Title	真空と光の非線形相互作用
Author(s)	門田, 裕一郎
Citation	大阪大学, 2013, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/59953
rights	© 2011 American Physical Society
Note	

博士学位論文

真空と光の非線形相互作用

門田 裕一郎

2013 年 1 月

大阪大学大学院工学研究科

研究概要

本論文では，真空と光の相互作用と物質と光の相互作用の違いを明らかにすることを目的とし，真空中にレーザー光が照射された場合に誘起される分極と磁化や真空から放射される光の光子数が，光の偏光状態や開口角，幾何学配置などにどのように依存するのかを調べた．

第 1 章は序論であり，本研究の背景として真空と光の相互作用に関する研究の概要と，真空非線形光学現象を通して真空を調べることの意義について述べた．また，従来の研究における問題点を指摘し，レーザー光をベクトル場として扱った上で真空と光の相互作用を考えることの必要性を述べた．

第 2 章では，シュインガー極限よりも十分強度の低い一様電磁場が真空中に存在する場合のラグランジアン密度の導出過程について述べた．

第 3 章では，第 2 章で導出したラグランジアン密度を用いて真空中における Maxwell 方程式を導出し，物質中における Maxwell 方程式との比較により真空中の分極と磁化を定義した．また，レーザー光が照射された場合に真空から放射される光の電磁場を，レーザー光よりも放射光の方が十分強度が低いという仮定の下で計算した．

第 4 章では，ベクトル場の回折積分について述べ，これを用いて直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光した場合の電磁場を求めた．

第 5 章では，直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光することで生じる真空中の分極・磁化と真空からの放射光子数を計算した．分極と磁化の計算から，軸対称偏光のレーザー光により誘起される分極と磁化はその電磁場と類似した分布になるが，直線偏光のレーザー光を集光した場合に生じる分極と磁化はもとの電磁場とは全く異なる分布になるという結果が得られた．また，真空からの放射光子数の計算結果より，入射レーザー光の偏光状態は光子数に大きな影響を与えないが，開口角を 15° から 100° に変化させることで光子数は約 7 桁増加することが分かった．

第 6 章では，反対方向に伝搬する 2 つの直線偏光のレーザー光を 1 点に集光することで生じる真空中の分極・磁化と真空からの放射光子数を計算し，直線偏光の 1 ビームを集光した場合の計算結果と比較した．分極と磁化の計算から，対向するレーザー光により誘起される分極と磁化はもとの電磁場と非常に似た分布をもつという結果が得られた．また，レーザー光の強度や出力を一定にした場合でも分極と磁化の振幅は 1 ビームの場合と比べて非常に大きくなり，その結果として放射光子数も 1 ビームの場合と比べて 3 桁以上増加するという結果が得られた．

以上の結果から，物質中の分極と磁化は光の偏光状態や幾何学配置に関わらず電磁場と同様の分布になるが，真空中の分極と磁化は特定の偏光状態をもつ光が照射された場合にはその電磁場と異なる分布になることが分かった．また，物質と光の相互作用の大きさは光の強度以外

にはあまり依存しないが，真空と光の相互作用の大きさは光の強度やエネルギーが一定の場合でも開口角やビームの幾何学配置によって大きく変化することが明らかになった．

目次

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

ディラックにより相対論的な量子力学 [1] が生み出されてから今日に至るまで，光との相互作用を通して真空を理解しようとする試みが多くなされてきた．最も有名なのは γ 線による電子-陽電子対の生成であり [2]，この現象を通して与えられたエネルギーに相当する質量の粒子-反粒子対を生成するという真空の性質が明らかになった．近年ではレーザー技術の発達により実験的に実現可能な可視から近赤外領域の光の強度が年々増加しているため [3–5]，高強度レーザー光と真空の相互作用に関する研究が注目を集めつつある [6]．この相互作用により起こると予想される代表的な現象は，シュインガー極限 $I_{sch} = cE_{sch}^2/4\pi \sim 10^{29}\mathrm{W/cm^2}$ 程度の超高強度光による多数の電子-陽電子対生成であり，真空崩壊と呼ばれる [7–10]．ここで，c は光速度，$E_{sch} = m^2c^3/|e|\hbar$ はシュウィンガー極限に相当する電場強度，$\hbar = h/2\pi$ は換算プランク定数，h はプランク定数，$|e|$ は電荷素量，m は電子の質量である (本論文では cgs 単位系を用いる)．真空崩壊の生成機構は量子トンネル効果で説明できると考えられており，実験が実現すれば対生成過程を含む電子-陽電子プラズマの集団運動に関する物理が明らかになると期待されている．γ 線による対生成と超高強度レーザー光による真空崩壊はいずれも対生成を引き起こすような高いエネルギー密度をもつ光と真空の相互作用によるものであるが，一方，シュインガー極限よりもはるかに低い強度の光であっても真空と非線形に相互作用することが予想されている．これは，光と真空の量子ゆらぎが相互作用することによって非線形な分極と磁化が誘起されるためであり，光は古典的な真空中とは異なる振舞いを示すことになる．このような真空中の分極と磁化により生じる現象を真空非線形光学現象という．真空の量子ゆらぎはエネルギーと時間の不確定性関係 $\Delta E\Delta t \sim \hbar$ に起因すると考えられており，量子論の計算における仮想粒子に対応しているほか宇宙の誕生にも関係するといわれているが，その実態はよく分かっていない．真空非線形光学現象は真空崩壊などとは異なり実粒子が生成されない物理過程であるため，観測が実現すれば真空の量子ゆらぎに関する新たな知見が得られると期待されている．

物質中の分極と磁化は通常それぞれ電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ の大きさに依存しているが，真空中の分極と磁化はこれとは異なり，2 つのローレンツ変換に対する不変量 (以下，ローレンツ不変量) $\mathcal{F} = (|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)/2$ と $\mathcal{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ の値に大きく依存することが分かっている．よって，電場と磁場の大きさが等しく直交している平面電磁波に対しては，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の値はどちらも 0 になり，真空中には分極も磁化も生成されない．このため，これまで行われてきた真空非線形光学現象に関する理論的研究はその全てが，レーザー光の電磁場を 1 成分のスカラー場と仮定した上で，複数のビームを多方向から真空中に入射させた場合の効果を計算するというものだった [11–16]．しかしながら，レーザー光の電磁場を厳密に 3 成分のベクトル場として扱うと集光による光の電磁場の変化が考慮され，1 ビームの場合でもローレンツ不変量は 0 ではなくなる．これは，1 ビームの照射でも真空中に分極と磁化が誘起されることを示すと同時に，電磁場を 1 成分のスカラー場として扱っていたこれまでの方法では，レーザー光と真空との相互作用を正確に考えることが困難であることを示している．

1.2　本研究の目的

本研究では，ベクトル場の波動光学を取り入れて計算を行うことにより，真空中に誘起される分極と磁化や真空から放射される光の光子数が，集光光学系の開口角や光の偏光状態，またレーザー光の幾何学配置などにどのように依存するのかを調べた．この結果から，量子ゆらぎに起因する真空と光の相互作用が，通常の物質と光の相互作用とどのように異なるのかを明らかにすることを目指した．

1.3　本論文の構成

本論文は，以下の 7 章で構成される．

第 1 章は序論であり，本研究の背景として真空と光の相互作用に関する研究の概要と，真空非線形光学現象を通して真空を調べることの意義について述べた．また，従来の研究における問題点を指摘し，レーザー光をベクトル場として扱った上で真空と光の相互作用を考えることの必要性を述べた．

第 2 章では，まず相対論的な量子力学の基礎方程式であるディラック方程式について述べ，それを用いてシュインガー極限よりも十分強度の低い一様電磁場が真空中に存在する場合のラグランジアン密度を導出した．

第 3 章では，シュインガー極限よりも十分強度の低い光と真空の相互作用を計算するための理論モデルについて述べた．前章で得られたラグランジアン密度を用いて真空中における Maxwell 方程式を導出し，物質中における Maxwell 方程式との比較により，真空中の分極と磁化を定義した．また，レーザー光が照射された場合に真空から放射される光の電磁場を計算し

た．この章の計算で得られた結果は，第 5 章以降で使用される．

第 4 章では，ベクトル場の回折積分 [17] を用いることで，直線偏光と軸対称偏光 [18] のレーザー光を集光した場合の電磁場を計算した．この章の計算で得られた結果は，次章以降で使用される．

第 5 章では，直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光子数を計算した．分極と磁化の計算により，軸対称偏光のレーザー光により誘起される分極と磁化はその電磁場と非常に類似しているが，直線偏光のレーザー光に対する分極と磁化はもとの電磁場とは全く異なる分布をもつという結果が得られた．また，真空からの放射光子数の計算結果から，入射レーザー光の偏光状態は光子数に大きな影響を与えないが，開口角を大きくすることで放射光の光子数は物質中では考えられないほど大幅に増加することが分かった．

第 6 章では，反対方向に伝搬する 2 つの直線偏光のレーザー光を 1 点に集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光を計算し，直線偏光の 1 ビームを集光した場合の計算結果と比較した．分極と磁化の計算から，1 ビームの場合とは異なり，対向するレーザー光により誘起される分極と磁化はもとの電磁場と非常に似た分布をもつという結果が得られた．また，レーザー光の強度や出力は変わらないにも関わらず，分極と磁化の振幅は 1 ビームの場合と比べて非常に大きくなり，その結果として放射光の光子数も 1 ビームの場合と比べて 3 桁以上増加するという結果が得られた．

第 7 章では本研究を総括し，結論を述べた．

第 2 章

真空中における電磁場のラグランジアン密度

対生成を引き起こす確率が無視できるほど強度の低い一様電磁場が真空中に存在する場合のラグランジアン密度は，量子電磁力学 (QED) の成立前にハイゼンベルグらによって初めて導かれ [19]，その後シュインガーにより QED を用いて計算しても同じ結果が得られることが示された [20]．本章ではハイゼンベルグらと同様に，相対論的な量子力学における基礎方程式の 1 つであるディラック方程式を用いてラグランジアン密度を導出する．

2.1　ディラック方程式

本節では，電子に関する相対論的な波動方程式であるディラック方程式を導く．ディラック方程式に関する議論は文献 [21] を参考にした．

2.1.1　ローレンツ変換

空間座標 $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ と時間座標 t を用いて，4 次元座標

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{r}, ict) \tag{2.1}$$

を導入する．ここで，c は光速度であり，虚数単位 i を用いて $x_4 = ix_0 = ict$ とした ($x_0 = ct$)．以下では，特に断らない限りギリシャ文字の添字 μ, ν, λ などは 1 から 4 まで，イタリック文字の添字 i, j, k などは 1 から 3 までの整数値をとるものとする．

ローレンツ変換は，4 次元空間における量

$$\sum_\mu x_\mu^2 = \sum_i x_i^2 - x_0^2 = \sum_i x_i^2 - (ct)^2 \tag{2.2}$$

を不変に保つ線形変換

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu \tag{2.3}$$

として定義される．ここで，$a_{\mu\nu}$ はローレンツ変換の変換係数であり，ローレンツ変換の定義

$$\begin{aligned}\sum_\mu x'^2_\mu &= \sum_\mu \sum_\nu \sum_\lambda a_{\mu\nu} x_\nu a_{\mu\lambda} x_\lambda = \sum_\nu \sum_\lambda \left(\sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} \right) x_\nu x_\lambda \\ &= \sum_\nu x_\nu^2\end{aligned} \tag{2.4}$$

より

$$\sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \tag{2.5}$$

が得られ，$a_{\mu\nu}$ の逆変換を $(a^{-1})_{\mu\nu}$ と表すと

$$(a^{-1})_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \tag{2.6}$$

が満たされることも分かる．よって，x'_μ から x_μ への変換は

$$x_\mu = \sum_\nu a_{\nu\mu} x'_\nu \tag{2.7}$$

と表される．

4 次元空間におけるスカラー ϕ，ベクトル A_μ，2 階のテンソル $T_{\mu\nu}$ とは，x から x' へのローレンツ変換のもとでそれぞれ次のように変換される量として定義される．

$$\phi' = \phi, \qquad A'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu, \qquad T'_{\mu\nu} = \sum_\lambda \sum_\sigma a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} T_{\lambda\sigma}. \tag{2.8}$$

よって

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} = \sum_\nu a_{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \tag{2.9}$$

より，偏微分 $\partial\phi/\partial x_\mu$ はベクトルであり

$$\sum_\mu A'_\mu B'_\mu = \sum_\mu \sum_\nu \sum_\lambda a_{\mu\nu} A_\nu a_{\mu\lambda} B_\lambda = \sum_\nu \sum_\lambda \delta_{\nu\lambda} A_\nu B_\lambda = \sum_\nu A_\nu B_\nu \tag{2.10}$$

より，ベクトルの内積 $A \cdot B = \sum_\mu A_\mu B_\mu$ はスカラーである．ここで，4 次元ベクトル A_μ と B_μ の内積を $A \cdot B$ で表した．

ローレンツ変換は，(I) 特殊相対性原理: 電磁気学を含む古典物理学の基本法則は全ての慣性系において同じ形で表される (これを，方程式が相対論的に共変であるという)，(II) 光速度不

変の原理: 光の速さはどの慣性系でも同じである，という特殊相対性理論の 2 つの要請を満たすために導入された 4 次元空間における座標変換である．実際，真空中における波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_\mu = \sum_\nu \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} = 0 \tag{2.11}$$

は，$\sum_\nu \partial^2 A_\mu/\partial x_\nu^2$ がベクトルであることにより相対論的に共変な形で表される．

2.1.2　電磁場中の電子のハミルトニアン

古典力学において，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ とスカラーポテンシャル $A_0(\mathbf{r})$ で表される電磁場中のスピンをもたない荷電粒子 (電荷 q，質量 m) のハミルトニアンは，一般化座標 $\mathbf{r}$ と一般化運動量 $\mathbf{p}$ を用いて次のように与えられる．

$$H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + qA_0(\mathbf{r}). \tag{2.12}$$

ここで，$\mathbf{r}$ は通常の空間座標と一致しているが，$\mathbf{p}$ は通常の粒子の運動量とは一致しない．いま，$\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ の各成分を正準交換関係

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2.13}$$

を満たすエルミート作用素

$$\hat{x}_i = x_i, \qquad \hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.14}$$

に置き換える．式 (2.14) を用いると，式 (2.15) の $H(\mathbf{r},\mathbf{p})$ に対応する作用素 $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = H(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + qA_0(\mathbf{r}) \tag{2.15}$$

のようなエルミート作用素となる．これが，非相対論的な量子力学におけるハミルトニアンである．これより，シュレディンガー方程式は次のようになる．

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + qA_0(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}). \tag{2.16}$$

いま，$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ と $A_0(\mathbf{r})$ から 4 次元ベクトル

$$A_\mu = (\mathbf{A}, iA_0) \tag{2.17}$$

を作ると，式 (2.16) は電磁場が存在しない場合のシュレディンガー方程式において次の置き換えを行うことにより得られる．

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c}A_\mu. \tag{2.18}$$

しかしながら荷電粒子がスピンをもつ場合，例えば電子 (電荷 $e=-|e|<0$) の場合には，磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$ と電子のスピンによる磁気モーメントの相互作用を考慮するために，式 (2.15) のハミルトニアンに

$$\hat{H}_s=-\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{2.19}$$

をつけ加える必要がある．ここで，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ はパウリ行列 (式 (A.13)) である．電子と電磁場の相互作用を考慮したハミルトニアンを式 (2.18) の置き換えのみで求められるようにするためには，電磁場が存在しないときの運動エネルギーに対応する作用素

$$\frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 \tag{2.20}$$

を次のような作用素で置き換えておけばよい．

$$\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\mathbf{p}})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\mathbf{p}}). \tag{2.21}$$

この置き換えは電磁場が存在しない場合には計算結果に何の影響も及ぼさないが，電磁場が存在する場合には次のような違いが現れ，電磁場中の電子のハミルトニアンが得られる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2m}\left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)\right]\left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)\right]\\=&\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2-\frac{ie}{2mc}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(\hat{\mathbf{p}}\times\mathbf{A}(\mathbf{r})+\mathbf{A}(\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{p}})\\=&\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2-\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{2.22}$$

ここで

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{p}}\times\mathbf{A}(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r})&=-i\hbar\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\\&=-i\hbar\left[(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r})+(\nabla\psi(\mathbf{r}))\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\right],\\(\mathbf{A}(\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{p}})\psi(\mathbf{r})&=i\hbar(\nabla\psi(\mathbf{r}))\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{2.23}$$

より

$$\hat{\mathbf{p}}\times\mathbf{A}(\mathbf{r})+\mathbf{A}(\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{p}}=-i\hbar(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}))=-i\hbar\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{2.24}$$

となることを用いた．

2.1.3　ディラック方程式の導出

　電子の相対論的な波動方程式を導くために，特殊相対性理論におけるエネルギー E と運動量の関係式

$$E^2=c^2\mathbf{p}^2+(mc^2)^2 \tag{2.25}$$

を用いる．この式を

$$\left(\frac{E}{c}+|\mathbf{p}|\right)\left(\frac{E}{c}-|\mathbf{p}|\right)=(mc)^2 \tag{2.26}$$

と変形し，$\hat{\mathbf{p}}$ とエネルギー作用素

$$\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}=ic\hbar\frac{\partial}{\partial x_0} \tag{2.27}$$

を用いた置き換え

$$E\to\hat{E},\qquad \mathbf{p}\to\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\mathbf{p}} \tag{2.28}$$

を適用すると

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot i\hbar\nabla\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot i\hbar\nabla\right)=(mc)^2 \tag{2.29}$$

となる．これを 2 成分の波動関数 $\phi_L(x)$ に作用させると，次のような 2 階の偏微分方程式が得られる．

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot i\hbar\nabla\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot i\hbar\nabla\right)\phi_L(x)=(mc)^2\phi_L(x). \tag{2.30}$$

ここで，波動関数の変数 x は $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\mathbf{r},ict)$ を表すものとする．2 成分の波動関数 $\phi_R(x)$ を

$$\phi_R(x)=\frac{i\hbar}{mc}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\nabla\right)\phi_L(x) \tag{2.31}$$

と定義すると，式 (2.30) は次の 2 つの 1 階偏微分方程式の組み合わせと等価になる．

$$\begin{aligned}i\hbar\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\nabla-\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\phi_L(x)&=-mc\phi_R(x),\\ -i\hbar\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\nabla+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\phi_R(x)&=-mc\phi_L(x).\end{aligned} \tag{2.32}$$

ここで，$\psi_A(x)$ と $\psi_B(x)$ を

$$\psi_A(x)=\phi_R(x)+\phi_L(x),\qquad \psi_B(x)=\phi_R(x)-\phi_L(x) \tag{2.33}$$

と定義し，式 (2.32) の 2 式の和と差をとると

$$\begin{aligned}-i\hbar\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\nabla\psi_B(x)+\frac{\partial}{\partial x_0}\psi_A(x)\right)&=-mc\psi_A(x),\\ i\hbar\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\nabla\psi_A(x)+\frac{\partial}{\partial x_0}\psi_B(x)\right)&=-mc\psi_B(x)\end{aligned} \tag{2.34}$$

が得られる．式 (2.34) を簡潔に書き直すために，4 成分の波動関数 $\psi(x)$ と 4×4 の行列で表される 4 つの作用素 $\hat{\gamma}_\mu$(ガンマ行列) を次のように定義する．

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_A(x) \\ \psi_B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

$$\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

ここで，I_2 は 2×2 の単位行列である．パウリ行列の性質により，ガンマ行列 $\hat{\gamma}_\mu$ は次のような反交換関係

$$\{\hat{\gamma}_\mu, \hat{\gamma}_\nu\} = \hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{2.37}$$

を満たす対角和 0 のエルミート作用素である ($\dagger$ はエルミート共役を表す)．

$$\hat{\gamma}_\mu^\dagger = \hat{\gamma}_\mu. \tag{2.38}$$

$\psi(x)$ と $\hat{\gamma}_\mu$ を用いると，式 (2.34) は次のように書き換えられる．

$$\left(\sum_\mu \hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0. \tag{2.39}$$

これが，電磁場が存在しない場合の電子の振舞いを記述するディラック方程式である．相対論的な波動方程式であるためには，方程式が相対論的に共変であること，波動関数を用いて確率流密度と確率密度を適当に定義した場合にそれらが連続の式を満たすこと，その連続の式が相対論的に共変であること，確率密度が常に 0 以上の値をとること，確率密度の全空間での積分が定数になることなどが必要となるが，ディラック方程式はこれらを全て満たしている (付録 B)．

いま，$\hat{\gamma}_\mu$ により定義される作用素 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3)$ と $\hat{\beta}$ を

$$\hat{\alpha}_k = i\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ \hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\beta} = \hat{\gamma}_4 \tag{2.40}$$

と定義し，式 (2.39) に $\hat{\gamma}_4$ を作用させて変形すると，ディラック方程式はハミルトニアン $\hat{H}$ を用いた形式で次のように書くことができる．

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t), \qquad \hat{H} = -ic\hbar\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\nabla + mc^2\hat{\beta} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\mathbf{p}} + mc^2\hat{\beta}. \tag{2.41}$$

式 (2.41) のハミルトニアンは，式 (2.25) の E に対応している．また，式 (2.37) より $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ と $\hat{\beta}$ は次のような反交換関係を満たす対角和 0 のエルミート作用素である．

$$\{\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j\} = 2\delta_{ij}, \qquad \{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}\} = 0, \qquad \hat{\beta}^2 = I_4. \tag{2.42}$$

ここで，I_4 は 4×4 の単位行列である．電磁場中の電子に関するディラック方程式は，シュレディンガー方程式の場合と同様に，式 (2.39) や式 (2.41) に式 (2.18) の置き換えを施すことによって得られる．

2.2　一様磁場が存在する場合のディラック方程式の解

本節では，式 (2.18) の置き換えを施したディラック方程式を解くことにより，一様磁場中における電子のエネルギー固有値とエネルギー固有状態を求める．

2.2.1　1 次元調和振動子

一様磁場が存在する場合のディラック方程式を解くための準備として，1 次元調和振動子のエネルギー固有値とエネルギー固有状態を求める．

古典論において 1 次元調和振動子のハミルトニアンは，一般化座標 q と一般化運動量 p を用いて次のように与えられる．

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2. \tag{2.43}$$

ここで，m と ω はそれぞれ粒子の質量と振動数である．q と p を正準交換関係

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar \tag{2.44}$$

を満たすエルミート作用素 $\hat{q}$ と $\hat{p}$ に置き換えると，式 (2.43) の $H(q,p)$ に対応する作用素 $\hat{H}$(以下，単にハミルトニアン) は

$$\hat{H} = H(\hat{q},\hat{p}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2 \tag{2.45}$$

と与えられる．いま $\hat{q}$ と $\hat{p}$ を，式 (2.44) を満たすように

$$\hat{q} = q, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dq} \tag{2.46}$$

とおくと，1 次元調和振動子のエネルギー固有値 E とエネルギー固有状態 $\varphi(q)$ に対して成り立つ固有値方程式

$$\hat{H}\varphi(q) = E\varphi(q) \tag{2.47}$$

は

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 q^2\right]\varphi(q) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(q) \tag{2.48}$$

という微分方程式に書き換えることができる．式 (2.48) を直接解くのは非常に難しいため，ここでは生成消滅作用素を用いて E と $\varphi(q)$ を求める方法を示す．

まず，作用素 $\hat{a}$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \tag{2.49}$$

と定義する．$\hat{a}$ とそのエルミート共役 $\hat{a}^\dagger$ の間には，交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{2.50}$$

が成り立つ．$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて，$\hat{q}$ と $\hat{p}$ を

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{2.51}$$

と表し，これを式 (2.45) に代入すると，$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \tag{2.52}$$

と書ける．よって，作用素 $\hat{n}$ を

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{2.53}$$

と定義すると，$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.54}$$

と書ける．

$\hat{n}^\dagger = (\hat{a}^\dagger\hat{a})^\dagger = \hat{n}$ より，$\hat{n}$ はエルミート作用素である．よって，$\hat{n}$ の固有値 n は実数であり，その固有ベクトルを $|n\rangle$ とすると

$$\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{2.55}$$

が成り立つ．式 (2.55) より

$$n = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|n\right\rangle = \|\hat{a}\,|n\rangle\,\|^2 \geq 0 \tag{2.56}$$

となり，固有値 n が 0 以上の実数であることが分かる．また，式 (2.50) より，$\hat{n}$ と $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ の交換関係は次のようになる．

$$[\hat{n}, \hat{a}] = -[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} = -\hat{a}, \qquad [\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \tag{2.57}$$

式 (2.57) の右から $|n\rangle$ を作用させると，次の式が得られる．

$$\hat{n}(\hat{a}\,|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}\,|n\rangle), \qquad \hat{n}(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle) = (n+1)(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle). \tag{2.58}$$

これらより，$\hat{a}\left|n\right\rangle$ と $\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle$ はそれぞれ

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = a_n\left|n-1\right\rangle, \tag{2.59}$$

$$\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = a'_n\left|n+1\right\rangle \tag{2.60}$$

と書ける．ここで，a_n と a'_n は規格化のための定数 (複素数) である．このように $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ は量子数 n を 1 だけ増減させて $\left|n\right\rangle$ を $\left|n-1\right\rangle$ と $\left|n+1\right\rangle$ に変化させる作用素であるため，それぞれ消滅作用素，生成作用素と呼ばれる．式 (2.59) を式 (2.56) に代入すると $n = |a_n|^2$ となるため，$a_n = \sqrt{n}$ とおけば

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \tag{2.61}$$

が得られる．また，式 (2.60) より $a'_n = \left\langle n+1\middle|\hat{a}^\dagger\middle|n\right\rangle$ であるため，式 (2.61) を用いると $a'_n = \sqrt{n+1}$ となり

$$\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \tag{2.62}$$

が得られる．式 (2.61) より，n が整数ではないと仮定すると，$\hat{a}$ を $\left|n\right\rangle$ に作用させ続けた場合には $n<0$ となるような状態 $\left|n\right\rangle$ が生じることになり，式 (2.56) と矛盾する．n が整数の場合，$\hat{a}$ を $\left|n\right\rangle$ に作用させて $\hat{a}\left|1\right\rangle = \left|0\right\rangle$ とし，もう一度 $\hat{a}$ を作用させると，$\sqrt{0}=0$ より

$$\hat{a}\left|0\right\rangle = 0 \tag{2.63}$$

となり，$n<0$ となるような状態は生じない．このため，n は 0 以上の整数である．よって，エネルギー固有値を E_n とすると

$$\hat{H}\left|n\right\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left|n\right\rangle \tag{2.64}$$

より

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.65}$$

であり，エネルギー固有状態は $\left|n\right\rangle$ である．

次に，エネルギー固有状態 $\left|n\right\rangle$ の座標表示 (波動関数)$\varphi_n(q) \equiv \left\langle q|n\right\rangle$ を求める．ここで，$\left|q\right\rangle$ は $\hat{q}$ の固有状態を表す．式 (2.63) に $\hat{p} = -i\hbar d/dq$ を代入して座標表示すると

$$\left(\frac{d}{dq} + \frac{m\omega}{\hbar}q\right)\varphi_0(q) = 0 \tag{2.66}$$

が得られる．これより，$\varphi_0(q)$ は

$$\varphi_0(q) = c_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2} \tag{2.67}$$

と書ける (c_0 は規格化定数)．$|\varphi_0(q)|^2$ を積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq|\varphi_0(q)|^2 = |c_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar}q^2} = |c_0|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = 1 \tag{2.68}$$

となるため，$c_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}$ とおけばよい．ここで，ガウスの積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-aq^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2.69}$$

を用いた (a は任意の実数)．よって，規格化された $\varphi_0(q)$ は次のようになる．

$$\varphi_0(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}. \tag{2.70}$$

次に，式 (2.62) を用いて得られる式

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}^\dagger |n-1\rangle = \cdots = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n |0\rangle \tag{2.71}$$

を座標表示して変形すると，$\varphi_n(q)$ は $\varphi_0(q)$ を用いて次のように表される．

$$\varphi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dq} \right)^n \varphi_0(q). \tag{2.72}$$

ここで，$\sqrt{m\omega/\hbar} q = Q$ とおき，式 (2.70) を用いると

$$\varphi_n(Q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(Q - \frac{d}{dQ}\right)^n \varphi_0(Q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(Q - \frac{d}{dQ}\right)^n e^{-\frac{Q^2}{2}} \tag{2.73}$$

が得られる．いま，任意の関数 $f(Q)$ に対して

$$\left(Q - \frac{d}{dQ}\right) f(Q) = -e^{\frac{Q^2}{2}} \frac{d}{dQ} \left(e^{-\frac{Q^2}{2}} f(Q)\right) \tag{2.74}$$

が成り立つことを用いると，数学的帰納法により次の式が導かれる．

$$\left(Q - \frac{d}{dQ}\right)^n f(Q) = (-1)^n e^{\frac{Q^2}{2}} \frac{d^n}{dQ^n} \left(e^{-\frac{Q^2}{2}} f(Q)\right). \tag{2.75}$$

これを用いると，$\varphi_n(q)$ は

$$\begin{aligned} \varphi_n(q) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{Q^2}{2}} (-1)^n e^{Q^2} \frac{d^n e^{-Q^2}}{dQ^n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q\right) \end{aligned} \tag{2.76}$$

と求められる．ここで，$H_n(Q)$ は

$$H_n(Q) = (-1)^n e^{Q^2} \frac{d^n e^{-Q^2}}{dQ^n} \tag{2.77}$$

であり，エルミート多項式という．式 (2.76) は，$q = 0$ を中心に振動する ($q = 0$ でポテンシャルエネルギーが 0 になる) 調和振動子のエネルギー固有関数であるが，$q = q_0$ を中心に振動する調和振動子のエネルギー固有関数は，式 (2.76) で q を $q - q_0$ で置き換えることにより得られる．また，エネルギー固有値は振動の中心を移動させても変化しない．本小節における議論は文献 [22] を参考にした．

2.2.2　一様磁場中における電子のエネルギー固有値とエネルギー固有状態

ディラック方程式と 1 次元調和振動子の解を用いて，一様磁場中における電子のエネルギー固有値 E とエネルギー固有状態 $\psi(\mathbf{r}, t)$ を求める．

ハミルトニアン $\hat{H}$ を用いて表されたディラック方程式 (2.41) に式 (2.18) の置き換えを適用すると

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t), \qquad \hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right) + mc^2\hat{\beta} + eA_0(\mathbf{r}) \tag{2.78}$$

となる．ここで，$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ と $A_0(\mathbf{r})$ を

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (-By, 0, 0), \qquad A_0(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.79}$$

とおくと，z 軸方向の一様磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, 0, B) \tag{2.80}$$

が存在する場合のハミルトニアン

$$\hat{H} = c\left\{\hat{\alpha}_x\left(\hat{p}_x + \frac{e}{c}By\right) + \hat{\alpha}_y\hat{p}_y + \hat{\alpha}_z\hat{p}_z\right\} + mc^2\hat{\beta} \tag{2.81}$$

が得られる．いま

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t) \tag{2.82}$$

を式 (2.78) の第 1 式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{E}{i\hbar}\psi(\mathbf{r}, t) \tag{2.83}$$

となるため

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, 0)e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \tag{2.84}$$

と書ける．よって，$t=0$ におけるエネルギー固有状態 $\psi(\mathbf{r},0)$ を計算すれば任意の時刻 t における $\psi(\mathbf{r},t)$ が求められる．これを再び式 (2.82) に代入すると，固有値方程式

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r},0)=\left[c\left\{\hat{\alpha}_x\left(\hat{p}_x+\frac{e}{c}By\right)+\hat{\alpha}_y\hat{p}_y+\hat{\alpha}_z\hat{p}_z\right\}+mc^2\hat{\beta}\right]\psi(\mathbf{r},0)=E\psi(\mathbf{r},0) \tag{2.85}$$

が得られる．ここで，交換関係 $[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{ij}$，$[\hat{p}_i,\hat{p}_j]=0$ より

$$[\hat{H},\hat{p}_x]=[\hat{H},\hat{p}_z]=0,\qquad [\hat{H},\hat{p}_y]\neq 0 \tag{2.86}$$

となるため，$\psi(\mathbf{r},0)$ は $\hat{H}$，$\hat{p}_x$，$\hat{p}_z$ の同時固有状態である．よって

$$\hat{p}_x\psi(\mathbf{r},0)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r},0)=p_x\psi(\mathbf{r},0), \tag{2.87}$$

$$\hat{p}_z\psi(\mathbf{r},0)\ =-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\psi(\mathbf{r},0)=p_z\psi(\mathbf{r},0) \tag{2.88}$$

が成り立ち

$$\psi(\mathbf{r},0)=\phi(y)e^{i\frac{p_xx+p_zz}{\hbar}} \tag{2.89}$$

と書けるため，$\psi(\mathbf{r},t)$ は

$$\psi(\mathbf{r},t)=\phi(y)e^{i\frac{p_xx+p_zz-Et}{\hbar}} \tag{2.90}$$

となる．式 (2.190) を式 (2.85) に代入すると次の式が得られる．

$$\left[c\left\{\hat{\alpha}_x\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)-\hat{\alpha}_yi\hbar\frac{d}{dy}+\hat{\alpha}_zp_z\right\}+mc^2\hat{\beta}\right]\phi(y)=E\phi(y). \tag{2.91}$$

ここで

$$\phi(y)=\begin{pmatrix}\phi_1(y)\\ \phi_2(y)\end{pmatrix} \tag{2.92}$$

のように $\phi(y)$ を 2 つの 2 成分スピノール $\phi_1(y)$ と $\phi_2(y)$ で表し，式 (2.91) に代入すると

$$\begin{aligned}\phi_1(y)&=\frac{c\left\{\hat{\sigma}_x\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)-\hat{\sigma}_yi\hbar\frac{d}{dy}+\hat{\sigma}_zp_z\right\}}{E-mc^2}\phi_2(y),\\ \phi_2(y)&=\frac{c\left\{\hat{\sigma}_x\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)-\hat{\sigma}_yi\hbar\frac{d}{dy}+\hat{\sigma}_zp_z\right\}}{E+mc^2}\phi_1(y)\end{aligned} \tag{2.93}$$

が得られる．まず $\phi_1(y)$ を求める．式 (2.93) の第 2 式を第 1 式に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left[E^2-(mc^2)^2\right]\phi_1(y)\\
&=c^2\left[\hat{\sigma}_x\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)-\hat{\sigma}_y i\hbar\frac{d}{dy}+\hat{\sigma}_z p_z\right]\left[\hat{\sigma}_x\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)-\hat{\sigma}_y i\hbar\frac{d}{dy}+\hat{\sigma}_z p_z\right]\phi_1(y)\\
&=c^2\left[\hat{\sigma}_x^2\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)^2-\hat{\sigma}_y^2\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+\hat{\sigma}_z^2p_z^2-\{\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y\}i\hbar\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)\frac{d}{dy}\right.\\
&\qquad\left.+\{\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_z\}p_z\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)-\{\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z\}i\hbar p_z\frac{d}{dy}-i\hbar\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x\frac{eB}{c}\right]\phi_1(y)
\end{aligned}\tag{2.94}$$

となる．ここで

$$\frac{d}{dy}\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)\phi_1(y)=\left[\frac{eB}{c}+\left(p_x+\frac{eB}{c}y\right)\frac{d}{dy}\right]\phi_1(y)\tag{2.95}$$

となることを用いた．パウリ行列の性質 (式 (A.16)) を用いると

$$\hat{\sigma}_x^2=\hat{\sigma}_y^2=\hat{\sigma}_z^2=I_2,\quad \{\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y\}=0,\quad \{\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z\}=0,\quad \{\hat{\sigma}_z,\hat{\sigma}_x\}=0,\quad \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x=-i\hat{\sigma}_z\tag{2.96}$$

より

$$c^2\left[\left(p_x+\frac{e}{c}By\right)^2-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+p_z^2-\frac{e\hbar B}{c}\hat{\sigma}_z\right]\phi_1(y)=\left[E^2-(mc^2)^2\right]\phi_1(y)\tag{2.97}$$

が得られる．ここで

$$\hat{K}=c^2\left[\left(p_x+\frac{e}{c}By\right)^2-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+p_z^2-\frac{e\hbar B}{c}\hat{\sigma}_z\right]\tag{2.98}$$

とおくと，$\hat{K}$ は

$$\begin{aligned}
&\hat{K}=\hat{F}+\hat{G}\\
&\hat{F}=F\left(y,\frac{d^2}{dy^2}\right)=c^2\left[\left(p_x+\frac{e}{c}By\right)^2-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+p_z^2\right],\qquad \hat{G}=G(\hat{\sigma}_z)=-e\hbar cB\hat{\sigma}_z
\end{aligned}\tag{2.99}$$

のように y と y による微分を含む作用素 $\hat{F}$ と，$\hat{\sigma}_z$ を含む作用素 $\hat{G}$ の和で表され

$$[\hat{K},\hat{F}]=[\hat{K},\hat{G}]=0\tag{2.100}$$

が成り立つ．よって，$\phi_1(y)$ を

$$\phi_1(y)=\varphi_1(y)\chi_s\tag{2.101}$$

のように y の関数 $\varphi_1(y)$ と 2 成分スピノール χ_s に変数分離すると，付録 A.3 の方法により式 (2.97) を次の 2 つの固有値方程式に帰着させることができる．

$$\hat{F}\varphi_1(y)=c^2\left[\left(p_x+\frac{e}{c}By\right)^2-\hbar^2\frac{d^2}{dy^2}+p_z^2\right]\varphi_1(y)=K_r\varphi_1(y),\tag{2.102}$$

$$\hat{G}\chi_s = -e\hbar cB\hat{\sigma}_z\chi_s = K_s\chi_s. \tag{2.103}$$

ここで，K_r と K_s は実数であり，次の式を満たす．

$$E^2 = K_r + K_s + (mc^2)^2. \tag{2.104}$$

まず，式 (2.103) について考える．$\hat{\sigma}_z$ の 2 つの固有状態を $|+\rangle$，$|-\rangle$ とすると

$$\hat{\sigma}_z\,|\pm\rangle = \pm\,|\pm\rangle\,, \qquad \text{(以下，複合同順)} \tag{2.105}$$

であるため，χ_s と K_s は次のように与えられる．

$$\chi_s = |\pm\rangle\,, \qquad K_s = \mp e\hbar cB = \pm|e|\hbar cB. \tag{2.106}$$

次に，式 (2.102) について考える．式 (2.102) は次のような形に変形することができる．

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{|e|B}{\hbar c}\right)^2\left(y - \frac{cp_x}{|e|B}\right)^2\right]\varphi_1(y) = \frac{(cp_z)^2 - K_r}{(c\hbar)^2}\varphi_1(y). \tag{2.107}$$

これは，1 次元調和振動子の固有値方程式 (2.48) において ω と E を

$$\omega = \frac{|e|B}{mc}, \qquad E = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(cp_z)^2 - K_r}{(c\hbar)^2} \tag{2.108}$$

と置き換え，振動の中心 y_0 を

$$y_0 = \frac{cp_x}{|e|B} \tag{2.109}$$

に移動させたものである．よって，式 (2.65) と式 (2.76) を用いることにより，K_r と $\varphi_1(y) = \varphi_{1n}(y)$ が得られる．

$$\begin{aligned} K_r &= c^2\left[p_z^2 + \frac{|e|\hbar B}{c}(2n+1)\right], \\ \varphi_{1n}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{|e|B}{\pi\hbar c}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|e|B}{2\hbar c}(y-y_0)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{|e|B}{\hbar c}}(y-y_0)\right), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{2.110}$$

よって，式 (2.104) に式 (2.106) と式 (2.110) で与えられる K_s と K_r を代入することにより，エネルギー固有値 $E = E_{n\sigma}$ は

$$E_{n\sigma} = \pm c\sqrt{p_z^2 + (mc)^2 + \frac{|e|\hbar B}{c}(2n+1+\sigma)}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \;\; \sigma = \pm 1 \tag{2.111}$$

となる．ここで，$\sigma = \pm 1$ は $\hat{\sigma}_z$ の固有状態を区別するための量子数である．また，$\phi_1(y) = \phi_{1n\sigma}(y)$ は規格化定数 N_n を用いて

$$\begin{aligned} \phi_{1n\sigma}(y) &= N_n e^{-\frac{|e|B}{2\hbar c}(y-y_0)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{|e|B}{\hbar c}}(y-y_0)\right)|\sigma\rangle\,, \\ &\qquad\qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \;\; \sigma = \pm 1 \end{aligned} \tag{2.112}$$

と表される．$\phi_2(y) = \phi_{2n\sigma}(y)$ は式 (2.93) に $\phi_{1n\sigma}(y)$ を代入することで得られるため，エネルギー固有状態 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は式 (2.90) により求められる．

2.3　ハイゼンベルグ-オイラーラグランジアン

本節では，シュインガー極限よりも十分強度が低い一様電磁場が真空中に存在する場合のラグランジアン密度を導出する．まず，前節で得られた一様磁場中における電子のエネルギー固有値を用いて，一様磁場のみが存在する場合のラグランジアン密度を求める．次に，このラグランジアン密度が相対論的に不変であることを利用して，互いに平行な一様電場と一様磁場が存在する場合のラグランジアン密度を導出する．得られるラグランジアン密度は電磁場のローレンツ不変量を用いて表すことができるため，対生成を引き起こさない任意の一様電磁場に対して成り立つ．

2.3.1　電磁場中における真空のエネルギーとラグランジアン密度の関係

電磁場が存在する場合の真空の全エネルギー E_0 は，電磁場中においてエネルギー固有状態にある電子の負のエネルギー固有値を全て足し合わせることにより求められる．

$$E_0 = \sum_n E_n^{(-)}. \tag{2.113}$$

ここで，n はエネルギー固有値に関する量子数であり，$E_n^{(-)}$ は負のエネルギー固有値を表す．また，E_0 中には電磁場自身のエネルギーは含まれていない．一方，エネルギー固有値 $E_n^{(-)}$ に対する固有状態を $\psi_n^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ とすると，スカラーポテンシャル $A_0(\mathbf{r})$ のために真空は期待値

$$\langle U_0 \rangle = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r \psi_n^{(-)\dagger}(\mathbf{r}, t) e A_0(\mathbf{r}) \psi_n^{(-)}(\mathbf{r}, t) \tag{2.114}$$

のポテンシャルエネルギーをもつ．これは真空の全電荷が 0 であることに矛盾するため，E_0 から $\langle U_0 \rangle$ を差し引いたものを真空のエネルギー W_0 と定義し直す．

$$W_0 = E_0 - \langle U_0 \rangle . \tag{2.115}$$

次に，E_0 を用いて $\langle U_0 \rangle$ を表す．パラメータ λ を含むハミルトニアンを $\hat{H}(\lambda)$ とし，その固有値と規格化された固有状態を量子数 n を用いてそれぞれ $E_n(\lambda)$，$\psi_n(\mathbf{r}, t, \lambda)$ と書く．このとき，固有値方程式

$$\hat{H}(\lambda)\psi_n(\mathbf{r}, t, \lambda) = E_n(\lambda)\psi_n(\mathbf{r}, t, \lambda) \tag{2.116}$$

が成り立ち，両辺を λ で微分すると

$$\frac{d\hat{H}(\lambda)}{d\lambda}\psi_n(\mathbf{r},t,\lambda)+\hat{H}(\lambda)\frac{\partial\psi_n(\mathbf{r},t,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{dE_n(\lambda)}{d\lambda}\psi_n(\mathbf{r},t,\lambda)+E_n(\lambda)\frac{\partial\psi_n(\mathbf{r},t,\lambda)}{\partial\lambda} \tag{2.117}$$

となる．ここで，両辺に $\psi_n^\dagger(\mathbf{r},t,\lambda)$ をかけて全空間で積分すると

$$\begin{aligned}\frac{dE_n(\lambda)}{d\lambda}&=\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^\dagger(\mathbf{r},t,\lambda)\frac{d\hat{H}(\lambda)}{d\lambda}\psi_n(\mathbf{r},t,\lambda)\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^\dagger(\mathbf{r},t,\lambda)\left(\hat{H}(\lambda)-E_n(\lambda)\right)\frac{\partial\psi_n(\mathbf{r},t,\lambda)}{\partial\lambda}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^\dagger(\mathbf{r},t,\lambda)\frac{d\hat{H}(\lambda)}{d\lambda}\psi_n(\mathbf{r},t,\lambda)\end{aligned} \tag{2.118}$$

が得られる．いま，$A_0(\mathbf{r})$ により得られる電場 $\mathbf{E}$ が空間的に一様であるとすると，$A_0(\mathbf{r})$ は

$$A_0(\mathbf{r})=-\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} \tag{2.119}$$

と書ける．よって，$\mathbf{E}$ を λ と同様にパラメータとして扱うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_0(\mathbf{E})}{\partial E_i}&=\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^{(-)\dagger}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})\frac{\partial\hat{H}(\mathbf{E})}{\partial E_i}\psi_n^{(-)}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})\\&=\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^{(-)\dagger}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})\frac{\partial eA_0(\mathbf{r})}{\partial E_i}\psi_n^{(-)}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})\\&=\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^{(-)\dagger}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})(-ex_i)\psi_n^{(-)}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})\end{aligned} \tag{2.120}$$

が得られ，これにより E_0 と $\langle U_0\rangle$ の間に次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\sum_i E_i\frac{\partial E_0(\mathbf{E})}{\partial E_i}&=\mathbf{E}\cdot\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^{(-)\dagger}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})(-e\mathbf{r})\psi_n^{(-)}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})\\&=\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^{(-)\dagger}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})(-e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r})\psi_n^{(-)}(\mathbf{r},t,\mathbf{E})\\&=\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\psi_n^{(-)\dagger}(\mathbf{r},t)eA_0(\mathbf{r})\psi_n^{(-)}(\mathbf{r},t)\\&=\langle U_0\rangle\,.\end{aligned} \tag{2.121}$$

よって，W_0 は

$$W_0=E_0-\sum_i E_i\frac{\partial E_0}{\partial E_i} \tag{2.122}$$

となり，真空のエネルギー密度 w_0 は E_0 のエネルギー密度を $\mathcal{E}_0$ として次のように書くことができる．

$$w_0 = \mathcal{E}_0 - \sum_i E_i \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial E_i}. \tag{2.123}$$

式 (C.42) より，系の状態を記述する独立変数としてベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを合わせた 4 次元ベクトル $A_\mu(\mathbf{r},t) = (\mathbf{A}(\mathbf{r},t), iA_0(\mathbf{r},t))$ とその微分をとると，ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ とハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ の間には

$$\mathcal{H} = \sum_\mu \dot{A}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}\left(A_\mu, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_i}, \dot{A}_\mu\right)}{\partial \dot{A}_\mu} - \mathcal{L}\left(A_\mu, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_i}, \dot{A}_\mu\right) \tag{2.124}$$

の関係が成り立つ．電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ が $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ と $A_0(\mathbf{r},t)$ を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \nabla A_0(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{2.125}$$

と書けることを用いると，古典的な真空中におけるラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{cl}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cl} &= \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) - \mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)\right) \\ &= \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla A_0(\mathbf{r},t)\right)^2 - (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2\right]\end{aligned} \tag{2.126}$$

のように $A_\mu(\mathbf{r},t)$ とその微分で表される．このラグランジアン密度を式 (2.124) に代入すると，$\partial\mathcal{L}_{cl}/\partial\dot{A}_0 = 0$ と $\partial\mathcal{L}_{cl}/\partial\dot{A}_i = -E_i/4\pi c$ より，ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{cl} &= \sum_i \dot{A}_i \frac{\partial \mathcal{L}_{cl}}{\partial \dot{A}_i} - \mathcal{L}_{cl} \\ &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \nabla A_0(\mathbf{r},t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) - \mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)\right) \\ &= \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)\right) + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla A_0(\mathbf{r},t) \\ &= w_{cl} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla A_0(\mathbf{r},t)\end{aligned} \tag{2.127}$$

となる．ここで，w_{cl} は

$$w_{cl} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)\right) \tag{2.128}$$

であり，古典的な真空中における電磁場のエネルギー密度を表す．

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{cl}}{\partial \dot{A}_i} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{L}_{cl}}{\partial E_i} \tag{2.129}$$

を用いると，w_{cl} は

$$w_{cl} = \mathcal{H}_{cl} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla A_0(\mathbf{r},t) = \sum_i E_i \frac{\partial \mathcal{L}_{cl}}{\partial E_i} - \mathcal{L}_{cl} \tag{2.130}$$

と表される．よって，系の状態を記述する変数として電磁場やベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルを用いることができる場合，一般にエネルギー密度 w はラグランジアン密度を用いて

$$w = \sum_i E_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} - \mathcal{L} \tag{2.131}$$

と書ける．いま，真空中における電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}' \tag{2.132}$$

のように $\mathcal{L}_{cl}$ と量子力学的な補正項 $\mathcal{L}'$ の和で表すと，エネルギー密度 w は

$$\begin{aligned} w &= \sum_i E_i \frac{\partial \mathcal{L}_{cl}}{\partial E_i} - \mathcal{L}_{cl} + \sum_i E_i \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial E_i} - \mathcal{L}' \\ &= w_{cl} + \sum_i E_i \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial E_i} - \mathcal{L}' \end{aligned} \tag{2.133}$$

となる．ここで，電磁場のみが存在する系全体のエネルギーが，真空のエネルギーと電磁場のエネルギーの和で表されることを考慮すると

$$w = w_0 + w_{cl} \tag{2.134}$$

が成り立つため，w_0 は

$$w_0 = \sum_i E_i \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial E_i} - \mathcal{L}' \tag{2.135}$$

と表される．よって，式 (2.123) と式 (2.135) から $\mathcal{L}'$ は

$$\mathcal{L}' = -\mathcal{E}_0 \tag{2.136}$$

と書ける．よって，電磁場中における電子の負のエネルギー固有値の和を計算することで，真空中における電磁場のラグランジアン密度が求められる．以下では，空間的にも時間的にも一様な電磁場中におけるラグランジアン密度を，粒子対が生成されない，つまり

$$|\mathbf{E}| \ll E_{sch} = \frac{m^2c^3}{|e|\hbar} \tag{2.137}$$

という条件の下で求める．

2.3.2　一様磁場が存在する場合のラグランジアン密度

まず，一様磁場のみが存在する場合について考える．式 (2.111) より，z 方向の一様磁場 $\mathbf{B}=(0,0,B)$ 中における電子の負のエネルギー固有値 $E_{n\sigma}^{(-)}$ は

$$E_{n\sigma}^{(-)}=-c\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{|e|\hbar B}{c}\,(2n+1+\sigma)},\qquad n=0,1,2,\cdots,\ \ \sigma=\pm1 \tag{2.138}$$

と与えられる．ここで，エネルギー固有状態は $\hat{H}$，$\hat{p}_x$，$\hat{p}_z$，$\hat{\sigma}_z$ の同時固有状態であるため，エネルギー固有値 $E_{n\sigma}^{(-)}$ をもつ全ての状態のエネルギーの和は，$\hat{p}_x$ と $\hat{p}_z$ の固有値 p_x と p_z について足し合わせた

$$\sum_{p_x}\sum_{p_z}E_{n\sigma}^{(-)} \tag{2.139}$$

で与えられる．ここでは p_x と p_z についての和を表すために $\sum$ を用いたが，実際には p_x と p_z は連続的な固有値なので積分で表される．いま，電子が体積 V の直方体中に閉じ込められていると仮定すると，周期的境界条件より $\hat{p}_x$ と $\hat{p}_z$ の固有値が $p_x\sim p_x+\Delta p_x$，$p_z\sim p_z+\Delta p_z$ の値をとるような状態の数は，それぞれ $(L_x/2\pi\hbar)\Delta p_x$ と $(L_z/2\pi\hbar)\Delta p_z$ で与えられる．ここで，L_x と L_z は立方体の x と z 方向の辺の長さである．エネルギー固有状態の導出過程で述べたように，$\varphi_1(y)$ が満たす固有値方程式は点 $y=y_0=cp_x/|e|B$ を中心に振動する 1 次元調和振動子の波動方程式と同じ形になる．よって，電子の y 軸方向の運動は，どのようなエネルギー固有状態においても常に磁場 B と x 軸方向の運動量固有値 p_x の大きさで決まる振動中心 $y=y_0$ をもつ．よって，$y=y_0$ は必ず直方体中に含まれる点でなければならないため，直方体の頂点が座標の原点と一致している場合には

$$0\le y_0\le L_y \tag{2.140}$$

が成り立つ必要がある．これに $y_0=cp_x/|e|B$ を代入することで，p_x に対する条件

$$0\le p_x\le\frac{|e|BL_y}{c} \tag{2.141}$$

が得られる．よって，$\Delta p_x\to0$，$\Delta p_z\to0$ としてエネルギー固有値が $E_{n\sigma}^{(-)}$ で与えられる全てのエネルギー固有状態の数 N を求めると

$$N=\int_0^{\frac{|e|BL_y}{c}}dp_x\frac{L_x}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dp_z\frac{L_z}{2\pi\hbar}=\frac{|e|BV}{(2\pi\hbar)^2c}\int_{-\infty}^{\infty}dp_z \tag{2.142}$$

となる．このため，$\mathcal{E}_0$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \frac{|e|B}{(2\pi\hbar)^2 c}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm 1} E_{n\sigma}^{(-)} \\ &= -\frac{|e|B}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}(n+1)}\right] \\ &= -\frac{|e|B}{2\pi^2\hbar^2}\int_{0}^{\infty} dp_z \left[\sqrt{p_z^2+(mc)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}\right]\end{aligned} \tag{2.143}$$

となり，$\mathcal{L}'$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -\mathcal{E}_0 \\ &= \frac{|e|B}{2\pi^2\hbar^2}\int_{0}^{\infty} dp_z \left[\sqrt{p_z^2+(mc)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}\right].\end{aligned} \tag{2.144}$$

式 (2.144) の右辺の積分は発散するため，繰り込みという手法を使ってこれを有限な値をもつ量に置き換える必要がある．まず，パラメータ λ と n の関数

$$F(n,\lambda) = \int_0^{\infty} dp_z \sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}\, e^{-\lambda\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}} \tag{2.145}$$

を導入し，$\mathcal{L}'(\lambda)$ を

$$\mathcal{L}'(\lambda) = \frac{|e|B}{2\pi^2\hbar^2}\left(F(0,\lambda)+2\sum_{n=1}^{\infty}F(n,\lambda)\right) = \frac{|e|B}{\pi^2\hbar^2}\left(\frac{1}{2}F(0,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}F(n,\lambda)\right) \tag{2.146}$$

と定義する．$\lambda\to 0$ で $\mathcal{L}'(\lambda)$ が有限な値をもつ $\mathcal{L}'$ に収束するように関数 $F(n,\lambda)$ を決定する．オイラー-マクローリンの積分公式 [23] を $F(n,\lambda)$ に対して適用すると，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_0^N dn F(n,\lambda) &= \frac{1}{2}F(0,\lambda)+\sum_{n=1}^{N-1}F(n,\lambda)+\frac{1}{2}F(N,\lambda) \\ &\quad -\sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(N,\lambda)-F^{(2k-1)}(0,\lambda)\right] \\ &\quad +\frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dn B_{2q}(n)\sum_{\nu=0}^{N-1}F^{(2q)}(n+\nu,\lambda).\end{aligned} \tag{2.147}$$

ここで，$F^{(k)}(n,\lambda)$ は $F(n,\lambda)$ の n に関する k 階導関数であり，B_k と $B_k(s)$ はそれぞれ

$$B_k = \left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]_{x=0}, \qquad \frac{xe^{xs}}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty}B_k(s)\frac{x^k}{k!} \tag{2.148}$$

で定義されるベルヌーイ数 $B_0=1, B_1=-1/2, B_2=1/6, B_3=0, B_4=-1/30, \cdots$ とベルヌーイ関数である．式 (2.147) において $q\to\infty$ とすると，次の式が得られる．

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N-1}F(n,\lambda)&=-\frac{1}{2}F(0,\lambda)-\frac{1}{2}F(N,\lambda)+\int_0^N dnF(n,\lambda)\\&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(N,\lambda)-F^{(2k-1)}(0,\lambda)\right].\end{aligned}\tag{2.149}$$

また，式 (2.145) より

$$\lim_{n\to\infty}F(n,\lambda)=\lim_{n\to\infty}F^{(k)}(n,\lambda)=0\tag{2.150}$$

であるため，式 (2.149) で $N\to\infty$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(n,\lambda)=-\frac{1}{2}F(0,\lambda)+\int_0^{\infty}dnF(n,\lambda)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}F^{(2k-1)}(0,\lambda)\tag{2.151}$$

が得られる．よって，$\mathcal{L}'(\lambda)$ は次のように書ける．

$$\mathcal{L}'(\lambda)=\frac{|e|B}{\pi^2\hbar^2}\left[\int_0^{\infty}dnF(n,\lambda)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}F^{(2k-1)}(0,\lambda)\right].\tag{2.152}$$

いま，式 (2.145) に

$$(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n=\kappa^2,\qquad\frac{\sqrt{p_z^2+\kappa^2}}{\kappa}=u\tag{2.153}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}F(n,\lambda)&=\int_0^{\infty}dp_z\sqrt{p_z^2+\kappa^2}e^{-\lambda\sqrt{p_z^2+\kappa^2}}=\kappa^2\int_1^{\infty}du\frac{u^2}{\sqrt{u^2-1}}e^{-\lambda\kappa u}\\&=\frac{d^2}{d\lambda^2}\int_1^{\infty}du\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}e^{-\lambda\kappa u}=\frac{d^2}{d\lambda^2}K_0(\lambda\kappa)\end{aligned}\tag{2.154}$$

と書ける．ここで，$K_0(x)$ は第 2 種変形ベッセル関数

$$K_\nu(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_1^{\infty}dpe^{-xp}(p^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}},\qquad\nu>-\frac{1}{2}\tag{2.155}$$

において $\nu=0$ としたものであり，漸化式

$$K_{\nu-1}(x)+K_{\nu+1}(x)=-2K'_\nu(x),\qquad K_{\nu-1}(x)-K_{\nu+1}(x)=-\frac{2\nu}{x}K_\nu(x)\tag{2.156}$$

と

$$K_{-\nu}(x)=K_\nu(x)\tag{2.157}$$

を満たす [24]．式 (2.156) と式 (2.157) を用いると

$$
\begin{aligned}
K_0'(x) &= -\frac{1}{2}(K_{-1}(x) + K_1(x)) = -K_1(x), \\
K_1'(x) &= -\frac{1}{2}(K_0(x) + K_2(x)) = -\frac{1}{2}\left[K_2(x) - \frac{2}{x}K_1(x) + K_2(x)\right] \\
&= \frac{1}{x}K_1(x) - K_2(x)
\end{aligned}
\tag{2.158}
$$

が得られるため $K_0''(x)$ は

$$
K_0''(x) = -K_1'(x) = -\frac{1}{x}K_1(x) + K_2(x) \tag{2.159}
$$

となる．よって，式 (2.159) を式 (2.154) に代入すると，$F(n,\lambda)$ は $v = \lambda\kappa$ を用いて次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
F(n,\lambda) &= \kappa^2 \frac{d^2}{d(\lambda\kappa)^2}K_0(\lambda\kappa) = \kappa^2 \frac{d^2}{dv^2}K_0(v) \\
&= \kappa^2\left[-\frac{1}{v}K_1(v) + K_2(v)\right] = -\frac{\kappa^2}{v}\left(K_1(v) - vK_2(v)\right) \\
&= -\frac{1}{\lambda^2}\left(vK_1(v) - v^2K_2(v)\right).
\end{aligned}
\tag{2.160}
$$

ここで，n に関する微分を v に関する微分に書き直すと

$$
\frac{d}{dn} = \frac{dv}{dn}\frac{d}{dv} = \lambda\frac{|e|\hbar B}{c\kappa}\frac{d}{dv} = \lambda^2\frac{|e|\hbar B}{c}\frac{1}{v}\frac{d}{dv} \tag{2.161}
$$

となる．また，漸化式 (2.156) を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{v}\frac{d}{dv}(v^\nu K_\nu(v)) &= \frac{1}{v}(\nu v^{\nu-1}K_\nu(v) + v^\nu K_\nu'(v)) \\
&= \frac{1}{v}\left[-\frac{v^\nu}{2}\left(K_{\nu-1}(v) - K_{\nu+1}(v)\right) - \frac{v^\nu}{2}\left(K_{\nu-1}(v) + K_{\nu+1}(v)\right)\right] \\
&= -v^{\nu-1}K_{\nu-1}(v)
\end{aligned}
\tag{2.162}
$$

となるため

$$
\left(\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\right)^m (v^\nu K_\nu(v)) = (-1)^m v^{\nu-m}K_{\nu-m}(v) \tag{2.163}
$$

が成り立つ．式 (2.161) と式 (2.163) を用いて式 (2.160) を計算すると

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dn}\right)^m F(n,\lambda) &= \left(\lambda^2\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^m \left(\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\right)^m F(n,\lambda) \\
&= -\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^m \left(\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\right)^m (vK_1(v) - v^2K_2(v)) \\
&= (-1)^{m+1}\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^m \left(v^{1-m}K_{1-m}(v) - v^{2-m}K_{2-m}(v)\right)
\end{aligned}
\tag{2.164}
$$

が得られる．よって，式 (2.152) に式 (2.160) と式 (2.164) を代入すると，$\mathcal{L}'(\lambda)$ は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(\lambda) &= \frac{|e|B}{\pi^2\hbar^2}\Bigg[-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty dn\left(vK_1(v)-v^2K_2(v)\right) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(-1)^{2k}\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^{2k-1}\left(v^{2-2k}K_{2-2k}(v)-v^{3-2k}K_{3-2k}(v)\right)\Bigg] \\
&= \frac{|e|B}{\pi^2\hbar^2}\Bigg[-\frac{1}{\lambda^2}\int_{mc\lambda}^\infty dv\frac{cv}{|e|\hbar B\lambda^2}v\left(K_1(v)-vK_2(v)\right) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^{2k-1}\left(v^{2-2k}K_{2-2k}(v)-v^{3-2k}K_{3-2k}(v)\right)\Bigg] \\
&= -\frac{1}{\lambda^4}\frac{c}{\pi^2\hbar^3}\int_{mc\lambda}^\infty dvv^2\left(K_1(v)-vK_2(v)\right) \\
&\quad -\frac{|e|B}{\pi^2\hbar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^{2k-1}\Big[(\lambda mc)^{2-2k}K_{2-2k}(\lambda mc) \\
&\qquad -(\lambda mc)^{3-2k}K_{3-2k}(\lambda mc)\Big].
\end{aligned}
\tag{2.165}
$$

式 (2.165) において $\mathcal{L}'(\lambda)$ は

$$
\mathcal{L}'(\lambda) = C_0(\lambda)+C_2(\lambda)(|e|B)^2+\sum_{k=2}^{\infty}C_{2k}(\lambda)(|e|B)^{2k} \tag{2.166}
$$

のように $|e|B$ のべき級数で表されているが，$C_0(\lambda)$ と $C_2(\lambda)$ は

$$
\begin{aligned}
C_0(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda^4}\frac{c}{\pi^2\hbar^3}\int_{mc\lambda}^\infty dvv^2\left(K_1(v)-vK_2(v)\right), \\
C_2(\lambda) &= -\frac{B_2}{2\pi^2\hbar c}\left(K_0(\lambda mc)-\lambda mcK_1(\lambda mc)\right)
\end{aligned}
\tag{2.167}
$$

であり，$v\to 0$ で $K_0(v)$ と $K_m(v)$ がそれぞれ

$$
K_0(v)\to -\ln v,\qquad K_m(v)\to (m-1)!2^{m-1}v^{-m}\qquad (m>0) \tag{2.168}
$$

となることを用いると，$\lambda\to 0$ のとき

$$
C_0(\lambda)=O(\lambda^{-4})\to\infty,\qquad C_2(\lambda)\to\frac{\ln(\lambda mc)}{12\pi^2\hbar c}\to-\infty \tag{2.169}
$$

となり，$C_0(\lambda)$ と $C_2(\lambda)$ は発散する．ここで，式 (2.152) を用いて $C_0(\lambda)$ を運動量空間での積分に書き直すと

$$
\begin{aligned}
C_0(\lambda) &= \frac{|e|B}{\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty dnF(n,\lambda) \\
&= \frac{|e|B}{\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty dn\int_0^\infty dp_z\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}\,e^{-\lambda\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}}.
\end{aligned}
\tag{2.170}
$$

ここで，$p_\perp^2 = (2|e|\hbar B/c)n$ とおくと

$$
\begin{aligned}
C_0(\lambda) &= \frac{c}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\left(\frac{2|e|\hbar B}{c}n\right)\int_0^\infty dp_z\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}e^{-\lambda\sqrt{p_z^2+(mc)^2+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}} \\
&= \frac{c}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty dp_\perp^2\int_0^\infty dp_z\sqrt{p_z^2+p_\perp^2+(mc)^2}e^{-\lambda\sqrt{p_z^2+p_\perp^2+(mc)^2}} \\
&= \frac{c}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty dp_\perp^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\infty}^\infty dp_z\sqrt{p_z^2+p_\perp^2+(mc)^2}e^{-\lambda\sqrt{p_z^2+p_\perp^2+(mc)^2}}
\end{aligned}
\tag{2.171}
$$

となり，$dp_\perp^2/dp_\perp = 2p_\perp$ であることより

$$
\begin{aligned}
C_0(\lambda) = \frac{2c}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty p_\perp dp_\perp\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\infty}^\infty dp_z\sqrt{p_z^2+p_\perp^2+(mc)^2} \\
\times\, e^{-\lambda\sqrt{p_z^2+p_\perp^2+(mc)^2}}
\end{aligned}
\tag{2.172}
$$

となる．ここで,$p_x = p_\perp\cos\varphi, p_y = p_\perp\sin\varphi$ とおくと，$\int_{-\infty}^\infty dp_x\int_{-\infty}^\infty dp_y = \int_0^\infty p_\perp dp_\perp\int_0^{2\pi} d\varphi$ より

$$
C_0(\lambda) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_{-\infty}^\infty d^3p\sqrt{(\mathbf{p}c)^2+(mc^2)^2}e^{-\lambda\sqrt{\mathbf{p}^2+(mc)^2}} \tag{2.173}
$$

が得られる．よって，$C_k = \lim_{\lambda\to 0} C_k(\lambda)$ とすると，C_0 は自由電子の負のエネルギー固有値の和を全体積で割ったもの，つまり電磁場が存在しない真空のエネルギー密度に等しい．よって，電磁場が存在しない場合の真空をエネルギーの基準にとって考えると，ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}' - C_0 \\
&= \mathcal{L}_{cl} + C_2(|e|B)^2 + \sum_{k=2}^\infty C_{2k}(|e|B)^{2k} \\
&= -(1-8\pi|e|^2C_2)\frac{B^2}{8\pi} + \sum_{k=2}^\infty C_{2k}(|e|B)^{2k}
\end{aligned}
\tag{2.174}
$$

と書ける．ここで，式 (2.174) の $-B^2/8\pi$ の係数は $1-8\pi|e|^2C_2$ となっているが，B が十分小さい場合にはラグランジアン密度は $-B^2/8\pi$ と表されることが実験的に分かっている．よって，いま

$$
e_R = \frac{e}{\sqrt{1-8\pi|e|^2C_2}}, \qquad B_R = \frac{e}{e_R}B = \sqrt{1-8\pi|e|^2C_2}B \tag{2.175}
$$

のように e_R と B_R を定義して式 (2.174) に代入すると，$\mathcal{L}$ は

$$
\mathcal{L} = -\frac{B_R^2}{8\pi} + \sum_{k=2}^\infty C_{2k}(|e_R|B_R)^{2k} = \mathcal{L}_{clR} + \mathcal{L}'_R \tag{2.176}
$$

と書くことができ，実験から求められるラグランジアン密度と同じ形になる．ここで用いた e_R と B_R は実験的に観測される電荷と磁場の大きさであり，繰り込まれた電荷，磁場という．以下では，式 (2.176) を単に

$$\mathcal{L} = -\frac{B^2}{8\pi} + \sum_{k=2}^{\infty} C_{2k}(|e|B)^{2k} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}' \tag{2.177}$$

と書き表すことにする．このように，電荷や場の振幅の大きさなどを実際の観測値と合うように置き換える操作を繰り込みという．繰り込みにより，$\mathcal{L}'$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=2}^{\infty} C_{2k}(\lambda)(|e|B)^{2k} \\ &= -\frac{c}{\pi^2\hbar^3}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\lambda^{4k-4}\left(\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^{2k}(\lambda mc)^{2-2k} \\ &\qquad \times\left[K_{2k-2}(\lambda mc) - \lambda mc K_{2k-3}(\lambda mc)\right]\end{aligned} \tag{2.178}$$

と書ける．ここで，式 (2.157) を用いた．さらに式 (2.168) を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -\frac{c}{\pi^2\hbar^3}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\lambda^{4k-4}\left(\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^{2k}(\lambda mc)^{2-2k} \\ &\qquad \times\left[(2k-3)!2^{2k-3}(\lambda mc)^{2-2k} - (2k-4)!2^{2k-4}(\lambda mc)^{4-2k}\right] \\ &= -\frac{c}{\pi^2\hbar^3}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(mc)^{4-4k}\left(\frac{|e|\hbar B}{c}\right)^{2k} \\ &\qquad \times\left[(2k-3)!2^{2k-3} - (2k-4)!2^{2k-4}(\lambda mc)^2\right] \\ &= -\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\sum_{k=2}^{\infty}B_{2k}(mc)^{4-4k}\frac{(2k-3)!}{(2k)!}\left(\frac{2|e|\hbar B}{c}\right)^{2k}\end{aligned} \tag{2.179}$$

となる．ここで，ガンマ関数 [24]

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} d\eta e^{-\eta}\eta^{x-1} = (x-1)! \tag{2.180}$$

を用いると，$\mathcal{L}'$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\sum_{k=2}^{\infty}B_{2k}(mc)^{4-4k}\frac{\Gamma(2k-2)}{(2k)!}\left(\frac{2|e|\hbar B}{c}\right)^{2k} \\ &= -\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\sum_{k=2}^{\infty}B_{2k}(mc)^{4-4k}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{2|e|\hbar B}{c}\right)^{2k}\int_0^{\infty} d\eta e^{-\eta}\eta^{2k-3} \\ &= -\frac{m^2c^2|e|B}{8\pi^2\hbar^2}\int_0^{\infty} d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{|e|\hbar B}{m^2c^3}\eta\right)^{2k-1}\end{aligned} \tag{2.181}$$

と変形することができる．ここで，$\coth x = 1/\tanh x$ が

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \cdots = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \tag{2.182}$$

とテイラー展開されることを用いると，$\mathcal{L}'$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= -\frac{m^2c^2|e|B}{8\pi^2\hbar^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^2} \left[\coth\left(\frac{|e|\hbar B}{m^2c^3}\eta\right) - \left(\frac{m^2c^3}{|e|\hbar B\eta}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{|e|\hbar B}{m^2c^3}\eta\right)\right] \\
&= \frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[-\frac{B}{B_{sch}}\eta \coth\left(\frac{B}{B_{sch}}\eta\right) + 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{B}{B_{sch}}\eta\right)^2\right] \\
&= \frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[-b\eta \coth(b\eta) + 1 + \frac{1}{3}(b\eta)^2\right].
\end{aligned} \tag{2.183}$$

ここで，$B_{sch} = m^2c^3/|e|\hbar$，$b = B/B_{sch}$ とおいた．これが一様磁場が存在する場合の補正項 $\mathcal{L}'$ である．

2.3.3　一様電場が存在する場合のラグランジアン密度

次に一様電場のみが存在する場合の補正項 $\mathcal{L}'$ について考える．電磁場の 2 乗により得られるローレンツ不変量は

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \qquad \mathcal{G} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{2.184}$$

であり ($\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ のローレンツ不変性については式 (3.11) を参照のこと)，$\mathbf{E} = 0$ の場合には

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathbf{B}^2, \qquad \mathcal{G} = 0, \tag{2.185}$$

また，$\mathbf{B} = 0$ の場合には

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 = \frac{1}{2}(i\mathbf{E})^2, \qquad \mathcal{G} = 0 \tag{2.186}$$

となるため，$\mathbf{E} = (0,0,E)$，$\mathbf{B} = 0$ の電磁場のローレンツ不変量と $\mathbf{E} = 0$，$\mathbf{B} = (0,0,iE)$ の電磁場のローレンツ不変量は等しい．よって，ラグランジアン密度が相対論的に不変であるために $\mathcal{L}'$ がローレンツ不変量 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の関数で書かれていることを考慮とすると，$\mathbf{E} = (0,0,E)$，$\mathbf{B} = 0$ の場合の $\mathcal{L}'$ は式 (2.183) に $B = iE$ を代入して

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[-\frac{iE}{B_{sch}}\eta \coth\left(\frac{iE}{B_{sch}}\eta\right) + 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{iE}{B_{sch}}\eta\right)^2\right] \\
&= \frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[-\frac{E}{E_{sch}}\eta \cot\left(\frac{E}{E_{sch}}\eta\right) + 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{E}{E_{sch}}\eta\right)^2\right] \\
&= \frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[-a\eta \cot(a\eta) + 1 - \frac{1}{3}(a\eta)^2\right]
\end{aligned} \tag{2.187}$$

となる．ここで，$E_{sch} = B_{sch} = m^2c^3/|e|\hbar$，$a = E/E_{sch}$ とおき，$\coth(ix) = -i\cot x$ を用いた．

2.3.4　一様電磁場が存在する場合のラグランジアン密度

次に，互いに平行な一様電場と一様磁場が存在する場合の補正項 $\mathcal{L}'$ について考える．ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ とスカラーポテンシャル $A_0(\mathbf{r})$ をそれぞれ $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (-By, 0, 0)$，$A_0(\mathbf{r}) = -Ez$ とおくと，電磁場は $\mathbf{E} = (0, 0, E)$，$\mathbf{B} = (0, 0, B)$ となり，両方とも z 方向を向く．ことのき，ハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = c\left\{\hat{\alpha}_x\left(\hat{p}_x + \frac{eB}{c}y\right) + \hat{\alpha}_y\hat{p}_y + \hat{\alpha}_z\hat{p}_z\right\} + mc^2\hat{\beta} - eEz \tag{2.188}$$

で与えられるため，交換関係

$$[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0, \qquad [\hat{H}, \hat{p}_y] \neq 0, \qquad [\hat{H}, \hat{p}_z] \neq 0 \tag{2.189}$$

より，$t = 0$ におけるエネルギー固有状態 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は $\hat{H}$ と $\hat{p}_x$ の同時固有状態であり

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(y, z)e^{i\frac{p_x x - Et}{\hbar}} \tag{2.190}$$

と書ける．よって，一様磁場のみが存在する場合と同様に計算を進めると，$\phi(y, z)$ を式 (2.92) のように 2 つの 2 成分スピノールに分けたときの $\phi_1(y, z)$ は

$$\phi_1(y, z) = \varphi_E(z)\varphi_B(y)\chi_s \tag{2.191}$$

のように変数分離することができ，それに対するエネルギー固有値には式 (2.111) と同様に $(mc^2)^2 + |e|\hbar cB\,(2n + 1 + \sigma)$ という量が含まれることになる．よって，電子のすべてのエネルギー固有状態の数 N が，一様磁場中の電子のエネルギー固有状態と同様に

$$N \propto \int_0^{\frac{|e|BL_y}{c}} dp_x \propto |e|B \tag{2.192}$$

のように $|e|B$ に比例することを用いると，$\mathcal{E}_0$ は

$$\mathcal{E}_0 \propto |e|B\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm 1}\sum_m E_{n\sigma,m} \tag{2.193}$$

と表される．ここで，$E_{n\sigma,m}$ はエネルギー固有値であり，m は一様電場の印加により生じる量子数を表す．いま，E と B の関数 $\Phi(E, B)$ を次のように定義する．

$$\Phi(E, B) = \frac{d^2\mathcal{E}_0}{dM^2}. \tag{2.194}$$

ここで，$M=(mc)^2$ である．次元に関する考察とエネルギー固有値の形から，$\Phi(E,B)$ は無次元の関数 $\Lambda(x)$ を用いて次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}\Phi(E,B) &= \frac{|e|c^2B}{\hbar^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm1}\frac{\Lambda\left(\frac{Mc^2+|e|\hbar cB(2n+1+\sigma)}{|e|\hbar cE}\right)}{Mc^2+|e|\hbar cB\,(2n+1+\sigma)} \\ &= \frac{|e|c^2B}{\hbar^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm1}\frac{\Lambda\left(\frac{(mc^2)^2+|e|\hbar cB(2n+1+\sigma)}{|e|\hbar cE}\right)}{(mc^2)^2+|e|\hbar cB\,(2n+1+\sigma)}.\end{aligned} \tag{2.195}$$

a と b を用いると，$\Phi(E,B)$ は

$$\begin{aligned}\Phi(E,B) &= \frac{cb}{\hbar^3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm1}\frac{\Lambda\left(\frac{1+b(2n+1+\sigma)}{a}\right)}{1+b\,(2n+1+\sigma)} \\ &= \frac{cb}{\hbar^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\Lambda\left(\frac{1+2nb}{a}\right)}{1+2nb}+\frac{\Lambda\left(\frac{1+2(n+1)b}{a}\right)}{1+2(n+1)b}\right] \\ &= \frac{cb}{\hbar^3}\left[\Lambda\left(\frac{1}{a}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda\left(\frac{1+2nb}{a}\right)}{1+2nb}\right]\end{aligned} \tag{2.196}$$

と表される．ここで，$b\to 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}2b\frac{\Lambda\left(\frac{1+2nb}{a}\right)}{1+2nb}\to\int_0^{\infty}d(2nb)\frac{\Lambda\left(\frac{1+2nb}{a}\right)}{1+2nb}=\int_0^{\infty}dn_b\frac{\Lambda\left(\frac{1+n_b}{a}\right)}{1+n_b} \tag{2.197}$$

となる ($n_b=2nb$) ことを用いると，$\Phi(E,0)$ は次のように書ける．

$$\Phi(E,0)=\lim_{B\to0}\Phi(E,B)=\frac{c}{\hbar^3}\int_0^{\infty}dn_b\frac{\Lambda\left(\frac{1+n_b}{a}\right)}{1+n_b}=\frac{c}{\hbar^3}\int_{\frac{1}{a}}^{\infty}dz\frac{\Lambda(z)}{z}. \tag{2.198}$$

ここで，$z=(1+n_b)/a$ とおいた．

$\mathcal{E}_0$ がローレンツ変換に対して不変であることから，$\Phi(E,B)$ もローレンツ変換の下で値が変化しないので，$\Phi(E,B)$ はローレンツ不変量 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の関数で表される．よって，$\mathbf{E}=(0,0,E)$，$\mathbf{B}=0$ に対するローレンツ不変量と $\mathbf{E}=0$，$\mathbf{B}=(0,0,iE)$ に対するローレンツ不変量が等しいことから

$$\Phi(E,0)=\Phi(0,iE) \tag{2.199}$$

が成り立つ．よって，式 (2.143) より

$$\begin{aligned}\Phi(0,B) &= -\frac{|e|B}{2\pi^2\hbar^2}\frac{d^2}{dM^2}\int_0^\infty dp_z\left[\sqrt{p_z^2+M}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{p_z^2+M+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}\right]\\ &= \frac{|e|B}{8\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty dp_z\left[(p_z^2+M)^{-\frac{3}{2}}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_z^2+M+\frac{2|e|\hbar B}{c}n\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\\ &= \frac{|e|B}{8\pi^2\hbar^2}\left(\frac{1}{M}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{M+\frac{2|e|\hbar B}{c}n}\right)\end{aligned} \tag{2.200}$$

が得られる．ここで，$p_z = M^{\frac{1}{2}}\tan\theta$ とおき

$$\int_0^\infty dp_z(p_z^2+M)^{-\frac{3}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\frac{M^{\frac{1}{2}}}{\cos^2\theta}\frac{1}{M^{\frac{3}{2}}(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\frac{\cos\theta}{M} = \frac{1}{M} \tag{2.201}$$

を用いた．さらに

$$\int_0^\infty d\eta e^{-M\eta} = \frac{1}{M} \tag{2.202}$$

を用いると，$\Phi(0,B)$ は

$$\begin{aligned}\Phi(0,B) &= \frac{|e|B}{8\pi^2\hbar^2}\left(\int_0^\infty d\eta e^{-M\eta}+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty d\eta e^{-\left(M+\frac{2|e|\hbar B}{c}n\right)\eta}\right)\\ &= \frac{|e|B}{8\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty d\eta e^{-M\eta}\left(2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{2|e|\hbar B}{c}n\eta}-1\right)\\ &= \frac{|e|B}{8\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty d\eta e^{-M\eta}\left(\frac{2}{1-e^{-\frac{2|e|\hbar B}{c}\eta}}-1\right)\\ &= \frac{|e|B}{8\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty d\eta e^{-M\eta}\coth\left(\frac{|e|\hbar B}{c}\eta\right)\end{aligned} \tag{2.203}$$

と変形することができるため，$\coth(ix) = -i\cot x$ を用いると $\Phi(E,0)$ が求められる．

$$\begin{aligned}\Phi(E,0) &= \Phi(0,iE)\\ &= \frac{|e|E}{8\pi^2\hbar^2}\int_0^\infty d\eta e^{-M\eta}\cot\left(\frac{|e|\hbar E}{c}\eta\right)\\ &= \frac{c}{\hbar^3}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty d\zeta e^{-\frac{\zeta}{a}}\cot\zeta.\end{aligned} \tag{2.204}$$

ここで，$\zeta = |e|\hbar E\eta/c$ とおいた．よって，式 (2.198) と式 (2.204) を比較すると次の式が得られる．

$$\int_{\frac{1}{a}}^\infty dx\frac{\Lambda(x)}{x} = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty dx e^{-\frac{x}{a}}\cot x. \tag{2.205}$$

ここで，$s=1/a$ とおき，式 (2.205) の両辺を s で微分すると

$$\Lambda(s)=\frac{s}{8\pi^2}\int_0^\infty dxe^{-sx}x\cot x \tag{2.206}$$

が得られるため，これを式 (2.196) に代入すると

$$\begin{aligned}\Phi(E,B)&=\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{b}{a}\left[\int_0^\infty dxe^{-\frac{x}{a}}x\cot x+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty dxxe^{-\frac{1+2nb}{a}x}\cot x\right]\\&=\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{b}{a}\int_0^\infty dxe^{-\frac{x}{a}}x\cot x\left(2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{2bx}{a}n}-1\right)\\&=\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{b}{a}\int_0^\infty dxe^{-\frac{x}{a}}x\cot x\left(\frac{2}{1-e^{-\frac{2bx}{a}}}-1\right)\\&=\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{b}{a}\int_0^\infty dxe^{-\frac{x}{a}}x\cot x\coth\left(\frac{b}{a}x\right)\\&=\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{B}{E}\int_0^\infty dxe^{-\frac{Mc}{|e|\hbar E}x}x\cot x\coth\left(\frac{B}{E}x\right)\end{aligned} \tag{2.207}$$

が得られる．よって，$\Phi(E,B)=d^2\mathcal{E}_0/dM^2=-d^2\mathcal{L}'/dM^2$ より

$$\frac{d\mathcal{L}'}{dM}=a_1-\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{B}{E}\int_0^\infty dx\left(-\frac{|e|\hbar E}{cx}e^{-\frac{Mc}{|e|\hbar E}x}+b_1\right)x\cot x\coth\left(\frac{B}{E}x\right), \tag{2.208}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'=a_1M+a_2-\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{B}{E}\int_0^\infty dx&\left[\left(\frac{|e|\hbar E}{cx}\right)^2e^{-\frac{Mc}{|e|\hbar E}x}+b_1M+b_2\right]\\&\times x\cot x\coth\left(\frac{B}{E}x\right)\end{aligned} \tag{2.209}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}C_1&=c^2\left[a_1-\frac{cb_1}{8\pi^2\hbar^3}\frac{B}{E}\int_0^\infty dxx\cot x\coth\left(\frac{B}{E}x\right)\right],\\C_2&=a_2-\frac{cb_2}{8\pi^2\hbar^3}\frac{B}{E}\int_0^\infty dxx\cot x\coth\left(\frac{B}{E}x\right)\end{aligned} \tag{2.210}$$

とおくと，C_1 と C_2 は m に依存しない定数であり，$\mathcal{L}'$ は C_1 と C_2 を用いて

$$\mathcal{L}'=-\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\frac{B}{E}\int_0^\infty dx\left(\frac{|e|\hbar E}{c}\right)^2\frac{e^{-\frac{m^2c^3}{|e|\hbar E}x}}{x}\cot x\coth\left(\frac{B}{E}x\right)+C_1m^2+C_2 \tag{2.211}$$

と書ける．ここで，$\mathcal{L}'$ の積分を展開した式が a と b のべき級数で表されることと，$\mathcal{L}'$ がエネルギー密度の次元をもつことを考慮すると，$\mathcal{L}'$ は無次元の関数 $f(a,b)$ を用いて次のように表される．

$$\mathcal{L}'=\frac{m^4c^5}{\hbar^3}f(a,b)=\frac{m^4c^5}{\hbar^3}f\left(\frac{|e|\hbar}{m^2c^3}E,\frac{|e|\hbar}{m^2c^3}B\right). \tag{2.212}$$

よって，C_1 と C_2 は m に依存しない定数 C_1'，C_1''，C_2'，C_2''，C_2''' を用いて

$$C_1 = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |e|(C_1'E + C_1''B), \qquad C_2 = \frac{|e|^2}{\hbar c}(C_2'E^2 + C_2''B^2 + C_2'''EB) \tag{2.213}$$

と書けるが，C_1 は m に依存しないため，$C_1 = C_1' = C_1'' = 0$ となる．いま，$\eta = x/a$ とおいて $\mathcal{L}'$ を

$$\mathcal{L}' = -\frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} a\eta\cot(a\eta) b\eta\coth(b\eta) + C_2 \tag{2.214}$$

と表し

$$\begin{aligned} x\cot x &= x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \\ x\coth x &= x\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \end{aligned} \tag{2.215}$$

を用いて $\mathcal{L}'$ を項別積分すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = &-\frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^3} + \frac{|e|^2}{\hbar c}(C_2'E^2 + C_2''B^2 + C_2'''EB) \\ &- \frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left[\frac{\eta^2}{3}(b^2-a^2) - \frac{\eta^4}{9}a^2b^2 + \cdots\right] \\ = &-\frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^3} + C_2'''\frac{|e|^2}{\hbar c}EB + \frac{|e|^2}{\hbar c}\left(C_2' + \frac{1}{24\pi^2}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta}\right)E^2 \\ &+ \frac{|e|^2}{\hbar c}\left(C_2'' - \frac{1}{24\pi^2}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta}\right)B^2 + \frac{m^4c^5}{72\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta e^{-\eta}(\eta a^2b^2 + \cdots) \end{aligned} \tag{2.216}$$

となる．ここで

$$C_0 = -\frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \tag{2.217}$$

とおくと，$\mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}'$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}' = C_0 &+ C_2'''\frac{|e|^2}{\hbar c}EB + \frac{1}{8\pi}\left[1 + \frac{8\pi|e|^2}{\hbar c}\left(C_2' + \frac{1}{24\pi^2}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta}\right)\right]E^2 \\ &- \frac{1}{8\pi}\left[1 - \frac{8\pi|e|^2}{\hbar c}\left(C_2'' - \frac{1}{24\pi^2}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta}\right)\right]B^2 \\ &+ \frac{m^4c^5}{72\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta e^{-\eta}(\eta a^2b^2 + \cdots) \end{aligned} \tag{2.218}$$

と書ける．いま，E と B が十分小さい場合に $\mathcal{L} \simeq (E^2 - B^2)/8\pi$ となるように，定数 C_2'，C_2''，C_2''' を

$$C_2' = -\frac{1}{24\pi^2}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta}, \qquad C_2'' = \frac{1}{24\pi^2}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta}, \qquad C_2''' = 0 \tag{2.219}$$

とおき，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}' - C_0$ とすると，式 (2.214) より $\mathcal{L}'$ は次のように表される．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -\frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left(a\eta\cot(a\eta)b\eta\coth(b\eta)-1\right)\\ &\quad+\frac{|e|^2}{24\pi^2\hbar c}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta}(-a^2+b^2)E_{sch}^2\\ &=\frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left[-a\eta\cot(a\eta)b\eta\coth(b\eta)+1+\frac{\eta^2}{3}(b^2-a^2)\right].\end{aligned}\tag{2.220}$$

これが互いに平行な一様電場と一様磁場が存在する場合の，真空中のラグランジアン密度に対する補正項である．ここで

$$\begin{aligned}\cot\alpha\coth\beta &= -i\cot\alpha\cot(i\beta)\\ &= -i\frac{e^{\beta+i\alpha}+e^{-(\beta+i\alpha)}+e^{\beta-i\alpha}+e^{-(\beta-i\alpha)}}{e^{\beta+i\alpha}+e^{-(\beta+i\alpha)}-\left(e^{\beta-i\alpha}+e^{-(\beta-i\alpha)}\right)}\\ &= -i\frac{\cos(\beta+i\alpha)+\cos(\beta-i\alpha)}{\cos(\beta+i\alpha)-\cos(\beta-i\alpha)}\\ &= -i\frac{\cos\sqrt{\beta^2-\alpha^2+2i\alpha\beta}+\cos\sqrt{\beta^2-\alpha^2-2i\alpha\beta}}{\cos\sqrt{\beta^2-\alpha^2+2i\alpha\beta}-\cos\sqrt{\beta^2-\alpha^2-2i\alpha\beta}}\end{aligned}\tag{2.221}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\cot(a\eta)\coth(b\eta) &= -i\frac{\cos\left(\eta\sqrt{b^2-a^2+2iab}\right)+\cos\left(\eta\sqrt{b^2-a^2-2iab}\right)}{\cos\left(\eta\sqrt{b^2-a^2+2iab}\right)-\cos\left(\eta\sqrt{b^2-a^2-2iab}\right)}\\ &= -i\frac{\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}+i\mathcal{G})}\right)+\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}-i\mathcal{G})}\right)}{\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}+i\mathcal{G})}\right)-\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}-i\mathcal{G})}\right)}\end{aligned}\tag{2.222}$$

より，$\mathcal{L}'$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{m^4c^5}{8\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\eta\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\\ &\quad\times\left[i\eta^2\frac{\mathcal{G}}{E_{sch}^2}\frac{\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}+i\mathcal{G})}\right)+\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}-i\mathcal{G})}\right)}{\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}+i\mathcal{G})}\right)-\cos\left(\frac{\eta}{E_{sch}}\sqrt{2(\mathcal{F}-i\mathcal{G})}\right)}\right.\\ &\qquad\left.+1+\frac{2\eta^2}{3}\frac{\mathcal{F}}{E_{sch}^2}\right]\end{aligned}\tag{2.223}$$

と表すことができる．これは条件 (2.137) を満たす任意の一様電磁場 (平行でなくても良い) に対して成り立つ $\mathcal{L}'$ の表式であり，ハイゼンベルグ-オイラーラグランジアンという．本節における議論は文献 [25, 26] を参考にした．

2.4　本章のまとめ

本章では，まず電子に関する相対論的な波動方程式であるディラック方程式について述べ，一様磁場中における電子のエネルギー固有値とエネルギー固有状態を求めた．このエネルギー固有値を用いることで，シュインガー極限よりも強度が十分低い一様電磁場が真空中に存在する場合のラグランジアン密度 (ハイゼンベルグ-オイラーラグランジアン) を導出した．本章で得られたラグランジアン密度は，電子のコンプトン波長よりも十分長い波長をもつ光の電磁場に対して良い近似となることが知られている．

第 3 章

真空と光の相互作用を計算するための理論モデル

本章では，シュインガー極限よりも十分強度の低い光と真空の相互作用を計算するための理論モデルについて述べる．まず，前章で得られたハイゼンベルグ-オイラーラグランジアンを用いて真空中における Maxwell 方程式を導出し，物質中における Maxwell 方程式との比較により，真空中の分極と磁化を定義する．また，レーザー光が照射された場合に真空から放射される光の電磁場を，レーザー光よりも放射光の方が十分強度が低いという仮定の下で計算する．

3.1 真空中の分極と磁化

本節では電磁場の変数 (空間座標 $\mathbf{r}$ と時刻 t) を省略する．真空中における電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を古典的な真空中におけるラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{cl}$ とハイゼンベルグ-オイラーラグランジアン $\mathcal{L}'$ の和 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}'$ で表す．前章で述べたように，$\mathcal{L}$ は振幅がシュインガー極限に相当する電場強度 E_{sch} よりも十分小さく，波長が電子のコンプトン波長 $\lambda\!\!\!^{-}_c = \hbar/mc$ よりも十分長い電磁場に対して良い近似となることが知られている．式 (2.220) により与えられる $\mathcal{L}'$ の右辺の被積分関数に $\cot x = i\coth(ix)$ と式 (2.182) を適用すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left[-a\eta\cot(a\eta)b\eta\coth(b\eta)+1+\frac{\eta^2}{3}(b^2-a^2)\right] \\
=&\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left[-ia\eta\coth(ia\eta)b\eta\coth(b\eta)+1+\frac{\eta^2}{3}(b^2-a^2)\right] \\
=&\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\Bigg[-ia\eta\left(\frac{1}{ia\eta}+\frac{ia\eta}{3}-\frac{(ia\eta)^3}{45}+\frac{2(ia\eta)^5}{945}+\cdots\right) \\
&\qquad\times b\eta\left(\frac{1}{b\eta}+\frac{b\eta}{3}-\frac{(b\eta)^3}{45}+\frac{2(b\eta)^5}{945}+\cdots\right)+1+\frac{\eta^2}{3}(b^2-a^2)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

のように，微小量 a と b に関してテイラー展開することができる．これを変形して得られる関数

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left[\left(\frac{a^4+b^4}{45}+\frac{a^2b^2}{9}\right)\eta^4+\left\{\frac{a^4b^2-a^2b^4}{135}+\frac{2(a^6-b^6)}{945}\right\}\eta^6+\cdots\right] \\
=&\frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left[\frac{\eta^4}{45}\left\{(b^2-a^2)^2+7(ab)^2\right\}-\frac{\eta^6}{945}(b^2-a^2)\left\{2(b^2-a^2)^2+13(ab)^2\right\}+\cdots\right]
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

を式 (2.220) に代入し，右辺を項別積分すると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{m^4c^5}{360\pi^2\hbar^3}\left[(b^2-a^2)^2+7(ab)^2\right]-\frac{m^4c^5}{1260\pi^2\hbar^3}(b^2-a^2)\left[2(b^2-a^2)^2+13(ab)^2\right]+\cdots \\
&= \frac{\alpha}{360\pi^2E_{sch}^2}\left[\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)^2+7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\right] \\
&\quad -\frac{\alpha}{1260\pi^2E_{sch}^4}\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)\left[2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)^2+13\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\right]+\cdots \\
&= \frac{\alpha}{360\pi^2E_{sch}^2}\left(4\mathcal{F}^2+7\mathcal{G}^2\right)-\frac{\alpha}{630\pi^2E_{sch}^4}\mathcal{F}\left(8\mathcal{F}^2+13\mathcal{G}^2\right)+\cdots
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

のように $\mathcal{L}'$ は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の級数で表される．ここで

$$
\int_0^\infty d\eta\eta e^{-\eta}=1,\qquad \int_0^\infty d\eta\eta^3e^{-\eta}=6 \tag{3.4}
$$

を用いた．$\alpha = e^2/\hbar c$ は微細構造定数である．$\mathcal{L}'$ を電磁場に対する非線形項の和として $\mathcal{L}'=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}'_n$ のように表すと，電磁場の強度が E_{sch} よりも十分小さい場合には最低次数の非線形項

$$
\mathcal{L}'_1=\frac{\alpha}{360\pi^2E_{sch}^2}\left(4\mathcal{F}^2+7\mathcal{G}^2\right) \tag{3.5}
$$

のみを考えればよいため，本研究では $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{cl}+\mathcal{L}'_1$ として計算を行う．

次に，場のオイラー-ラグランジュ方程式 (C.36) を $\mathcal{L}$ に対して適用し，真空中における Maxwell 方程式を導く．ここでは，系の状態を記述する変数として 4 次元ベクトルポテンシャル $A_\mu=(\mathbf{A},iA_0)$ を選ぶことにする．4 次元テンソル $F_{\mu\nu}$ を

$$
F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{3.6}
$$

と定義すると，$F_{\mu\nu}$ は

$$
F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu} \tag{3.7}
$$

を満たす反対称テンソルであり，式 (2.125) より $F_{\mu\nu}$ の各成分は次のように与えられる．

$$
F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}
$$

式 (3.7)，式 (3.8) を用いると，$F_{\mu\nu}$ の和に関して次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F_{\nu\mu}\\ &= -\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -iE_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3\\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0\end{pmatrix}^2\right] = 2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right) = 4\mathcal{F},\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\sum_\mu\sum_\nu\sum_\lambda\sum_\sigma F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F_{\lambda\sigma}F_{\sigma\mu} &= \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -iE_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3\\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0\end{pmatrix}^4\right]\\ &= 2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)^2 + 4\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2 = 8\mathcal{F}^2+4\mathcal{G}^2.\end{aligned} \tag{3.10}$$

ここで，Tr は行列の対角和を表す．式 (3.9) と式 (3.10) を用いると，$\mathcal{F}^2$ と $\mathcal{G}^2$ はそれぞれ次のように表される．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^2 &= \frac{1}{16}\left(\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)^2,\\ \mathcal{G}^2 &= -\frac{1}{8}\left(\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_\mu\sum_\nu\sum_\lambda\sum_\sigma F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F_{\lambda\sigma}F_{\sigma\mu}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

よって，式 (3.11) を用いると $\mathcal{L}_{cl}$ と $\mathcal{L}'_1$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cl} &= -\frac{1}{16\pi}\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}\sum_\mu\sum_\nu\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right),\\ \mathcal{L}'_1 &= \frac{\alpha}{2880\pi^2E_{sch}^2}\left[-5\left(\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)^2 + 14\sum_\mu\sum_\nu\sum_\lambda\sum_\sigma F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F_{\lambda\sigma}F_{\sigma\mu}\right]\\ &= \frac{\alpha}{2880\pi^2E_{sch}^2}\left[-5\left\{\sum_\mu\sum_\nu\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\right\}^2\right.\\ &\qquad + 14\sum_\mu\sum_\nu\sum_\lambda\sum_\sigma\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda}\right)\\ &\qquad\qquad \left.\times\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma}\right)\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma}-\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.12}$$

のように，A_μ の微分 $\partial A_\mu/\partial x_\nu$ の関数として表される．よって

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}_{cl}}{\partial A_\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}'_1}{\partial A_\beta} = 0, \qquad \beta = 1,2,3,4 \tag{3.13}$$

が成り立つため，式 (C.36) は

$$\sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}\right)}\right)=0, \qquad \beta=1,2,3,4 \tag{3.14}$$

と書き直すことができる．式 (3.14) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
&\sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}\right)}\right)\\
=&\sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{cl}}{\partial\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}\right)}\right)+\sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1'}{\partial\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}\right)}\right)\\
=&\frac{1}{4\pi}\sum_\gamma \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}\\
&+\frac{\alpha}{360\pi^2 E_{sch}^2}\sum_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(5F_{\beta\gamma}\sum_\mu\sum_\nu F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-14\sum_\mu\sum_\nu F_{\beta\mu}F_{\gamma\nu}F_{\mu\nu}\right)\\
=&\begin{cases}
\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)-\xi\Big[\nabla\times\left\{2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)\mathbf{B}+7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{E}\right\} & \\
\qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)\mathbf{E}-7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{B}\right\}\Big], & \beta=1,2,3\\
i\left[\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\mathbf{E}-\xi\nabla\cdot\left\{2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)\mathbf{E}-7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{B}\right\}\right], & \beta=4
\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

となる．ここで，$\xi=\alpha/180\pi^2E_{sch}^2$ である．よって

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}&=\xi\left\{7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{B}-2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)\mathbf{E}\right\}=\xi\left(7\mathcal{G}\mathbf{B}-4\mathcal{F}\mathbf{E}\right),\\
\mathbf{M}&=\xi\left\{7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{E}+2\left(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2\right)\mathbf{B}\right\}=\xi\left(7\mathcal{G}\mathbf{E}+4\mathcal{F}\mathbf{B}\right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

とおくと，式 (3.14) と式 (3.15) より

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+4\pi\left(\nabla\times\mathbf{M}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right), \qquad \nabla\cdot\mathbf{E}=-4\pi\nabla\cdot\mathbf{P} \tag{3.17}$$

が得られる．式 (2.125) より得られる

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.18}$$

と式 (3.17) を合わせたものが，量子力学的な効果を取り入れた真空中の Maxwell 方程式である．誘電体中の Maxwell 方程式 [27] との類似性から，式 (3.16) の $\mathbf{P}$ と $\mathbf{M}$ をそれぞれ真空中の分極，磁化という．

式 (3.16) に第 4 章で導かれるレーザー光の電磁場を代入すると，集光強度が $10^{26}\mathrm{W/cm^2}$ 以下の場合には，$\mathbf{P}$ と $\mathbf{M}$ の振幅は $\mathcal{L}_2'$ から導かれる分極と磁化の振幅よりも 3 桁以上大きくなる．よって，$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_1'$ の近似は妥当であるといえる．第 5 章以降の計算では分極と磁化の 2 次以上の項を無視し，式 (3.16) で与えられる最低次の分極と磁化のうち基本周波数で振動する項のみを考える．

3.2　真空中から放射される光の電磁場

前節で得られた式 (3.17) と式 (3.18) を用いると，$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ の伝搬を表す波動方程式が得られる．

$$\Box\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mathbf{S}_e(\mathbf{r},t), \qquad \Box\mathbf{B}(\mathbf{r},t)= -\mathbf{S}_b(\mathbf{r},t). \tag{3.19}$$

ここで，$\Box = \nabla^2 - \partial^2/\partial(ct)^2$ であり，$\mathbf{S}_e(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{S}_b(\mathbf{r},t)$ はそれぞれ式 (3.16) の $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_e(\mathbf{r},t) &= 4\pi\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\nabla\times\frac{\partial\mathbf{M}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right], \\ \mathbf{S}_b(\mathbf{r},t) &= 4\pi\left[\frac{1}{c}\nabla\times\frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r},t)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

と表される．いま，真空中に $(\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_i(\mathbf{r},t))$ で表される光が入射し，光と真空の相互作用によりその電磁場が $(\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t))$ だけ変化する場合を考えると，入射後の光の電磁場は次のように表される．

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_i(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}_r(\mathbf{r},t). \tag{3.21}$$

ここで，$\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{B}_i(\mathbf{r},t)$ は古典的な真空における波動方程式の解であるため

$$\Box\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t) = 0, \qquad \Box\mathbf{B}_i(\mathbf{r},t)= 0 \tag{3.22}$$

が成り立つ．よって，次の方程式が得られる．

$$\Box\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t) = -\mathbf{S}_e(\mathbf{r},t), \qquad \Box\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)= -\mathbf{S}_b(\mathbf{r},t). \tag{3.23}$$

$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ が $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ の多項式で表されることから，

$$|\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t)| \gg |\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)|, \qquad |\mathbf{B}_i(\mathbf{r},t)| \gg |\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)| \tag{3.24}$$

の場合には，$\mathbf{S}_e(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{S}_b(\mathbf{r},t)$ は $\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{B}_i(\mathbf{r},t)$ のみに依存する項で近似することができる．よって，$\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)$ は初期条件

$$\lim_{t\to-\infty}\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t) = \lim_{t\to-\infty}\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t) = 0 \tag{3.25}$$

と境界条件

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)=\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)=0 \tag{3.26}$$

の下で線形な波動方程式を解くことにより求められるため，式 (D.34) を用いて次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)&=\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\frac{\mathbf{S}_e\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\\ \mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)&=\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\frac{\mathbf{S}_b\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

この電磁場 $\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)$ からなる光を真空からの放射光という．

$\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{S}_e(\mathbf{r},t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $\mathbf{E}_r(\mathbf{r},\omega)$，$\mathbf{S}_e(\mathbf{r},\omega)$ とすると，$\mathbf{E}_r(\mathbf{r},\omega)$ は次のように表される．

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}dt\mathbf{S}_e\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)e^{-i\omega t}. \tag{3.28}$$

変数変換を用いることにより

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{S}_e\left(\mathbf{r}',\omega\right) \tag{3.29}$$

が得られる．

真空中の分極 $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ と磁化 $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ を，次のように周波数 $\omega_l(l=1,2,\cdots)$ で振動する成分 $\mathbf{P}_{\omega_l}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{M}_{\omega_l}(\mathbf{r},t)$ の和で表す．

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{P}_{\omega_l}(\mathbf{r},t),\qquad \mathbf{M}(\mathbf{r},t)=\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{M}_{\omega_l}(\mathbf{r},t). \tag{3.30}$$

また，分極と磁化の各周波数成分の複素振幅を $\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_l}(\mathbf{r})$，$\tilde{\mathbf{M}}_{\omega_l}(\mathbf{r})$ とし，$\mathbf{P}_{\omega_l}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{M}_{\omega_l}(\mathbf{r},t)$ を次のようにおく．

$$\mathbf{P}_{\omega_l}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_l}(\mathbf{r})e^{-i\omega_l t}+c.c.,\quad \mathbf{M}_{\omega_l}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{M}}_{\omega_l}(\mathbf{r})e^{-i\omega_l t}+c.c. \tag{3.31}$$

ここで，$c.c.$ は前項の複素共役 (complex conjugate) を表す．いま

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\delta(x)f(x)=f(0) \tag{3.32}$$

により定義されるデルタ超関数 $\delta(x)$ と，その積分表示

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ikx} \tag{3.33}$$

を用いると，$\mathbf{S}_e(\mathbf{r},\omega)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_e(\mathbf{r},\omega) =& 2\pi\sum_{l=1}^{\infty}2\pi\Bigg[\delta(\omega+\omega_l)\left\{\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_l}(\mathbf{r}))+\frac{\omega_l^2}{c^2}\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_l}(\mathbf{r})+\frac{i\omega_l}{c}\nabla\times\tilde{\mathbf{M}}_{\omega_l}(\mathbf{r})\right\}\\ &+\delta(\omega-\omega_l)\left\{\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{P}}^*_{\omega_l}(\mathbf{r}))+\frac{\omega_l^2}{c^2}\tilde{\mathbf{P}}^*_{\omega_l}(\mathbf{r})-\frac{i\omega_l}{c}\nabla\times\tilde{\mathbf{M}}^*_{\omega_l}(\mathbf{r})\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{3.34}$$

と表される．ここで，$*$ は複素共役を表す．よって，式 (3.29) を逆フーリエ変換することにより

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{-i\omega_l t}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\frac{e^{i\frac{\omega_l}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Bigg[&\nabla'(\nabla'\cdot\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_l}(\mathbf{r}'))+\frac{\omega_l^2}{c^2}\tilde{\mathbf{P}}_{\omega_l}(\mathbf{r}')\\ &+\frac{i\omega_l}{c}\nabla'\times\tilde{\mathbf{M}}_{\omega_l}(\mathbf{r}')\Bigg]+c.c.\end{aligned} \tag{3.35}$$

が得られる．

次に，被積分関数が大きな値をとる領域から十分離れた点における電磁場の近似式を導く．このためには，$\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)$ のうち 周波数 ω の成分 $\mathbf{E}_{r,\omega}(\mathbf{r},t)$ の複素振幅

$$\tilde{\mathbf{E}}_{r,\omega}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[\nabla'\left(\nabla'\cdot\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}')\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}')+\frac{i\omega}{c}\nabla'\times\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}(\mathbf{r}')\right] \tag{3.36}$$

を考えればよい．$r=|\mathbf{r}|$ が分極と磁化の存在する領域から十分離れているという仮定 $r'/r \ll 1$ を適用すると，

$$e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\simeq e^{i\frac{\omega}{c}r\left(1-\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}{r}\right)},\qquad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\simeq\frac{1}{r} \tag{3.37}$$

より

$$\tilde{\mathbf{E}}_{r,\omega}(\mathbf{r})\simeq\frac{e^{ikr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\left[\nabla'\left(\nabla'\cdot\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}')\right)+k^2\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}')+ik\nabla'\times\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}(\mathbf{r}')\right]e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} \tag{3.38}$$

が得られる．ここで，$\hat{\mathbf{r}}=\mathbf{r}/r$，$k=\omega/c$ とした．$\lim_{r\to\infty}\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r})=\lim_{r\to\infty}\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}(\mathbf{r})=0$ より，ガウスの発散定理と部分積分を用いて式 (3.38) の右辺を変形すると

$$\tilde{\mathbf{E}}_{r,\omega}(\mathbf{r})\simeq\frac{k^2e^{ikr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\left[\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}')-\left(\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}')\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}}+\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}(\mathbf{r}')\times\hat{\mathbf{r}}\right]e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} \tag{3.39}$$

が得られる．同様の計算から，$\tilde{\mathbf{B}}_{r,\omega}(\mathbf{r})$ は次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{B}}_{r,\omega}(\mathbf{r})\simeq\frac{k^2e^{ikr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\left[\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}(\mathbf{r}')-\left(\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}(\mathbf{r}')\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}}-\tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}')\times\hat{\mathbf{r}}\right]e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{3.40}$$

真空中への入射光として周波数 ω のレーザー光を仮定した場合，式 (3.39) と式 (3.40) で表される電磁場は，集光光学系の焦点から十分離れた点における放射光の電磁場の基本周波数成分に相当する．

3.3　本章のまとめ

本章では，シュインガー極限よりも十分強度の低い光と真空の相互作用を計算するための理論モデルについて述べた．ハイゼンベルグ-オイラーラグランジアンを用いて真空中における Maxwell 方程式を導出し，物質中における Maxwell 方程式との比較により，真空中の分極と磁化を定義した．得られた式の形から，分極と磁化は 2 つのローレンツ不変量 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ に依存することと，その振動方向が電場と磁場の両方に依存することが分かった．また，レーザー光が照射された場合に真空から放射される光の電磁場を，入射光よりも放射光の方が十分強度が低いという仮定の下で焦点から十分離れた点において計算した．

第 4 章

集光されたレーザー光の電磁場

集光されたレーザー光の電磁場は，通常電場と磁場をそれぞれ 1 成分のスカラー場とみなした上で回折積分を用いることにより求められる．しかしながら，この方法で計算された電磁場が実験値とよく一致するのは集光光学系の開口角が十分小さい場合に限られており，開口角が大きい場合には電磁場をベクトル場として扱わなければ正確な値を得られないことが知られている [28, 29]．また，スカラー場の回折積分では特殊な偏光状態や幾何学配置をもつレーザー光を集光した場合の電磁場を求めることができない．本章では，ベクトル場の回折積分 [17] を用いることで，直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光した場合の電磁場を正確に計算する．

4.1　古典的な真空中における波動方程式の解

本節では，古典的な真空中における電磁波の伝搬を表わす波動方程式の一般解を求める．真空中における波動方程式

$$\Box \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{4.1}$$

の解 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ を，空間座標のみに依存する複素振幅 $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ を用いて

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + c.c. \tag{4.2}$$

と表し，これを式 (4.1) に代入すると

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\left(\nabla^2 + k^2\right)\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\right] = 0 \tag{4.3}$$

が成り立つ．ここで，$k = \omega/c$ であり，Re は実部 (Im は虚部) を表す．式 (4.3) が任意の t に対して成り立つには，$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ がヘルムホルツ方程式

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = 0 \tag{4.4}$$

を満たす必要がある．

いま，$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ が波数 $k = |\mathbf{k}|$ をもつ波の重ね合わせで表されるとする．ここで，$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は波数ベクトルである．このとき，$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ は k_x と k_y を固定すると一意に決まるため，$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ は独立変数 k_x, k_y, z をもつ関数 $\mathbf{f}(k_x, k_y, z)$ を用いて

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \mathbf{f}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} \tag{4.5}$$

と表される．式 (4.5) を式 (4.4) に代入すると

$$\frac{d^2\mathbf{f}(k_x, k_y, z)}{dz^2} + k_z^2 \mathbf{f}(k_x, k_y, z) = 0 \tag{4.6}$$

となるため，この方程式の一般解として $\mathbf{f}(k_x, k_y, z)$ は次のように書ける．

$$\mathbf{f}(k_x, k_y, z) = \mathbf{U}(k_x, k_y) e^{ik_z z} + \mathbf{V}(k_x, k_y) e^{-ik_z z}. \tag{4.7}$$

ここで，$\mathbf{U}(k_x, k_y)$ と $\mathbf{V}(k_x, k_y)$ は，k_x と k_y を変数にもつ任意の関数である．式 (4.7) を式 (4.5) に代入すると，$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ は次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y [\mathbf{U}(k_x, k_y) e^{ik_z z} + \mathbf{V}(k_x, k_y) e^{-ik_z z}] e^{i(k_x x + k_y y)}. \tag{4.8}$$

これが，波動方程式の解 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ を式 (4.2) のように表すことができると仮定した場合の，$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ の複素振幅である．本節における議論は文献 [30] を参考にした．

4.2　ベクトル場の回折積分による集光されたレーザー光の電磁場の計算

レーザー光が無収差の光学系で集光される場合を考えると，図 4.1 のように平面 S_0 に入射した平面波 (伝搬方向は z 軸方向で，z 軸に対して垂直な方向に強度分布をもつ) は球面波に変換されて球面 S_1 に垂直な単位ベクトル $\mathbf{s}$ の方向に伝搬し，焦点 (原点)O へと向かう．いま，集光された周波数 ω のレーザー光の電磁場を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c., \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \tag{4.9}$$

とおき，$\mathbf{r}$ に依存する複素振幅 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ と $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ を求める．

まず，式 (4.8) より $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ は次のように表すことができる．

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ds_x ds_y [\mathbf{U}(s_x, s_y) e^{iks_z z} + \mathbf{V}(s_x, s_y) e^{-iks_z z}] e^{ik(s_x x + s_y y)}. \tag{4.10}$$

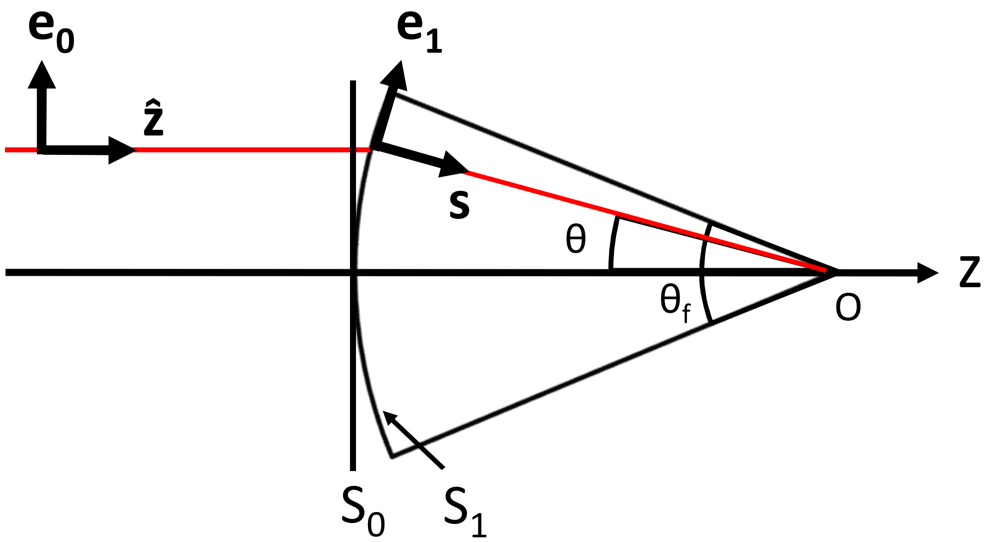

図 4.1　レーザー光の集光.

ここで，$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ は光の波数を表わす．また，s_z は s_x と s_y を用いて

$$s_z = \begin{cases} \sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2}, & s_x^2 + s_y^2 \le 1 \\ i\sqrt{s_x^2 + s_y^2 - 1}, & s_x^2 + s_y^2 > 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

と表されるが，$s_x^2 + s_y^2 > 1$ の場合は物理的に意味を成さないので

$$s_x^2 + s_y^2 \le 1 \tag{4.12}$$

の場合について考えることにすると，式 (4.10) は次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \int\int_{s_x^2+s_y^2\le 1} ds_x ds_y [\mathbf{U}(s_x, s_y)e^{iks_z z} + \mathbf{V}(s_x, s_y)e^{-iks_z z}]e^{ik(s_x x + s_y y)}. \tag{4.13}$$

よって，開口内の球面 S_1 上の点を $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ とすると，変数変換

$$u_x = \frac{x}{f}, \quad u_y = \frac{y}{f}, \quad u_z = \frac{z}{f} = -\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2} \tag{4.14}$$

を用いることで，$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1)$ は次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1) = \int\int_{s_x^2+s_y^2\le 1} ds_x ds_y \left[\mathbf{U}(s_x, s_y)e^{ikf\Phi_+(s_x,s_y)} + \mathbf{V}(s_x, s_y)e^{ikf\Phi_-(s_x,s_y)}\right]. \tag{4.15}$$

ここで，f は焦点距離であり $\Phi_\pm(s_x, s_y)$ は

$$\Phi_\pm(s_x, s_y) = s_x u_x + s_y u_y \pm \sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2}u_z \tag{4.16}$$

である．

$kf \gg 1$，つまり $f \gg \lambda$ という仮定の下で停留値法 (付録 E) を用いることにより，式 (4.15) の右辺を近似的に計算する．式 (4.15) の第 1 項と第 2 項をそれぞれ $W_1(\mathbf{r}_1)$，$W_2(\mathbf{r}_1)$ とおき，まず $W_1(\mathbf{r}_1)$ を計算する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_+(s_x, s_y)}{\partial s_x} &= u_x - \frac{s_x}{\sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2}} u_z = 0, \\ \frac{\partial \Phi_+(s_x, s_y)}{\partial s_y} &= u_y - \frac{s_y}{\sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2}} u_z = 0\end{aligned} \tag{4.17}$$

を満たす点を (s_{x_0}, s_{y_0}) とすると

$$s_{x_0}^2 = u_x^2, \qquad s_{y_0} = \frac{u_y}{u_x} s_{x_0} \tag{4.18}$$

が成り立ち，$s_{x_0} < 0$ であることより

$$s_{x_0} = -u_x, \qquad s_{y_0} = -u_y \tag{4.19}$$

が得られる．点 (s_{x_0}, s_{y_0}) のまわりで $\Phi_+(s_x, s_y)$ を次のように展開する．

$$\begin{aligned}\Phi_+(s_x, s_y) =& \Phi_+(s_{x_0}, s_{y_0}) + \frac{w_1}{2}(s_x - s_{x_0})^2 \\ &+ \frac{w_2}{2}(s_y - s_{y_0})^2 + w_3(s_x - s_{x_0})(s_y - s_{y_0}) + \cdots .\end{aligned} \tag{4.20}$$

ここで，式 (4.19) を用いて

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial s_x^2}(s_{x_0}, s_{y_0}) = -\frac{1 - u_y^2}{(1 - u_x^2 - u_y^2)^{\frac{3}{2}}} u_z, \\ w_2 &= \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial s_y^2}(s_{x_0}, s_{y_0}) = -\frac{1 - u_x^2}{(1 - u_x^2 - u_y^2)^{\frac{3}{2}}} u_z, \\ w_3 &= \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial s_x \partial s_y}(s_{x_0}, s_{y_0}) = -\frac{u_x u_y}{(1 - u_x^2 - u_y^2)^{\frac{3}{2}}} u_z \end{aligned} \tag{4.21}$$

とおいた．$u_z < 0$ より，$w_1 > 0$，$w_2 > 0$ である．$kf \gg 1$ のとき $W_1(\mathbf{r}_1)$ の値に大きく寄与するのは，点 (s_{x_0}, s_{y_0}) 付近の点における被積分関数の値である．よって，式 (E.2) と同様の近似により，$W_1(\mathbf{r}_1)$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{r}_1) \simeq& \mathbf{U}(s_{x_0}, s_{y_0}) e^{iK\Phi_+(s_{x_0}, s_{y_0})} \\ &\times \int\int_{s_x^2 + s_y^2 \le 1} ds_x ds_y e^{iK\left[\frac{w_1}{2}(s_x - s_{x_0})^2 + \frac{w_2}{2}(s_y - s_{y_0})^2 + w_3(s_x - s_{x_0})(s_y - s_{y_0})\right]}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

ここで，$K=kf$ とおいた．式 (4.22) の積分において，積分領域 $s_x^2+s_y^2\le 1$ のうち積分値に大きく寄与するのは微小領域 $(s_x-s_{x_0})^2+(s_y-s_{y_0})^2\le\varepsilon$ (ε は 1 より十分小さい正の実数) のみである．よって，$s_x-s_{x_0}=\varepsilon_x$，$s_y-s_{y_0}=\varepsilon_y$ とおくと，$W_1(\mathbf{r}_1)$ は次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
W_1(\mathbf{r}_1) &\simeq \mathbf{U}(s_{x_0},s_{y_0})e^{iK\Phi_+(s_{x_0},s_{y_0})}\int\int_{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2\le\varepsilon} d\varepsilon_x d\varepsilon_y e^{iK\left[\frac{w_1}{2}\varepsilon_x^2+\frac{w_2}{2}\varepsilon_y^2+w_3\varepsilon_x\varepsilon_y\right]} \\
&= \mathbf{U}(s_{x_0},s_{y_0})e^{iK\Phi_+(s_{x_0},s_{y_0})}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\varepsilon_y\int_{-\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon_y^2}}^{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon_y^2}} d\varepsilon_x e^{iK\left[\frac{w_1}{2}\varepsilon_x^2+\frac{w_2}{2}\varepsilon_y^2+w_3\varepsilon_x\varepsilon_y\right]}.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

ここで，$X=\sqrt{K}\varepsilon_x$，$Y=\sqrt{K}\varepsilon_y$ とおくと，$K\gg 1$ であることより式 (4.23) は

$$
W_1(\mathbf{r}_1)\simeq\mathbf{U}(s_{x_0},s_{y_0})e^{iK\Phi_+(s_{x_0},s_{y_0})}\frac{1}{K}\int_{-\infty}^{\infty}dY\int_{-\infty}^{\infty}dXe^{i\left(\frac{w_1}{2}X^2+\frac{w_2}{2}Y^2+w_3XY\right)} \tag{4.24}
$$

と近似することができる．$p=e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{w_1/2}X$，$q=e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{w_2/2}Y$ とおくと，式 (4.24) の右辺の積分は

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}dY\int_{-\infty}^{\infty}dXe^{i\left(\frac{w_1}{2}X^2+\frac{w_2}{2}Y^2+w_3XY\right)} \\
=&\frac{2i}{\sqrt{w_1w_2}}\int_{-\infty}^{\infty}dq\int_{-\infty}^{\infty}dpe^{-\left(p^2+2\frac{w_3}{\sqrt{w_1w_2}}pq+q^2\right)} \\
=&\frac{2i}{\sqrt{w_1w_2}}\int_{-\infty}^{\infty}dqe^{-\left[1-\left(\frac{w_3}{\sqrt{w_1w_2}}\right)^2\right]q^2}\int_{-\infty}^{\infty}dpe^{-\left(p+\frac{w_3}{\sqrt{w_1w_2}}q\right)^2} \\
=&2i\sqrt{\frac{\pi}{w_1w_2}}\int_{-\infty}^{\infty}dqe^{-\left[1-\left(\frac{w_3}{\sqrt{w_1w_2}}\right)^2\right]q^2} \\
=&2i\sqrt{\frac{\pi}{w_1w_2}}\sqrt{\frac{\pi}{1-\left(\frac{w_3}{\sqrt{w_1w_2}}\right)^2}}=\frac{2\pi i}{\sqrt{w_1w_2-w_3^2}}=-2\pi iu_z
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

となる．ここで，ガウスの積分公式 (2.69) と

$$
\sqrt{w_1w_2-w_3^2}=\sqrt{\frac{1-u_x^2-u_y^2}{u_z^4}}=\frac{1}{\sqrt{u_z^2}}=-\frac{1}{u_z} \tag{4.26}
$$

を用いた．式 (4.25) と

$$
\begin{aligned}
\Phi_+(s_{x_0},s_{y_0})&=\Phi_+(-u_x,-u_y)=-u_x^2-u_y^2+\sqrt{1-u_x^2-u_y^2}u_z \\
&=u_z^2-1-u_z^2=-1
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

を式 (4.24) に代入することにより，$W_1(\mathbf{r}_1)$ は次のように書ける．

$$
W_1(\mathbf{r}_1)\simeq\frac{-2\pi iu_z}{kf}\mathbf{U}(-u_x,-u_y)e^{-ikf}. \tag{4.28}
$$

同様の方法で $W_2(\mathbf{r}_1)$ も求めることができる．

$$W_2(\mathbf{r}_1) \simeq \frac{2\pi i u_z}{kf}\mathbf{V}(u_x, u_y)e^{ikf}. \tag{4.29}$$

式 (4.28) と式 (4.29) を用いることにより，式 (4.15) は近似的に次のように書ける．

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1) = \frac{2\pi i}{kf}u_z[-\mathbf{U}(-u_x, -u_y)e^{-ikf} + \mathbf{V}(u_x, u_y)e^{ikf}]. \tag{4.30}$$

集光光学系に収差がない場合には

$$s_x = -\frac{x_1}{f} = -u_x, \qquad s_y = -\frac{y_1}{f} = -u_y, \qquad s_z = -\frac{z_1}{f} = -u_z \tag{4.31}$$

が成り立つため，式 (4.30) は

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1) = -\frac{2\pi i}{kf}s_z[-\mathbf{U}(s_x, s_y)e^{-ikf} + \mathbf{V}(-s_x, -s_y)e^{ikf}] \tag{4.32}$$

と表すことができる．

次に，式 (4.30) の係数 $\mathbf{U}(-u_x, -u_y)$ と $\mathbf{V}(u_x, u_y)$ を求める．球面波の波面の面積は中心からの距離の 2 乗に比例するため，その強度は距離の 2 乗に反比例し，振幅は距離に反比例する．よって，$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1)$ を焦点 O に収束する球面波であると考えると，集光光学系に収差がない場合に $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1)$ は

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mathbf{a}_1(s_x, s_y)}{f}e^{ik\varphi(\mathbf{r}_1)} \tag{4.33}$$

と書ける．ここで，$\mathbf{a}_1(s_x, s_y)$ は空間座標に依存せず，面 S_1 から焦点 O に収束する光線に垂直なベクトルである．また，$\varphi(\mathbf{r}_1)$ は物空間の点 O' から $\mathbf{r}_1$ までの光路長であり，アイコナール関数という．点 O' に波源をもつ球面波が点 $\mathbf{r}_1$ を通って焦点 O に収束するまでの光路長を定数 C で表すと，$\varphi(\mathbf{r}_1)$ は

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = C - |\mathbf{r}_1| = C - f \tag{4.34}$$

と書ける．よって，式 (4.32) に式 (4.33) を代入すると

$$\frac{ik}{2\pi}\frac{\mathbf{a}_1(s_x, s_y)}{s_z}e^{ikC}e^{-ikf} = -\mathbf{U}(s_x, s_y)e^{-ikf} + \mathbf{V}(-s_x, -s_y)e^{ikf} \tag{4.35}$$

が得られる．式 (4.35) は f の値に関係なく成り立つため，$\mathbf{U}(s_x, s_y)$ と $\mathbf{V}(s_x, s_y)$ は次のようになる．

$$\mathbf{U}(s_x, s_y) = -\frac{ik}{2\pi}\frac{\mathbf{a}_1(s_x, s_y)}{s_z}e^{ikC}, \qquad \mathbf{V}(s_x, s_y) = 0. \tag{4.36}$$

よって，式 (4.36) を式 (4.13) に代入することにより，$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ は次のように与えられる．

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\int\int_{s_x^2+s_y^2\leq 1} ds_x ds_y \frac{\mathbf{a}_1(s_x,s_y)}{s_z}e^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}. \tag{4.37}$$

ここで，点 O' は任意にとれることから，定数 e^{ikC} は無視した．同様の計算により，$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ が得られる．

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\int\int_{s_x^2+s_y^2\leq 1} ds_x ds_y \frac{\mathbf{a}_2(s_x,s_y)}{s_z}e^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}. \tag{4.38}$$

次に，$\mathbf{a}_1(s_x,s_y)$ と $\mathbf{a}_2(s_x,s_y)$ を球座標の角度 (θ,φ) の関数として表す．面 S_0 上の入射光の電場から位相部分を除いたベクトルを $\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)$，球面 S_1 上の入射光の電場から位相部分を除いたベクトルを $\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)$，$\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)$ と $\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)$ に平行な単位ベクトルをそれぞれ $\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)$，$\hat{\mathbf{e}}_1(\theta,\varphi)$ とする．$\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)$ は焦点距離 f を用いて

$$\mathbf{e}_1(\theta,\varphi) = \frac{\mathbf{a}_1(\theta,\varphi)}{f} \tag{4.39}$$

と表わされる．面 S_0 上の円環状の微小面積を δS_0，δS_0 を球面 S_1 に投影した面積を δS_1 とすると，図 4.2 より δS_0 と δS_1 の間には

$$\delta S_0 = \delta S_1\cos\theta \tag{4.40}$$

の関係が成り立つ．これを次のエネルギー保存則

$$|\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)|^2\delta S_0 = |\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)|^2\delta S_1 \tag{4.41}$$

に代入すると

$$|\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)| = |\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)|\cos^{\frac{1}{2}}\theta \tag{4.42}$$

が得られる．よって，$\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)$ は

$$\mathbf{e}_1(\theta,\varphi) = |\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)|\cos^{\frac{1}{2}}\theta\hat{\mathbf{e}}_1(\theta,\varphi) \tag{4.43}$$

と表わされる．

いま，２つベクトル $\mathbf{g}_0(\varphi)$ と $\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)$ を，それぞれ物空間における光線と像空間における光線に垂直であり，光線と光軸の両方を通る面上にある単位ベクトルとする．図 4.3 より，$\mathbf{g}_0(\varphi)$，$\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)$，$\mathbf{s}(\theta,\varphi)$ は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_0(\varphi) &= \cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\hat{\mathbf{y}},\\
\mathbf{g}_1(\theta,\varphi) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\varphi\hat{\mathbf{y}} + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{\mathbf{z}}\\
&= \cos\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\varphi\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta\hat{\mathbf{z}},\\
\mathbf{s}(\theta,\varphi) &= \sin\theta\cos(\varphi+\pi)\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin(\varphi+\pi)\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\\
&= -\sin\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\sin\varphi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

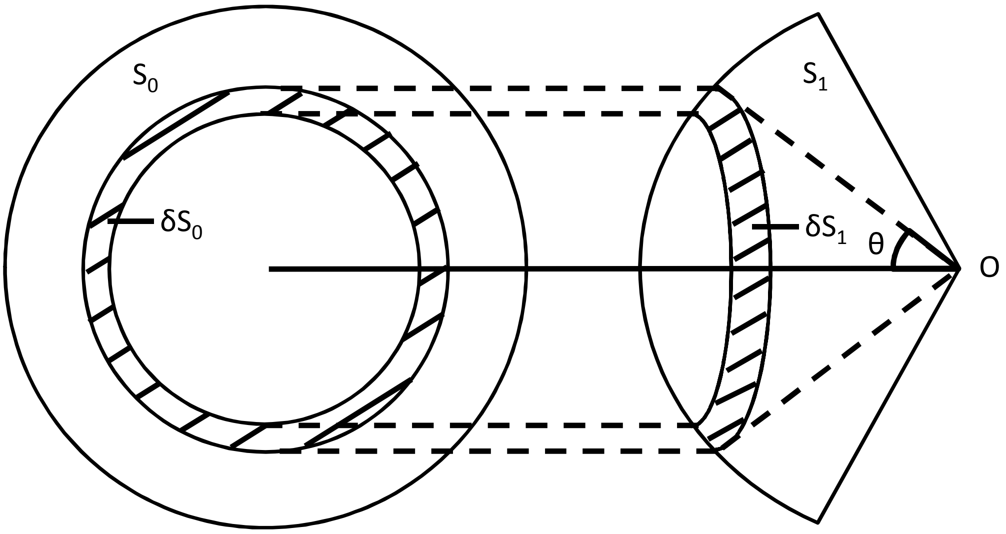

図 4.2　δS_0 と δS_1.

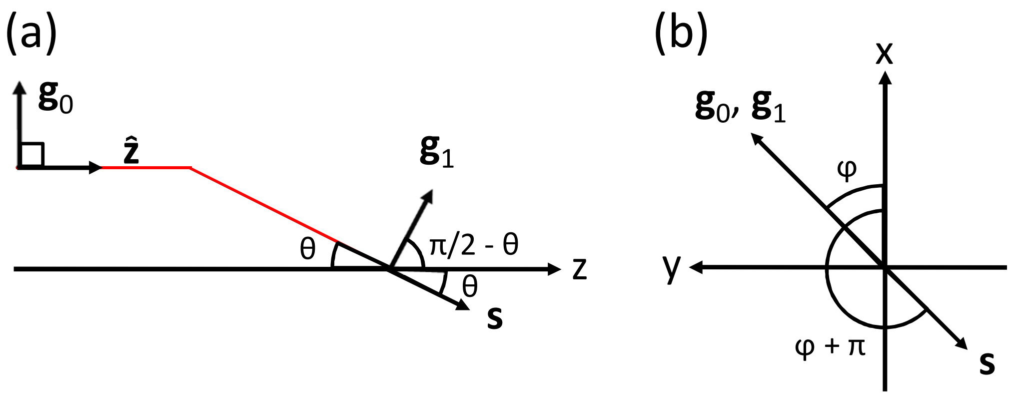

図 4.3　$\mathbf{g}_0$ と $\mathbf{g}_1$ と $\mathbf{s}$.

ここで，$\hat{\mathbf{x}}$，$\hat{\mathbf{y}}$，$\hat{\mathbf{z}}$ はそれぞれ x，y，z 方向の単位ベクトルである．また，式 (4.44) より $\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}$ と $\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\times\mathbf{s}(\theta,\varphi)$ は

$$\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\times\mathbf{s}(\theta,\varphi) = \sin\varphi\hat{\mathbf{x}} - \cos\varphi\hat{\mathbf{y}} \tag{4.45}$$

となる．$\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)$ は $\hat{\mathbf{z}}$ に垂直であるため

$$\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi) = (\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot\mathbf{g}_0(\varphi))\mathbf{g}_0(\varphi) + (\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot(\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}))(\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}) \tag{4.46}$$

と表わされる．$\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)$ が $\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)$ に変換されるとき，$\mathbf{g}_0(\varphi)$ 方向の成分は $\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)$ 方向の成分に，$\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}$ 方向の成分は $\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\times\mathbf{s}(\theta,\varphi)$ 方向の成分にそれぞれ変換される．よって，

式 (4.43) と式 (4.46) を用いると $\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1(\theta,\varphi) = |\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)|\cos^{\frac{1}{2}}\theta\Big[&(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot\mathbf{g}_0(\varphi))\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\\ &+(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot(\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}))(\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\times\mathbf{s}(\theta,\varphi))\Big]\end{aligned} \tag{4.47}$$

と書ける．$|\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)|$ の値は光軸からの距離 h に依存するが，無収差集光光学系において h は

$$h = f\sin\theta \tag{4.48}$$

となるため (正弦条件)，$|\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)|$ の最大値を e_0 とし，相対振幅を θ の関数 $l_0(\theta)$ で表わすと，$\mathbf{e}_0(\theta,\varphi)$ は

$$\mathbf{e}_0(\theta,\varphi) = \mathrm{e}_0 l_0(\theta)\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi) \tag{4.49}$$

となる．よって，$\mathbf{e}_1(\theta,\varphi)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1(\theta,\varphi) = \mathrm{e}_0 l_0(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta\Big[&(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot\mathbf{g}_0(\varphi))\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\\ &+(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot(\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}))(\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\times\mathbf{s}(\theta,\varphi))\Big]\end{aligned} \tag{4.50}$$

となるため，式 (4.39) より $\mathbf{a}_1(\theta,\varphi)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1(\theta,\varphi) = f\mathrm{e}_0 l_0(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta\Big[&(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot\mathbf{g}_0(\varphi))\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\\ &+(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot(\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}))(\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\times\mathbf{s}(\theta,\varphi))\Big]\end{aligned} \tag{4.51}$$

となる．$\mathbf{a}_1(\theta,\varphi)$ と $\mathbf{a}_2(\theta,\varphi)$ の間には

$$\mathbf{a}_2(\theta,\varphi) = \mathbf{s}(\theta,\varphi)\times\mathbf{a}_1(\theta,\varphi) \tag{4.52}$$

の関係が成り立つため，$\mathbf{a}_2(\theta,\varphi)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_2(\theta,\varphi) = f\mathrm{e}_0 l_0(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta\Big[&(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot(\mathbf{g}_0(\varphi)\times\hat{\mathbf{z}}))\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\\ &-(\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)\cdot\mathbf{g}_0(\varphi))(\mathbf{g}_1(\theta,\varphi)\times\mathbf{s}(\theta,\varphi))\Big]\end{aligned} \tag{4.53}$$

となる．また，円柱座標 (ρ,φ,z) を用いて $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\hat{\mathbf{x}}+\rho\sin\varphi\hat{\mathbf{y}}+z\hat{\mathbf{z}}$ と表すと，式 (4.44) より $\mathbf{s}(\theta',\varphi')\cdot\mathbf{r}$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(\theta',\varphi')\cdot\mathbf{r} &= -\rho\sin\theta'(\cos\varphi'\cos\varphi+\sin\varphi'\sin\varphi)+z\cos\theta'\\ &= z\cos\theta'-\rho\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi)\end{aligned} \tag{4.54}$$

と書ける．よって

$$\frac{\partial(s_x,s_y)}{\partial(\theta',\varphi')} = \sin\theta'\cos\theta', \qquad s_z = \cos\theta', \qquad \frac{ds_x ds_y}{s_z} = \sin\theta' d\theta' d\varphi' \tag{4.55}$$

を用いて，式 (4.37) と式 (4.38) を

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \mathbf{a}_1(\theta', \varphi') \sin\theta' e^{ik[z\cos\theta' - \rho\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)]}, \tag{4.56}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \mathbf{a}_2(\theta', \varphi') \sin\theta' e^{ik[z\cos\theta' - \rho\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)]} \tag{4.57}$$

と書くと，$\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi)$ と $l_0(\theta)$ を決めれば $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ と $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ を求めることができる．ここで，θ_f は集光光学系の開口角である．本節における議論は文献 [17, 31] を参考にした．

4.3　直線偏光のレーザー光を集光したときの電磁場

入射光が直線偏光の場合，$\mathbf{e}_0(\theta)$ は

$$\mathbf{e}_0(\theta) = \mathrm{e}_0 l_g(\theta)\hat{\mathbf{x}} \tag{4.58}$$

と表される．ここで，$l_g(\theta)$ はガウス分布

$$l_g(\theta) = \exp\left[-\beta^2\left(\frac{\sin\theta}{\sin(\theta_f/2)}\right)^2\right] \tag{4.59}$$

であり，本研究では $\beta = 1$ とした．$\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi) = \hat{\mathbf{x}}$ と $l_0(\theta) = l_g(\theta)$ を式 (4.51) と式 (4.53) に代入すると，$\mathbf{a}_1(\theta, \varphi)$ と $\mathbf{a}_2(\theta, \varphi)$ のデカルト座標成分は

$$\begin{aligned}
a_{1,x}(\theta, \varphi) &= f\mathrm{e}_0 l_g(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta[\cos\theta + \sin^2\varphi(1-\cos\theta)], \\
a_{1,y}(\theta, \varphi) &= f\mathrm{e}_0 l_g(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta(\cos\theta - 1)\cos\varphi\sin\varphi, \\
a_{1,z}(\theta, \varphi) &= f\mathrm{e}_0 l_g(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\theta\cos\varphi,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,x}(\theta, \varphi) &= f\mathrm{e}_0 l_g(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta(\cos\theta - 1)\cos\varphi\sin\varphi, \\
a_{2,y}(\theta, \varphi) &= f\mathrm{e}_0 l_g(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta[1 - \sin^2\varphi(1-\cos\theta)], \\
a_{2,z}(\theta, \varphi) &= f\mathrm{e}_0 l_g(\theta)\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\theta\sin\varphi
\end{aligned} \tag{4.61}$$

となる．よって，式 (4.60) と式 (4.61) を式 (4.56) と式 (4.57) に代入することによって，$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ と $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ のデカルト座標成分が得られる．

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x(\rho, \varphi, z) &= -iA\left(I_0(\rho, z) + \cos 2\varphi I_2(\rho, z)\right), \\
\tilde{E}_y(\rho, \varphi, z) &= -iA\sin 2\varphi I_2(\rho, z), \\
\tilde{E}_z(\rho, \varphi, z) &= -2A\cos\varphi I_1(\rho, z), \\
\tilde{B}_x(\rho, \varphi, z) &= -iA\sin 2\varphi I_2(\rho, z), \\
\tilde{B}_y(\rho, \varphi, z) &= -iA\left(I_0(\rho, z) - \cos 2\varphi I_2(\rho, z)\right), \\
\tilde{B}_z(\rho, \varphi, z) &= -2A\sin\varphi I_1(\rho, z).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

ここで，$A = kf\mathrm{e}_0/2$ であり，$I_n(\rho, z)$ $(n = 0, 1, 2)$ は次の関数を表す．

$$\begin{aligned}
I_0(\rho, z) &= \int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' l_g(\theta') \cos^{\frac{1}{2}}\theta' \sin\theta'(1 + \cos\theta') J_0\left(k\rho \sin\theta'\right) e^{ikz\cos\theta'}, \\
I_1(\rho, z) &= \int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' l_g(\theta') \cos^{\frac{1}{2}}\theta' \sin^2\theta' J_1\left(k\rho \sin\theta'\right) e^{ikz\cos\theta'}, \\
I_2(\rho, z) &= \int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' l_g(\theta') \cos^{\frac{1}{2}}\theta' \sin\theta'(1 - \cos\theta') J_2\left(k\rho \sin\theta'\right) e^{ikz\cos\theta'}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$J_n(k\rho\sin\theta')$ $(n = 0, 1, 2)$ は第一種ベッセル関数であり，式 (4.62) の導出では $J_n(t)$ に関して

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\varphi \cos(n\varphi) e^{it\cos(\varphi-\gamma)} &= 2\pi i^n J_n(t)\cos(n\gamma), \\
\int_0^{2\pi} d\varphi \sin(n\varphi) e^{it\cos(\varphi-\gamma)} &= 2\pi i^n J_n(t)\sin(n\gamma)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

及び

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\varphi \cos(n\varphi) e^{-it\cos(\varphi-\gamma)} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(n\varphi) e^{it\cos[\varphi-(\gamma+\pi)]} \\
&= 2\pi i^n J_n(t)\cos[n(\gamma+\pi)], \\
\int_0^{2\pi} d\varphi \sin(n\varphi) e^{-it\cos(\varphi-\gamma)} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(n\varphi) e^{it\cos[\varphi-(\gamma+\pi)]} \\
&= 2\pi i^n J_n(t)\sin[n(\gamma+\pi)]
\end{aligned} \tag{4.65}$$

が成り立つことを用いた [24].

4.4　軸対称偏光のレーザー光を集光したときの電磁場

軸対称偏光とは，光軸 (ここでは z 軸) に対して空間的に対称な偏光分布であり，代表的なものとして，ビーム中心から半径方向を向く径偏光 (図 4.4 (a)) と，方位角方向を向く方位角偏光 (図 4.4 (b)) の 2 つの偏光モードがある [18]．以下では，この 2 つの偏光のみを考える．e_0 の径偏光成分を $\mathrm{e}_{r,0}$，方位角偏光成分を $\mathrm{e}_{a,0}$ とすると，$\mathrm{e}_{r,0}$ と $\mathrm{e}_{a,0}$ は定数 ϕ_0 を用いて次のように表される．

$$\mathrm{e}_{r,0} = \mathrm{e}_0 \cos\phi_0, \qquad \mathrm{e}_{a,0} = \mathrm{e}_0 \sin\phi_0. \tag{4.66}$$

ここで，$\phi_0 = \tan^{-1}(\mathrm{e}_{a,0}/\mathrm{e}_{r,0})$ は各偏光モードの比率を表す指標である．

ϕ_0 を用いると，$\mathbf{e}_0(\theta)$ は

$$\mathbf{e}_0(\theta) = \mathrm{e}_0 l_{bg}(\theta)\left(\cos\phi_0 \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi_0 \hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) \tag{4.67}$$

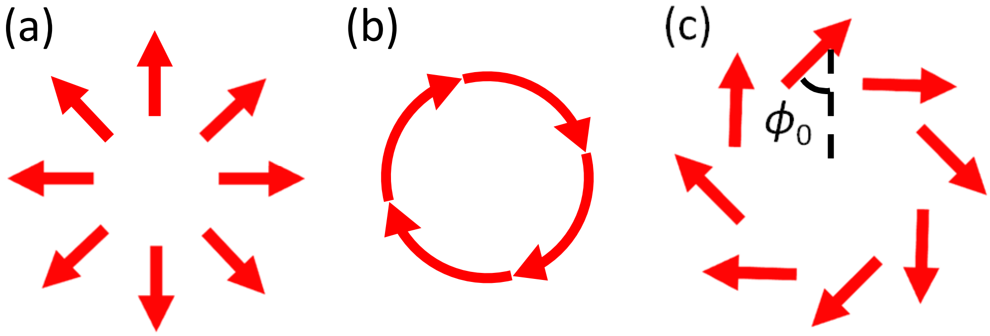

図 4.4　軸対称偏光ビームの電場の振動方向．(a) 径偏光 (b) 方位角偏光 (c) 径偏光と方位角偏光の重ね合わせ．

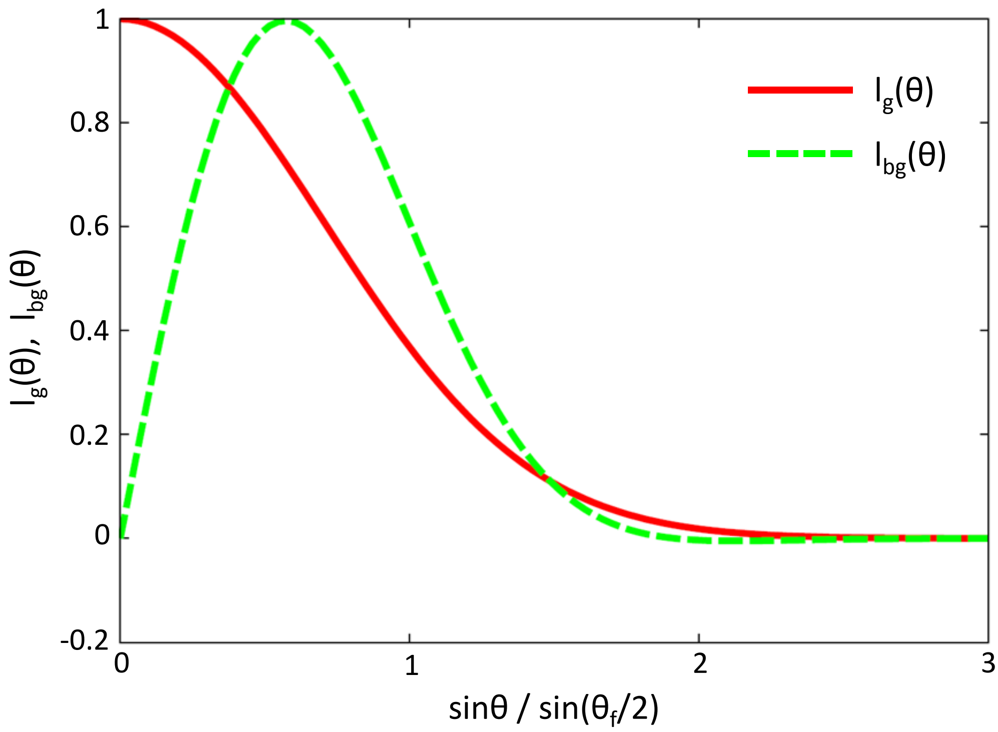

図 4.5　最大値を 1 に規格化したガウス分布とベッセルガウス分布．

と表される (第 2 項の符号を $-$ にしたのは慣習的な理由による)．ここで，$\hat{\boldsymbol{\rho}}$ と $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ はそれぞれ径方向と方位角方向の単位ベクトルであり，$l_{bg}(\theta)$ はベッセルガウス分布 (図 4.5)

$$l_{bg}(\theta) = J_1\left(\frac{2\beta\sin\theta}{\sin(\theta_f/2)}\right)\exp\left[-\beta^2\left(\frac{\sin\theta}{\sin(\theta_f/2)}\right)^2\right] \tag{4.68}$$

である [18, 32]．本研究では $\beta = 1$ とした．$\hat{\mathbf{e}}_0(\varphi) = \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi_0\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ と $l_0(\theta) = l_{bg}(\theta)$ を

式 (4.51) と式 (4.53) に代入し

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\hat{\mathbf{y}}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{y}} \tag{4.69}$$

を用いると，$\mathbf{a}_1(\theta,\varphi)$ と $\mathbf{a}_2(\theta,\varphi)$ のデカルト座標成分は

$$\begin{aligned}
a_{1,x}(\theta,\varphi) &= f e_0 l_{bg}(\theta)\left[\cos\phi_0\cos^{\frac{3}{2}}\theta\cos\varphi + \sin\phi_0\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\varphi\right],\\
a_{1,y}(\theta,\varphi) &= f e_0 l_{bg}(\theta)\left[\cos\phi_0\cos^{\frac{3}{2}}\theta\sin\varphi - \sin\phi_0\cos^{\frac{1}{2}}\theta\cos\varphi\right],\\
a_{1,z}(\theta,\varphi) &= f e_0 l_{bg}(\theta)\cos\phi_0\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\theta,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,x}(\theta,\varphi) &= f e_0 l_{bg}(\theta)\left[\sin\phi_0\cos^{\frac{3}{2}}\theta\cos\varphi - \cos\phi_0\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\varphi\right],\\
a_{2,y}(\theta,\varphi) &= f e_0 l_{bg}(\theta)\left[\sin\phi_0\cos^{\frac{3}{2}}\theta\sin\varphi + \cos\phi_0\cos^{\frac{1}{2}}\theta\cos\varphi\right],\\
a_{2,z}(\theta,\varphi) &= f e_0 l_{bg}(\theta)\sin\phi_0\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\theta
\end{aligned} \tag{4.71}$$

となる．このとき，$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ と $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ のデカルト座標成分は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x(\rho,\varphi,z) &= -2A\left[\cos\phi_0\cos\varphi U_0(\rho,z) + \sin\phi_0\sin\varphi U_2(\rho,z)\right],\\
\tilde{E}_y(\rho,\varphi,z) &= -2A\left[\cos\phi_0\sin\varphi U_0(\rho,z) - \sin\phi_0\cos\varphi U_2(\rho,z)\right],\\
\tilde{E}_z(\rho,z) &= -2iA\cos\phi_0 U_1(\rho,z),\\
\tilde{B}_x(\rho,\varphi,z) &= -2A\left[\sin\phi_0\cos\varphi U_0(\rho,z) - \cos\phi_0\sin\varphi U_2(\rho,z)\right],\\
\tilde{B}_y(\rho,\varphi,z) &= -2A\left[\sin\phi_0\sin\varphi U_0(\rho,z) + \cos\phi_0\cos\varphi U_2(\rho,z)\right],\\
\tilde{B}_z(\rho,z) &= -2iA\sin\phi_0 U_1(\rho,z).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

ここで，$U_n(\rho,z)$ $(n=0,1,2)$ は次の関数を表す．

$$\begin{aligned}
U_0(\rho,z) &= \int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' l_{bg}(\theta')\sin\theta'\cos^{\frac{3}{2}}\theta' J_1\left(k\rho\sin\theta'\right)e^{ikz\cos\theta'},\\
U_1(\rho,z) &= \int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' l_{bg}(\theta')\sin^2\theta'\cos^{\frac{1}{2}}\theta' J_0\left(k\rho\sin\theta'\right)e^{ikz\cos\theta'},\\
U_2(\rho,z) &= \int_0^{\frac{\theta_f}{2}} d\theta' l_{bg}(\theta')\sin\theta'\cos^{\frac{1}{2}}\theta' J_1\left(k\rho\sin\theta'\right)e^{ikz\cos\theta'}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

デカルト座標成分と円柱座標成分の間に

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_\rho(\rho,\varphi,z) &= \tilde{E}_x(\rho,\varphi,z)\cos\varphi + \tilde{E}_y(\rho,\varphi,z)\sin\varphi,\\
\tilde{E}_\varphi(\rho,\varphi,z) &= -\tilde{E}_x(\rho,\varphi,z)\sin\varphi + \tilde{E}_y(\rho,\varphi,z)\cos\varphi,\\
\tilde{B}_\rho(\rho,\varphi,z) &= \tilde{B}_x(\rho,\varphi,z)\cos\varphi + \tilde{B}_y(\rho,\varphi,z)\sin\varphi,\\
\tilde{B}_\varphi(\rho,\varphi,z) &= -\tilde{B}_x(\rho,\varphi,z)\sin\varphi + \tilde{B}_y(\rho,\varphi,z)\cos\varphi
\end{aligned} \tag{4.74}$$

の関係が成り立つことを用いると，$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ と $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ の円柱座標成分が得られる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_\rho(\rho, z) &= -2A\cos\phi_0 U_0(\rho, z), \\
\tilde{E}_\varphi(\rho, z) &= 2A\sin\phi_0 U_2(\rho, z), \\
\tilde{E}_z(\rho, z) &= -2iA\cos\phi_0 U_1(\rho, z), \\
\tilde{B}_\rho(\rho, z) &= -2A\sin\phi_0 U_0(\rho, z), \\
\tilde{B}_\varphi(\rho, z) &= -2A\cos\phi_0 U_2(\rho, z), \\
\tilde{B}_z(\rho, z) &= -2iA\sin\phi_0 U_1(\rho, z).
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

4.5　本章のまとめ

本章では，ベクトル場の回折積分を用いて集光されたレーザー光の電磁場を計算する方法について述べ，直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光した場合の電磁場を求めた．

第 5 章

真空非線形光学現象の偏光状態と開口角に対する依存性

本章では，直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光を計算し，これらが偏光状態や開口角を変えることでどのように変化するのかを調べる．以下では，特に断らない限り $\lambda = 1\mu\mathrm{m}$，$\theta_f = 100°$ とする．また，直線偏光のレーザー光を集光したときの光の電磁場を $(\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_L(\mathbf{r},t))$，軸対称偏光のレーザー光を集光したときの光の電磁場を $(\mathbf{E}_A(\mathbf{r},t,\phi_0), \mathbf{B}_A(\mathbf{r},t,\phi_0))$ とし，ローレンツ不変量と分極･磁化に対しても同様の添え字や変数を用いて偏光状態を区別する．(例: 径偏光をもつレーザー光のローレンツ不変量は $\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,0°)$ と $\mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,0°)$)

5.1 レーザー光のローレンツ不変量と真空中の分極と磁化

図 5.1(a)-(h) は，それぞれ焦平面 $(z = 0)$ における $\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}_A(\mathbf{r},t,0°)$, $\mathbf{E}_A(\mathbf{r},t,45°)$, $\mathbf{E}_A(\mathbf{r},t,90°)$, $\mathbf{B}_L(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_A(\mathbf{r},t,0°)$, $\mathbf{B}_A(\mathbf{r},t,45°)$, $\mathbf{B}_A(\mathbf{r},t,90°)$ の振幅の分布 (色) と向き (矢印と × 印) を表す．ここで，ベクトル場 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ の振幅はその 2 乗時間平均値の平方根 $\sqrt{\langle|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|^2\rangle}$ とした ($\langle\cdots\rangle$ は時間平均値を表す)．直線偏光のレーザー光を集光した場合，電磁場の振動方向はほとんど変化しないが，振幅の分布はガウス分布から楕円状の分布へと変化し，電場と磁場は互いに異なる分布をもつようになる．一方，軸対称偏光ビームを集光すると，$\phi_0 = 0°$ の場合には電場が，$\phi_0 = 90°$ の場合には磁場が，また $\phi_0 = 45°$ の場合には電場と磁場の両方が焦点付近で縦方向に振動するようになる．

図 5.2(a)-(h) は，それぞれ焦平面における $|\langle\mathcal{F}_L(\mathbf{r},t)\rangle|$, $|\langle\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,0°)\rangle|$, $|\langle\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,45°)\rangle|$, $|\langle\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,90°)\rangle|$, $|\langle\mathcal{G}_L(\mathbf{r},t)\rangle|$, $|\langle\mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,0°)\rangle|$, $|\langle\mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,45°)\rangle|$, $|\langle\mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,90°)\rangle|$ の分布を表す．まず直線偏光のレーザー光を集光したときのローレンツ不変量について考えると，$|\langle\mathcal{F}_L(\mathbf{r},t)\rangle|$

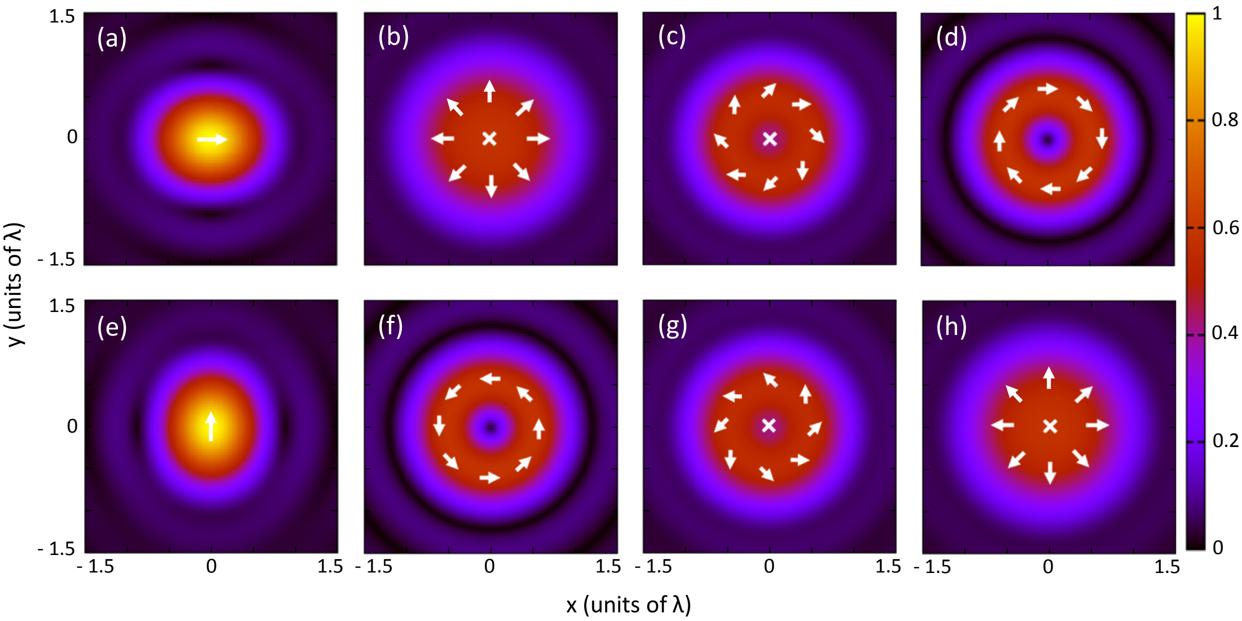

図 5.1　焦平面 ($z = 0$) における振幅の分布 (色) と向き (矢印と $\times$ 印). (a) $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t)$, (b) $\mathbf{E}_A(\mathbf{r}, t, 0°)$, (c) $\mathbf{E}_A(\mathbf{r}, t, 45°)$, (d) $\mathbf{E}_A(\mathbf{r}, t, 90°)$, (e) $\mathbf{B}_L(\mathbf{r}, t)$, (f) $\mathbf{B}_A(\mathbf{r}, t, 0°)$, (g) $\mathbf{B}_A(\mathbf{r}, t, 45°)$, (h) $\mathbf{B}_A(\mathbf{r}, t, 90°)$. $\times$ 印は z 軸方向を表す.

の分布は $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{B}_L(\mathbf{r}, t)$ の楕円分布の長軸がそれぞれ x 軸と y 軸であることに起因しており, $|\langle \mathcal{G}_L(\mathbf{r}, t) \rangle|$ は $|\langle \mathcal{F}_L(\mathbf{r}, t) \rangle|$ を焦平面上で 45° 回転させた分布になる. 次に軸対称偏光のレーザー光を集光したときのローレンツ不変量を考える. $\phi_0 = 0°$ の場合, 焦点付近では縦方向の電場のみが存在するため $|\mathcal{F}_A(\mathbf{r}, t, 0°)| \sim |\mathbf{E}_A(\mathbf{r}, t, 0°)|^2/2$ となり $\mathcal{F}$ の絶対値が大きくなるが, 焦点以外では電磁場の直交関係が満たされているため $\mathcal{G}_A(\mathbf{r}, t, 0°) = 0$ となる. また $\phi_0 = 90°$ の場合, 焦点付近では縦方向の磁場のみが存在するため $|\mathcal{F}_A(\mathbf{r}, t, 90°)| \sim |\mathbf{B}_A(\mathbf{r}, t, 90°)|^2/2$ となり $\mathcal{F}$ の絶対値が大きくなるが, 焦点以外では $\phi_0 = 0°$ のときと同じ理由から $\mathcal{G}_A(\mathbf{r}, t, 90°) = 0$ となる. 一方, $\phi_0 = 45°$ の場合, 焦点付近では縦方向の電場と磁場が両方とも存在するため $|\mathcal{G}_A(\mathbf{r}, t, 45°)| \sim |\mathbf{E}_A(\mathbf{r}, t, 45°)||\mathbf{B}_A(\mathbf{r}, t, 45°)|$ となり $\mathcal{G}$ の絶対値が大きくなるが, 電場と磁場が各点で同じ振幅をもっているため $\mathcal{F}_A(\mathbf{r}, t, 45°) = 0$ となる. 入射光が直線偏光の場合と軸対称偏光の場合でローレンツ不変量を比較すると, 軸対称偏光ビームのローレンツ不変量の最大値は直線偏光の場合に比べて 2 倍以上大きくなることが分かる. これは, 直線偏光の場合には焦点から離れた点で平面波の条件 $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ が崩れてローレンツ不変量が 0 ではなくなるのに対して, 軸対称偏光の場合には電磁場の振幅が大きくなる焦点付近においてもこの関係が崩れているためである.

図 5.3(a)-(h) は, それぞれ焦平面における $\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{P}_A(\mathbf{r}, t, 0°)$, $\mathbf{P}_A(\mathbf{r}, t, 45°)$, $\mathbf{P}_A(\mathbf{r}, t, 90°)$, $\mathbf{M}_L(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{M}_A(\mathbf{r}, t, 0°)$, $\mathbf{M}_A(\mathbf{r}, t, 45°)$, $\mathbf{M}_A(\mathbf{r}, t, 90°)$ の振幅の分布 (色) と向き (矢印と $\times$ 印)

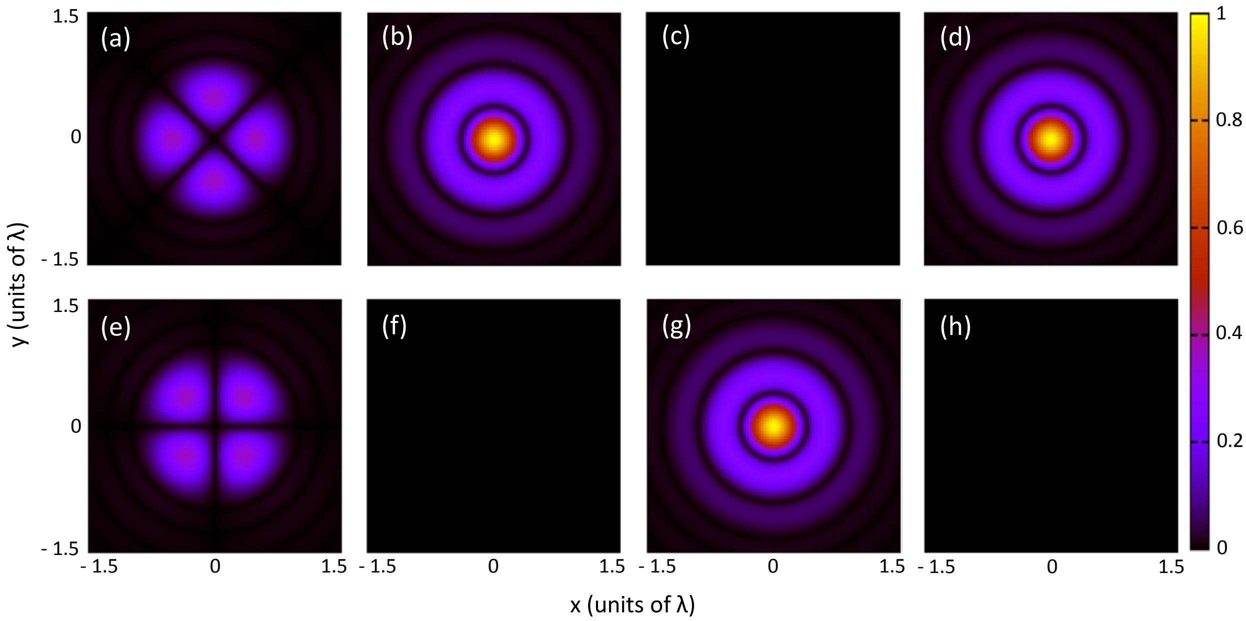

図 5.2 焦平面 ($z = 0$) におけるローレンツ不変量の時間平均された絶対値の分布．(a) $|\langle \mathcal{F}_L(\mathbf{r},t)\rangle|$, (b) $|\langle \mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,0^\circ)\rangle|$, (c) $|\langle \mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,45^\circ)\rangle|$, (d) $|\langle \mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,90^\circ)\rangle|$, (e) $|\langle \mathcal{G}_L(\mathbf{r},t)\rangle|$, (f) $|\langle \mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,0^\circ)\rangle|$, (g) $|\langle \mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,45^\circ)\rangle|$, (h) $|\langle \mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,90^\circ)\rangle|$.

を表す．図 5.3(a), (e) から分かるように，直線偏光のレーザー光により誘起される分極と磁化の振幅の分布には，電磁場 (図 5.1(a), (e)) ではなくローレンツ不変量 (図 5.2(a), (e)) の分布が反映されている．また，分極と磁化が電場と磁場の両方に平行な成分をもっているため，振動方向も電磁場とは全く異なるものになる．一方，図 5.3(b)-(d), (f)-(h) より，軸対称偏光のレーザー光により誘起される分極と磁化は振幅も振動方向も図 5.1(b)-(d), (f)-(h) で示された電磁場と非常に類似していることが分かる．これは，$\mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,0^\circ) = \mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,45^\circ) = \mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,90^\circ) = 0$ より，$\phi_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ のそれぞれの場合に分極と磁化が

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,0^\circ) &= -4\xi\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,0^\circ)\mathbf{E}_A(\mathbf{r},t,0^\circ), \\ \mathbf{M}_A(\mathbf{r},t,0^\circ) &= 4\xi\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,0^\circ)\mathbf{B}_A(\mathbf{r},t,0^\circ), \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,45^\circ) &= 7\xi\mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,45^\circ)\mathbf{B}_A(\mathbf{r},t,45^\circ), \\ \mathbf{M}_A(\mathbf{r},t,45^\circ) &= 7\xi\mathcal{G}_A(\mathbf{r},t,45^\circ)\mathbf{E}_A(\mathbf{r},t,45^\circ), \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,90^\circ) &= -4\xi\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,90^\circ)\mathbf{E}_A(\mathbf{r},t,90^\circ), \\ \mathbf{M}_A(\mathbf{r},t,90^\circ) &= 4\xi\mathcal{F}_A(\mathbf{r},t,90^\circ)\mathbf{B}_A(\mathbf{r},t,90^\circ) \end{aligned} \tag{5.3}$$

と表されるためである．このように，真空中の分極と磁化がレーザー光の電磁場と類似した分布をもつかどうかは，レーザー光の偏光状態によって異なる．また，直線偏光と軸対称偏光と

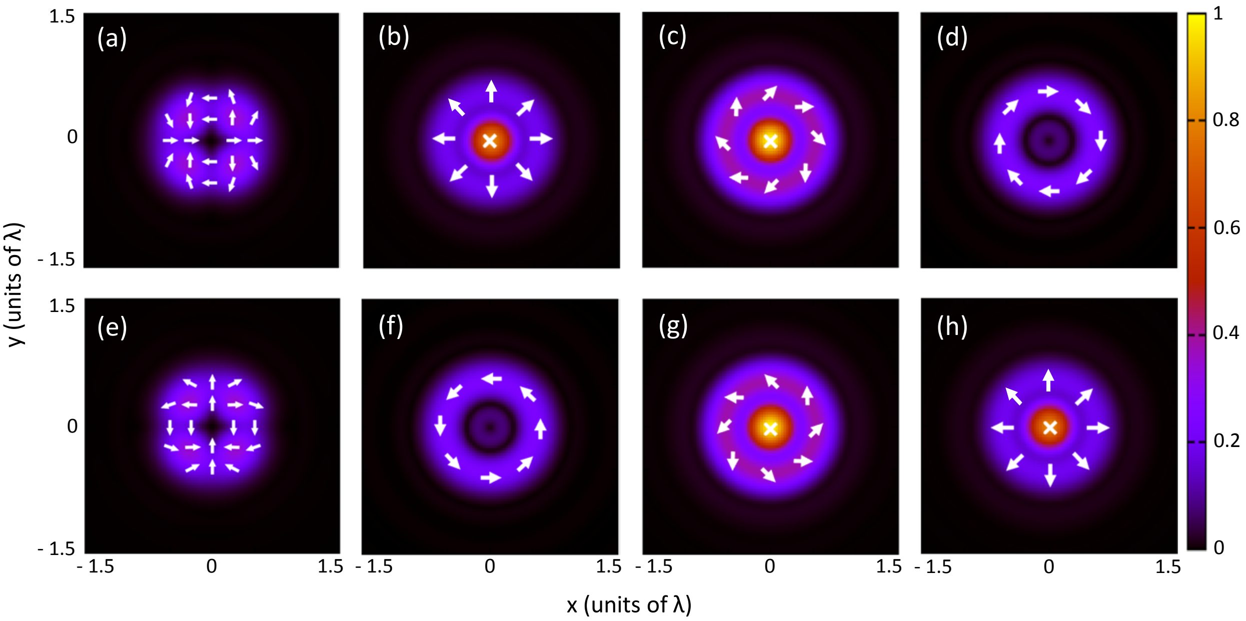

図 5.3　焦平面 ($z = 0$) における振幅の分布 (色) と向き (矢印と × 印). (a) $\mathbf{P}_L(\mathbf{r},t)$, (b) $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,0°)$, (c) $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,45°)$, (d) $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,90°)$, (e) $\mathbf{M}_L(\mathbf{r},t)$, (f) $\mathbf{M}_A(\mathbf{r},t,0°)$, (g) $\mathbf{M}_A(\mathbf{r},t,45°)$, (h) $\mathbf{M}_A(\mathbf{r},t,90°)$. × 印は z 軸方向を表す.

では $\mathbf{M}_A(\mathbf{r},t,0°)$ と $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,90°)$ を除いて軸対称偏光の方が分極と磁化の振幅が大きいが，これは軸対称偏光の方がローレン不変量が大きいためである．同じ軸対称偏光でも $\phi_0 = 0°, 90°$ と $45°$ の場合を比較すると $\phi_0 = 45°$ の方が分極・磁化ともに振幅が大きくなるが，これは式 (3.16) における係数の違い (4 と 7) によるものである．

上で述べたように，レーザー光を集光することにより真空中に分極と磁化が誘起されるのは集光により $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$，$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$ の関係が崩れるためである．このため，開口角 θ_f を大きくしていくと分極と磁化の振幅は大きくなることが予想される．図 5.4 は，レーザー光の強度が一定の場合に，分極 $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,45°)$ の焦平面における振幅の最大値を θ_f の関数として表したものである．この図から，予想通り $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,45°)$ の振幅は開口角の増加とともに非線形に大きくなることが分かる．他の分極や磁化の焦平面における振幅の最大値も，θ_f に対して $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,45°)$ と同様の依存性を示す．

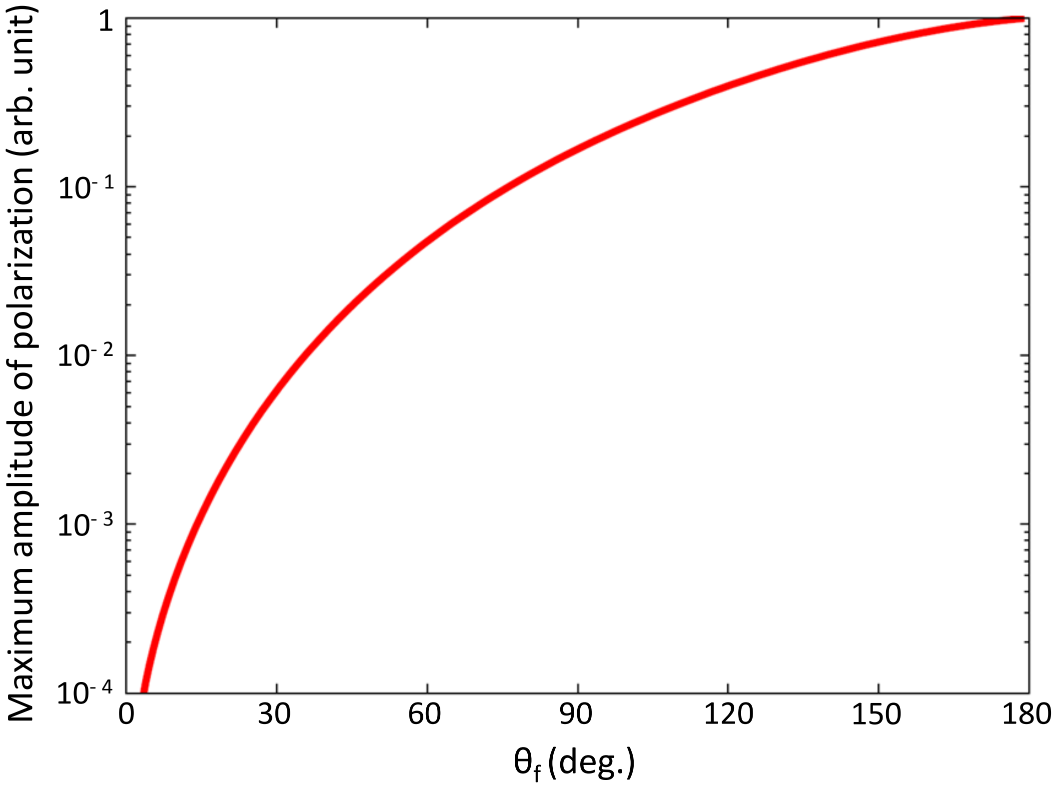

図 5.4　レーザー光の強度を一定としたときの，焦平面 $(z=0)$ における $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,45°)$ の振幅の最大値の開口角依存性．他の分極や磁化の焦平面における振幅の最大値も，θ_f に対して $\mathbf{P}_A(\mathbf{r},t,45°)$ と同様の依存性を示す．

5.2　レーザー光の照射により真空から生じる放射光

本節では，前節で求めた分極と磁化を式 (3.39)，式 (3.40) に代入し，真空から放射される光の電磁場を計算する．

図 5.5(a), (b) は，それぞれ直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を照射したときに真空から生じる放射光の強度分布を示している．ここで，軸対称偏光ビームに対する放射光の強度分布は ϕ_0 の値に関わらず同じである．直線偏光の場合には図 5.3(a), (e) の分極と磁化の分布が非常によく反映されており，レーザー光の電磁場がもつガウス分布とは全く異なるリング状の強度分布になる．一方，軸対称偏光の場合には分極と磁化がレーザー光の電磁場と類似した分布をもつため，放射光もレーザー光と同様の強度分布 $(l_{bg}^2(\theta))$ をもつ．レーザー光の出力が 100PW の場合，$z=500\lambda$ の面上におけるレーザー光の最大強度は約 $10^{22}\mathrm{W/cm^2}$，図 5.5 の放射光の最大強度は数十 $\mathrm{W/cm^2}$ 程度であるが，レーザー光の出力を 1EW に変化させると，レーザー光の最大強度が 1 桁しか増加しないのに対して放射光の最大強度は 3 桁増加し，$10^4\mathrm{W/cm^2}$ か

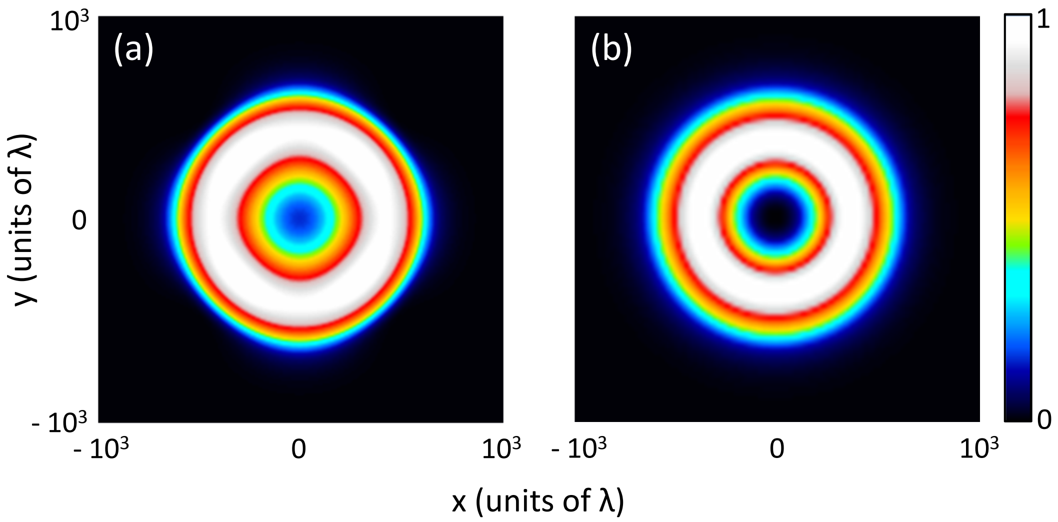

図 5.5　焦平面から 500μm 離れた面 ($z = 500\lambda$) における (a) 直線偏光と (b) 軸対称偏光のレーザー光を照射したときに真空から生じる放射光の強度分布.

ら 10^5W/cm^2 程度の大きさになる.

次に，放射光の電磁場からその光子数を求める．光子数 N は，放射光のエネルギーを 1 つの光子がもつエネルギーで割ったものとして定義することができる．放射光のエネルギーは，放射の方向に対して垂直な面上で放射光の強度を積分し，それをさらに時間に関して積分することにより求められる．よって，レーザー光の時間波形が矩形状のパルス (時間幅 τ) であると仮定し，ポインティングベクトルが $(c/4\pi)\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)$ であることを用いると

$$N = \frac{\tau}{\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty} d^2r \left|\left\langle \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_r(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}_r(\mathbf{r},t)\right\rangle\right| \tag{5.4}$$

が得られる．以下では，$\tau = 100$fs とする．

図 5.6 は，軸対称偏光と直線偏光のレーザー光を照射したときの放射光子数の偏光状態に対する依存性を，ϕ_0 を変数にとって表したものである．ここで，レーザー光の出力は 100PW とした．ϕ_0 に対する光子数の変化から，入射光が軸対称偏光のレーザー光の場合には $\phi_0 = 45°$ のときに光子数が最大になることが分かる．これは，$\phi_0 = 45°$ の場合に真空中に誘起される分極と磁化の振幅が最大になることと一致する．また，光子数は直線偏光の場合と比べて軸対称偏光の方が最大で 3 倍程度大きくなる．

図 5.7 は，軸対称偏光 ($\phi_0 = 45°$) と直線偏光のレーザー光を照射したときに真空から生じる放射光子数をレーザー出力の関数として表し，同時に開口角 θ_f を変化させたときの光子数の変化を示したものである．光子数は $\theta_f = 100°$ と $15°$ の場合に対して求められており，それぞれ f 値が 0.4 と 4 の場合に対応している．まず直線の傾きから，レーザー出力が 1 桁増加するごとに光子数は 3 桁増加することが分かる．これは，式 (3.16) から明らかなように現在考えている

のが 3 次の非線形光学効果であり，分極と磁化がそれぞれレーザー光の電磁場の 3 乗 (光の強度の 3/2 乗) に比例するためである．また，θ_f を 15° から 100° に変化させたとき，光子数は約 7 桁も増加していることが分かる．通常，レーザー光を集光したときのスポットサイズと焦点深度から求まる相互作用の体積は f 値の 4 乗に比例し，放射光の通過する面積は f 値の 2 乗に反比例する．このため，物質中の 3 次の非線形光学効果であれば，レーザー光の集光強度が f 値の 2 乗に反比例することを考慮しても，4 から 0.4 への f 値の変化で光子数は 4 桁程度しか増加しない．よって，図 5.7 に示されている残りの 3 桁の増加は，レーザー強度が一定の下でも θ_f を大きくするだけで分極と磁化が増加する (図 5.4) という真空中の分極と磁化に特有の性質のためであると考えられる．

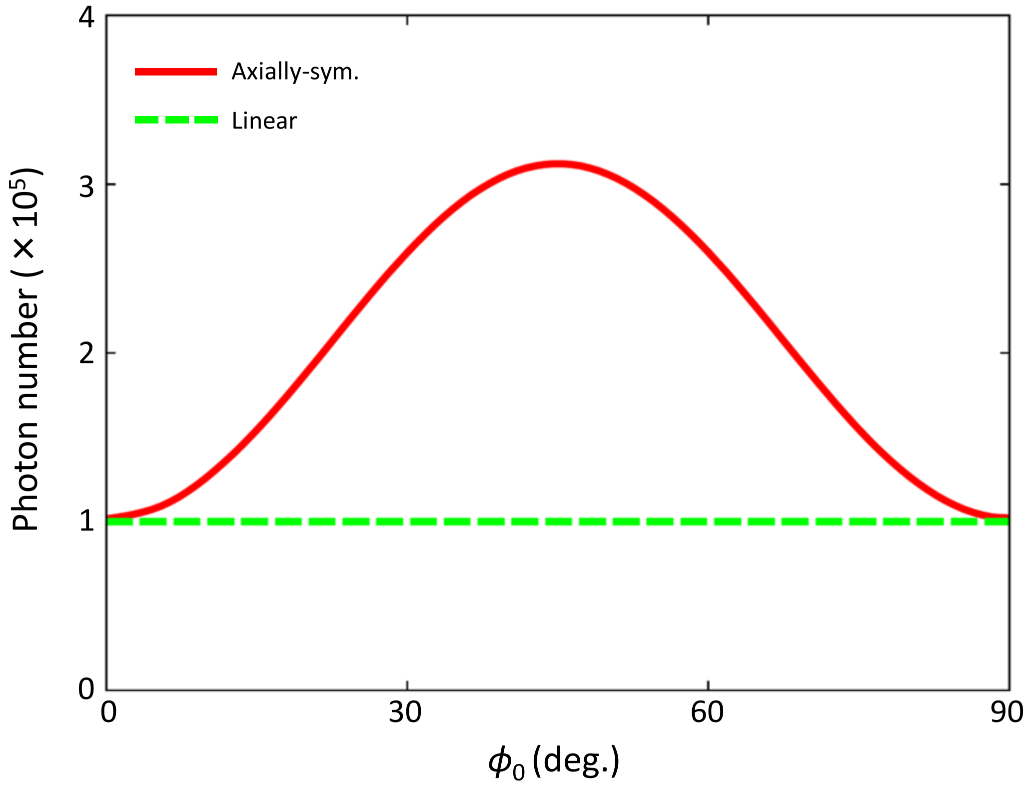

図 5.6　軸対称偏光と直線偏光のレーザー光を照射したときに真空から生じる放射光子数の ϕ_0 に対する依存性．

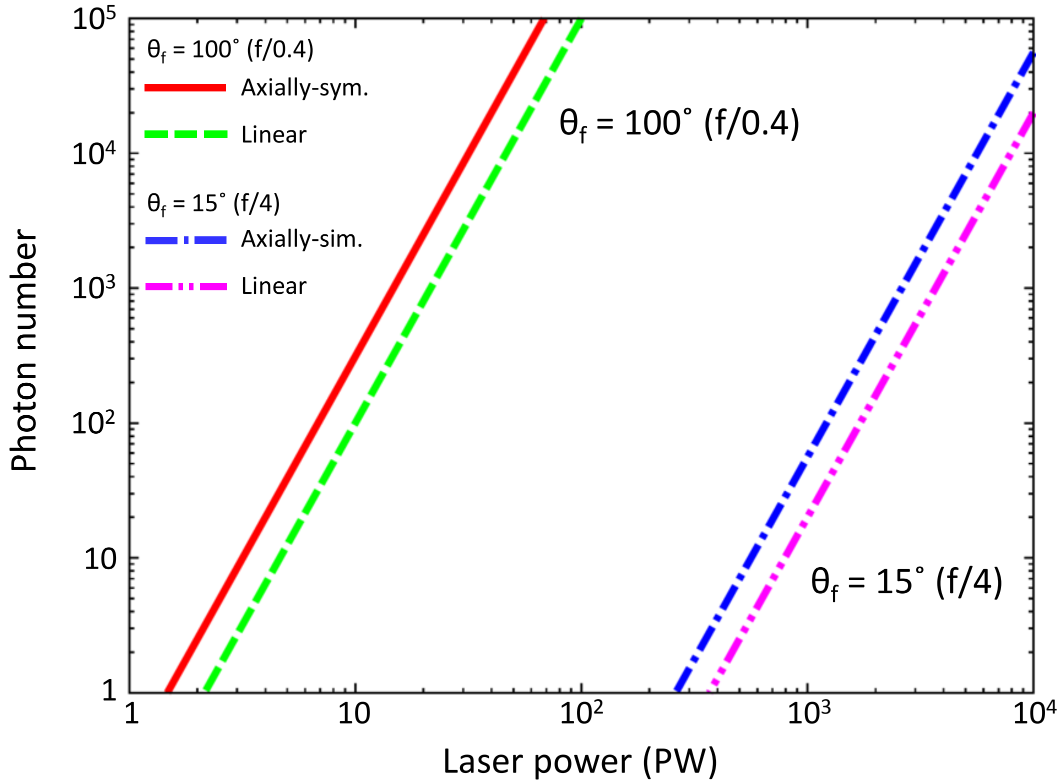

図 5.7　軸対称偏光 ($\phi_0 = 45°$) と直線偏光のレーザー光を照射したときに真空から生じる放射光子数のレーザー出力と開口角 θ_f に対する依存性．

5.3　本章のまとめ

本章では，直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光子数を計算した．

分極と磁化の計算により，軸対称偏光のレーザー光により誘起される分極と磁化はその電磁場と類似した分布になるが，直線偏光の場合にはもとの電磁場とは全く異なる分布になるという結果が得られた．これにより，真空中の分極と磁化は，特定の偏光状態をもつ光が照射された場合にはその電磁場と異なる分布をもつことが分かった．これは分極と磁化のローレンツ不変量に対する依存性のためである．また，真空からの放射光子数の計算結果から，入射レーザー光の偏光状態は光子数に大きな影響を与えないが，開口角を 15° から 100° に変化させることで光子数は約 7 桁増加することが分かった．物質中の 3 次の非線形光学効果であれば，この場合の光子数の増加は 4 桁程度であると考えられるため，真空からの放射光子数は開口角の増加に対して物質中では考えられないほど大幅に増加する．これは，開口角の変化により物質と光の相互作用が大きな影響を受けるのは光の強度が変化する場合に限られるのに対し，真空中の分極と磁化は光の強度が一定の下でも開口角に強く依存しているためである．

第 6 章

対向レーザー光による真空非線形光学現象

本章では，反対方向に伝搬する 2 つの直線偏光のレーザー光を 1 点に集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光を計算し，直線偏光の 1 ビームを集光した場合の計算結果 (前章) と比較する．以下では，2 ビームの偏光方向 (電場の振動方向) が同じ場合 (図 6.1 (a)) のレーザー光の電磁場を $(\mathbf{E}_{L\parallel}(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_{L\parallel}(\mathbf{r},t))$，直交している場合 (図 6.1 (b)) のレーザー光の電磁場を $(\mathbf{E}_{L\perp}(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_{L\perp}(\mathbf{r},t))$ とおき，この 2 つの場合についてのみ考える．また，ローレンツ不変量と分極・磁化に対しても同様の添え字を用いることにする．

6.1　対向レーザー光の電磁場

直線偏光のレーザー光を等しいエネルギーをもつ 2 つのビームに分け，反対方向に伝搬させて 1 点に集光する場合，$\mathbf{E}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{E}_{L\perp}(\mathbf{r},t)$ の複素振幅のデカルト座標成分は，レーザー光

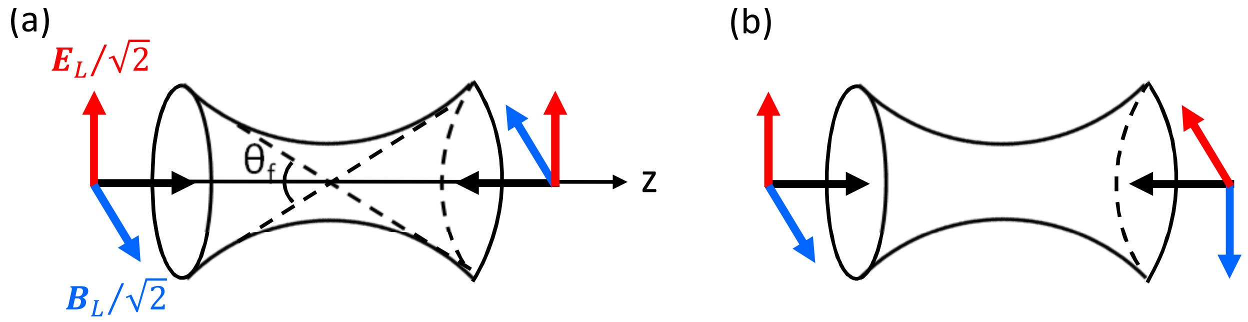

図 6.1　反対方向に伝搬する 2 ビーム．

を 1 ビームのまま集光した場合の電場の複素振幅 $\tilde{\mathbf{E}}_L(\mathbf{r})$ を用いて次のように表される．

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{L\parallel,x}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,x}(x,y,z)+\tilde{E}_{L,x}(x,-y,-z)\right\},\\
\tilde{E}_{L\parallel,y}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,y}(x,y,z)-\tilde{E}_{L,y}(x,-y,-z)\right\},\\
\tilde{E}_{L\parallel,z}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,z}(x,y,z)-\tilde{E}_{L,z}(x,-y,-z)\right\},
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{L\perp,x}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,x}(x,y,z)-\tilde{E}_{L,y}(-y,-x,-z)\right\},\\
\tilde{E}_{L\perp,y}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,y}(x,y,z)-\tilde{E}_{L,x}(-y,-x,-z)\right\},\\
\tilde{E}_{L\perp,z}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,z}(x,y,z)-\tilde{E}_{L,z}(-y,-x,-z)\right\}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{-y}{x}\right) &= -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -\varphi,\\
\tan^{-1}\left(\frac{-x}{-y}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan\varphi}\right) = \tan^{-1}\left(-\tan\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{2}-\varphi
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

であることから，式 (6.1) と式 (6.2) は円柱座標を用いて次のように表される．

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{L\parallel,x}(\rho,\varphi,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,x}(\rho,\varphi,z)+\tilde{E}_{L,x}(\rho,-\varphi,-z)\right\},\\
\tilde{E}_{L\parallel,y}(\rho,\varphi,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,y}(\rho,\varphi,z)-\tilde{E}_{L,y}(\rho,-\varphi,-z)\right\},\\
\tilde{E}_{L\parallel,z}(\rho,\varphi,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,z}(\rho,\varphi,z)-\tilde{E}_{L,z}(\rho,-\varphi,-z)\right\},
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{L\perp,x}(\rho,\varphi,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,x}(\rho,\varphi,z)-\tilde{E}_{L,y}\left(\rho,\frac{\pi}{2}-\varphi,-z\right)\right\},\\
\tilde{E}_{L\perp,y}(\rho,\varphi,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,y}(\rho,\varphi,z)-\tilde{E}_{L,x}\left(\rho,\frac{\pi}{2}-\varphi,-z\right)\right\},\\
\tilde{E}_{L\perp,z}(\rho,\varphi,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{E}_{L,z}(\rho,\varphi,z)-\tilde{E}_{L,z}\left(\rho,\frac{\pi}{2}-\varphi,-z\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

式 (4.63) より，$I_n(\rho,z)$ について

$$
I_n(\rho,-z) = I_n^*(\rho,z) \tag{6.6}
$$

が成り立つため，式 (4.62) より

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{L\parallel,x}(\rho,\varphi,z) &= -2iA_2\left[\mathrm{Re}\{I_0(\rho,z)\}+\cos 2\varphi\mathrm{Re}\{I_2(\rho,z)\}\right],\\
\tilde{E}_{L\parallel,y}(\rho,\varphi,z) &= -2iA_2\sin 2\varphi\mathrm{Re}\{I_2(\rho,z)\},\\
\tilde{E}_{L\parallel,z}(\rho,\varphi,z) &= -4iA_2\cos\varphi\mathrm{Im}\{I_1(\rho,z)\},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{L\perp,x}(\rho,\varphi,z) &= -iA_2\left[I_0(\rho,z)+\cos 2\varphi I_2(\rho,z)-\sin 2\varphi I_2^*(\rho,z)\right],\\
\tilde{E}_{L\perp,y}(\rho,\varphi,z) &= iA_2\left[I_0^*(\rho,z)-\cos 2\varphi I_2^*(\rho,z)-\sin 2\varphi I_2(\rho,z)\right],\\
\tilde{E}_{L\perp,z}(\rho,\varphi,z) &= -2A_2\left[\cos\varphi I_1(\rho,z)-\sin\varphi I_1^*(\rho,z)\right]
\end{aligned} \tag{6.8}$$

が得られる．ここで，$A_2 = A/\sqrt{2}$ である．磁場 $\mathbf{B}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{B}_{L\perp}(\mathbf{r},t)$ も式 (6.4)，式 (6.5) と同様の式を用いて求めることができる．

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{L\parallel,x}(\rho,\varphi,z) &= 2A_2\sin 2\varphi\mathrm{Im}\{I_2(\rho,z)\},\\
\tilde{B}_{L\parallel,y}(\rho,\varphi,z) &= 2A_2\left[\mathrm{Im}\{I_0(\rho,z)\}-\cos 2\varphi\mathrm{Im}\{I_2(\rho,z)\}\right],\\
\tilde{B}_{L\parallel,z}(\rho,\varphi,z) &= -4A_2\sin\varphi\mathrm{Re}\{I_1(\rho,z)\},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{L\perp,x}(\rho,\varphi,z) &= iA_2\left[I_0^*(\rho,z)+\cos 2\varphi I_2^*(\rho,z)-\sin 2\varphi I_2(\rho,z)\right],\\
\tilde{B}_{L\perp,y}(\rho,\varphi,z) &= -iA_2\left[I_0(\rho,z)-\cos 2\varphi I_2(\rho,z)-\sin 2\varphi I_2^*(\rho,z)\right],\\
\tilde{B}_{L\perp,z}(\rho,\varphi,z) &= 2A_2\left[\cos\varphi I_1^*(\rho,z)-\sin\varphi I_1(\rho,z)\right].
\end{aligned} \tag{6.10}$$

以下では，2 ビームと 1 ビームの結果を比較する場合，対向する 2 ビームの合計のレーザー出力と 1 ビームのレーザー出力は常に等しいとする．図 6.2(a)-(f) は，それぞれ焦平面における $\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}_{L\perp}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_L(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_{L\perp}(\mathbf{r},t)$ の振幅の分布 (色) と向き (矢印と × 印) を表す．2 ビームの偏光方向が同じ場合には焦点付近で $\mathbf{E}_{L\parallel}(\mathbf{r},t) \sim \sqrt{2}\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)$，$\mathbf{B}_{L\parallel}(\mathbf{r},t) \sim 0$ となり，一方偏光方向が直交している場合には $|\mathbf{E}_{L\perp}(\mathbf{r},t)| \sim |\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)|$，$|\mathbf{B}_{L\perp}(\mathbf{r},t)| \sim |\mathbf{B}_L(\mathbf{r},t)|$ となって電場と磁場が同じ方向を向くため，レーザー光の偏光方向に関わらずエネルギーの伝搬は生じない．また，電磁場の振幅の大きさは 1 ビームの場合と比べてほとんど変化しない．

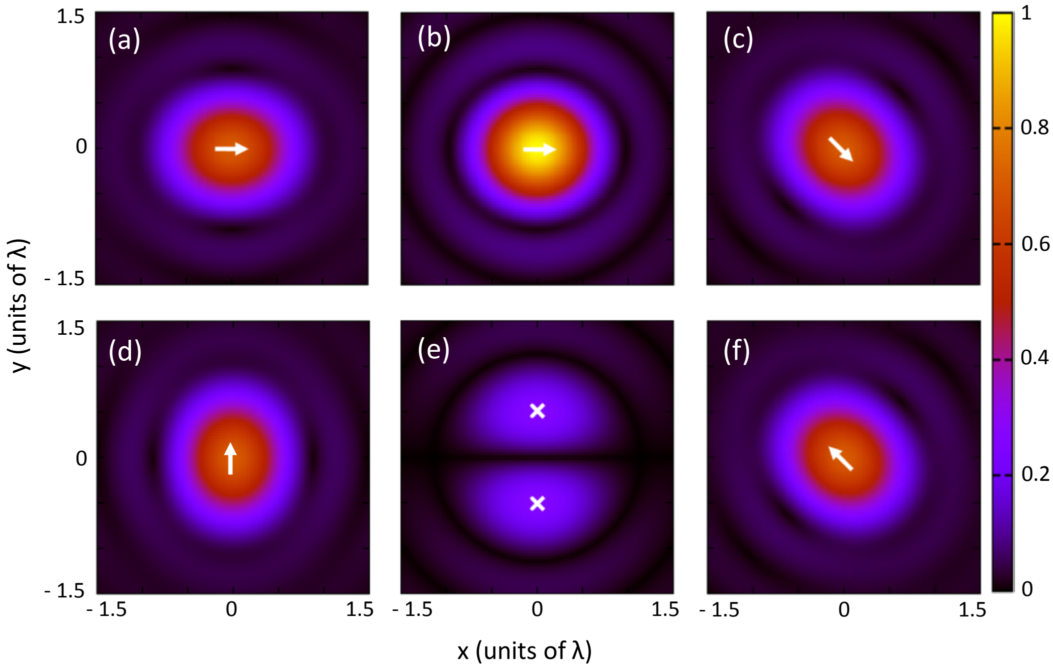

図 6.2　焦平面 ($z = 0$) における振幅の分布 (色) と向き (矢印と $\times$ 印)．(a) $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t)$, (b) $\mathbf{E}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$, (c) $\mathbf{E}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$, (d) $\mathbf{B}_L(\mathbf{r}, t)$, (e) $\mathbf{B}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$, (f) $\mathbf{B}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$．$\times$ 印は z 軸方向を表す．

6.2　対向レーザー光のローレンツ不変量と真空中の分極と磁化

図 6.3(a)-(f) は，それぞれ焦平面における $|\langle \mathcal{F}_L(\mathbf{r}, t)\rangle|$, $|\langle \mathcal{F}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)\rangle|$, $|\langle \mathcal{F}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)\rangle|$, $|\langle \mathcal{G}_L(\mathbf{r}, t)\rangle|$, $|\langle \mathcal{G}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)\rangle|$, $|\langle \mathcal{G}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)\rangle|$ の分布を表す．2 ビームの偏光方向が同じ場合には焦点付近で $\mathcal{F}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t) \sim |\mathbf{E}_L|^2$ のように $\mathcal{F}$ が大きくなり，偏光方向が直交している場合には $|\mathcal{G}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)| \sim |\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t)||\mathbf{B}_L(\mathbf{r}, t)|$ のように $\mathcal{G}$ が大きくなる．残りのローレンツ不変量については，$\langle \mathcal{F}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)\rangle = \left\langle \mathcal{G}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)\right\rangle = 0$ のように，その時間平均値は完全に 0 になる．1 ビームの電磁場のローレンツ不変量と $\mathcal{F}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$，$\mathcal{G}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$ の大きさを比べると，電磁場の振幅とは異なり 2 ビームを集光したときのローレンツ不変量は 1 ビームの場合よりも 20 倍程度大きくなることが分かる．これは，2 ビームの集光により定常波が生成されると，電磁場の振幅が大きくなる焦点付近で $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$，$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ の関係が崩れるためである．

図 6.4(a)-(f) は，それぞれ焦平面における $\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t)$，$\mathbf{P}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$，$\mathbf{P}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$，$\mathbf{M}_L(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{M}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{M}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$ の振幅の分布 (色) と向き (矢印と $\times$ 印) を表す．図 6.2 と比べて分かるように，対向する 2 ビームにより誘起される分極と磁化は，もとの電磁場と非常に類似した分布をもつ．これは，$\mathcal{F}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathcal{G}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$ の絶対値が $\mathcal{F}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathcal{G}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$ よりも十分小さい

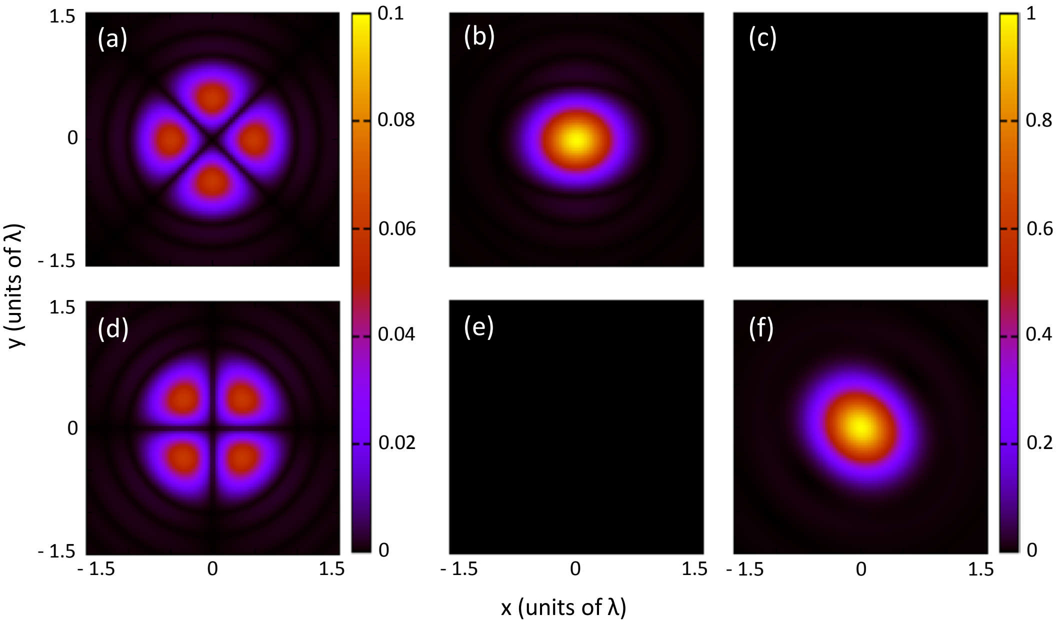

図 6.3　焦平面 $(z = 0)$ におけるローレンツ不変量の時間平均された絶対値の分布．(a) $|\langle\mathcal{F}_L(\mathbf{r},t)\rangle|$，(b) $|\langle\mathcal{F}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\rangle|$，(c) $|\langle\mathcal{F}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\rangle|$，(d) $|\langle\mathcal{G}_L(\mathbf{r},t)\rangle|$，(e) $|\langle\mathcal{G}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\rangle|$，(f) $|\langle\mathcal{G}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\rangle|$.

ため，それぞれの場合に分極と磁化が

$$\mathbf{P}_{L\parallel}(\mathbf{r},t) \simeq -4\xi\mathcal{F}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}_{L\parallel}(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{M}_{L\parallel}(\mathbf{r},t) \simeq 4\xi\mathcal{F}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\mathbf{B}_{L\parallel}(\mathbf{r},t), \tag{6.11}$$

$$\mathbf{P}_{L\perp}(\mathbf{r},t) \simeq 7\xi\mathcal{G}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\mathbf{B}_{L\perp}(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{M}_{L\perp}(\mathbf{r},t) \simeq 7\xi\mathcal{G}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}_{L\perp}(\mathbf{r},t) \tag{6.12}$$

と表され，これにより焦点付近の分極と磁化の大きさがそれぞれ

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{P}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\right| &\sim 4\xi\left|\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)\right|^2\left|\mathbf{E}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\right| \sim 4\sqrt{2}\xi\left|\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)\right|^3, \\ \left|\mathbf{M}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\right| &\sim 4\xi\left|\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)\right|^2\left|\mathbf{B}_{L\parallel}(\mathbf{r},t)\right| \sim 0, \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{P}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\right| &\sim 7\xi\left|\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)\right|\left|\mathbf{B}_L(\mathbf{r},t)\right|\left|\mathbf{B}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\right| \sim 7\xi\left|\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)\right|^3, \\ \left|\mathbf{M}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\right| &\sim 7\xi\left|\mathbf{E}_L(\mathbf{r},t)\right|\left|\mathbf{B}_L(\mathbf{r},t)\right|\left|\mathbf{E}_{L\perp}(\mathbf{r},t)\right| \sim 7\xi\left|\mathbf{B}_L(\mathbf{r},t)\right|^3 \end{aligned} \tag{6.14}$$

となるためである．また，対向する 2 ビームにより誘起される分極と磁化の大きさは 1 ビームの場合よりも 50 倍近く大きくなるが，これは式 (6.13)，式 (6.14) のように分極と磁化の値が焦点付近で大きくなるためである．

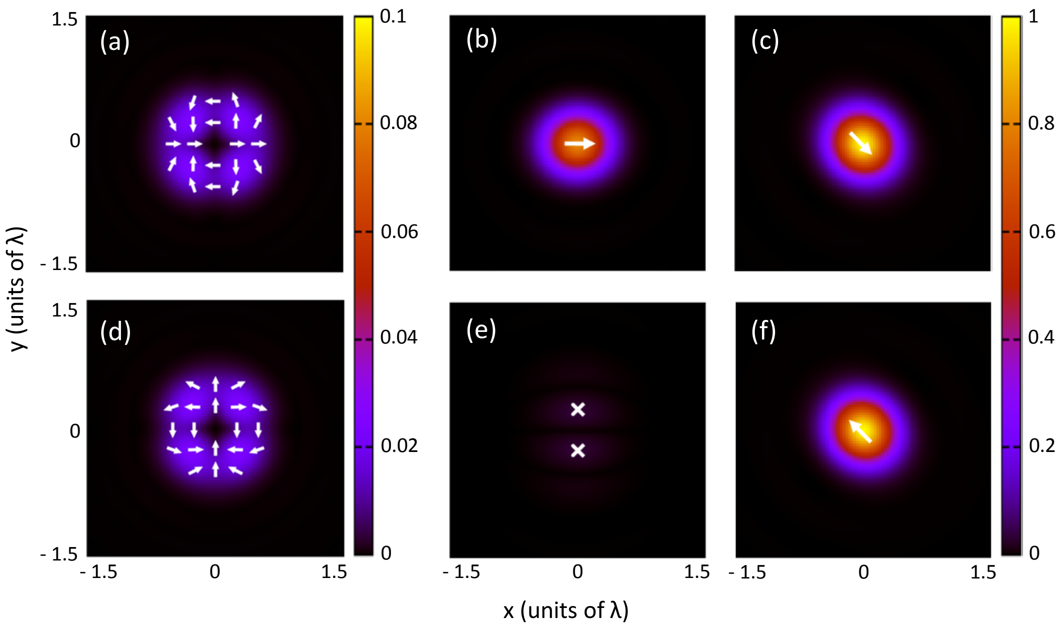

図 6.4 焦平面 ($z = 0$) における振幅の分布 (色) と向き (矢印と × 印). (a) $\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t)$, (b) $\mathbf{P}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$, (c) $\mathbf{P}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$, (d) $\mathbf{M}_L(\mathbf{r}, t)$, (e) $\mathbf{M}_{L\parallel}(\mathbf{r}, t)$, (f) $\mathbf{M}_{L\perp}(\mathbf{r}, t)$. × 印は z 軸方向を表す.

6.3 対向レーザー光の照射により真空から生じる放射光

図 6.5(a), (b) は，それぞれ直線偏光の 1 ビームと対向する直線偏光の 2 ビームを照射したときに真空から生じる放射光の強度分布を示している．ここで，対向する 2 ビームに対する放射光の強度分布は，2 ビームの偏光方向がなす角度に関わらず同じである．前章でも述べた通り直線偏光の場合には分極と磁化の分布が反映されてガウス分布とは全く異なるリング状の強度分布になるが，2 ビームを集光した場合の分極と磁化はレーザー光の電磁場と同様の分布をもつため，放射光の強度分布もレーザー光と同じガウス分布になる．また，2 ビーム照射時に生じる放射光の最大強度は，1 ビームの場合に比べて 3 桁から 4 桁程度大きくなる．

図 6.6 は，直線偏光をもつ 1 ビームと対向する直線偏光の 2 ビームを照射したときに真空から生じる放射光子数をレーザー出力の関数として表したものである．まず，3 次の非線形光学効果を考えているため，ビーム数や偏光方向に関係なく放射光子数はレーザー出力の 3 乗に比例して増加する．次に，それぞれの場合における光子数を比較すると，対向する 2 ビームの偏光方向が直交している場合に光子数が最も多くなり，1 ビームの場合と比べると 3 桁以上増加していることが分かる．1 本のレーザー光を集光する場合と対向する 2 ビームを集光する場合ではレーザー光の電磁場の振幅はほとんど変わらない (図 6.2) ため，この光子数の増加はレーザー光の強度や出力が一定の下でも生じる，真空と光の相互作用に特有のものであると考えられる．

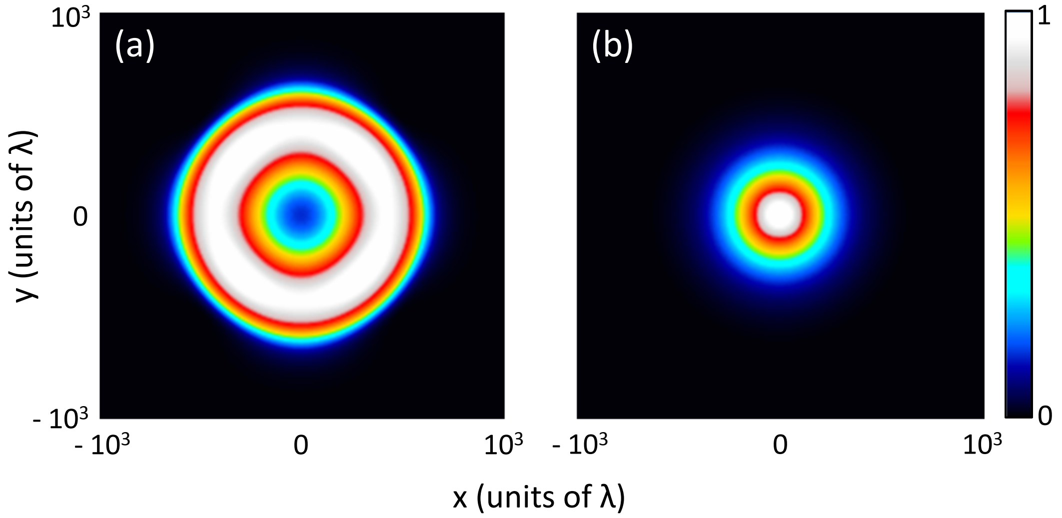

図 6.5　焦平面から 500μm 離れた面 ($z = 500\lambda$) における (a) 直線偏光の 1 ビームと (b) 対向する直線偏光の 2 ビームを照射したときに真空から生じる放射光の強度分布.

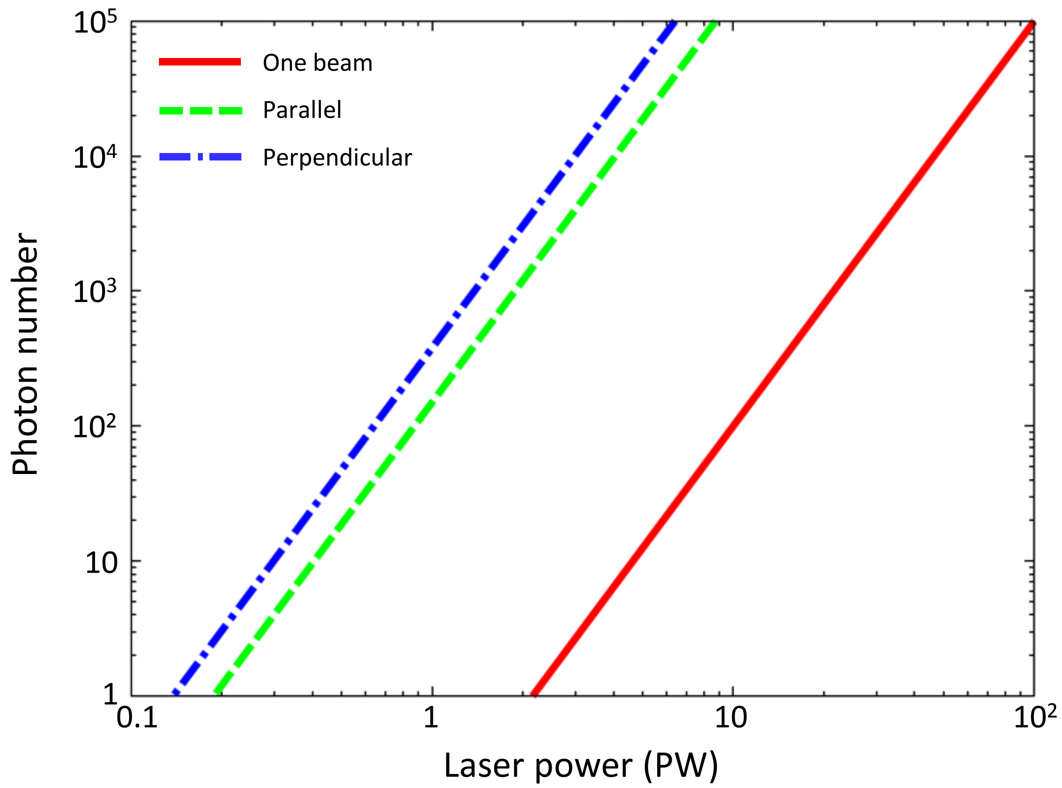

図 6.6　直線偏光をもつ 1 ビームと対向する直線偏光の 2 ビームを照射したときに真空から生じる放射光子数のレーザー出力に対する依存性.

6.4　本章のまとめ

本章では，反対方向に伝搬する 2 つの直線偏光のレーザー光を 1 点に集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光を計算し，直線偏光の 1 ビームを集光した場合の計算結果と比較した．

分極と磁化の計算から，1 ビームの場合とは異なり，対向するレーザー光により誘起される分極と磁化はもとの電磁場と非常に似た分布をもつという結果が得られた．また，レーザー光の強度や出力は変わらないにも関わらず，分極と磁化の振幅は 1 ビームの場合と比べて非常に大きく，その結果として放射光の光子数も 1 ビームの場合と比べて 3 桁以上増加するという結果が得られた．これにより，真空とレーザー光の相互作用の大きさは，光の強度やエネルギーだけでなく照射するビームの幾何学配置に大きく依存することが分かった．

第 7 章

結論

本研究では，真空と光の相互作用と物質と光の相互作用の違いを明らかにすることを目的として，真空中に誘起される分極と磁化や真空から放射される光の光子数が，光の偏光状態や開口角，レーザー光の幾何学配置などにどのように依存するのかを調べた．

第 2 章では，シュインガー極限よりも十分強度の低い一様電磁場が真空中に存在する場合のラグランジアン密度をディラック方程式から導出する方法について述べた．

第 3 章では，第 2 章で得られたラグランジアン密度を用いて真空中における Maxwell 方程式を導出し，物質中における Maxwell 方程式との比較により真空中の分極と磁化を定義した．また，レーザー光が照射された場合に真空から放射される光の電磁場を，レーザー光よりも放射光の方が十分強度が低いという仮定の下で焦点から十分離れた点において計算した．

第 4 章では，ベクトル場の回折積分を用いて集光されたレーザー光の電磁場を計算する方法について述べ，直線偏光と軸対称偏光をもつレーザー光を集光した場合の電磁場を求めた．

第 5 章では，直線偏光と軸対称偏光のレーザー光を集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光子数を計算した．分極と磁化の計算から，軸対称偏光のレーザー光により誘起される分極と磁化はその電磁場と類似した分布になるが，直線偏光のレーザー光を集光した場合に生じる分極と磁化はもとの電磁場とは全く異なる分布になるという結果が得られた．また，真空からの放射光子数の計算結果より，入射レーザー光の偏光状態は光子数に大きな影響を与えないが，開口角を 15° から 100° に変化させることで光子数は約 7 桁増加することが分かった．

第 6 章では，反対方向に伝搬する 2 つの直線偏光のレーザー光を 1 点に集光した場合の電磁場のローレンツ不変量とそのとき真空中に生じる分極と磁化，また真空からの放射光を計算し，直線偏光の 1 ビームを集光した場合の計算結果と比較した．分極と磁化の計算から，対向するレーザー光により誘起される分極と磁化はもとの電磁場と非常に似た分布をもつという結果が得られた．また，レーザー光の強度や出力を一定にした場合でも分極と磁化の振幅は 1 ビーム

の場合と比べて非常に大きくなり，その結果として放射光子数も 1 ビームの場合と比べて 3 桁以上増加するという結果が得られた．

以上の結果から，物質中の分極と磁化は光の偏光状態や幾何学配置に関わらず電磁場と同様の分布になるが，真空中の分極と磁化は特定の偏光状態をもつ光が照射された場合にはその電磁場と異なる分布になることが分かった．また，物質と光の相互作用の大きさは光の強度以外にはあまり依存しないが，真空と光の相互作用の大きさは光の強度やエネルギーが一定の場合でも開口角やビームの幾何学配置によって大きく変化することが明らかになった．

付録 A

スピンとパウリ行列

A.1　スピン作用素とその固有状態

$\hbar$ を単位として無次元化された角運動量の作用素を $\hat{\mathbf{j}} = (\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z)$，角運動量の大きさの 2 乗に対応する作用素を $\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2$ と定義すると，$\hat{\mathbf{j}}^2$ と $\hat{j}_z$ の同時固有状態 $|j, m\rangle$ に対して次の固有値方程式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{j}}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \qquad && j \text{ は 0 以上の整数 or 半整数} \\
\hat{j}_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, && m = -j, -j+1, \cdots, j+1, j.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

軌道角運動量は j が整数の場合に制限されるが，式 (A.1) は j が半整数 $1/2, 3/2, \cdots$ となるような角運動量の固有状態も許容されることを示している．実際，様々な実験によって電子が軌道角運動量以外に角運動量の大きさ $\hbar/2$ に対応する 2 つの状態しか存在しない内部自由度をもつことが明らかになっており，これは電子が $j = 1/2$ に相当する角運動量を軌道角運動量以外にもつことを意味している．このような素粒子に固有の内部角運動量 (軌道角運動量以外の角運動量) をスピンという．

以下では，スピンが $\hbar/2$ の場合 ($j = 1/2$) を考える．スピン作用素 $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ を 3 成分の作用素として定義し，$\hbar$ を単位として $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ を無次元化した作用素 $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{\Sigma}}/\hbar$ を考える．この無次元化されたスピン作用素の各成分は，軌道角運動量と同様に交換関係

$$
[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{s}_k \tag{A.2}
$$

を満たす．ここで，ε_{ijk} は

$$
\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & 2 \text{ つ以上の添字が等しい場合} \\ +1, & ijk \text{ が 123 の偶置換である場合} \\ -1, & ijk \text{ が 123 の奇置換である場合} \end{cases} \tag{A.3}
$$

を満たす反対称テンソルである．また，上で述べたようにスピンは粒子の内部自由度であり，粒子の空間座標とは独立であるため，スピン作用素は運動量や軌道角運動量の作用素と可換である．

$\hat{\mathbf{s}}$ は通常の物理量のように $\hat{\mathbf{r}}$ と $\hat{\mathbf{p}}$ を用いて表すことができないため，一般に内部自由度の空間における行列で表される．このために，まずスピンの大きさの 2 乗の作用素 $\hat{\mathbf{s}}^2$ (固有値 $\hbar[(1/2)(1/2+1)]^{\frac{1}{2}}$) とその 1 成分 ($z$ 成分) の作用素 $\hat{s}_z$(固有値 $\pm\hbar/2$) の同時固有状態 $|s=1/2, s_z=\pm 1/2\rangle$ を導入し

$$|\pm\rangle = \left|s=\frac{1}{2}, s_z=\pm\frac{1}{2}\right\rangle \tag{A.4}$$

と定義する．式 (A.1) に，$j=1/2, m=\pm 1/2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}^2 |\pm\rangle &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|\pm\rangle, \\ \hat{s}_z |\pm\rangle &= \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle\end{aligned} \tag{A.5}$$

が導かれる．

スピンの固有値は 2 つであるため，$\hat{s}_z$ の固有状態 $|\pm\rangle$ はスピンの状態を表す基底として用いることができる．よって，スピンを考慮した場合の電子の任意の状態 $|\psi(t)\rangle$ は

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_+(t)\rangle\,|+\rangle + |\psi_-(t)\rangle\,|-\rangle \tag{A.6}$$

と表される．このとき, $s_z=\pm 1/2$ の状態 $|\pm\rangle$ に粒子が見出される確率は, それぞれ $\|\,|\psi_\pm(t)\rangle\,\|^2$ である．また，$|\psi(t)\rangle$ の座標表示 $\psi(\mathbf{r},t)=\langle\mathbf{r}|\psi(t)\rangle$ は

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_+(\mathbf{r},t)\,|+\rangle + \psi_-(\mathbf{r},t)\,|-\rangle \tag{A.7}$$

となる．いま，$|\pm\rangle$ に対して

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{A.8}$$

のように大きさが 1 で互いに直交する列ベクトルを対応させる．このとき，$\psi(\mathbf{r},t)$ は

$$\psi(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix}\psi_+(\mathbf{r},t)\\ \psi_-(\mathbf{r},t)\end{pmatrix} \tag{A.9}$$

と表される．これを 2 成分スピノールという．

式 (A.8) のように表された基底 $|\pm\rangle$ を用いると，スピン作用素の成分 $\hat{s}_i$ は次のように 2×2

の行列で表される．

$$
\begin{aligned}
\hat{s}_i &= \sum_{j=\pm}\sum_{k=\pm} |j\rangle \langle j| \hat{s}_i |k\rangle \langle k| \\
&= |+\rangle \langle +| \hat{s}_i |+\rangle \langle +| + |+\rangle \langle +| \hat{s}_i |-\rangle \langle -| \\
&+ |-\rangle \langle -| \hat{s}_i |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| \hat{s}_i |-\rangle \langle -| \\
&= \begin{pmatrix} \langle +| \hat{s}_i |+\rangle & \langle +| \hat{s}_i |-\rangle \\ \langle -| \hat{s}_i |+\rangle & \langle -| \hat{s}_i |-\rangle \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

式 (A.10) を用いて $\hat{s}_i$ を具体的に求めると

$$
\hat{s}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.11}
$$

となる．

A.2　パウリ行列

式 (A.11) で定数 1/2 を除いたものを $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ と書き，パウリ行列と呼ぶ．$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ を用いると，元のスピン作用素 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ は

$$
\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hbar \hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{A.12}
$$

と表される．$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の各成分は

$$
\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.13}
$$

であり，交換関係

$$
[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k \tag{A.14}
$$

とともに，次の性質を満たす．

$$
\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = I_2, \\
&\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z \ \text{およびその巡回置換}.
\end{aligned} \tag{A.15}
$$

これらの式はまとめて次のように書ける．

$$
\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = \delta_{ij} I_2 + i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k. \tag{A.16}
$$

A.3　波動関数の軌道部分とスピン部分の分離

ハミルトニアン $\hat{H}$ が座標 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}$ による微分を含む項 (軌道部分) と，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ などのスピンに対応する作用素を含む項 (スピン部分) の和で表される場合，波動関数を $\mathbf{r}$ に依存する関数 $\varphi(\mathbf{r})$ と $\mathbf{r}$ に依存しない 2 成分スピノール χ_s に変数分離することで，波動方程式を $\varphi(\mathbf{r})$ と χ_s のそれぞれについての 2 つの方程式に分離することができる．以下，これを示す．

$\hat{H}$ が $f(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$ と $g(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ を用いて次のように表されるとする．

$$\hat{H} = f(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla) + g(\hat{\boldsymbol{\sigma}}). \tag{A.17}$$

このとき，エネルギー固有値を E，エネルギー固有状態を $\psi(\mathbf{r})$ として，固有値問題

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{A.18}$$

を考える．まず

$$[\hat{H}, f(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)] = [\hat{H}, g(\hat{\boldsymbol{\sigma}})] = 0 \tag{A.19}$$

であることより，$\psi(\mathbf{r})$ は $\hat{H}$，$f(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$，$g(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ の 3 つの作用素の同時固有状態である．よって，固有状態 $\psi(\mathbf{r})$ に対する作用素 $f(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$ と $g(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ の固有値をそれぞれ E_r，E_s とすると

$$f(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)\psi(\mathbf{r}) = E_r\psi(\mathbf{r}), \qquad g(\hat{\boldsymbol{\sigma}})\psi(\mathbf{r}) = E_s\psi(\mathbf{r}) \tag{A.20}$$

と書ける．式 (A.20) をエネルギー固有値方程式 (A.18) に代入すると

$$E = E_r + E_s \tag{A.21}$$

が得られる．ここで，$\psi(\mathbf{r})$ を

$$\psi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})\chi_s \tag{A.22}$$

のように空間依存部 $\varphi(\mathbf{r})$ と空間に依存しない 2 成分スピノール χ_s の積で表し，式 (A.20) に代入すると次の式が得られる．

$$f(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)\varphi(\mathbf{r}) = E_r\varphi(\mathbf{r}), \qquad g(\hat{\boldsymbol{\sigma}})\chi_s = E_s\chi_s. \tag{A.23}$$

このようにして，式 (A.18) を式 (A.23) の 2 つの固有値問題に帰着させることができる．

付録 B

ディラック方程式の性質

B.1　ディラック方程式の相対論的共変性

ディラック方程式 (2.39) が相対論的に共変な方程式であること，つまりローレンツ変換の下で不変であることを示す．

ローレンツ変換の変換行列 $a_{\mu\nu}$ は，一般に

$$\det(a_{\mu\nu}) = \pm 1, \qquad a_{44} \geq 1 \text{ or } a_{44} \leq -1 \tag{B.1}$$

となるが，ここでは時間反転 $a_{44} \leq -1$ を含まない

$$\det(a_{\mu\nu}) = +1, \qquad a_{44} \geq 1 \tag{B.2}$$

と

$$\det(a_{\mu\nu}) = -1, \qquad a_{44} \geq 1 \tag{B.3}$$

の 2 つの場合のみを考える．ここで，det は行列式を表す．式 (B.2) の変換は，3 次元空間における座標系の回転とブーストという座標系の等速度移動からなり，本義ローレンツ変換と呼ばれる．一方，式 (B.3) の変換は座標系の空間反転を表す．次に，それぞれの変換における具体的な $a_{\mu\nu}$ の成分を求める．まず本義ローレンツ変換を，3 軸 (z 軸) まわりの回転と 1 軸 (x 軸) 方向へのブーストを例にとって考える．1-2 平面上で 3 軸まわりに座標系を角度 θ_r だけ回転させる変換 $x_\mu \to x'_\mu$ は

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\theta_r + x_2 \sin\theta_r, \\ x'_2 &= -x_1 \sin\theta_r + x_2 \cos\theta_r \end{aligned} \tag{B.4}$$

と表される．このとき $a_{\mu\nu}$ は次のように与えられ，$\det(a_{\mu\nu}) = 1, a_{44} \geq 1$ をみたす．

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r & 0 & 0 \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.5}$$

一方，1 軸方向に速度 $v = \beta c$ をもつ座標系へのブースト変換は，特殊相対性理論により次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_1 - \beta x_0), \\
x_0' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_0 - \beta x_1).
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

この変換は

$$
\theta_b = \tanh^{-1}\beta \tag{B.7}
$$

なる実数 θ_b を用いると

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1\cosh\theta_b + ix_4\sinh\theta_b = x_1\cos(i\theta_b) + x_4\sin(i\theta_b), \\
x_0' &= -ix_1\sinh\theta_b + x_4\cosh\theta_b = -x_1\sin(i\theta_b) + x_4\cos(i\theta_b)
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

と書けるため，1 軸方向へのブーストは，1-4 平面上での角度 $i\theta_b$ の回転であると見なせる．このとき $a_{\mu\nu}$ は次のように与えられ，$\det(a_{\mu\nu}) = 1, a_{44} \geq 1$ をみたす．

$$
(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \cos(i\theta_b) & 0 & 0 & \sin(i\theta_b) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(i\theta_b) & 0 & 0 & \cos(i\theta_b) \end{pmatrix}. \tag{B.9}
$$

また，空間反転は

$$
\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, \qquad t' = t \tag{B.10}
$$

なる変換なので，$a_{\mu\nu}$ は次のように与えられ，$\det(a_{\mu\nu}) = -1, a_{44} \geq 1$ をみたす．

$$
(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.11}
$$

座標系 x_μ において成り立つディラック方程式 (2.39) が相対論的に共変であると仮定すると，ローレンツ変換により得られる座標系 x_μ' において

$$
\left(\sum_\mu \hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu'} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0. \tag{B.12}
$$

が成り立つ．ここで，$\psi(x)$ が 4×4 の正則な行列 $S(a)$ を用いて

$$
\psi'(x') = S(a)\psi(x) \tag{B.13}
$$

と変換されるとすると，式 (B.12) に左から $S^{-1}(a)$ をかけて $\partial/\partial x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$ を用いることにより

$$\sum_\nu \sum_\mu S^{-1}(a)\hat{\gamma}_\mu S(a) a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi(x) + \frac{mc}{\hbar}\psi(x) = 0 \tag{B.14}$$

が得られる．よって

$$\sum_\mu S^{-1}(a)\hat{\gamma}_\mu S(a) a_{\mu\nu} = \hat{\gamma}_\nu \tag{B.15}$$

が成り立てば，ディラック方程式が相対論的に共変であることが示される．式 (B.15) に $a_{\lambda\nu}$ をかけて ν についての和をとると，次のような式が得られる．

$$S^{-1}(a)\hat{\gamma}_\lambda S(a) = \sum_\nu \hat{\gamma}_\nu a_{\lambda\nu}. \tag{B.16}$$

よって，式 (B.16) を満たすような $S(a)$ が存在することが，ディラック方程式が共変であるための十分条件である．以下では，それぞれの変換に対して行列 $S(a)$ が存在することを示す．

上述した $a_{\mu\nu}$ の具体的な成分を用いて計算すると，3 次元空間における k 軸まわりの角度 θ_r の座標回転においては，行列 $S(a)$ を

$$S_r(a) = \cos\frac{\theta_r}{2} + i\Sigma_k \sin\frac{\theta_r}{2}, \qquad \Sigma_k = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_k & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_k \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

とおいた場合に，また k 軸方向への速度 $v = \beta c = c\tanh\theta_b$ のブーストでは，行列 $S(a)$ を

$$S_b(a) = \cosh\frac{\theta_b}{2} - \hat{\alpha}_k \sinh\frac{\theta_b}{2}, \qquad \hat{\alpha}_k = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ \hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

とおいた場合に式 (B.16) が成り立つ．よって，ディラック方程式 (2.39) は本義ローレンツ変換に対して不変である．いま，$S_r(a)$ と $S_b(a)$ の逆行列は

$$\begin{aligned} S_r^{-1}(a) &= S_r^\dagger(a) = \cos\frac{\theta_r}{2} - i\Sigma_k \sin\frac{\theta_r}{2} = \cos\frac{\theta_r}{2} - i\hat{\gamma}_4\Sigma_k\hat{\gamma}_4 \sin\frac{\theta_r}{2} = \hat{\gamma}_4 S_r^\dagger(a)\hat{\gamma}_4, \\ S_b^{-1}(a) &= \cosh\frac{\theta_b}{2} + \hat{\alpha}_k \sinh\frac{\theta_b}{2} = \cosh\frac{\theta_b}{2} - \hat{\gamma}_4\hat{\alpha}_k\hat{\gamma}_4 \sinh\frac{\theta_b}{2} = \hat{\gamma}_4 S_b(a)\hat{\gamma}_4 \\ &= \hat{\gamma}_4 S_b^\dagger(a)\hat{\gamma}_4 \end{aligned} \tag{B.19}$$

であるため，本義ローレンツ変換の $S(a)$ に対して次の式が成り立つ．

$$S^{-1}(a) = \hat{\gamma}_4 S^\dagger(a)\hat{\gamma}_4, \qquad S^\dagger(a) = \hat{\gamma}_4 S^{-1}(a)\hat{\gamma}_4. \tag{B.20}$$

一方，空間反転の行列 $S(a)$ を考える場合には式 (B.11) を用いて条件 (B.16) を

$$S_p^{-1}(a)\hat{\gamma}_k S_p(a) = \hat{\gamma}_k a_{kk} = -\hat{\gamma}_k, \qquad S_p^{-1}(a)\hat{\gamma}_4 S_p(a) = \hat{\gamma}_4 a_{44} = \hat{\gamma}_4 \tag{B.21}$$

と書き直すことができ，この式は $S_p(a)$ を

$$S_p(a) = \hat{\gamma}_4, \qquad S_p^{-1}(a) = \hat{\gamma}_4 \tag{B.22}$$

とおくと成り立つ．以上の議論により，ディラック方程式 (2.39) は相対論的に共変な方程式である．本節における議論は文献 [21] を参考にした．

B.2　確率密度と確率流密度に関する連続の式

ディラック方程式を満たす 4 成分波動関数 $\psi(x)$ とそのエルミート共役 $\psi^\dagger(x)$ を用いて，確率密度 $P(x)$ と確率流密度 $\mathbf{s}(x) = (s_1(x), s_2(x), s_3(x))$ を

$$P(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x), \qquad s_k(x) = ic\psi^\dagger(x)\gamma_4\gamma_k\psi(x) \tag{B.23}$$

と定義すると

$$P(x) = \sum_\mu |\psi_\mu(x)|^2 \geq 0 \tag{B.24}$$

より，$P(x)$ は常に 0 以上になる．また，ディラック方程式 (2.39) に左から $\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4$ をかけて得られる式

$$\sum_k \psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k} - \frac{i}{c}\psi^\dagger(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} + \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4\psi(x) = 0 \tag{B.25}$$

から，式 (2.39) のエルミート共役に右から $\hat{\gamma}_4\psi(x)$ をかけて得られる式

$$-\sum_k \frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x_k}\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k\psi(x) + \frac{i}{c}\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial t}\psi(x) + \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4\psi(x) = 0 \tag{B.26}$$

を引くと，$P(x)$ と $\mathbf{s}(x)$ に関する連続の式

$$\frac{\partial P(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{B.27}$$

が得られる．ガウスの発散定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r\nabla\cdot\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \oint d^2r\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{B.28}$$

となるため，式 (B.27) の両辺を全空間で積分すると

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} d^3rP(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{B.29}$$

が得られる．よって，全確率 $\int_{-\infty}^{\infty} d^3rP(\mathbf{r}, t)$ は定数であり，$\psi(x)$ を規格化することにより 1 にすることができる．

いま，$P(x)$ と $\mathbf{s}(x)$ を合わせた 4 成分の量として

$$s_\mu(x) = ic\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_\mu\psi(x) = (\mathbf{s}(x), icP(x)) \tag{B.30}$$

を定義すると，連続の式 (B.27) が相対論的に共変であるためには，$s_\mu(x)$ が 4 次元ベクトルであればよい．まず，本義ローレンツ変換の場合に式 (B.20) を用いて $s'_\mu(x')$ を計算すると

$$\begin{aligned} s'_\mu(x') &= ic\psi'^\dagger(x')\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_\mu\psi'(x') = ic\psi^\dagger(x)S^\dagger(a)\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_\mu S(a)\psi(x) \\ &= ic\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4 S^{-1}(a)\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_\mu S(a)\psi(x) = ic\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4 S^{-1}(a)\hat{\gamma}_\mu S(a)\psi(x) \\ &= ic\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4\sum_\nu \hat{\gamma}_\nu a_{\mu\nu}\psi(x) = \sum_\nu a_{\mu\nu}s_\nu(x) \end{aligned} \tag{B.31}$$

となる．また，空間反転の場合に式 (B.22) と式 (B.11) を用いて $s'_\mu(x')$ を計算すると

$$\begin{aligned} s'_\mu(x') &= ic\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_4\psi(x) = ic\psi^\dagger(x)\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_4\psi(x) \\ &= \begin{cases} -s_k(x) \\ s_4(x) \end{cases} = \sum_\nu a_{\mu\nu}s_\nu(x) \end{aligned} \tag{B.32}$$

となる．よって，$s_\mu(x)$ は 4 次元ベクトルであり，連続の式 (B.27) は相対論的に共変である．

B.3　電磁場が存在しない場合のディラック方程式の解

ディラック方程式

$$\begin{aligned} &\hat{H}\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t), \\ &\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\mathbf{p}} + mc^2\hat{\beta}, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \hat{\gamma}_4, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \end{aligned} \tag{B.33}$$

を用いて，電磁場が存在しない場合の電子 (自由電子) のエネルギー固有値 E とエネルギー固有状態 $\psi(\mathbf{r},t)$ を求める．まず

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r},t) = E\psi(\mathbf{r},t) \tag{B.34}$$

を式 (B.33) に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \frac{E}{i\hbar}\psi(\mathbf{r},t) \tag{B.35}$$

となるため

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},0)e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \tag{B.36}$$

と書ける．これを再び式 (B.34) に代入すると，固有値方程式

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r},0) = (c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\mathbf{p}} + mc^2\hat{\beta})\psi(\mathbf{r},0) = E\psi(\mathbf{r},0) \tag{B.37}$$

が得られる．ここで，交換関係

$$[\hat{H}, \hat{p}_i] = 0 \tag{B.38}$$

より，$\psi(\mathbf{r}, 0)$ は $\hat{H}$ と $\hat{\mathbf{p}}$ の同時固有状態なので

$$\hat{\mathbf{p}}\psi(\mathbf{r}, 0) = -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r}, 0) \tag{B.39}$$

が成り立ち

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = w_s e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \tag{B.40}$$

と書ける．これを式 (B.37) に代入し，左から $c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta}$ をかけると

$$\begin{aligned}(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta})(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta})w_s e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} &= (c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta})E w_s e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \\ &= E^2 w_s e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}\end{aligned} \tag{B.41}$$

であり

$$(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta})(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + mc^2\hat{\beta}) = [c^2\mathbf{p}^2 + (mc^2)^2]I_4 \tag{B.42}$$

より，エネルギー固有値 E は

$$E = \pm E_{\mathbf{p}}, \qquad E_{\mathbf{p}} = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2} \tag{B.43}$$

のように正負両方の値をとる．

いま，2 成分スピノール χ_s と ζ を用いて w_s を

$$w_s = \begin{pmatrix} \chi_s \\ \zeta_s \end{pmatrix} \tag{B.44}$$

とおくと，式 (B.37) は

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \\ c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \zeta_s \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \chi_s \\ \zeta_s \end{pmatrix} \tag{B.45}$$

と書け，これを解くと

$$\chi_s = \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2}\zeta_s, \qquad \zeta_s = \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2}\chi_s \tag{B.46}$$

が得られる．式 (B.46) の第 1 式に左から $c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}/(E + mc^2)$ をかけると

$$\frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2}\frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2} = I_2 \tag{B.47}$$

を用いることにより，式 (B.46) の第 2 式が得られる．よって，式 (B.46) の 2 式は同じ解を表す．しかし，$\mathbf{p} = 0$ の場合には，$E = E_{\mathbf{p}}$ のとき $E - mc^2 = 0$ となるため第 1 式は使えず，

$E=-E_{\mathbf{p}}$ のとき $E+mc^2=0$ となるため第 2 式は使えない．よって，$E=E_{\mathbf{p}}$ のときは第 2 式を用いて

$$w_s=\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\chi_s\end{pmatrix} \tag{B.48}$$

とし，$E=-E_{\mathbf{p}}$ のときは第 1 式を用いて

$$w_s=\begin{pmatrix}-\frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix} \tag{B.49}$$

のように w_s を書き表すことにする．

以上の議論より，エネルギー固有値 $E=E_{\mathbf{p}}>0$ のときのエネルギー固有状態 $\psi_+(\mathbf{r},t)$ は

$$\psi_+(\mathbf{r},t)=N_+\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\chi_s\end{pmatrix}e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-E_{\mathbf{p}}t}{\hbar}} \tag{B.50}$$

となり，$E=-E_{\mathbf{p}}<0$ のときのエネルギー固有状態 $\psi_-(\mathbf{r},t)$ は

$$\psi_-(\mathbf{r},t)=N_-\begin{pmatrix}-\frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix}e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+E_{\mathbf{p}}t}{\hbar}} \tag{B.51}$$

となる．ここで，χ_s は任意の 2 成分スピノールであり，N_+ と N_- は規格化定数である．いま，χ_s が

$$\chi_s^\dagger\chi_s=1 \tag{B.52}$$

のように規格直交化されているとすると，4 成分スピノールの規格化条件

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\psi_+^\dagger(\mathbf{r},t)\psi_+(\mathbf{r},t)&=|N_+|^2V\left[1+\left(\frac{c|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\right)^2\right]=1,\\ \int_V d^3r\psi_-^\dagger(\mathbf{r},t)\psi_-(\mathbf{r},t)&=|N_-|^2V\left[\left(\frac{c|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\right)^2+1\right]=1\end{aligned} \tag{B.53}$$

より，N_+ と N_- は

$$N_+=N_-=\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}+mc^2}{2E_{\mathbf{p}}V}} \tag{B.54}$$

とおくことができる．これにより，規格化されたエネルギー固有状態 $\psi_+(\mathbf{r},t)$ と $\psi_-(\mathbf{r},t)$ は

$$\begin{aligned}\psi_+(\mathbf{r},t)&=\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}+mc^2}{2E_{\mathbf{p}}V}}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\chi_s\end{pmatrix}e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-E_{\mathbf{p}}t}{\hbar}},\\ \psi_-(\mathbf{r},t)&=\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}+mc^2}{2E_{\mathbf{p}}V}}\begin{pmatrix}-\frac{c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}+mc^2}\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix}e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+E_{\mathbf{p}}t}{\hbar}}\end{aligned} \tag{B.55}$$

と表される．2 成分スピノール χ_s の自由度は 2 なので，自由電子に対して 4 つの 1 次独立なエネルギー固有状態が存在する．

付録 C

場の解析力学

ここでは，場を対象とする解析力学について述べる．そのための準備として，まず粒子の運動を考えるために系の状態を記述する独立変数を一般化座標と一般化速度，または一般化座標と一般化運動量にとった場合の解析力学の形式について述べる．次に，系の状態を記述する独立変数として場とその微分を採用した場合の解析力学について述べ，場のオイラー-ラグランジュ方程式を導く．

C.1　ラグランジュ形式とハミルトン形式

古典的な系において粒子の運動を考える場合，時刻 t における系の状態を表すための独立変数として，座標 $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, f)$ とその時間微分 $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t) = dq_i(t)/dt$ $(i = 1, 2, \cdots, f)$ の組を用いることができる．q_i と $\dot{q}_i$ をそれぞれ一般化座標，一般化速度といい，独立な一般化座標と一般化速度の組の数 f を系の自由度という．ここで，ラグランジアンと呼ばれる一般化座標と一般化速度を変数とする関数

$$L = L(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t) \tag{C.1}$$

を導入すると，系の運動は L の時間積分である作用

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t) \tag{C.2}$$

が極値をとる場合の $q_i(t)$ と $\dot{q}_i(t)$ で表される．これを最小作用の原理という．逆にいうと，S が極値を与えるような運動が実現されるように L を定めており，例えば系の全エネルギーが運動エネルギー $T = T(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t)$ とポテンシャルエネルギー $V = V(q_1, q_2, \cdots, q_f, t)$ の和で表されている場合，L は次の式で与えられる．

$$L = T - V. \tag{C.3}$$

S が極値をとるときの q_i は，q_i の変分 $\delta q_i(t)$ が

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, f \tag{C.4}$$

を満たす場合に，S の q_i に対する変分 δS が 0 になる，つまり

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t) = 0 \tag{C.5}$$

という条件から求められる．ここで，δS は

$$\delta S = \sum_{i=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right] \tag{C.6}$$

と表されるが，変数 q_i と $\dot{q}_i$ は $\dot{q}_i(t) = dq_i(t)/dt$ の関係で結ばれているため，変分 $\delta q_i(t)$ と $\delta \dot{q}_i(t)$ は独立ではない (q_i と $\dot{q}_i$ は独立)．時刻 t と $t + \Delta t$ における $q_i(t)$ の差と $\delta q_i(t)$ の差をそれぞれ

$$\Delta q_i(t) = q_i(t + \Delta t) - q_i(t), \qquad \Delta(\delta q_i(t)) = \delta q_i(t + \Delta t) - \delta q_i(t) \tag{C.7}$$

とおくと，図 C.1 より

$$\Delta q_i(t) = \overline{QR}, \qquad \delta(\Delta q_i(t)) = \overline{Q'R'} - \overline{QR}, \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta q_i(t)) &= \overline{QQ'} - \overline{PP'} = \overline{Q'R} - \overline{QR} - \overline{RR'} = \overline{Q'R} - \overline{QR} - (\overline{Q'R} - \overline{Q'R'}) \\ &= \overline{Q'R'} - \overline{QR} = \delta(\Delta q_i(t)). \end{aligned} \tag{C.9}$$

よって

$$\frac{\Delta(\delta q_i(t))}{\Delta t} = \frac{\delta(\Delta q_i(t))}{\Delta t} = \delta \left(\frac{\Delta q_i(t)}{\Delta t} \right) \tag{C.10}$$

であり，$\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{d(\delta q_i(t))}{dt} = \delta \dot{q}_i(t) \tag{C.11}$$

が得られ，微分と変分の順序を交換できることが分かる．これにより，部分積分を用いると δS は

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{i=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i(t))}{dt} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{f} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \sum_{i=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i(t) \\ &= - \sum_{i=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i(t) \end{aligned} \tag{C.12}$$

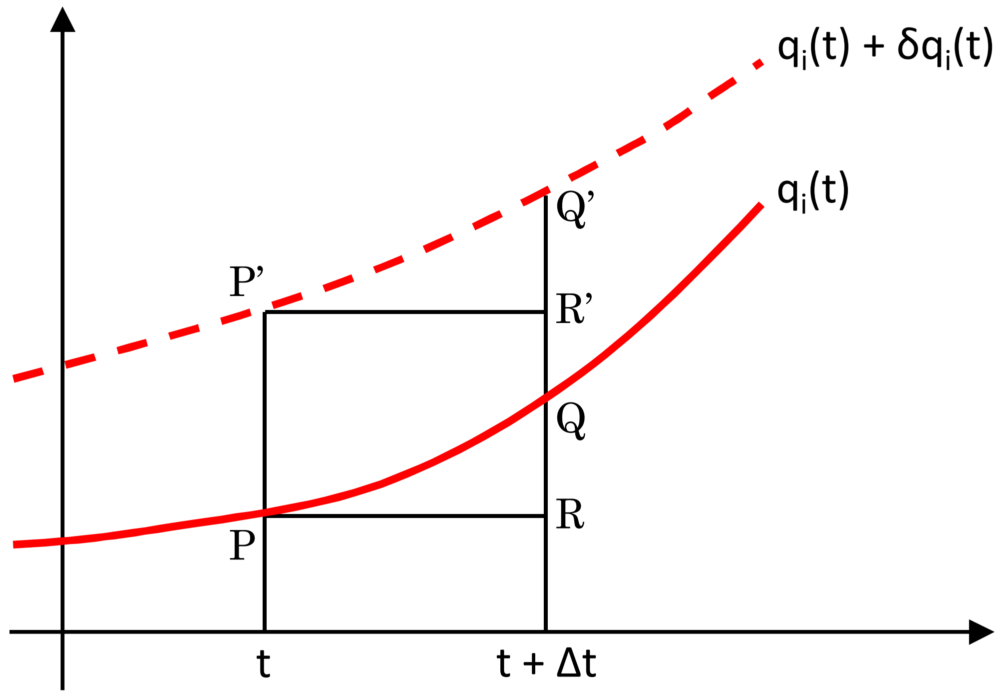

図 C.1 $q_i(t)$ の変分．

と変形することができ，$\delta S = 0$ が任意の変分 $\delta q_i(t)$ に対して成り立つという条件から次の式が得られる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, f. \tag{C.13}$$

これをオイラー-ラグランジュ方程式という．式 (C.13) を用いて任意の時刻 t_1 における $q_i(t_1)$ と $\dot{q}_i(t_1)$ が求まれば，系の状態は完全に決まる．つまり，時刻 t_1 における任意の物理量 $A = A(q_i(t_1), \dot{q}_i(t_1), t_1)$ の値が一意に定まる．このように，一般化座標と一般化速度を独立変数として系の状態を記述する形式をラグランジュ形式という．

独立変数のとり方を変えることにより，ラグランジュ形式は別の形式に書き換えることができる．まず，q_i と共役な一般化運動量 p_i を

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, f \tag{C.14}$$

と定義すると，p_i は

$$p_i = p_i(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t) \tag{C.15}$$

のように一般化座標と一般化速度の関数で表すことができ，逆に $\dot{q}_i$ も

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t) \tag{C.16}$$

のように一般化座標と一般化運動量の関数として表すことができる．いま，オイラー-ラグランジュ方程式 (C.13) が満たされているとすると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{C.17}$$

であるため，$\dot{p}_i = dp_i(t)/dt$ は式 (C.18) より

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, f \tag{C.18}$$

と与えられる．ここで，H という量を

$$H = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t) \tag{C.19}$$

とおき，これを式 (C.16) を用いて

$$H = H(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t) \tag{C.20}$$

のように一般化座標と一般化運動量の関数で書き表したものを，ハミルトニアンと定義する．いま，式 (C.19) の両辺の全微分をとると

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{f}(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \sum_{i=1}^{f}\left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \sum_{i=1}^{f}\left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \end{aligned} \tag{C.21}$$

となり，式 (C.20) の両辺の全微分をとると

$$dH = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{C.22}$$

となる．よって，式 (C.21) と式 (C.21) より

$$\sum_{i=1}^{f}\left[\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)dq_i - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)dp_i\right] + \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t}\right)dt = 0 \tag{C.23}$$

が得られる．ここで，$q_i(t)$ と $p_i(t)$ を時刻 t における系の状態を表す独立変数に採用すると，任意の時刻において式 (C.23) が成り立つことから

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{C.24}$$

と

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{C.25}$$

が導かれる．ここで，独立変数にとった q_i と p_i を正準変数といい，式 (C.24) を正準方程式という．式 (C.24) を用いて任意の時刻 t_1 における $q_i(t_1)$ と $p_i(t_1)$ が求まれば，系の状態は完全に決まる．つまり，時刻 t_1 における任意の物理量 $A = A(q_i(t_1), p_i(t_1), t_1)$ の値が一意に定まる．このように，正準変数を独立変数として系の状態を記述する形式をハミルトン形式という．本節における議論は文献 [22,33] を参考にした．

C.2　場を変数とする解析力学の形式

第 C.1 節では，時刻 t における粒子の運動の状態を記述する変数として $q_i(t)$ と $\dot{q}_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, f)$ を採用できることを述べた．しかし，空間座標 $\mathbf{r}$ と時間の関数で表される場 $\phi(\mathbf{r}, t)$ が存在するときの時刻 t における系の状態を，空間座標 $\mathbf{r}$ を変数として記述することはできない．これは，$q_i(t)$ が粒子の存在する位置を表しているのに対し，$\mathbf{r}$ は単に空間の 1 点を指定するパラメータに過ぎず，系の状態について何の情報ももたないためである．代わりに $\mathbf{r}$ は，$q_i(t)$ の成分の番号を指定する添字 i に対応している．よって，$q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t)$ に対応する量，つまりある時刻 t において場が存在する系の状態を完全に記述する変数は，全ての座標 $\mathbf{r}$ における $\phi(\mathbf{r}, t)$ とその時間微分 $\dot{\phi}(\mathbf{r}, t) = \partial\phi(\mathbf{r}, t)/\partial t$ の組である．このような $\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\dot{\phi}(\mathbf{r}, t)$ の組を $\{\phi(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)\}$ と表すと，形式的に

$$\begin{aligned} \{\phi(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)\} &= \phi(r_1, t), \phi(r_2, t), \phi(r_3, t), \cdots, \dot{\phi}(r_1, t), \dot{\phi}(r_2, t), \dot{\phi}(r_3, t), \cdots \\ &= \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \cdots, \dot{\phi}_1(t), \dot{\phi}_2(t), \dot{\phi}_3(t), \cdots \end{aligned} \tag{C.26}$$

のように書ける．ここで，$r_1, r_2, r_3, \cdots$ は 3 次元空間における全ての点を表しており，$\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \cdots, \dot{\phi}_1(t), \dot{\phi}_2(t), \dot{\phi}_3(t), \cdots$ はそれぞれの点における $\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\dot{\phi}(\mathbf{r}, t)$ の値を表す (空間座標は連続的なので，実際にはこのように表すことはできない)．このように，粒子が運動している系を記述するために必要な独立変数は有限個 ($f + f = 2f$ 個) であるのに対し，場が存在する系の状態を記述するためには無限個の独立変数が必要になる．

無限個の独立変数の中に $\phi(\mathbf{r}, t)$ の空間微分 $\nabla\phi(\mathbf{r}, t) = (\partial\phi(\mathbf{r}, t)/\partial x, \partial\phi(\mathbf{r}, t)/\partial y, \partial\phi(\mathbf{r}, t)/\partial z)$ が含まれていないのは，全ての座標 $\mathbf{r}$ における $\phi(\mathbf{r}, t)$ が分かれば，$\nabla\phi(\mathbf{r}, t)$ は全ての $\mathbf{r}$ に対して自動的に決まるためである．一方，$\dot{\phi}(\mathbf{r}, t)$ はある時刻 t における $\phi(\mathbf{r}, t)$ が分かっていても定まらないため，$\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\dot{\phi}(\mathbf{r}, t)$ は互いに独立な変数である．

以上の議論を踏まえると，ラグランジアン L は

$$L = L(\{\phi(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)\}, t) \tag{C.27}$$

のように書くことができる．ここで，L を次のような積分

$$L = \int_{V_3} d^3r \mathcal{L}(\phi(\mathbf{r},t), \nabla\phi(\mathbf{r},t), \dot{\phi}(\mathbf{r},t), t) \tag{C.28}$$

で表すと，被積分関数 $\mathcal{L}(\phi(\mathbf{r},t), \nabla\phi(\mathbf{r},t), \dot{\phi}(\mathbf{r},t), t)$ は点 $\mathbf{r}$ での時刻 t における $\phi(\mathbf{r},t)$, $\nabla\phi(\mathbf{r},t)$, $\dot{\phi}(\mathbf{r},t)$ の値を変数とする関数であり，ラグランジアン密度という．ラグランジアン密度 (もしくはラグランジアン) は粒子の運動を考える場合と同様に，作用

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{\phi(\mathbf{r},t), \dot{\phi}(\mathbf{r},t)\}, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_3} d^3r \mathcal{L}(\phi(\mathbf{r},t), \nabla\phi(\mathbf{r},t), \dot{\phi}(\mathbf{r},t), t) \\ &= \frac{1}{c}\int_{V_4} d^4r \mathcal{L}\left(\phi(x), \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\alpha}, x_0\right) \end{aligned} \tag{C.29}$$

が極値をとる運動 (系の状態) が実現されるように定める．ここで，$d^4r = dx_0dxdydz$，$x = (x_0, x, y, z)$, $\partial\phi(x)/\partial x_\alpha = (\partial\phi(x)/\partial x_0, \nabla\phi(x))$ $(\alpha = 0,1,2,3)$ とした．S が極値をとるときの $\phi(x)$ は，$\phi(x)$ の変分 $\delta\phi(x)$ が 4 次元積分の領域 V_4 を囲む閉曲面上の全ての点において

$$\delta\phi(x) = 0 \tag{C.30}$$

となる場合に，S の $\phi(x)$ に対する変分 δS が 0 になる，つまり

$$\delta S = \frac{1}{c}\delta\int_{V_4} d^4r \mathcal{L}\left(\phi(x), \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\alpha}, x_0\right) = 0 \tag{C.31}$$

という条件から求められる．ここで，微分と変分が交換できることを用いると，δS は

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c}\int_{V_4} d^4r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi(x) + \sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)}\delta\left(\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\alpha}\right)\right] \\ &= \frac{1}{c}\int_{V_4} d^4r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi(x) + \sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial(\delta\phi(x))}{\partial x_\alpha}\right] \\ &= \frac{1}{c}\int_{V_4} d^4r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi(x) + \sum_{\alpha=0}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)}\delta\phi(x)\right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)}\right)\delta\phi(x)\right\}\right] \end{aligned} \tag{C.32}$$

と表される．式 (C.30) を考慮すると，式 (C.32) の第 2 項は 0 になるため，δS は

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_{V_4} d^4r \left[\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\right]\delta\phi(x) \tag{C.33}$$

となる．$\delta S = 0$ が任意の変分 $\delta\phi(x)$ に対して成り立つという条件から次の式が得られる．

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = 0. \tag{C.34}$$

ここで，x_0 を x_4 に置き換えても全く同様の式が成り立つため

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{C.35}$$

とも書ける．これを場のオイラー-ラグランジュ方程式という．式 (C.35) を用いて任意の座標 $\mathbf{r}_1$ と時刻 t_1 における $\phi(\mathbf{r}_1, t_1)$，$\nabla\phi(\mathbf{r}_1, t_1)$，$\dot{\phi}(\mathbf{r}_1, t_1)$ の値が求まれば，系の状態は完全に決まる．つまり，座標 $\mathbf{r}_1$ での時刻 t_1 における任意の物理量 $A = A(\phi(\mathbf{r}_1, t_1), \nabla\phi(\mathbf{r}_1, t_1), \dot{\phi}(\mathbf{r}_1, t_1), t_1)$ の値が一意に定まる．ここでは 1 成分の場 $\phi(\mathbf{r}, t)$ について考えたが，複数の成分をもつ場 $\phi_i(\mathbf{r}, t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対しても全く同様の議論が成り立ち，場のオイラー-ラグランジュ方程式は次のようになる．

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_\mu}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{C.36}$$

次に，独立変数のとり方を変えてラグランジュ形式をハミルトン形式に変更する．まず

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \tag{C.37}$$

という場を，$\phi(\mathbf{r}, t)$ と共役な一般化運動量と定義すると，$\pi(\mathbf{r}, t)$ は

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \pi(\phi(\mathbf{r}, t), \nabla\phi(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}(\mathbf{r}, t), t) \tag{C.38}$$

のように $\phi(\mathbf{r}, t)$，$\nabla\phi(\mathbf{r}, t)$，$\dot{\phi}(\mathbf{r}, t)$ の関数で表すことができ，逆に $\dot{\phi}(\mathbf{r}, t)$ も

$$\dot{\phi}(\mathbf{r}, t) = \dot{\phi}(\phi(\mathbf{r}, t), \nabla\phi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}, t), t) \tag{C.39}$$

のように $\phi(\mathbf{r}, t)$，$\nabla\phi(\mathbf{r}, t)$，$\pi(\mathbf{r}, t)$ の関数として表すことができる．いま，H を

$$H = \int_{V_3} d^3r \pi(\mathbf{r}, t)\dot{\phi}(\mathbf{r}, t) - L(\phi(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}(\mathbf{r}, t), t) \tag{C.40}$$

とおき，これを式 (C.39) を用いて

$$H = H(\phi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}, t), t) \tag{C.41}$$

のように $\phi(\mathbf{r},t)$ と一般化運動量 $\pi(\mathbf{r},t)$ の関数で書き表したものを，ハミルトニアンと定義する．式 (C.28) を用いると，H は

$$\begin{aligned} H &= \int_{V_3} d^3r \left[\pi(\mathbf{r},t)\dot{\phi}(\mathbf{r},t) - \mathcal{L}(\phi(\mathbf{r},t), \nabla\phi(\mathbf{r},t), \dot{\phi}(\mathbf{r},t), t)\right] \\ &= \int_{V_3} d^3r \mathcal{H} \end{aligned} \tag{C.42}$$

のように表すことができるが，$\pi(\mathbf{r},t)\dot{\phi}(\mathbf{r},t)$ は $\phi(\mathbf{r},t)$，$\nabla\phi(\mathbf{r},t)$，$\pi(\mathbf{r},t)$ の関数として書けるため，被積分関数 $\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi(\mathbf{r},t), \nabla\phi(\mathbf{r},t), \pi(\mathbf{r},t), t) \tag{C.43}$$

のように書き表したものをハミルトニアン密度と定義する．ハミルトニアンは系の全エネルギーを表すが，ハミルトニアン密度は点 $\mathbf{r}$ での時刻 t におけるエネルギー密度を表す．本節における議論は文献 [22, 34] を参考にした．

付録 D

グリーン関数と波動方程式の解

D.1　グリーン関数

物理学の問題に現れる微分方程式の多くは

$$Lu(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \tag{D.1}$$

という形をしている．ここで，L は線形作用素であり

$$L(u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r})) = Lu_1(\mathbf{r}) + Lu_2(\mathbf{r}) \tag{D.2}$$

を満たす．このとき

$$LG_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{D.3}$$

を満たす関数 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を式 (D.1) の同次方程式

$$Lu(\mathbf{r}) = 0 \tag{D.4}$$

の主要解という．ここで，$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ に同次方程式 (D.4) の解 $u(\mathbf{r})$ を加えた

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + u(\mathbf{r}) \tag{D.5}$$

も式 (D.3) を満たすため主要解である．このように，主要解には不定性がある．

式 (D.1) を与えられた境界条件の下で解くのが境界値問題であるが，ここでは無限遠方で 0 になるという境界条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(\mathbf{r}) = \lim_{y\to\pm\infty} u(\mathbf{r}) = \lim_{z\to\pm\infty} u(\mathbf{r}) = 0 \tag{D.6}$$

のみを考える．以下では，式 (D.6) を $\lim\limits_{|\mathbf{r}|\to\infty} u(\mathbf{r}) = 0$ と表す．式 (D.4) の主要解のうち，境界条件 (D.6) を満足する関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を式 (D.4) のグリーン関数という．$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を用いると，

式 (D.1) に関する境界値問題の解は

$$u(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \tag{D.7}$$

で与えられる．これは，式 (D.7) の $u(\mathbf{r})$ に L を作用させると $-f(\mathbf{r})$ になることと，$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ が境界条件を満たしているために $u(\mathbf{r})$ も境界条件を満たすことから確かめられる．本節における議論は文献 [35] を参考にした．

D.2　ヘルムホルツ方程式のグリーン関数

ヘルムホルツ方程式の主要解は

$$(\nabla^2 + k^2) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{D.8}$$

の解である．$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ のフーリエ変換を

$$\tilde{G}_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \tag{D.9}$$

とおき，式 (D.8) の両辺をフーリエ変換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \nabla^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \tilde{G}_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}') = -e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} \tag{D.10}$$

となる．ここで

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3s \tilde{G}_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \tag{D.11}$$

なので，式 (3.33) を用いることにより

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \nabla^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3s' s'^2 \tilde{G}_0(\mathbf{s}', \mathbf{r}') e^{i\mathbf{s}'\cdot\mathbf{r}} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3s' s'^2 \tilde{G}_0(\mathbf{s}', \mathbf{r}') \int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{i(\mathbf{s}'-\mathbf{s})\cdot\mathbf{r}} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} d^3s' s'^2 \tilde{G}_0(\mathbf{s}', \mathbf{r}') \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}) \\
&= -s^2 \tilde{G}_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}')
\end{aligned} \tag{D.12}$$

が得られる．よって，式 (D.10) と式 (D.12) より

$$\tilde{G}_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}') = \frac{1}{s^2 - k^2} e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} \tag{D.13}$$

が成り立つ．これを用いると，$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ は次のように表される．

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3s \frac{1}{s^2-k^2} e^{i\mathbf{s}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \tag{D.14}$$

$\mathbf{s}$ 空間の z 方向を $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ の方向に一致させ，$\mathbf{s}$ を球座標 (s,θ,φ) で表すと

$$\mathbf{s}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta \tag{D.15}$$

より

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} ds \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{s^2\sin\theta}{s^2-k^2} e^{is|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} ds \int_0^{\pi} d\theta \frac{s^2\sin\theta}{s^2-k^2} e^{is|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta} \end{aligned} \tag{D.16}$$

であり，ここで $p=\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} ds \int_{-1}^{1} dp \frac{s^2}{s^2-k^2} e^{is|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|p} \\ &= \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_0^{\infty} ds \frac{s}{s^2-k^2}\sin(s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \\ &= \frac{1}{4\pi^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s}{s^2-k^2}\sin(s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \\ &= \frac{1}{4i}\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty} ds \left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)\left(e^{is|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-e^{-is|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{is|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{s-k} + \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{is|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{s+k}\right) \end{aligned} \tag{D.17}$$

となる．

$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ を求めるために，式 (D.17) の第 1 項と第 2 項の積分を計算する．図 D.1 (a) のように積分路 C_1，C_R，C_ε をとると

$$\begin{aligned} &\oint_{C_1} dz \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z-k} \\ &= \int_{-R+k}^{k-\varepsilon} dx \frac{e^{ix|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{x-k} + \int_{k+\varepsilon}^{R+k} dx \frac{e^{ix|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{x-k} + \int_{C_R} dz \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z-k} + \int_{C_\varepsilon} dz \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z-k} \\ &=0 \end{aligned} \tag{D.18}$$

が成り立つ．$z-k=Re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_R} dz \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z-k}\right| &= \left|\int_0^{\pi} d\theta e^{i(k+Re^{i\theta})|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right| \\ &\le \int_0^{\pi} d\theta \left|e^{i(k+R\cos\theta)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right| \left|e^{-R\sin\theta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right| \to 0 \quad (R\to\infty). \end{aligned} \tag{D.19}$$

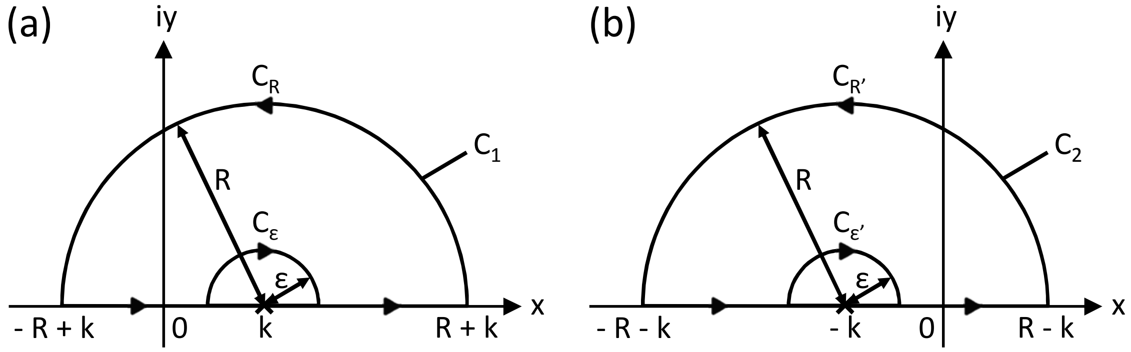

図 D.1　積分路．

また，$z-k=\varepsilon e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ とおくと

$$\int_{C_\varepsilon} dz \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z-k} = -ie^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_0^\pi d\theta e^{i\varepsilon e^{i\theta}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \to -i\pi e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (\varepsilon\to 0) \tag{D.20}$$

となる．よって，式 (D.18) において $R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$ とすることにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ix|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{x-k} = i\pi e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{D.21}$$

が得られ，式 (D.17) の第 1 項の積分が求められる．同様に，積分路を図 D.1 (b) のようにとって計算することにより，式 (D.17) の第 2 項の積分が求められる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ix|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{x+k} = i\pi e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{D.22}$$

よって，$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ は次のようになる．

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \frac{\cos(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{D.23}$$

ここで，$\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ は式 (D.8) の同次方程式 (ヘルムホルツ方程式) の解であるため，式 (D.23) に $\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ を足し合わせることで得られる

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{D.24}$$

もヘルムホルツ方程式の主要解となる．式 (D.23) と式 (D.24) の $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ は $\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=0$ を満たすため，境界条件 (D.6) に対するヘルムホルツ方程式のグリーン関数である．

D.3　波動方程式のグリーン関数

波動方程式の主要解は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \tag{D.25}$$

の解であるため，$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ を $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ と $t-t'$ のみの関数 $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ であると仮定する．$t-t'=\tau$ とおき，$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \tau)$ のフーリエ変換を

$$\tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \tau) e^{-i\omega\tau} \tag{D.26}$$

とする．式 (D.25) の両辺をフーリエ変換すると

$$\nabla^2 \tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega) - \frac{1}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau}\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \tau) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{D.27}$$

となる．ここで

$$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega) e^{i\omega\tau} \tag{D.28}$$

なので，式 (3.33) を用いることにより

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau}\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \tau) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega'^2 \tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega') e^{i\omega'\tau} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega'^2 \tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega')\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega'-\omega)\tau} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega'^2 \tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega')\delta(\omega'-\omega) \\
&= -\omega^2 \tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega)
\end{aligned} \tag{D.29}$$

が得られる．式 (D.27) と式 (D.29) より，$\tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega)$ に対して次の式が成り立つ．

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{G}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{D.30}$$

これはヘルムホルツ方程式の主要解が満たす式 (D.8) と同じである．よって, 波動方程式の主要解はヘルムホルツ方程式の主要解を式 (D.28) に代入して逆フーリエ変換することにより得られる．ここで, 波動方程式のグリーン関数 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ について考えると, $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ は因果律を満たすように選ばれなければならない．このためには, $t<t'$ の場合に $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')=0$

となる必要があり，この条件を遅延条件という．遅延条件を満たすためには $\tilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)$ を式 (D.24) の $e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ にとればよい．このとき，$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')$ は

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega\left(\tau-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\delta\left(t'-\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{D.31}$$

となる．式 (D.31) の $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')$ は $t<t'$ のとき 0 になるため遅延条件を満たしており，境界条件 $\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=0$ も満たす．よって，初期条件 (時間に対する境界条件) が

$$\lim_{t\to-\infty} u(\mathbf{r},t) = 0 \tag{D.32}$$

で与えられるとき，波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(\mathbf{r},t) = -f(\mathbf{r},t) \tag{D.33}$$

の解は

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') f(\mathbf{r}',t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3r' \frac{f\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned} \tag{D.34}$$

となる．

付録 E

停留値法

停留値法とは，物理学の問題を解く上で頻繁に現れる

$$I(x) = \int_a^b dt f(t) e^{ixg(t)} \tag{E.1}$$

という形の積分を，$x \to \infty$ の場合に求めるための手法である．停留値法を用いると，実関数 $g(t)$ が積分領域 (a, b) で極値 $t = c(a < c < b)$ をとる場合に，その漸近形 $\lim_{x\to\infty} I(x)$ を次のような近似式で表すことができる．

$$\lim_{x\to\infty} I(x) \simeq f(c) \lim_{x\to\infty} e^{ixg(c)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\frac{x}{2}g''(c)t^2}. \tag{E.2}$$

ここで

$$g'(c) = 0 \tag{E.3}$$

であり，$t = c$ を関数 $g(t)$ の停留点という．

以下では文献 [36] を参考にして式 (E.2) の導出過程を示す．まず $g(t)$ を $t = c$ のまわりでテイラー展開すると，$g'(c) = 0$ より展開式は次のように表される．

$$g(t) = g(c) + \frac{g''(c)}{2}(t-c)^2 + \cdots . \tag{E.4}$$

$x \to \infty$ のとき，$e^{ixg(t)}$ の実部と虚部はどちらも $f(t)$ に比べて非常に速く変化するため，$I(x)$ の被積分関数の実部と虚部はそれぞれ正と負の値を繰り返し，積分値としては大部分が打ち消し合うことになる．しかしながら，停留点 $t = c$ の付近では被積分関数の変化が緩やかになるため (例: 図 E.1)，停留点付近の点における被積分関数の値が積分 $I(x)$ に対して大きく寄与することになる．よって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} I(x) &\simeq \lim_{x\to\infty} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} dt f(c) e^{ix\left\{g(c)+\frac{1}{2}g''(c)(t-c)^2\right\}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt' f(c) e^{ixg(c)} e^{i\frac{x}{2}g''(c)t'^2} \simeq f(c) \lim_{x\to\infty} e^{ixg(c)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\frac{x}{2}g''(c)t^2}\end{aligned} \tag{E.5}$$

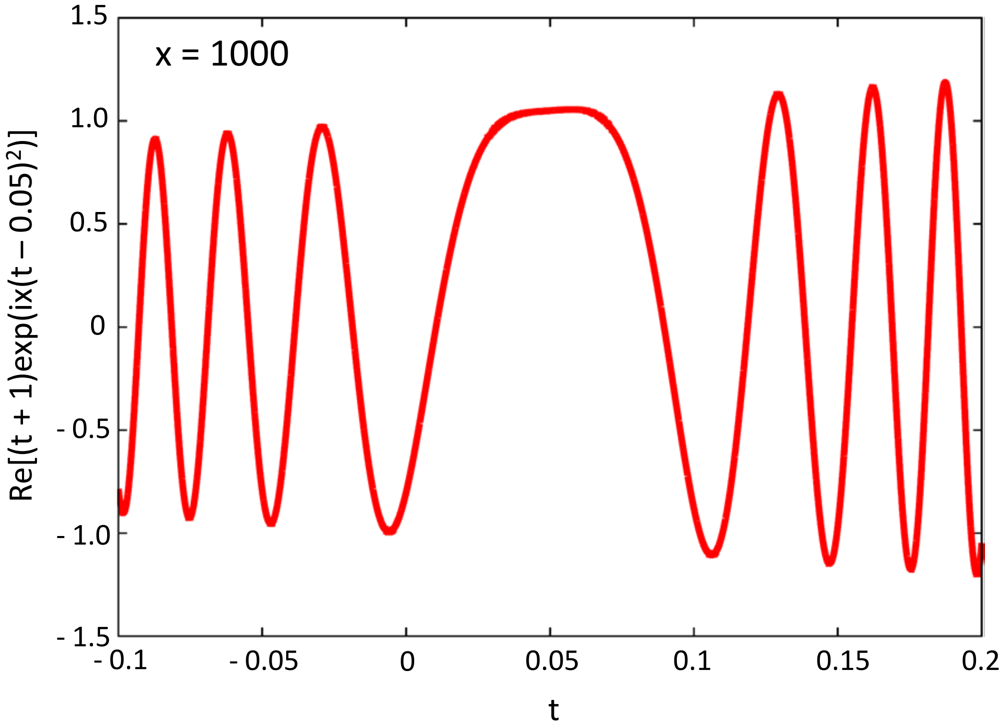

図 E.1　停留点 $t = 0.05$ をもつ関数 $(t + 1)e^{ix(t-0.05)^2}$ の実部 $(x = 1000)$.

のようにして近似式 (E.2) が得られる．ここで，ε は任意の実数である．

$I(x)$ が二重積分で表される場合には上記の場合よりも計算が複雑になるが，その漸近形は停留点付近の点からの寄与のみを考慮して近似的に計算することができる．

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field", Proceedings of the Royal Society of London. Series A **133**, 60 (1931).

[2] C. D. Anderson, "The Positive Electron", Physical Review **43**, 491 (1933).

[3] S. W. Bahk, P. Rousseau, T. A. Planchon, V. Chvykov, G. Kalintchenko, A. Maksimchuk, G. A. Mourou and V. Yanovsky, "Generation and Characterization of the Highest Laser Intensities", Optics Letters **29**, 2837 (2004).

[4] V. Yanovsky, V. Chvykov, G. Kalinchenko, P. Rousseau, T. Planchon, T. Matsuoka, A. Maksimchuk, J. Nees, G. Cheriaux, G. Mourou and K. Krushelnick, "Ultra-high Intensity-300-TW Laser at 0.1 Hz Repetition Rate", Optics Express **16**, 2109 (2008).

[5] M. Nakatsutsumi, A. Kon, S. Buffechoux, P. Audebert, J. Fuchs and R. Kodama, "Fast Focusing of Short-pulse Lasers by Innovative Plasma Optics toward Extreme Intensity", Optics Letters **35**, 2314 (2010).

[6] Extreme Light Infrastructure (ELI), "ELI Scientific Case", http://www.extreme-light-infrastructure.eu/ELI-scientific-case_2_4.php.

[7] N. B. Narozhny, S. S. Bulanov, V. D. Mur and V. S. Popov, "e^+e^--pair Production by a Focused Laser Pulse in Vacuum", Physics Letters A **330**, 1 (2004).

[8] D. B. Blaschke, A. V. Prozorkevich, C. D. Roberts, S. M. Schmidt and S. A. Smolyansky, "Pair Production and Optical Lasers", Physical Review Letters **96**, 140402 (2006).

[9] G. V. Dunne, H. Gies and R. Schützhold, "Catalysis of Schwinger Vacuum Pair Production", Physical Review D **80**, 2111301 (2009).

[10] S. S. Bulanov, V. D. Mur, N. B. Narozhny, J. Nees and V. S. Popov, "Multiple Colliding Electromagnetic Pulses: A Way to Lower the Threshold of e^+e^- Pair Production from Vacuum", Physical Review Letters **104**, 220404 (2010).

[11] N. B. Narozhny and A. M. Fedotov, "Third-harmonic Generation in a Vacuum at the Focus of a High-intensity Laser Beam", Laser Physics **17**, 350 (2007).

[12] E. Lundström, G. Brodin, J. Lundin and M. Marklund, "Using High-power Lasers for

Detection of Elastic Photon-photon Scattering", Physical Review Letters **96**, 083602 (2006).

[13] A. Di Piazza, K. Z. Hatasagortsyan and C. H. Keitel, "Light Diffraction by a Strong Standing Electromagnetic Wave", Physical Review Letters **97**, 083603 (2006).

[14] T. Heinzl, B. Liesfeld, K. U. Amthor, H. Schwoerer, R. Sauerbrey and A. Wipf, "On the Observation of Vacuum Birefringence", Optics Communications **96**, 318 (2006).

[15] A. M. Fedotov and N. B. Narozhny, "Generation of Harmonics by a Focused Laser Beam in the Vacuum", Physics Letters A **362**, 1 (2007).

[16] B. King, A. Di Piazza and C. H. Keitel, "Double-slit Vacuum Polarization Effects in Ultraintense Laser Fields", Physical Review A **82**, 32114 (2010).

[17] B. Richards and E. Wolf, "Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. II. Structure of the Image Field in an Aplanatic System", Proceedings of the Royal Society of London. Series A **253**, 358 (1959).

[18] Q. Zhan, "Cylindrical Vector Beams: from Mathematical Concepts to Applications", Advances in Optics and Photonics **1**, 1 (2009).

[19] W. Heisenberg and H. Euler, "Consequences of Dirac's Theory of the Positron", Zeitschrift für Physik **98**, 714 (1936).

[20] J. Schwinger, "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization", Physical Review **82**, 664 (1951).

[21] J. J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", Addison Wesley (1967).

[22] 清水明, "新版 量子論の基礎 - その本質のやさしい理解のために", サイエンス社 (2004).

[23] J. B. Arfken and H. J. Weber, "基礎物理数学 Vol. 2 関数論と微分方程式" 第 4 版, 講談社 (2000).

[24] J. B. Arfken and H. J. Weber, "基礎物理数学 Vol. 3 特殊関数" 第 4 版, 講談社 (2001).

[25] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, "Quantum Electrodynamics" 2nd Edition, Pergamon, Oxford (1982).

[26] W. Greiner and J. Reinhart, "Quantum Electrodynamics" 3rd Edition, Springer (2003).

[27] J. D. Jackson, "電磁気学 (上)" 第 3 版, 吉岡書店 (2002).

[28] S. Quabis, R. Dorn, M. Eberler, O. Glöckl and G. Leuchs, "The Focus of Light - Theoretical Calculation and Experimental Tomographic Reconstruction", Applied Physics B **72**, 109 (2001).

[29] R. Dorn, S. Quabis and G. Leuchs, "The Focus of Light - Linear Polarization Breaks the Rotational Symmetry of the Focal Spot", Journal of Modern Optics **50**, 1917 (2003).

[30] B. Richards and E. Wolf, "Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. I. An Integral Representation of the Image Field", Proceedings of the Royal Society of London. Series A **253**, 349 (1959).

[31] J. J. Stamnes, "Waves in Focal Regions: Propagation, Diffraction and Focusing of Light, Sound and Water Waves", Taylor & Francis (1986).

[32] K. S. Youngworth and T. G. Brown, "Focusing of High Numerical Aperture Cylindrical-vector Beams", Optics Express **7**, 77 (2000).

[33] 田辺行人，品田正樹, "解析力学", 裳華房 (1988).

[34] 高橋康，柏太郎, "量子場を学ぶための場の解析力学入門" 第 2 版, 講談社 (2005).

[35] 小野寺嘉孝, "物理のための応用数学", 裳華房 (1988).

[36] 蓬田清, "演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門", 共立出版 (2007).

謝辞

本研究を進めるにあたり，大阪大学大学院工学研究科の兒玉了祐教授には終始熱心なご指導とご鞭撻を賜りました．心より感謝申し上げます．

大学院在学中にご指導いただきました大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻先進電磁エネルギー工学講座の田中和夫教授，上田良夫教授，飯田敏行教授，村上匡且教授，中井光男教授，羽原英明准教授，村田勲准教授，加藤裕史准教授，河仲準二准教授，籔内俊毅助教，大塚裕介助教，Lee Heun Tae 助教，尾崎典雅助教，佐藤文信助教，佐野孝好助教，有川安信助教に深く感謝いたします．

大阪大学レーザーエネルギー学研究センターの坂和洋一准教授，長友英夫准教授には大学院の講義でご指導いただきました．深く感謝いたします．

大阪大学グローバル COE プログラム次世代電子デバイス教育研究開発拠点の谷口研二教授 (現奈良工業高等専門学校 校長)，尾崎雅則教授を始め電気電子情報工学専攻の各教官の方々には，多くの画期的な教育プログラムを提供していただくとともに，学術論文の出版や国際学会への参加に際してご支援を賜りました．心より感謝いたします．

博士後期課程の研究活動に際し，日本学術振興会より平成 24 年度科学研究費補助金特別研究員奨励費によるご支援を賜りました．深く感謝いたします．

大阪大学光科学センターの柴田一範特任助教には，本研究を遂行するにあたりご助言をいただいただけでなく，物理学の学習に際して常日頃から熱心なご指導とご鞭撻を賜りました．心より感謝いたします．

本研究の内容を高く評価していただき，学術論文を執筆する際に適切なご指導を賜りました LULI エコールポリテクニークの中堤基彰博士に深く感謝いたします．

本研究の計算を実行するにあたり，計算機の設定方法等についてご助言を賜りました大阪大学光科学センターの益田伸一特任講師，先進電磁エネルギー工学講座兒玉研究室の申定訓氏，浦西宏幸氏に心より感謝いたします．

本研究を遂行するにあたり，終始ご支援をいただきました大阪大学光科学センターの Alexei Zhidkov 特任教授，細貝知直特任准教授，金展特任助教，中新信彦特別研究員，兒玉研究室の学生諸氏と木村泰子技術補佐員に深く感謝いたします．また，門野照美秘書と栗栖真美秘書に

は日々の研究生活において大変お世話になりました．心より感謝いたします．

最後に，筆者の5年間にわたる研究生活を温かく見守り，支えてくれた家族に心より感謝します．

研究業績

学術論文

[1] Y. Monden and R. Kodama,
"Enhancement of Laser Interaction with Vacuum for a Large Angular Aperture",
Physical Review Letters **107**, 073602 (2011).

[2] Y. Monden and R. Kodama,
"Interaction of Two Counterpropagating Laser Beams with Vacuum",
Physical Review A **86**, 033810 (2012).

[3] 門田裕一郎，兒玉了祐，
"高強度軸対称偏光ビームと真空の非線形相互作用",
レーザー研究 **41**, 129 (2013).

国際会議報告

[1] Y. Monden and R. Kodama,
"Nonlinear Optical Effects in Vacuum with Ultra-intense Laser",
2nd Global COE Student Conference on Innovative Electronic Topics, O-1, Osaka, July 2010.

[2] Y. Monden and R. Kodama,
"Stimulation of Nonlinear Optical Effects in Vacuum by Increasing Lorentz Invariants",
52nd Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, PO7.00010, Chicago, November 2010.

[3] Y. Monden and R. Kodama,
"Stimulation of Nonlinear Optical Effects in Vacuum by Increasing Angular Aperture",
3rd France-Japan Workshop on High Energy Density Science, Les Houches, January 2011.

[4] Y. Monden and R. Kodama,

"Enhancement of Nonlinear Optical Effect in Vacuum by Increasing Angular Aperture",
The UK-France-US-Japan School and Workshop on High Energy Density Science,
Kanazawa, November 2011.

[5] Y. Monden and R. Kodama,
"Enhancement of Laser Interaction with Vacuum by Using Two Counterpropagating Beams",
International Conference on High Energy Density Sciences 2012, Yokohama, April 2012.

国内会議報告

[1] 門田裕一郎，兒玉了祐，
"超高強度レーザーによる真空フォトニクスの可能性",
レーザー学会学術講演会第 30 回年次大会，3aVI-6，大阪，2010 年 2 月.

[2] 門田裕一郎，兒玉了祐，
"極小 F 値集光光学系を利用した真空非線形光学効果の増大",
日本物理学会 2010 年秋季大会，24aRF-9，大阪，2010 年 9 月.

[3] 門田裕一郎，兒玉了祐，
"プラズマフォトニックデバイスを利用した真空非線形光学の可能性",
日本学術会議物性物理学・一般物理学分科会シンポジウム，21，東京，2013 年 1 月.

[4] 門田裕一郎，兒玉了祐，
"対向レーザー光と真空の非線形相互作用",
日本物理学会第 68 回年次大会，27pEF-4，広島，2013 年 3 月.