoint L 関数  $L(s, \text{ad}(f))$  の特殊値を周期で割った代数的数の  $p$  進付値を調べるが、定理 A のような指標でひねったときの  $p$  進付値の振る舞いではなく、むしろ値のもつ意味を追求する結果である。 $F$  が有理数体、虚 2 次体、総実体といった特別な場合には、肥田, Urban, Ghate, Dimitrov らによって、L 関数  $L(s, \text{ad}(f))$  の特殊値を周期で割った代数的数が  $\text{mod } p$  で 0 ならば、 $p$  は  $f$  の合同数となることが示されている。本論文では、 $F$  の単数群で書かれた適当な十分条件のもとで、一般の  $F$  でも同じ結果が成り立つことを示し、先行結果を一般化した。また現れる十分条件が実際あまり制限の強くないものであることを示すため数値例を与えた。

このようなオリジナルな結果を得たことに加えて、3 次元双曲多様体やそのコンパクト化とコホモロジーに関する幾何的な取り扱い、一般の体上の保型表現の理論の様々な解析的取り扱いなど多岐にわたる大変な理論に十分習熟して使いこなしている。よって本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値のあるものと認める。