Title	Generators of the mapping class groups
Author(s)	門田, 直之
Citation	大阪大学, 2011, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/58617
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【23】

氏　　　　　名	門（もん）　田（でん）　直（なお）　之（ゆき）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学　位　記　番　号	第　２４３１８　号
学位授与年月日	平 成 23 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学　位　論　文　名	Generators of the mapping class groups （写像類群の生成元）
論　文　審　査　委　員	（主査） 教　授　大鹿　健一 （副査） 教　授　藤木　　明　　准教授　遠藤　久顕　　准教授　宮地　秀樹 准教授　大和　健二

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は写像類群の生成元について、あるいは代表的な生成元の性質に関して考察した。

$M_{g,p}$ を種数 g で p 個の点を持つ有向閉曲面の同相写像のアイソトピー類のなす群とし、写像類群と呼ぶ。p=0 の時，p は省略することにする。

群論、特に、有限単純群の古典的な問題として、最小の生成系を求める、生成元を有限位数の元にするという問題がある。写像類群に関して考えた結果が古くからあった．

Dehn により M_g は有限個の非分離的な単純閉曲線についての Dehn twist により生成されることが示されている。Humphries は M_g を Dehn twist のみで生成する場合、2g+1 個必要であることを示し、さらに 2g 個以下では生成できないことを示した。一方、Dehn twist にこだわらなければ、生成元の個数は 2g+1 個よりも少なくすることができる。Wajnryb は M_g を 2 元で生成しており、さらに M_g は 1 元生成できないことがわかっている。このことから最小の生成系を求めたことになる。

さて、p≧1 の場合の最小の生成系は知られていない。これに対し、次の結果を得た。

定理１　g≧1，p≧1 に対し、$M_{g,p}$ は 3 元で生成できる。

ただし、生成系の最小性は示せていない。この結果の証明のアイデアは、点付きの有向閉曲面の点の間を通る単純閉曲線達を上手く写すような写像を構成することである。

有限位数の元で $M_{g,p}$ を生成した結果はいくつかある。Korkmaz は g≧ 3, b=0,1 ならば位数 4g+2 の元 2 つで生成できることを示した。また、位数 4g+2 は M_g をの有限位数の元で最大であることが知られている。一方、最小位数である位数 2 の元について，Kassabov は，$M_{g,p}$ は g≧8 ならば 4 つ、g≧6 ならば 5 つ、g≧3 ならば 9 つの位数 2 の元で生成できることを示した．これに対し、次を得た。

定理２　$M_{g,p}$ は、g≧7 ならば 4 つ、g≧5 ならば 5 つの位数 2 の元で生成できる．

この結果は、Kassabov の結果をより強くしたものである。証明のアイデアは Lantern relation と呼ばれる $M_{g,p}$ の関係式を用いて位数 2 の元を構成することである。

以下、p=0 とし、t_c を単純閉曲線 c についての Dehn twist とする。$t_c=h^n$ と書けるとき、h を次数 n の t_c の根と呼ぶ。h は M_g の元であることに注意しておく。c が分離的であるとき，half twist と呼ばれる明らかな次数 2 の根が存在する。一方、c が非分離的な場合の例は 2009 年になって Margalit－Schleimer の 2 人により発見された。この当時、非分離的な単純閉曲線についての Dehn twist の根はこの例しかなかった。そこで Dehn twist の根の個数、つまり共役類の個数はいくつあるのか？という問題を考えた。この問題に対し、次のような結果を得た。

定理３　次数 n の非分離的な c についての $t_c \in M_g$ (g≧2)の根の共役類は，次のような条件を満たす整数の組 $[n, g', (\sigma^0, \sigma^1); (\sigma_1, \lambda_1), \cdots, (\sigma_k, \lambda_k)]$ と一致する：

(1) $2(g-1)/n=2g'+(1-1/\lambda_1)+\cdots+(1-1/\lambda_k)$,

(2) $\sigma_1/\lambda_1+\cdots+\sigma_k/\lambda_k+\sigma^0/n+\sigma^1/n$ は整数,

(3) $\sigma^0\sigma^1/n+\sigma^0/n+\sigma^1/n$ は整数,

(ここでは，より詳しい条件は省略する．)

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は、曲面の写像類群の生成元に関する博士論文審査申請者（以下、申請者）の研究をまとめたものであり、内容は３つの研究に大別される。

第１の研究は、点抜き曲面の写像類群が３元生成であることの証明に関するものである。種数ｇの有向閉曲面の写像類群は、Dehn, Lickorish, Humphries によって 2g+1 個の Dehn ツイストで生成されることが証明された。また、種数ｇのｐ点抜き有向曲面の写像類群は、Johnson, Gervais によって 2g+p 個の Dehn ツイストで生成されることが示されている。一方、生成元を Dehn ツイストに限定しなければ、写像類群はより少ない数の元によって生成される。実際、Wajnryb は種数 g の有向閉曲面の写像類群が２つの元で生成されることを証明している。申請者は、Korkmaz, Kassabov らによって開発された手法を応用することによって、種数ｇのｐ点抜き有向曲面の写像類群が３つの元で生成されることを証明した。これは Wajnryb の結果を点抜き曲面の場合に拡張した初めての研究である。

第２の研究は、対合による点抜き曲面の写像類群の生成に関するものである。有向閉曲面の写像類群が対合のみで生成されることは、McCarthy と Papadopoulos により 20 年前に示されていた。Luo は点抜き有向曲面の写像類群を生成する有限個の対合を具体的に求めたが､対合の個数は種数や点の個数に依存して増えるものであった。Brendle と Farb, Kassabov は Luo の結果を改良し、点抜き有向曲面の写像類群が、種数８以上ならば４つの対合で、種数６以上ならば５つの対合で生成されることを証明した。申請者はさらにこれを改良し、種数７以上ならば４つの対合で、種数５以上ならば５つの対合でこの群が生成されることを証明した。この結果は具体的に対合を構成することによって証明されるが、ｐ個の点や Lickorish の閉曲線系を入れ替える対合をうまく選ぶ必要があり、方法は初等的であるが議論は単純ではない。

第３の研究は、Dehn ツイストのルートに関するものである。有限次の冪が Dehn ツイストになるような写像類群の元を Dehn ツイストのルートとよぶ。分離型の単純閉曲線に沿う Dehn ツイストがルートをもつことは、専門家には以前からよく知られていた。一方、非分離型の単純閉曲線に沿う Dehn ツイストのルートは、2009 年に Margalit と Schleimer によって発見された。申請者は、負型擬周期写像の共役類の分類に関する松本幸夫氏(学習院大学)と Montesinos の理論を援用することにより､非分離型の単純閉曲線に沿う Dehn ツイストのルートの共役類を原理的にはすべて分類した。応用として、種数ｇの有向閉曲面の写像類群における非分離型単純閉曲線に沿うDehnツイストのルートの次数が、３以上 2g+1 以下であることなどが従う。申請者とほぼ同時期に､McCullough と Rajeevsarathy によって同等の結果が独立に得られているが､両者は Dehn ツイストのルートに関する初めての組織的な研究であると言ってよい。

以上のように、申請者の研究は曲面の写像類群の生成元とルートについて新しい知見を与えるものであり、写像類群の研究および低次元トポロジーの発展に寄与するところ大である。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。