Osaka University Knowledge Archive

Title	On eccentricity in connected graphs
Author(s)	山口, 誠一
Citation	大阪大学, 2011, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/58620
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

【24】

氏　　　　名	山口誠一（やまぐち せいいち）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学 位 記 番 号	第　２４３１９　号
学位授与年月日	平成 23 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	On eccentricity in connected graphs （連結グラフの離心数について）
論文審査委員	（主査） 教　授　藤原　彰夫 （副査） 教　授　渡部　隆夫　　准教授　鈴木　　譲　　准教授　山崎　洋平

論 文 内 容 の 要 旨

This thesis has two themes related to the eccentricity, namely, the maximal distance from a vertex to all the other vertices in a connected graph. One of those themes is to answer a problem presented by Pelayo et al.(J. A. Bondy, J. Fonlupt, J-L. Fouquet, Jean-Claude Fournier and Jorge L. Ramirez Alfonsin, *Graph theory in Paris:* , Basel ; Boston : Birkhäuser Verlag, 2007. see also J. Caceres, A. Marquez, O. R. Oellermann, M. L. Puertas, Rebuilding convex sets in graphs, *Discrete. Appl. Math.* **297** (2005) 26-37.). The other one is to determine the degree sequences of the trees which have extreme value of a topological index with fixed maximum(or minimum) eccentricity. Chapter 2 has an origin in the theory of convexity spaces. The Minkowski-Krein-Milman property is a remarkable concept in this field. It was translated into the graph theory as follows:every convex set coincides with the convex hull of all its simplicial vertices. This property does not hold generally in the graph theory. However, a simular property has been verified(J. Caceres, A. Marquez, O. R. Oellermann, M. L. Puertas, Rebuilding convex sets in graphs, *Discrete. Appl. Math.* **297** (2005) 26-37.), replacing 'simplicial' to 'maximal eccentricity'. The vertex set of a graph is a convex set, and it is constructed by iteration of closure operations from its vertices of maximal eccentricity. A single step can not achieve it, in general, but a triangle appeared in such examples. So it was rather believed that a single step suffices at least for a bipartite graph. This property was studied also in other classes of graphs. In each of almost those classes, the property was clarified affirmatively or negatively. And the bipartite case remained unsolved. Our purpose of Chapter 2 is to determine whether or not a single step suffices for all the bipartite graphs, if the maximum eccentricity d is given. The conclusion is as follows:

Theorem. For every d exceeding 7, there exists a counterexample.

Theorem. For any integer $d \leq 7$, a single step suffices.

Chapter 3 has an origin in chemistry. In this field, some sorts of compounds are regarded as graphs. People desired to predict the physical or chemical behaviors of compounds, by calculating simple invariants of graphs. A positive or negative order power of degrees or of the distances, such were summed up over vertices or over edges..., and so on. The simplest among them is to sum the power of degrees. The chemical interest suggests us to minimize the relevant sum when the order α of the power satisfies $0 < \alpha < 1$, and otherwise(except the two border values of order) to maximize it. We restrict our discussion to trees. The degree types were determined to minimize / maximize this value, if the numbers are given of all the vertices and of vertices whose degrees coincide with 1(B. Zhang, B. Zhou, On zeroth-order general Randić indices of trees and unicyclic graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **58** (2007) 139-146). Chapter 3 gives analogies of this result, where the latter number is replaced to the maximum eccentricity or the minimum eccentricity. The conclusion is as follows:

Theorem. Fix the number n of all the vertices and the maximum eccentricity d. Then the first three minimum / maximum values are attained just by the following degree types $D(T)$:

(1) first: $D(T) = [n - d + 1,\ 2^{d-2},\ 1^{n-d+1}]$ for $n - 1 \geq d \geq 2$.
(2) second: $D(T) = [n - d,\ 3,\ 2^{d-3},\ 1^{n-d+1}]$ for $n - 3 \geq d \geq 3$.
(3) third: $D(T) = [3^3,\ 2^{n-8},\ 1^5]$ for $d = n-4$, and $D(T) = [n-d-1,\ 4,\ 2^{d-3},\ 1^{n-d+1}]$ for $n - 5 \geq d \geq 3$.

Theorem. Fix the number n of all the vertices and the minimum eccentricity r. Then the first three minimum / maximum values are attained just by the following degree types $D(T)$:

(1) first: $D(T) = [n - 2r + 2,\ 2^{2r-3},\ 1^{n-2r+2}]$ for $n/2 \geq r \geq 2$.
(2) second: $D(T) = [n - 2r + 1,\ 3,\ 2^{2r-4},\ 1^{n-2r+2}]$ for $(n-2)/2 \geq r \geq 2$.
(3) third: $D(T) = [3^3,\ 2^{n-8},\ 1^5]$ for $r = (n-3)/2 \geq 3$, and $D(T) = [n-2r,\ 4,\ 2^{2r-4},\ 1^{n-2r+2}]$ for $(n-3)/2 > r \geq 2$.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

当該論文は，連結グラフにおける距離，離心数，直径，半径などに関する数学的問題とその応用に関するものである．２点間の距離とは最短路における辺数，離心数とは点からの距離の最大値のことであり，直径・半径とはそれぞれ離心数の全頂点にわたる最大値・最小値のことである．当該論文で扱われた第１の話題は化学に起源をもち，グラフの不変量のうち，分子の物理・化学的特性との相関が顕著な指標に関するものである．先行研究では頂点数の他に末端頂点の個数を指定した上で指標を最大化（最小化）することが検討されてきた．当

該研究では視点を変え，末端頂点数の代わりに直径や半径を指定した場合にも似たような結論が得られることを示した．当該論文で扱われた第２の話題は離心数に関する未解決問題である．いかなる連結グラフでも全頂点集合は離心数が極大な点のなす部分集合から「最短経路上の点を追加する」という手段を繰り返すことで生成されることが知られていた．ところで「最短経路上の点を追加する」という操作は１回で十分なのかという問題意識があり，それが成り立たない既知の例ではすべてグラフ中に三角形が含まれていたため，２部グラフ（奇数角形を含まないグラフ）では１回の操作で十分なのではないかと予想されていた．当該論文では，この予想が誤りであることを証明した．詳しくは，直径が７以下であれば問題の操作は１回で済むが，直径が８以上では１回の操作で済まないグラフが存在することを示した．以上の研究成果は，グラフ理論および離散凸解析理論の基礎と応用に関する高い学術的価値を有する成果である．

　よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．