【19】

氏　名	関谷健一（せきやけんいち）
博士の専攻分野の名称	博　士（理学）
学位記番号	第　25181　号
学位授与年月日	平成 24 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Generalized almost contact structures and generalized Sasakian structures （一般化された概接触構造と一般化された佐々木構造）
論文審査委員	（主査） 教 授　後藤　竜司 （副査） 教 授　藤木　明　　教 授　満渕　俊樹　　准教授　榎　一郎

論文内容の要旨

N.Hitchin によって始まった一般化された幾何学は微分幾何や数理物理で広範囲に渡って研究されている．一般化された幾何学は多様体 M 上の接束 TM を接束と余接束の直和 $TM \oplus T^*M$ で置き換える考えに基づいおり，可積分条件は Courant 括弧積を用いて表される．与えられた 2 次微分形式 B に対して B-フィールド変換と呼ばれる興味深い束写像が存在する．

一般化された幾何学の典型的な例は一般化された複素構造と一般化されたケーラー構造である．Gualtieri によって一般化されたケーラー構造はある条件を伴う双エルミート構造と同値であることが示された．

一般化された複素構造と一般化されたケーラー構造はともに偶数次元の構造である．では奇数次元の一般化された幾何学はどうであろうか．Vaisman によって一般化された概接触構造が定義された．また彼は一般化されたケーラー構造の観点から一般化された佐々木構造を定義した．Poon と Wade により一般化された概接触構造の可積分条件が調べられ，また非自明な例が構成された．Vaisman によって一般化された佐々木構造はある条件を伴う概接触計量構造の組で表されることが示された．しかし佐々木構造の組でない一般化された佐々木構造の例は知られていなかった．

本論文の目的は奇数次元の一般化された幾何学の研究である．既存の定義を特別な場合として含む，一般化された概接触構造の新しい概念を導入する．

概接触構造とは，TM の自己写像 $\varphi, \xi \in TM$ 及び $\eta \in T^*M$ の組 (φ, ξ, η) であり次の条件をみたすものであった，

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi \circ \varphi = -id + \eta \otimes \xi.$$

ここで id は TM の恒等写像である．M 上の概接触構造から $C(M) = M \times \mathbb{R}_{>0}$ 上の概複素構造 I

$$I = \varphi + \eta \otimes r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}dr \otimes \xi,$$

が構成できる．ここで r は $\mathbb{R}_{>0}$ の座標を表している．

これに倣って一般化された概接触構造を $TM \oplus T^*M$ の自己写像 Φ 及び $TM \oplus T^*M$ の 2 つの切断 $E_\pm$ の組 (Φ, E_+, E_-) で次の条件をみたすものとして定義する，

$$\Phi + \Phi^* = 0,$$
$$2\langle E_+, E_- \rangle = 1, \ \langle E_\pm, E_\pm \rangle = 0,$$
$$\Phi \circ \Phi = -id + E_+ \otimes E_- + E_- \otimes E_+.$$

このとき一般化された概接触構造は B-フィールド変換を許容する．またコーン多様体 $C(M)$ 上の束写像を

$$\Psi(E_+, E_-) = E_- \otimes r\frac{\partial}{\partial r} - r\frac{\partial}{\partial r} \otimes E_- + E_+ \otimes \frac{1}{r}dr - \frac{1}{r}dr \otimes E_+$$

と定義する．このとき

$$\Phi + \Psi(E_+, E_-)$$

は $C(M)$ 上の一般化された概複素構造である．佐々木多様体で重要なのは $C(M)$ 上のコーン計量 $\tilde{g} = dr^2 + r^2 g$ であった．そこで特殊直交群 $\mathrm{SO}(TM \oplus T^*M)$ の元 R

$$R(X + \alpha) = r^{-1}X + r\alpha, \qquad X \in TM, \quad \alpha \in T^*M,$$

を考える．このとき

$$R(\Phi + \Psi(E_+, E_-))R^{-1}$$

も $C(M)$ 上の一般化された概複素構造であり，佐々木構造を考えるときはこちらがより重要である．これにより一般化された概接触構造の観点から一般化された佐々木構造を定義することができるが，Vaisman の定義と異なりコーン上の B-フィールド変換を許容しない．その後佐々木構造の組ではない一般化された佐々木構造の非コンパクトな例を構成した．一方でコンパクト 3 次元多様体上では一般化された佐々木構造は同じ計量を持つ佐々木構造の組と同値であることを証明した．

論文審査の結果の要旨

関谷健一氏の論文 : Generalized almost contact structures and generalized Sasakian structures は奇数次元の多様体上の一般化された幾何構造に関する先駆的な優れた論文である．Nigel Hitchin により導入された一般化されたカラビーヤオ構造(generalized Calabi-Yau structures)と一般化された複素構造(generalized complex structures)は偶数次元多様体上の幾何構造であり、多様体の接束と余接束の直和から定まるクリフォード代数の対称性を基本としている．一般化された複素構造は通常の複素構造とシンプレクティック構造を特別な場合として含んでおり、これら二つの構造の混合型が現れる．また数理物理で研究されている B-場による変換がクリフォード群の作用として解釈されるなど、著しい特徴を持っている．
その後、一般化された幾何構造は急速な発展を遂げ、微分幾何、複素幾何そして数理物理など、様々な分野に深い影響を与え続けている．特に、一般化されたケーラー構造(generalized Kahler structures)は複素幾何における双エルミート構造(bihermitian structures)と一致していることが示され、また 数理物理における N=(2,2)の超対称シグマモデルのターゲット空間の持つ自然な幾何構造であることが提唱されている．偶数次元での一般化された幾何構造の研究に対して、奇数次元の一般化された幾何構造の研究はまだ歴史が浅く、多くの研究課題が残されている．奇数次元多様体において、概接触構造、佐々木構造は良く知られた幾何構造である．奇数次元多様体 M 上の概接触構造は M のコーン多様体 C(M) 上の概複素構造と対応し、また M 上の佐々木構造は C(M) 上のケーラー構造に対応する．

関谷健一氏は本論文において、一般化された概接触構造(generalized almost contact structures)、一般化

された佐々木構造(generalized Sasakian structures)を適切な形で導入した.古典的な場合のように、奇数次元多様体 M 上の一般化された概接触構造は M のコーン多様体 C(M) 上の一般化された概複素構造と対応し、また M 上の一般化された佐々木構造は C(M) 上の一般化されたケーラー構造に対応する.
これらは B-場の変換が自然に構成できるように、Vaismann, Poon-Wade による定義を拡張したものであり、既存の乱立した概念を的確に整理したものとなっている.
この論文の主定理は次の二つである：
（1） 古典的な佐々木構造の対とは異なる一般化された佐々木構造の具体例を構成した. これはノンコンパクト多様体上の非自明な一般化された佐々木構造の最初の例となっており注目に値する.
（2） コンパクト３次元多様体上では一般化された佐々木多様体は常に古典的な佐々木構造の対に帰着される. これも一般化された佐々木構造に関する最初の基本的な結果といえるものである.

これら二つの基本的な定理を示した関谷氏の論文の水準の高さは明確であり、この奇数次元多様体上の一般化された幾何学の更なる発展を期待させるものとなっている.
よって、本論文は博士(理学) の学位論文として十分価値のあるものと認める.