



Title	Some problems on Herz spaces and the sharp $A_p$ constant between $BMO$ and $BMO(w)$
Author(s)	筒井, 容平
Citation	大阪大学, 2011, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/58619">https://hdl.handle.net/11094/58619</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">＜a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"&gt;https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed</a> >大阪大学の博士論文について <a>&lt;/a&gt;</a> をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

【21】	
氏 名	つ い 井 容 平
博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	第 2 4 3 1 6 号
学 位 授 与 年 月 日	平 成 23 年 3 月 25 日
学 位 授 与 の 要 件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Some problems on Herz spaces and the sharp $A_p$ constant between $BMO$ and $BMO(w)$ (ヘルツ空間上のいくつかの問題と有界平均振動関数の空間とその重み付きの空間の間の $A_p$ 定数について)
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 西 谷 達 雄 (副査) 教 授 林 伸 夫 教 授 土 居 伸 一 名古屋大学教授 杉 本 充 講 師 富 田 直 人

## 論 文 内 容 の 要 旨

この学位論文は4つのパートからなる。初めの3つは Herz 空間と呼ばれる関数空間に関連する。

1 つ目は、Herz 空間とその Hardy 化である Herz-type Hardy 空間を用いて、Hormander symbol class  $S^m_{\rho,0,0}$  に属する擬微分作用素の有界性に関する研究である。ここでは、この class の作用素が有界になるための十分条件を Herz 空間のパラメータを用いて与えた。Atom 分解、双線形作用素に対する複素補間 等の手法を用いた。

2 つ目は、Navier-Stokes 方程式の非線形項を含んだものの双線形評価である。そのような評価は、初め小藺・谷内氏により Coifma-Meyer の双線形 Fourier multiplier の結果を用いてなされたが、その後、宮地氏により Foureir 変換を用いず、Fefferman-Stein の sharp 極大作用素を用いた興味深い別証明が与えられた。この結果は未発表となっていた。その原稿を元にさせていただき結果を Herz 空間に一般化した後の Navier-Stokes 方程式の研究に応用した。得られた結果では、今まで課されていた“ $p>1$ ”という制限が外せたことであり、“ $p \leq 1$ ”の場合も Hardy 化した空間を用いると統一的に扱えることが分かった。

3 つ目は、weak Herz 空間を用いた 非圧縮粘性流体の運動を表す Navier-Stokes 方程式の Cauchy 問題についての研究である。Weak Herz 空間とは通常の Herz 空間 の弱型の空間で、 $L^p$  に対する weak  $L^p$  に対応する。局所解、大域解を構成しそれらの一意性についても考察した。局所解については、2 つ目の結果を用いて存在時間が延びるための十分条件を与えた。一方、大域解に関しては解が存在する class より広い class で一意性を示し、またその安定性に関する結果も得られた。しかし、扱った初期値の class は Koch-Tataru が扱った  $BMO^{\{1\}}$  という関数空間に含まれていることが分かった。しかし、weak Herz 空間の枠組みで解が構成できる最大の空間は対応する Besov 空間とは包含関係を持たないことが分かった。またこれらの考察と Cannone の考察により、実空間、周波数空間それぞれにおける 2 進分解がもたらす利益を観察することができた。さらには、weak Herz 空間から Besov 空間への埋め込みについても詳しく考察した。

4 つ目は、Muckenhoupt の weight class  $A_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) と  $BMO$ (bounded mean oscillation) に関するものである。 $A_\infty$  weight “ $w$ ” に対して  $BMO=BMO(w)$  が集合として一致することは 70 年代から知られているがそれら 2 つの norm の大きさについては研究されていなかった。得られた結果は、それら 2 つの norm の比の “ $w$ ” に関する sharp な評価であり、またそれを応用することにより得られた Calderon-Zygmund 作用素に関する重み付き不等式である。応用で得られた不等式はまだ不十分であるが、実解析学における未解決問題である Muckenhoupt-Wheeden conjecture と呼ばれる問題と対をなすものである。

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は、重み付き  $L_p$  空間の拡張にあたる、Herz 空間上での擬微分作用素の有界性や、同空間上での Navier-Stokes 方程式の時間大域的可解性を研究したものである。

$S(0,0)$  クラスの擬微分作用素が  $L_p$  空間上の有界作用素となるための条件は Coifman と Meyer(1978)によって得られているが、本論文ではこれらの結果の拡張として、 $S(0,0)$  クラスの擬微分作用素が Herz 空間上で有界となるための条件を得た。

更に、関数のノルムをその sharp maximal 関数のノルムで評価するという Fefferman-Stein 不等式 (sharp maximal 不等式) を Herz 空間にまで拡張し、この不等式を用いて、小園と谷内によって得られていた、双線形形式の  $L_p$  ノルムを各成分の  $L_p$  ノルムと  $BMO$  ノルムの積で評価する不等式を、双線形形式の Herz ノルムを各成分の Herz ノルムと Herz タイプ  $BMO$  ノルムとの積で評価する不等式に拡張した。特にこの特別な場合として、 $0<p<1$  なる  $p$  に対しては、双線形形式の  $L_p$  ノルムを各成分の  $L_p$  ノルムと  $BMO$  ノルムおよび Hardy ノルムと  $BMO$  ノルムの積で評価できることを示した。また、この双線形不等式を利用することによって、Navier-Stokes 方程式の Herz 空間における、小さい初期値に対する、時間大域的な解の存在の証明に成功している。

本論文は、重み付き  $L_p$  空間上の基本的な不等式を Herz 空間にまで拡張し、その不等式を非線形偏微分方程式に応用し、有用な結果を得たものであり、よって本論文は博士 (理学) の学位論文として十分価値あるものと認める。