



| | |
|--------------|---|
| Title | 計算機支援幾何設計における自由曲面の数学モデルに関する研究 |
| Author(s) | 栗山, 繁 |
| Citation | 大阪大学, 1997, 博士論文 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.11501/3129301 |
| rights | |
| Note | |

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

計算機支援幾何設計における自由曲面の
数学モデルに関する研究

1996年12月

栗山繁

内容梗概

本研究は著者が大阪大学大学院工学研究科前期課程（電子工学専攻）在学中に寺田研究室において行い、日本IBM（株）東京基礎研究所、および広島市立大学情報科学部において継続させた研究のうち、計算機支援幾何設計における自由曲面の数学モデルに関する研究をまとめたものである。

計算機の画像生成技術を用いた対話的な操作を通して、3次元空間における曲面形状を簡略かつ直観的に設計するのに適した自由曲面の数学モデルの構成法について述べている。

第1章においては、本研究の目的ならびにその工学上の意義、およびこの分野での研究の現状について述べ、本研究で得られた新しい成果について概説する。

第2章においては、媒介変数曲面の数学モデルの幾何学的な性質および特徴について述べ、曲面形状を設計する際の制約から生ずる問題点を明らかにし、本論文で提案される新たな曲面の数学モデルの理論的な背景を述べる。

まず、媒介変数曲線・曲面の設計に関する幾何学的な性質を説明する。次に、媒介変数曲面をテンソル積曲面と多変量変数曲面に類別し、テンソル積曲面の代表例としてベジエ曲面、スプライン曲面、ロフト曲面、および掃引曲面の数学モデルを、また多変量変数曲面の代表例として三辺形パッチ曲面および多辺形パッチ曲面の数学モデルについて述べる。

第3章においては、局所的な台をもつカーディナル基底をスプライン関数で構成する新たな手法を提案し、3次元空間上に与えられた点を含み、かつ形状の局所的な制御が可能な曲線・曲面を生成する手法について述べる。

まず、局所的な台をもつカーディナル基底を、等間隔節点で定義される3次のBーススプライン基底、あるいは β 2ーススプライン基底の線形和で構成する手法を提案し、節点における幾何学的な連続性の条件を近似的に満たす曲線・曲面を生成する手法について述べる。

次に、局所的な台をもつカーディナル基底を、多重節点で定義されるBーススプライン基底の線形和で構成する手法を提案し、節点における幾何学的な連続性の条件を厳密に満たす曲線・曲面を生成する手法について述べる。本手法では、点を補間するカーディナル基底に加えて、全ての節点で0の値を取る補助的な基底を定義して曲線・曲面を生成するので、それら2種類の基底に対する制御点を指定する必要がある。ここでは、補助的な基底に対する制御点の値をカーディナル基底に対する補間点の値よりヒューリスティクスで計算する手法、および生成される曲線・曲面の次数が3次に縮退するように計算する手法を示す。

最後に、カーディナル基底を再分割して曲面を設計する手法、およびその再分割手法を用いて、異なる節点ベクトルで定義される2曲面間を滑かに融合させる曲面を生成する手法について述べる。

第4章においては、形状の入力が比較的容易な多面体から、多面体の稜に沿い面領域を三角形に分割する曲線網を計算して、その曲線網を補間する三辺形パッチ曲面を生成する手法

を示す。

まず、多面体の頂点の座標値と、各頂点および辺に対する張力変数値により構成されるノルム最小化関数を用いて、多面体を三角形分割する曲線網を計算する手法を示す。

次に、その曲線網を有理多項式で表される三辺形パッチにより補間して、幾何学的に連続な曲面を生成する手法について述べる。また、既存のサーフェイスモデルで用いられるテンソル積曲面と本手法の曲面とを、幾何学的に連続に接続する手法を述べる。

最後に、本手法によって生成される曲面の例を示し、各種の多面体と張力変数の値に対する曲面形状の評価を行う。

第5章においては、形状の特徴を表す空間曲線網から多辺形パッチ曲面を生成する手法を提案する。

まず、N本の曲線で囲まれた閉領域に対してN変量重心座標系を定義し、領域の各側に対して直交変数を構成する手法について述べる。次に、領域を囲み互いに交わる曲線対で定義される掃引曲面から各側に関する副曲面を構成し、その副曲面を融合させて多辺形パッチ曲面を生成する手法について述べる。

このとき、曲線網を構成する曲線間の交差のトポロジーに関する制約と、各曲線の次数と節点ベクトルの値に関する制約とを受けずに、幾何学的に連続な曲面が生成されることを示す。また、特異な交差状態を含む曲線網の例を示し、それらに対して多辺形パッチの構成法を修正して、幾何学的に連続な曲面を生成する手法についても述べる。

次に、この多辺形パッチの生成手法を用いて試作されたサーフェイスモデルのシステム構成と、曲線網のデータ構造、および入力された曲線群の交点における幾何的な値よりトポロジーを推定して曲線網を生成する手法について述べる。また、多辺形パッチ曲面の生成機構についてまとめ、最後に、本システムを用いて曲面を設計する際の入力操作例を詳しく示す。

第6章においては、曲面形状に対して対話的な直接操作により変形を施すための、グラフィカル・ユーザ・インターフェースの構築方法について述べる。

まず、3次元格子状に配置される制御点群を直観的かつ簡略に操作するために、3次元ウェイジェットと呼ばれる、3次元空間での幾何形状と動作をカプセル化した対話部品を用いて、3次元格子を表す幾何胞体とそれに対してアフィン変換を施す部品を構成する。

次に、それらの部品間にアフィン拘束条件や階層的な拘束関係を導入して、制御点群の同期した動作を柔軟に設定する機構を提案する。

このとき、曲面のトポロジに依存しない変形操作を施すために、それらの複合的な3次元ウェイジェットを用いて、フリー・フォーム・デフォメーションの数学モデルに基づく変形ツールを実装する手法について述べ、最後に、対話的な直接操作のみによる変形ツールの作成環境を、具体的な操作を列挙して説明する。

第7章においては、本研究で得られた成果と残された課題についてまとめる。

関連発表論文

論文誌等に発表した論文（査読つき）

1. 栗山繁：“カーディナルスplineによる自由曲面の融合法”，
電子情報通信学会論文誌, Vol. J72-D-II, No. 9, pp.1341-1347 (1989-9).
2. 栗山繁：“多面体による三辺形パッチ曲面の生成法”，
情報処理学会論文誌, Vol. 32, No. 5, pp.655-664 (1991-5).
3. 栗山繁：“ G^n 級多辺形パッチ曲面の生成手法”，
電子情報通信学会論文誌, Vol. J75-D-II, No. 2, pp.379-385 (1992-2).
4. Shigeru KURIYAMA：
“Surface Modeling with an Irregular Network of Curves via Sweeping and Blending”，
Computer-Aided Design, Vol. 26, No. 8 pp.597-606 (1994-8).
5. 栗山繁, 橋啓八郎：“3次元ウェイジエットを用いた変形ツールの構築”，
情報処理学会論文誌, Vol. 37, No. 11, pp.1980-1988 (1996-11).

国際会議等に発表した論文（査読つき）

1. Shigeru KURIYAMA：
“Surface Generation from an Irregular Network of Parametric Curves”，
Modeling in Computer Graphics (Proc. of IFIP TC 5/WG 5.10),
pp.255-274 (1993-6).
2. Shigeru KURIYAMA, Keihachiro TACHIBANA：
“Interactive 3D widget for Free-Form Deformation”，
Computer Graphics and Applications (Proc. of Pacific Graphics '95),
pp.320-329 (1995-8).

論文誌等に翻訳した論文

1. Shigeru KURIYAMA : “Generation of G^n Multisided Patch Surfaces”,
Systems & Computers in Japan, SCRIPTA TECHNICA,
Vol. 24, No. 4, pp.46-54 (1993).

研究会等に発表した論文

1. 栗山繁, 河合利幸, 大村皓一：
“カーディナルスplineを用いた自由曲面のモデリング手法”,
情報処理学会・グラフィクスとCAD研究会・研究報告, 25-3 (1987-2).
2. 藤田卓志, 岸良行, 栗山繁, 河合利幸, 大村皓一：
“多重節点を持つスpline基底関数を用いた曲面補間法”,
テレビジョン学会・技術報告, ICS88-16, IPA88-11 (1988-2).
3. 浦野直樹, 南方博視, 栗山繁：
“インダストリアルデザインのための自由曲面の入力について”,
情報処理学会・グラフィクスとCADシンポジウム論文集, pp. 59-69 (1989-11).
4. 栗山繁：“形状特徴曲線からの多辺形パッチ曲面生成”,
第7回NICOGRAPH論文コンテスト, pp. 129-136 (1991-11).
5. 栗山繁, 橘啓八郎：“形状デザインにおける変形ツールの構築環境”,
情報処理学会・グラフィクスとCAD研究会・研究報告, 77-6, pp. 35-41 (1995-11).

全国大会等に発表した論文

1. 栗山繁：“ σ -スプラインによる自由曲面モデリング”，
情報処理学会・第39回全国大会講演論文集(2), pp.858-859 (1989-10).
2. 栗山繁：“多面体入力に基づく三辺形パッチ曲面モデル”，
情報処理学会・第41回全国大会講演論文集(2), pp. 275-276 (1990-9).
3. 栗山繁, 南方博視, 浦野直樹：
“フリーフォームデザインシステム(1) システムの概要”，
情報処理学会・第45回全国大会講演論文集(6), pp. 201-202 (1992-10).
4. 栗山繁, 南方博視, 浦野直樹：
“フリーフォームデザインシステム(2) ペンによる直接形状入力”，
情報処理学会・第45回全国大会講演論文集(6), pp. 203-204 (1992-10).
5. 栗山繁, 南方博視, 浦野直樹：
“フリーフォームデザインシステム(3) 曲面の数学モデルについて”，
情報処理学会・第45回全国大会講演論文集(6), pp. 205-206 (1992-10).

関連特許

1. 栗山繁：“A Method of Generating Surfaces from an Arbitrary Topological Network of Curves”，
出願番号：特願平3-318582号, 平成3年11月7日出願.

目 次

| | |
|-----------------------------|----|
| 第1章 序論 | 1 |
| 第2章 自由曲面の数学モデル | 7 |
| 2.1 緒言 | 7 |
| 2.2 曲線・曲面の設計に関する幾何学的性質 | 8 |
| 2.2.1 アフィン変換不变性 | 8 |
| 2.2.2 変動最小性 | 8 |
| 2.2.3 幾何学的（視覚的）連続性 | 8 |
| 2.3 テンソル積曲面 | 10 |
| 2.3.1 ベジエ曲線・曲面 | 10 |
| 2.3.2 スプライン曲線・曲面 | 12 |
| 2.3.3 ロフト曲面 | 18 |
| 2.3.4 掃引曲面 | 20 |
| 2.4 多変量変数曲面 | 22 |
| 2.4.1 三辺形パッチ曲面 | 22 |
| 2.4.2 多辺形パッチ曲面 | 24 |
| 2.5 結言 | 28 |
| 第3章 カーディナル基底による曲面生成法 | 29 |
| 3.1 緒言 | 29 |
| 3.2 S-スプライン | 30 |
| 3.2.1 定義 | 30 |
| 3.2.2 基底の計算法 | 31 |
| 3.2.3 β -2-スプラインによる拡張 | 33 |
| 3.2.4 曲線・曲面補間法 | 34 |
| 3.3 σ -スプライン | 36 |

| | |
|---------------------------------|-----------|
| 3.3.1 定義 | 38 |
| 3.3.2 基底の計算法 | 40 |
| 3.3.3 曲線・曲面補間法 | 41 |
| 3.3.4 形状制御点の計算法 | 43 |
| 3.3.5 3次曲線・双3次曲面生成法 | 46 |
| 3.3.6 曲面の再分割手法 | 48 |
| 3.3.7 自由曲面間の融合手法 | 50 |
| 3.4 結言 | 54 |
| 第4章 多面体による曲面生成法 | 55 |
| 4.1 緒言 | 55 |
| 4.2 擬似ノルム最小化関数による曲線網の生成 | 56 |
| 4.2.1 多面体の辺に沿う曲線網の生成 | 56 |
| 4.2.2 多面体を三角形分割する曲線網の生成 | 59 |
| 4.3 三辺形パッチによる曲面生成 | 62 |
| 4.3.1 曲線網補間と G^1 級の接続条件 | 62 |
| 4.3.2 三辺形パッチの拡張モデル | 65 |
| 4.3.3 三辺形パッチと双3次パッチとの G^1 級接続 | 67 |
| 4.3.4 曲面生成例 | 69 |
| 4.4 結言 | 74 |
| 第5章 曲線網による曲面生成法 | 77 |
| 5.1 緒言 | 77 |
| 5.2 多辺形パッチによる曲面生成 | 78 |
| 5.2.1 副曲面の生成 | 78 |
| 5.2.2 副曲面の融合 | 80 |
| 5.2.3 曲面の幾何学的連続性 | 84 |
| 5.2.4 特異なトポロジーに対する曲面生成 | 87 |

| | |
|------------------------------------|------------|
| 5.3 形状特徴曲線に基づくサーフェイスモデル | 94 |
| 5.3.1 システム構成 | 94 |
| 5.3.2 曲線網のデータ構造 | 96 |
| 5.3.3 曲線網の生成機構 | 97 |
| 5.3.4 多辺形パッチの生成機構 | 102 |
| 5.3.5 入力操作例 | 102 |
| 5.4 結言 | 106 |
| 第6章 3次元ウィジェットによる変形操作 | 107 |
| 6.1 緒言 | 107 |
| 6.2 3次元ウィジェットの構成 | 108 |
| 6.2.1 幾何胞体および対話操作のウィジェット | 108 |
| 6.2.2 ウィジェット間の束縛 | 109 |
| 6.2.3 格子ウィジェットの階層化 | 112 |
| 6.3 変形ツールの構築 | 114 |
| 6.3.1 ウィジェットの実装 | 114 |
| 6.3.2 変形の数学モデル | 115 |
| 6.3.3 システムの開発環境 | 118 |
| 6.4 変形ツール作成の対話的操作 | 118 |
| 6.5 3次元ウィジェットによる変形操作例 | 120 |
| 6.6 結言 | 122 |
| 第7章 結論 | 125 |
| 謝辞 | 129 |
| 参考文献 | 131 |

第1章 序論

コンピュータの応用分野である計算機支援幾何設計(Computer Aided Geometric Design, 以後 CAGD と略す)は、計算機内に3次元空間における物体の幾何モデルを構築し、その形状の視覚化を通して幾何的な設計作業を支援する技術の総称である。

近年、工業製品の設計から加工に至る製造工程の、計算機による統合自動化(Computer Integrated Manufacturing, あるいは CIM)の技術の高度化に伴い、意匠設計の段階における作業の効率化が要請されており、工業デザイナーの発想、意図を概念設計の段階から計算機内に数値データとして容易に取り込める CAGD システムの開発が重要視されている。また、3次元空間の幾何データを高速に陰影表示できるワークステーションの開発に伴い、対話的な実時間操作を用いた物体形状の設計が可能となり、さらにペン入力デバイスや3次元デバイスの発明によって、より直観的な変形操作モデルを有する人工現実感・臨場感を有する設計環境が提案され始めている。従って、より柔軟で直観的な形状操作に適した曲面の数学モデルが必要とされている。

数学モデルで記述した形状データを用いた最初のアプリケーションシステムとしては、1960 年代初頭に MIT で開発された APT (Automatically Programmed Tools) システムが挙げられる。しかし、APT システムは形状の設計を支援するものではなく、図面から読み取った形状情報を基に記述される計算機言語から、工作機械を制御する NC テープを作成するものであった。コンピュータを用いた対話的な操作で形状の設計を支援するシステムとして最初に開発されたのは、1963 年に MIT のサザーランド(I. E. Sutherland)によって発表された Sketchpad[Sut63] であり、このシステムは、その後に開発された 2 次元・3 次元 CAGD システムの基礎となっている。その後、APT や Sketchpad を基に開発された 3 次元 CAGD システムは、機械部品のような単純な形状の組合せで表現される立体形状の設計を支援するソリッドモデラー(Solid Modeller)と、自動車や航空機の本体のような複雑な曲面形状の設計を支援するサーフェイスモデラー(Surface Modeller)に分かれて発展してきた。

ソリッドモデラー[M88] は、多面体や 2 次曲面で構成される基本立体空間の論理演算的な組み合わせによる形状モデル(Constructive Solid Geometry あるいは CSG)[RV85, HHK89] を用いており、立体の空間的なトポロジーは、形状の境界位相要素(点、線分など)の隣接位相関係を用いた境界表現(Boundary Representation あるいは B-rep)[Bau75] で記述されている。近年では、トポロジーの定義域を多様体から非多様体へ拡張してソリッドモデラーに応用する非多様体(Non-manifold)モデル[Wei85, GP89] の研究がなされており、CSG における論理演算の取消し・再実行に伴う処理を効率良く計算する手法[MSNK89] などに適用されている。また、立体の幾何学的な特徴および製造工程における特徴を知識化して、幾何的な推論機構によって高度な設計支援環境を構築する Feature-based モデル

[Sha91] の研究も盛んになされている。さらに、ソリッドモデルの基本立体間を滑かに接続させるフィレット (Fillet) 面やシャンファ (Chamfer) 面を生成するために、2次曲面に加えて媒介変数曲面を導入するモデルが提案され、曲面データに立体データと同様のトポロジーデータをもたせてソリッドモデルとサーフェイスモデルを統合するシステムの研究開発 [STTC91] がなされている。

一方、曲面形状の設計を支援するサーフェイスモデル [Boh84] で用いられる曲線・曲面の数学モデルに関する研究は、1960年代にフランスの自動車会社（シトローエンおよびルノー）の CAGD システム用として開発されたド・カステリヨ (P. de Casteljau) [Cas59, Cas63] とベジエ (Bézier)[Bé66, Bé67] によるベジエ曲線・曲面に端を発すると言われており、ルノーの CAGD システムは UNISURF として学会論文誌で紹介 [Bé71] されている。ベジエ曲線・曲面を定義するバーンスタイン多項式 (Bernstein Polynomials) はベジエ多項式とも呼ばれ、その各種演算における記述の簡約性および数値的な安定性 [FR87, FR88] などの理由から、多くの CAGD システムにおいて曲線・曲面の数学モデルに用いられている。

また 1960 年代初頭には、ファーガソン (J. C. Ferguson) [Fer64] が位置ベクトルと接線ベクトルをエルミート (Hermite) 多項式で補間して曲線・曲面を生成する手法を、ボーイング社の曲面生成システム FMILL で実用化した。エルミート多項式による曲線・曲面はベジエ曲線・曲面と同様に、新たな手法を開発する上での基礎的な数学モデルとなっている。

さらに同時期に、スプライン曲線・曲面の研究が GM 社のド・ボー (C. de Boor) [BL66] とゴードン (W. Gordon) によってなされた。特に B-スプラインの研究は、与えられたデータを補間・近似する手法として応用数学の近似理論の分野で発展したものである。ゴードン [GR74] とリーゼンフェルド (R. Riesenfeld) [Rie73] は、B-スプライン曲線をベジエ曲線の一般化として位置づけることにより両曲線の理論を統合し、その後の曲線・曲面設計への応用の基礎を築いた。B-スプライン曲線・曲面は、ベジエやファーガソンの曲線・曲面で問題となった、曲線・曲面同士を滑らかに接続させる際の拘束条件を解消する点で優れており、ベジエ曲線・曲面と並ぶ数学モデルとしてサーフェイスモデルに限らず科学技術データの補間、近似、視覚化、および医療データの再構成、視覚化などに広く用いられ、その数学的特徴についても数多くの研究成果が多方面の分野から報告されている。

近年では、不等間隔の節点ベクトルで定義される B-スプラインを有理化した曲線・曲面モデル (Non Uniform Rational B-splines あるいは NURBs) [Ver75] が、曲面の幾何データの世界標準的な互換形式として採用されている。曲面の数学モデルの定義域を NURBs に拡張することにより、2次曲面を媒介変数曲面として統一的に扱え、ソリッドモデルで用いられる曲面はサーフェイスモデルでも用いられるようになった。

以上に述べた、代表的な曲面の数学モデルは、ベジエ曲面におけるベジエポリゴンや B-スプライン曲面における制御点のような、3次元空間上に2次元アレイで配置される点集合により曲面形状を定義するため、これらの数学モデルを用いたサーフェイスモデルは、2

次元アレイの点の位置を指定させるユーザ・インターフェースを備えているものが多い。

これに対して、複雑な曲面形状をより柔軟に設計するために、点を基本単位とする曲面形状の設計環境を、曲線を基本単位とする設計環境に移行することが考慮され、曲面式を曲面の境界に相当する4本の曲線式より生成する手法が提案された。このような曲面は境界曲線上の全ての点を補間することから超限補間曲面(Transfinite surfaces)、またはロフト曲面(Loft surfaces)と呼ばれる。

MITのクーンズ(S. A. Coons)がフォード社の依頼を受けて開発したクーンズパッチ[Coo67]は、CAGDシステムに最初に導入された超限補間曲面として位置づけられる。この曲面は後にゴードン[Gor71]によって拡張され、バーンヒル(R. E. Barnhill)らによって三角領域に対する補間法[BBG73]に応用された。クーンズパッチは曲面の連続性について、その四隅でツイストベクトルの値が一意に定まらないという問題点を抱えているが、これを解決するためにグレゴリー(J. A. Gregory)によってグレゴリーパッチ[Gre74]が提案された。この曲面はパッチの境界における連続性の制御が比較的容易なことから、千代倉[Chi86]らによって開発されたソリッドモデルer DesignBaseに採用されている。また、高村と千代倉らはグレゴリーパッチにNURBs曲面との接続機能を加えるため、その数学モデルを有理境界グレゴリーパッチ[TOTC90]として拡張した。グレゴリーパッチの数学モデルの研究および応用は、日本の研究者を中心として現在も活発に行われている。

曲線・曲面の形状を、制御点と節点ベクトルによって設計する際に生ずる直観とのずれを解消するために、曲線・曲面に対してその張力を変化させるような効果をもたらす変数を導入し、形状の制御に対する柔軟性を向上させる手法が提案されている。シェイカート(D. G. Schweikert)[Sch66]は、双曲線関数によって表現される曲線を用いて張力付加スプライン(Spline under tension)を最初に提案した。後にバースキー(B. A. Barsky)[BB83, BD85]が、スプライン曲線・曲面のパラメトリックな連続性の条件を幾何学的な連続性の条件に拡張する2つの張力変数 β_1 , β_2 を導入し、その変数によって直観的に張力を制御する手法を提案した。この手法によって生成されるスプラインはベータスプライン(β -splines)と呼ばれている。

バースキーの提案した手法では、張力変数 β_1 , β_2 を各節点において異なる値に設定するには、張力変数をエルミート多項式を用いた関数で構成しなければならないが、これに対してコーヘン(E. Cohen)[Coh87]は、張力変数を各節点ごとに異なる定数値に設定できるスプライン基底の構成法を提案した。また、フォーレイ(T. A. Foley)[Fol87a, Fol87b]はエルミート曲線・曲面のエネルギー最小化関数に対して2種類の張力変数を導入し、曲線・曲面の張力を制御する手法を提案した。一般的に、張力を制御する変数を用いるスプライン曲線・曲面の数学モデルは張力スプラインと呼ばれており、その数学的な性質に関する多くの研究がなされてきたが、商用のCAGDシステムにおいて実際にこの数学モデルを用いている事例はまだ少ないようである。

設計の対象となる曲面形状が複雑になるにつれ、2次元メッシュ状に配置された制御点あるいは境界曲線だけでは設計の困難な形状部位が生じるので、4辺以外の側数を有するパッチで曲面を生成する手法が提案された。任意の側数を有するパッチは多辺形パッチと呼ばれ、3辺でのみ定義されるパッチは特に三辺形パッチと呼ばれる。最初に提案された三辺形パッチとしては、1959年にド・カステリヨ [Cas59] が提案した、有限要素法においてラグランジュ (Lagrange) 形式で用いられる補間法に基づく、三角多項式のパッチモデルが挙げられる。また1977年にサビン (M. Sabin)[Sab77] が提案した、三角領域に対するBースpline基底をコンボリューションにより構成して曲面を生成する手法も、三辺形パッチの生成手法と見做される。これらの三角領域に対する曲面生成法は、2次元アレイで配置されていない制御点より曲面を生成するのに用いられる。またその理論は、ファリン (G. Farin)[Far86] やバーンヒルらによって発展させられ、後に提案される多辺形パッチ曲面の理論的な基礎ともなっている。Bースplineの再分割公式を多辺形の領域に拡張して曲面を生成する手法がカトマル (E. Catmull)[CC78]、サビン [Sab83]、ナスリ (A. H. Nasri)[Nas87, Nas91] によって提案された。この手法によって生成される曲面は、解析的な式として陽に表現できず、特異点で連続性の次数が減少するなどの問題点がある。

これに対して、多辺形パッチを多変量座標系を有する曲面式で記述する手法が多く提案されており、穂坂、木村 [HK84] の提案した制御点による多辺形パッチの表現法がその最初の数学モデルとして位置付けられる。後に、グレゴリー [CG84, Gre86] は多辺形領域の各辺からの垂直距離より計算される多変量座標系を用いて補間曲面を構成し、融合関数を用いることにより3辺形・5辺形パッチを生成する手法を示した。また、同様の融合関数を用いて3辺形パッチを生成する手法がニルソン (G. M. Nielson)[Nie87]、ヘイゲン (H. Hagen) [HP89] らによって提案された。この他に、ループ (C. T. Loop) らはN角形領域を互いに従属なN変数で表すため一般重心座標系を提案し[LD89]、N変数に拡張されたバーンスタイル多項式によってN辺形パッチを生成する手法、ならびにサビンネットを用いてN辺形領域に対するBースpline曲面を生成する手法[LD90]を提案した。また、バラディ (T. Varady)[Var91] はエルミート多項式を応用したバーテックス (Vertex) パッチの生成法を提案した。パッチの側数に依存しない曲面の数学モデルは柔軟な形状の設計を可能とするので、現在でも数多くの研究がなされている。

複雑な形状を柔軟に設計するための別の方針として、曲面を階層的に記述する手法が提案されている。これに伴い曲線・曲面式をその形状を変化させずにより多くの制御点で再定義する再分割手法が提案され、Bースpline曲線・曲面に関する手法 (Oslo アルゴリズム) [CLR80] やベータスpline曲線・曲面に関する手法 [Joe87] が提案されている。再分割手法を用いた曲面の生成法は、サーフェイスモデラー [FB88] だけではなく、曲面内挿法 [SBD86]、データ圧縮法、曲面形状の変形操作法 [WW92] などの幅広い分野で応用されている。

以上に述べてきた曲面の数学モデルは、媒介変数曲面として位置付けられるが、これに対して多面体ポリゴンを曲面の近似モデルとして用いる手法 [AWW89] や、濃度分布関数の等濃度面を用いる手法 [西村 85] が提案されている。これらの手法は、人体に代表される複雑な形状やトポロジーを有する曲面の設計に多く用いられている。また、彫刻における造形作業を模倣した曲面形状の設計環境を実現するために、空間分割セルに立体の内外情報を与えて閉曲面の形状を設計する手法 [YJ89] も提案されている。しかし、これらの手法で生成される曲面の数学モデルは汎用性に欠け、曲面形状の精度に劣るという問題点がある。

これまでに提案された研究成果により、曲面形状をより柔軟かつ直観的に設計するために必要とされる曲面の数学モデルに関する特徴は、以下に列挙する形状操作を実現することに要約される。

1. 曲面が通る 3 次元空間の座標値を陽に指定できる。
2. 曲面の形状を局所的に制御できる。
3. 曲面の形状を物理的に把握しやすい張力などの値によって制御できる。
4. 曲面の形状を階層的に指定できる。
5. 曲面の形状を点や曲線を任意に配置して指定できる。
6. 曲面の形状をそのトポロジーに依存せずに指定できる。
7. 曲面のパッチ境界における連続性を任意に指定できる。

しかし、これまでに提案された曲面の数学モデルは、上述した全ての形状操作を実現することはできず、設計の対象となる形状の特徴、およびその入力方法に応じて各モデルが使い分けられているのが現状である。本論文ではまず、既存の曲面の数学モデルに対して以下の問題点を提起する。

- a. 与えられた点を含むようなスプライン曲面は、形状を局所的に制御できない。一方、形状の局所的な制御が可能なスプライン曲面は、与えられた点を含まない。
- b. 三辺形パッチ曲面は、その形状の制御およびパッチ間の接続が困難である。
- c. ロフト曲面は、その境界となる曲線の配置のトポロジーに制約がある。

本研究では、これらの問題点をそれぞれ以下に要約する手法により解決する。

- A. 局所的な台をもつカーディナル基底を用いて、形状の局所的な制御が可能な、与えられた点を含むスプライン補間曲線・曲面を生成する [栗山 89a, 栗山 89b, 栗山 87, 藤田 88, 河合 88]。

B. 多面体とその各頂点および各辺に対する張力変数を用いて、形状の局所的な制御が可能な、幾何学的連続性を有する三辺形パッチ曲面を生成する [栗山 91b, 栗山 90, 浦野 89].

C. 曲線が任意のトポロジーで配置される曲線網から、各曲線の連続性の次数と同次の連続性を有する多辺形パッチ曲面を生成する [Kur94, Kur93a, Kur93b, 栗山 92, 栗山 91a].

A. の手法は、スプライン曲面の補間子として広く用いられている C-スプラインが局所的な台で定義されず、曲面形状の局所的な制御ができない問題点を解決するものであり、局所台をもち幾何学的に連続な補間子を、B-スプラインの線形和で構成することをその特徴とする。 **B.** の手法は、三辺形パッチで滑らかな曲面を生成するために、パッチを再分割して曲面の連続性を補正する代わりに、制御点を有理多項式で展開してその連続性を補正するものであり、三辺形パッチの境界曲線に相当する、多面体の稜に沿い面領域を三角形分割する曲線網を、多面体の各頂点および各辺に張力変数を付与したエネルギー最小化関数から求めることをその特徴とする。 **C.** の手法は、2次元メッシュ状の曲線網で定義されていたロフト曲面を、任意のトポロジーを有する曲線網で定義されるように拡張するものであり、互いに交差する曲線対で定義される掃引曲面の線形結合で副曲面を構成し、それを超限補間関数で融合させて多辺形パッチを生成することをその特徴とする。

A. から C. の手法を前述した 1. から 7. までの形状操作の観点から捉えると、A. の手法は既存のスプライン曲面が 1. と 2. の操作を同時に実現できない点を解決して 1. から 4. までの操作を実現している。また、B. の手法は既存の三辺形パッチが 3. の操作を実現できない点を改良して 1. から 6. までの操作を実現し、C. の手法は既存のロフト曲面が 5. と 6. の操作を実現できず、既存の多辺形パッチ曲面が 5. と 7. の操作を実現できない点を解決して 1. から 7. までの操作を実現している。故に、本論文で提案する新たな曲面の数学モデルは、より自由度の高い形状の操作環境を構築することができる。

本研究の目的は、より柔軟かつ直観的な曲面形状の設計環境を有する先進的な CAGD システムを開発することである。この目的を達成するためには、曲面の数学モデルを改良する以外にも、システムを対話的に操作する際のユーザ・インターフェースも重要な要因となる。計算機の処理速度の飛躍的な向上に伴い、対話的なインターフェースに多くの資源を割けるようになった背景から、計算機内の 3 次元世界における対話操作を提供する、3 次元 ウィジェットと呼ばれる部品がアフィン変換等の単純な変形操作の道具として開発してきた。本論文では最後に、複雑な変形操作を実現するために、曲面形状を制御する点を対話的に操作する 3 次元 ウィジェットを構成する手法を提案する。この手法により、プログラミングの知識のないデザイナーが、3 次元物体との対話的な直接操作のみによって、より直観的な変形操作を実現する 3 次元 ウィジェットを構築できる。

第2章 自由曲面の数学モデル

2.1 緒言

CAGD システムで扱われる自由曲面の数学モデルは、陰関数形式と媒介変数形式に大別され、一般的に陰関数形式は $F(x, y, z) = 0$ の曲面式で、媒介変数形式は $(x, y, z) = (F_x(u, v), F_y(u, v), F_z(u, v))$ の曲面式で与えられる。

陰関数曲面の代表例である2次曲面はソリッドモデルの基本立体を表すのに用いられており、媒介変数曲面と比較して曲面間の干渉計算や交線計算の数値解を、より安定に求めることができる。また、分布関数の等値面によって表される曲面も陰関数形式と見なすことができる。この曲面は、複雑な形状をもつ自然物などの設計に適しており、コマーシャルや映画などで使用されるCGアニメーションの制作に用いられている。しかし、曲面の形状を多面体で近似するテセレーションや、曲面上に画像を張り付けるマッピングなどの処理には適していない。

陰関数形式と媒介変数形式で与えられる曲面の双方の利点を取り入れるために、両形式間での数式変換に関する理論が提案されている。陰関数曲面を媒介変数曲面に変換すると有理多項式で展開され[AB87a, AB87b]、2次曲面の場合には特に不等間隔有理B-スプライン曲面（またはNURBs）で展開される。これとは逆に、媒介変数曲面を陰関数曲面に変換するのに、シルベスターの終結式やグレブナー基底を用いる手法[GSA84, SAG84]が提案されている。しかし、いずれの手法によっても生成される陰関数曲面の式は、無限遠点における冗長な曲面を含む、高次の多項式になるという問題点がある。

一方、媒介変数形式の曲面式は対話的な操作性や計算効率の点で優れており、バーンスタイン多項式の線形和で定義されるベジエ曲面や、スプライン関数によって構成されるスプライン曲面が、既存のサーフェイスモデルにおいて広く用いられている。また、切断面における形状を表す横断曲線とそれが掃引される経路を表す誘導曲線によって生成される掃引曲面や、パッチ間の境界条件とエルミート多項式より生成されるロフト曲面も、その実用性が認められている。これらの曲面は、2個の独立な媒介変数で表されるテンソル積曲面であり、形状を指定する制御点や境界曲線を2次元メッシュ状に配置しなければならない。

この制約を取り除くために、3個以上の従属な変数で表される三辺形あるいは多辺形のパッチを用いる手法が提案されている。テンソル積曲面が矩形領域でのみ定義されるのに対して、これらのパッチは任意の多角形領域で定義されるので、制御点や境界曲線の配置のトポロジーを任意に選択できるが、曲面の形状や連続性の制御は複雑になる。

本章では、形状の設計という観点から、以上に述べた媒介変数曲面式の数学モデルの性質を解析し、各曲面を設計する際の形状記述に関する制約から生じる問題点を提起し、以降の章で提案される曲面の数学モデルの理論的な背景を述べる。

2.2 曲線・曲面の設計に関する幾何学的性質

2.2.1 アフィン変換不变性

曲線・曲面を設計する際に、その形状は制御点の回転・平行移動などのアフィン変換に対して不变であることが要求される。すなわち制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ と媒介変数 t で手法 μ によって生成される曲線 $\mathbf{C}(t) = \mu(\mathbf{P}_i, t)$ が、アフィン変換演算子 α に対して、

$$\alpha[\mathbf{C}(t)] = \mu(\alpha[\mathbf{P}_i], t) . \quad (2.1)$$

の関係を満たす必要がある。この性質はアフィン変換不变性 (Affine Invariance) と呼ばれる。もし、曲線生成手法 μ が基底 $\{B_i(t)\}_{i=0,1,\dots,n}$ の制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ による加重和

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i(t) ,$$

によって定義されるならば、

$$\sum_{i=0}^n B_i(t) \equiv 1 , \quad (2.2)$$

の性質を満たすことが、式 (2.1) のアフィン変換不变性の性質を満たす必要十分条件となる。式 (2.2) の性質は 1 の分割と呼ばれる。

2.2.2 変動最小性

制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ を頂点とするポリゴンと任意の平面との交点の数は、制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ を含む任意の曲線と平面との交点の数以下になるという性質をもつ。一方、2つの曲線 \mathbf{C}_i と \mathbf{C}_{i+1} を線形に補間して生成される曲線 $\bar{\mathbf{C}}_i(t) = t \mathbf{C}_i + (1 - t) \mathbf{C}_{i+1}$ と任意の平面との交点の数は、もとの曲線 $\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_{i+1}$ と平面との交点の数の和を超えることはない。故に、制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ の複数回の線形補間で曲線が生成されるならば、曲線と任意の平面の交点の数が、 $\{\mathbf{P}_i\}$ を頂点とするポリゴンと平面との交点の数と一致するという性質を有する。この性質は、生成される曲線の形状の変動が、与えられる制御点を頂点とするポリゴンの形状の変動以下になるので、変動最小性 (Variation Diminishing Property) と呼ばれる。

また、凸型のポリゴンをなす制御点から生成される曲線は、変動最小性をもてば常にそのポリゴン内に凸型の曲線を生成する。この性質は凸閉包性 (Convex Full Property) と呼ばれる。

2.2.3 幾何学的（視覚的）連続性

互いに隣接する曲線・曲面式が連続に接続されている条件は、その共有する結節点または境界曲線における微分値が一致することが挙げられる。しかし、曲線・曲面の幾何学的もし

くは視覚的な連続性を評価する場合には、それを拡張した条件式が用いられる。幾何学的な連続性 (Geometric Continuity) もしくは視覚的な連続性 (Visual Continuity) は、以下のように定義される。

- ・ 1次の幾何学的連続性 (G^1 級) もしくは視覚的連続性 (VC^1)

曲線：結節点における単位接線ベクトル (unit tangent vector) が一致する。

隣接する曲線を $\mathbf{C}(t), \bar{\mathbf{C}}(t)$ とすると、1次の基礎方程式は単位接線ベクトル \mathbf{T} を用いて、

$$\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt} = s\mathbf{T}, \quad s = \left| \frac{d\mathbf{C}(t)}{dt} \right|,$$

で表される。このとき、結節点において $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}$ の関係を満たせばよい。

曲面：境界曲線における、単位法線ベクトル (unit normal vector) が一致する。

隣接する曲面を $\mathbf{Q}(u, v), \bar{\mathbf{Q}}(u, v)$ とすると、曲面の単位法線ベクトルは

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{Q}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{Q}(u, v)}{\partial v},$$

で表される。このとき、共有する境界上において $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}}$ の関係を満たせばよい。

- ・ 2次の幾何学的連続性 (G^2 級) もしくは視覚的連続性 (VC^2)

曲線：結節点における単位接線ベクトル、主法線ベクトル (normal vector) および曲率 (curvature) が一致する。

隣接する曲線 $\mathbf{C}(t), \bar{\mathbf{C}}(t)$ に対して、2次の基礎方程式は単位接線ベクトル \mathbf{T} と単位法線ベクトル \mathbf{N} および曲率 κ を用いて、

$$\frac{d^2\mathbf{C}(t)}{dt^2} = s^2(t)\kappa\mathbf{N} + \frac{ds(t)}{dt}\mathbf{T}(t), \quad \kappa\mathbf{N} = s(t)\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt},$$

と表される。このとき、結節点において $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}, \mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}}, k = \bar{k}$ の関係を満たせばよい。

曲面：境界曲線上における、単位法線ベクトル、主曲率 (principal curvature) または主方向 (principal direction) が一致する。

隣接する曲面 $\mathbf{Q}(u, v), \bar{\mathbf{Q}}(u, v)$ に対して、1次と2次の基礎行列はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} P^u \bullet P^u, & P^u \bullet P^v \\ P^v \bullet P^u, & P^v \bullet P^v \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} N \bullet P^{uu}, & N \bullet P^{uv} \\ N \bullet P^{vu}, & N \bullet P^{vv} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

で表される。このとき、曲面の $\mathbf{c} = (u, v)$ 方向の法曲率は次式で定義される。

$$\kappa(\mathbf{c}) = \frac{\mathbf{c}\mathbf{D}\mathbf{c}^t}{\mathbf{c}\mathbf{G}\mathbf{c}^t}.$$

$\kappa(\mathbf{c})$ の値の最大値を $\kappa_1 = \kappa(\mathbf{c}_1)$ 、最小値を $\kappa_2 = \kappa(\mathbf{c}_2)$ とすると、 κ_1, κ_2 は主曲率と呼ばれ、 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ は主方向と呼ばれる。

このとき、隣接する曲面が共有する境界上において $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}}$, $\kappa_i = \bar{\kappa}_i$, $\mathbf{c}_i = \bar{\mathbf{c}}_i$, $i = 1, 2$ の関係を満たせばよい。但し、 $\mathbf{c}_i = \bar{\mathbf{c}}_i$ の条件は $\kappa_1 \neq \bar{\kappa}_2$ の場合に限る。

以上に述べた幾何学的連続性の条件は、曲線式の変数変換の観点から以下のように定義される。

幾何学的連続性の定義 [Her87] :

節点 $t = t_i$ を共有する曲線 $\mathbf{C}_{i-1}(t), \mathbf{C}_i(t)$ に関して,

$$\partial^h \mathbf{C}_{i-1}(\tilde{t}) / dt^h \equiv \partial^h \mathbf{C}_i(t) / dt^h, h = 0, 1, \dots, n$$

を満足するような媒介変数の変換式 $\tilde{t} = f(t)$ が存在するときに \mathbf{C}_{i-1} と \mathbf{C}_i は G^n (もしくは VC^n) 級である。

曲面の場合も同様に、変数変換 $\tilde{u} = f_u(u), \tilde{v} = f_v(v)$ が存在すれば G^n 級であると定義される。

2.3 テンソル積曲面

テンソル積曲面は、形状を制御するために用いられる2次元アレイの3次元座標点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ (以後、制御点) と、独立な2個の媒介変数 u, v によって定義される。このとき曲面を生成する手続きは、1次元アレイの点に対して曲線を生成する補間または近似法を μ とすると、以下に述べるような2段階の μ の適用に分解して考えることができる。

1. 各 $j = 0, 1, \dots, n$ の値に対し、1次元アレイの制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}_{i=0,1,\dots,m}$ に μ を適用し、曲線 $\mathbf{C}_j(u) = \mu(\mathbf{P}_{i,j}, u)$ を生成する。
2. 曲線 $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n$ を1次元アレイの制御点とみなし、同様に μ を適用し、テンソル積曲面 $\mathbf{S}(u, v) = \mu(\mathbf{C}_j(u), v)$ を生成する。

故に、曲線を生成する手法 μ の数学的な性質により、テンソル積曲面の性質を明らかにできる。

本節では、テンソル積曲面の代表例であるベジエ曲面、スプライン曲面、ロフト曲面、および掃引曲面の数学モデルに関する諸手法の特徴および問題点を曲線生成の観点より述べる。

2.3.1 ベジエ曲線・曲面

ベジエ曲線および曲面は、バーンスタイン多項式（またはベジエ多項式）によって表され、 n 次 i 番目のバーンスタイン多項式 $B_i^n(t)$ は次式で定義される。

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} .$$

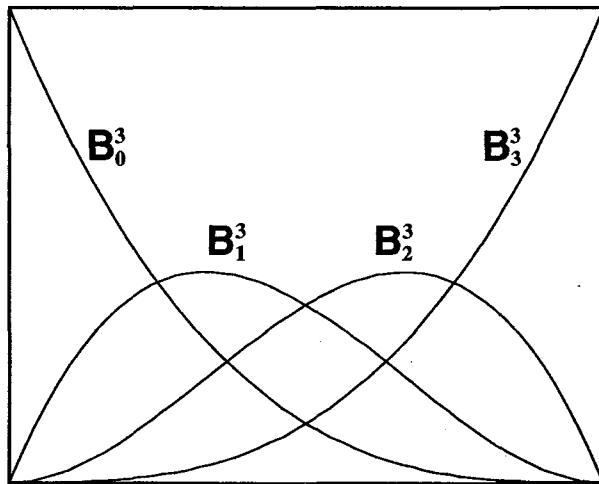


図 2-1: バーンスタイン多項式

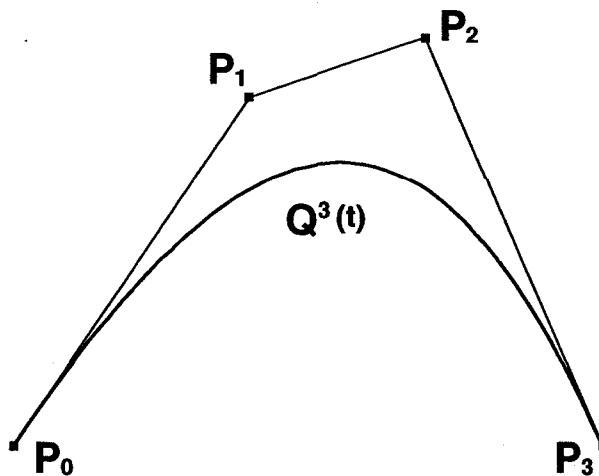


図 2-2: 3次のベジエ曲線

媒介変数 t をもつ n 次のベジエ曲線 $\mathbf{Q}^n(t)$ は 1 次元アレイの点 $\{\mathbf{P}_i\}$ を用いて $\{B_i^n(t)\}$ の線形和として以下のように表される。

$$\mathbf{Q}^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) .$$

図 2-1に 3 次のバーンスタイン多項式 $\{B_i^3(t)\}_{i=0,1,2,3}$ を、また図 2-2に 3 次のベジエ曲線 $\mathbf{Q}^3(t)$ と点 $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0,1,2,3}$ を示す。

一方、媒介変数 u, v をもつ $m \times n$ 次のベジエ曲面 $\mathbf{Q}^{m,n}(u, v)$ は、 m 次と n 次のバーンスタイン多項式 $\{B_i^m(u)\}, \{B_j^n(v)\}$ のテンソル積と、2次元アレイの点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ により以下のように表される。

$$\mathbf{Q}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) .$$

$\{\mathbf{P}_i\}$ および $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ はベジエポリゴンと呼ばれ、ベジエ曲線・曲面の微分幾何量は、ベジエポリゴンの値の差分により容易に求められる。また、ベジエ曲線・曲面上の点はベジエポリゴンの値よりド・カステリヨ (P. de Casteljau) のアルゴリズムと呼ばれる再帰式で求められ、曲面 $\mathbf{Q}^{n,n}(u, v)$ の値は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{n,n}(u, v) &= \mathbf{P}_{0,0}^n, \\ \mathbf{P}_{i,j}^r &= [1-u, u] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i,j}^{r-1} & \mathbf{P}_{i,j+1}^{r-1} \\ \mathbf{P}_{i+1,j}^{r-1} & \mathbf{P}_{i+1,j+1}^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{i,j}^0 &= \mathbf{P}_{i,j}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-r . \end{aligned}$$

この再帰式は極形式により一般化することが可能である [Ram89]。

また、2次曲線・曲面式を媒介変数曲線・曲面式に精確に変換するために有理多項式による曲線・曲面表現が用いられているが、有理ベジエ多項式 [Pat85] で表現される曲線は以下のように表される。

$$\mathbf{Q}^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)} .$$

但し、 w_i は i 番目の重み係数とする。

有理ベジエ多項式で表現される曲線・曲面に対しても同様に、ド・カステリヨのアルゴリズムを拡張した再帰式が定義される。しかし、曲線・曲面の境界における微分幾何量は一般的に複雑な有理多項式となる。

ベジエ曲線・曲面は 2.2 節で述べたアフィン変換不変性と凸閉包性とを有し、バーンスタイン多項式の四則演算から生ずる計算誤差は、べき関数における計算誤差よりも少ないことが証明された [FR87, FR88]。しかし、隣接するベジエ曲線・曲面を連続性の条件を満たすように接続するにはベジエポリゴンの値に関する制約条件が課せられるので、その値の制御が複雑になってしまうという問題点がある。

一方、ベジエ曲線・曲面の数学モデルは簡約で効率の良い表現形式を有するので、幾何形状モデルの標準的データ形式として用いられ、ベジエポリゴンの値は曲線や曲面の形状設計の際の数学モデルを用いて間接的に計算される。例えば、B-スプライン曲面の形状を制御する点の座標値を線形変換してベジエポリゴンの値が求められる。

2.3.2 スプライン曲線・曲面

スプライン曲面はスプライン関数 [Sch81, Nie83] のテンソル積によって表され、既存のサーフェイスモーデラーで最も多く用いられている曲面モデルである。その代表例として3次スプライン、張力スプライン、および不等間隔有理B-スプラインなどが挙げられる。

スプライン関数とは、節点ベクトルによって区分的に定義される、節点において微分量の連続な多項式関数であり、計算効率の良い点などから計算幾何学の分野だけでなく、数値解析の分野でも広く応用されている。

スプライン曲線は、形状を制御する1次元アレイの点 $\{P_i\}$ （以後、制御点）と、媒介変数 t に対して与えられる節点ベクトル $\{t_i\}$ によって定義される。同様にスプライン曲面は、2次元アレイの制御点 $\{P_{i,j}\}$ と、2個の独立な媒介変数 u, v の各々に対して与えられる節点ベクトル $\{u_i\}, \{v_j\}$ によって定義される。スプライン曲線・曲面は、ベジエ曲線・曲面で問題となった、連続性の条件を満たすための制御点に関する制約が無いという利点がある。以下の節において、代表的なスプライン曲線・曲面の数学モデルの性質と特徴、および形状を設計する際の制約から生じる問題点を詳しく述べる。

2.3.2.1 3次スプライン

3次スプライン曲線 $\{\mathbf{C}_i^3(t)\}$ は、節点 $\{t_i\}$ において 2 階の微分値までが連続であり、そのエネルギー積分関数 $E(t) = \sum_i \int \|d^2 \mathbf{C}_i^3(t)/dt^2\|^2 dt$ を最小化する性質 $dE(t)/dt = 0$ (ノルム最小性: Minimum Norm Property)[BL66] を有する。まず曲線式 $\mathbf{C}_i^3(t)$ を 3 次のエルミート補間子 $\{H_j^3(t)\}_{j=0,1,2,3}$ を用いて以下のように表す。

$$\mathbf{C}_i^3(t) = \mathbf{P}_i H_0^3(\tilde{t}) + \mathbf{d}_i \Delta_i H_1^3(\tilde{t}) + \mathbf{d}_{i+1} \Delta_i H_2^3(\tilde{t}) + \mathbf{P}_{i+1} H_3^3(\tilde{t}) ,$$

$$\mathbf{d}_i = \frac{d\mathbf{C}_i^3(t_i)}{dt} , \quad \Delta_i = t_{i+1} - t_i , \quad \tilde{t} = \frac{t - t_i}{\Delta_i} .$$

但し、 n 次のエルミート補間子 $\{H_i^n(t)\}$ とは次式の条件

$$\begin{aligned} \frac{d^h H_i^n(0)}{dt^h} &= \begin{cases} 1 & ; \text{ if } i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor \cap h = i \\ 0 & ; \text{ others} \end{cases}, \\ \frac{d^h H_i^n(1)}{dt^h} &= \begin{cases} 1 & ; \text{ if } i = \lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor + 2, \dots, n \cap h = n - i \\ 0 & ; \text{ others} \end{cases}, \end{aligned}$$

を満足する最大次数 n の多項式関数であり、3次のエルミート補間子 $\{H_i^3(t)\}_{i=0,1,2,3}$ は以下の式で表される。

$$H_0^3(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad , \quad H_1^3(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad , \\ H_2^3(t) = -t^2 + t^3 \quad , \quad H_3^3(t) = 3t^2 - 2t^3 \quad .$$

このとき、節点 t_i を共有する 2 曲線の t_i における 2 階微分値の一一致条件 $d^2C_i(t_i)/dt^2 \equiv d^2C_{i-1}(t_i)/dt^2$ より、曲線の 1 階微分値 $\{d_i\}$ は以下の線形システムを解いて求められる。

$$\Delta_i \mathbf{d}_{i-1} + 2(\Delta_{i-1} + \Delta_i) \mathbf{d}_i + \Delta_{i-1} \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{r}_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{d}_n, \quad \mathbf{r}_i = 3 \left(\frac{\Delta_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1})}{\Delta_{i-1}} + \frac{\Delta_{i-1} (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)}{\Delta_i} \right). \quad (2.3)$$

但し、 \mathbf{r}_1 と \mathbf{r}_n に関する式は曲線の両終端での制約条件を与えるものであり、式(2.3)以外にも幾つかの方法 [Far90] が提案されている。

式(2.3)より、 $m \times n$ の制御点より生成される3次スプライン曲面は、 $O(m \times n)$ の線形システムを解いて計算される。故に、制御点を1個でも動かすと曲面全体を更新する必要があり、曲面の局所的な変形操作には適していない。

2.3.2.2 B-スプライン

B-スプライン曲線は、スプライン関数によって局所的な台をもつB-スプライン基底を構成し、制御点を重み係数とした基底の加重和により定義される。

n 次の曲線は次式で表される。

$$\mathbf{C}(t) = \sum_i \mathbf{P}_i N_i^n(t) . \quad (2.4)$$

但し、 $N_i^n(t)$ は n 次 i 番目のB-スプライン基底を表し、節点ベクトル $\{t_i\}$ を用いて以下の再帰式で定義される。

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & ; t \in [t_{i-1}, t_i] \\ 0 & ; t \in (-\infty, t_{i-1}) \cup (t_i, \infty) \end{cases} ,$$

$$N_k^n(t) = \frac{t - t_{k-1}}{t_{k+n-1} - t_{k-1}} N_k^{n-1}(t) + \frac{t_{k+n} - t}{t_{k+n} - t_k} N_{k+1}^{n-1}(t) .$$

図2-3に3次のB-スプラインの基底関数を、また図2-4に3次のB-スプラインによって生成された閉曲線の例を示す。

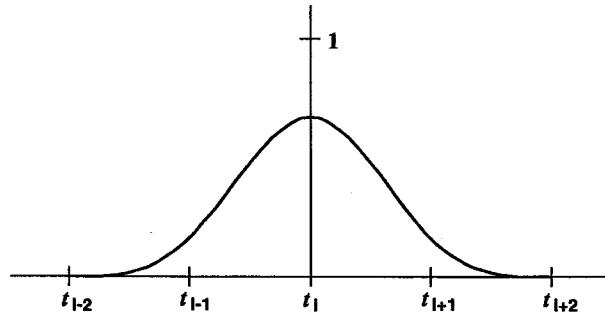


図 2-3: 3次のB-スプライン基底関数

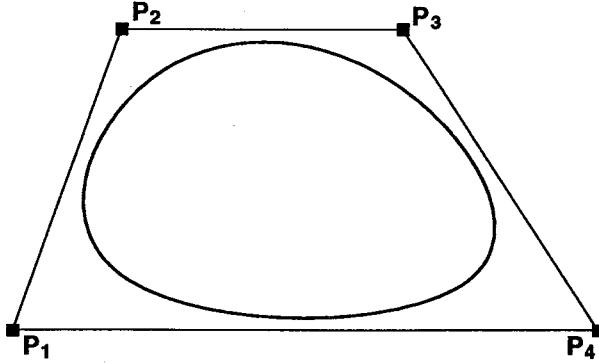


図 2-4: 3次のBースpline閉曲線

この曲線は制御点の移動に際し、その点で加重される基底の定義域の範囲でのみ曲線式を更新すればよいので、曲線の局所的な変形操作が可能となる。またベジエ曲線と同様に、アフィン変換不变性と凸閉包性を有する。しかし、Bースplineによって生成される曲線は制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ を含まないので、 $\mathbf{P}_j = \sum_i \bar{\mathbf{P}}_i N_i^n(t_j)$ を満たすような加重係数 $\bar{\mathbf{P}}_i$ の値を計算しなければならない。これには制御点の総数のオーダーの計算量を必要とする線形システムを解かねばならず、曲線の局所的な変形操作もできなくなるので、与えられた点を補間して曲線を生成するのには適していない。

Bースpline曲線は、制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ を用いたド・ボー(de Boor)のアルゴリズム [Boo72] と呼ばれる以下の再帰式によって生成される。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \mathbf{P}_{q-n}^n(t), \quad t \in [t_q, t_{q+1}] , \\ \mathbf{P}_i^0(t) &= \mathbf{P}_i, \quad i = q - n, q - n + 1, \dots, q , \\ \mathbf{P}_i^r(t) &= \frac{t_{n+1+i} - t}{t_{n+1+i} - t_{r+i}} \mathbf{P}_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_{r+i}}{t_{n+1+i} - t_{r+i}} \mathbf{P}_{i+1}^{r-1}(t) , \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$r = 1, 2, \dots, n , \quad i = q - n, q - n + 1, \dots, q - r .$$

但し、この再帰式は極形式による一般化表現が可能である [Ram89]。

一方、節点ベクトルに新たな節点を挿入してBースpline曲線・曲面の再分割を行う手法(節点挿入アルゴリズム: Knot Insertion Algorithm) [CLR80] を用いた制御点の階層的な配置により、曲線・曲面形状を効率的に設計する手法 [FB88] が提案されている。以下に、この再分割手法の概要を述べる。

節点ベクトル $\{t_i\}_{i=0,1,\dots,n+k}$ で定義される次数 k のBースpline基底関数を $\{B_i^k(x)\}_{i=0,1,\dots,n}$ とする。この節点ベクトルに新たな l 個の節点を付け加えて再定義される節点ベクトルを $\{\tau_i\}_{i=0,1,\dots,m+k}$, $m = n + l$ で表し、これによって定義されるBースpline基底関数を $\{N_i^k(x)\}_{i=0,\dots,m}$ とする。このとき、基底 $\{B_i^k(x)\}$ に対して与えられる制御点 $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0,1,\dots,n}$

によって生成される曲線を $\mathbf{f}(x)$ とすると,

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^k(x) \equiv \sum_{i=0}^m \bar{\mathbf{P}}_i N_i^k(x) , \quad (2.6)$$

を満たすように, 基底関数 $\{N_i^k(x)\}$ に対する制御点 $\{\bar{\mathbf{P}}_i\}_{i=0,1,\dots,m}$ の値を以下のように決定できる.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_j &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^k(j) \mathbf{P}_i , \quad \alpha_i^k(j) = (t_{i+k} - t_i) [t_i, \dots, t_{i+k}] \phi_j^k , \\ \phi_j^k(y) &= (y - a_j)_+^0 \Pi_{r=1}^k (y - \tau_{j+r}) , \\ (y - a_j)_+^0 &= \begin{cases} 1 & ; \quad y > a_j \\ 0 & ; \quad y \leq a_j \end{cases} , \quad a_j \in [\tau_j, \tau_{j+k}] , \end{aligned} \quad (2.7)$$

但し, $[t_i, \dots, t_{i+k}] \phi_j^k$ は差分商 (divided difference) を表す.

式 (2.6) および式 (2.7) より明らかに, 次式の関係が成立する.

$$B_i^k(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_i^k(j) N_j^k(x) .$$

式 (2.7) で計算される新たな制御点 $\{\bar{\mathbf{P}}_i\}$ を操作することにより, 形状をより詳細に定義することが可能となり, ツップーダウン的な設計環境を実現できる.

近年, ソリッドモデルで自由曲面を扱う必要性から, 2次曲面を媒介変数形式で正確に表現するためにBーススプライン曲面を有理多項式に拡張した不等間隔有理Bーススプライン (Non Uniform Rational B-splines 以後, NURBs) [Ver75] が提案された. この数学モデルを用いて生成される曲線は, 節点におけるパラメトリックな連続性を保持しながら, 曲線上の点の媒介変数に対する移動速度を自由に調節できるので, アニメーションのキーフレーム補間に応用されている. NURBs を用いた n 次の曲線は次式で定義される.

$$\mathbf{C}(t) = \sum_i w_i \mathbf{P}_i \frac{N_i^n(t)}{\sum_j w_j N_j^n(t)} . \quad (2.8)$$

式 (2.8)において, 重み係数を $w_0 = w_1 = \dots = w_n = 1$ と設定した場合, $\sum_i w_i N_i^n(u) \equiv 1$ より通常のBーススプライン曲線が生成される.

NURBs 曲線に対しても, 制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ と重み係数 $\{w_i\}$ を用い, ド・ボーのアルゴリズムを拡張した再帰式が定義される [Bar91]. また, NURBs 曲面は重み係数が加わることにより自由度が増し形状の表現能力を高めているが, パッチ境界における連続性の制御はその分複雑になる.

2.3.2.3 カーディナルススプライン

Bーススプラインを用いて生成される曲線・曲面は基底の加重係数となる制御点を含まないので, 与えた点を含むようにするには制御点の値を線形システムを解いて計算する必要があ

る。一方、生成される曲線・曲面が制御点を常に含むようにするには、基底 $\{C_i(x)\}$ が補間子としての以下の条件を満たすことが必要かつ十分である。

$$C_i(j) = \delta_{i,j} , \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1 . \quad (2.9)$$

但し、 $\delta_{i,j}$ はクロネッカー (Kronecker) のデルタを表す。

式 (2.9) の性質をもつスプライン関数として、カーディナルスプライン（以後、C-スプライン）が挙げられる。有限区間で定義された n 個の節点をもつ m 次の C-スプラインは $m+n+1$ 個の制約式により構成されるが、その中の n 個は式 (2.9) と同様の制約式で与えられ、残りの $m+1$ 個の制約式は、 $C_i(x)$ の両端の節点における高階導関数の値を 0 に設定して与えられる。例えば、 $m=2k-1$ と表される場合、次式のように設定される。

$$C_i^{(r)}(0) = C_i^{(r)}(n-1) = 0 , \quad r = k, k+1, \dots, 2k-1 .$$

C-スプラインは、制御点の総数 n に関係なくその次数 m を任意に選べるところに利点があるが、各基底が局所的な台で定義されないという問題点がある。

一方、式 (2.9) の性質をもち局所的な台で定義されるスプライン関数として、カトマル一口ムースプライン [CR74] が挙げられる。この基底関数 $CR_i(x)$ は $x \in [j-m, j]$ を定義域とし $x = i$ で 1 の値をとるラグランジュの補間係数 (Lagrange interpolation coefficient) $\{L_{j,i}^m(x)\}$ と、 n 次 j 番目の B-スプライン $\{N_j^n(x)\}$ の線形和を用いて以下のように表される。

$$CR_i(x) = \sum_{j=i}^{i+m} N_j^n(x) L_{j,i}^m(x) , \quad L_{j,i}^m(x) = \frac{\prod_{k=j-m, k \neq i}^j (x - k)}{\prod_{k=j-m, k \neq i}^j (i - k)} . \quad (2.10)$$

基底 $CR_i(x)$ は、 $m \geq n$ の条件を満たせば補間子としての性質を有する。また、アフィン変換不变性を有し、形状の局所的な制御、および曲線・曲面上の点の再帰的な計算 [BG88] が可能であるという利点がある。しかし、生成される曲線・曲面の連続性の次数 n が基底の次数 $m+n$ に比べて低いという問題点がある。

2.3.2.4 張力スプライン

一般的に $n+1$ 次のスプライン曲線・曲面は多重節点をもたない限り、 n 次のパラメトリックな連続性（以後、 C^n 級）、すなわち節点において媒介変数に関する n 階までの微分値が連続であるという性質をもつが、これを n 次の幾何学的な連続性（以後、 G^n 級）に拡張して曲線・曲面を定義する手法が数多く提案されている。

2.2.3 節の幾何学的連続性の定義で述べた式の $h = 1, 2$ の場合を展開すると以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{C}_i(t_i)}{dt} &= \frac{df(t_i)}{dt} \frac{d\mathbf{C}_{i-1}(t_i)}{dt} , \\ \frac{d^2\mathbf{C}_i(t)}{dt^2} &= \frac{d^2f(t_i)}{dt^2} \frac{d\mathbf{C}_{i-1}(t_i)}{dt} + \frac{df(t_i)}{dt} \frac{d^2\mathbf{C}_{i-1}(t_i)}{dt^2} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

このとき, $f(t_i)$ の微分値を定数 $\beta_{1,i} = df(t_i)/dt$, $\beta_{2,i} = d^2f(t_i)/dt^2$ で置き換え, 式(2.11)を満足するようにスプライン関数を拡張することができる。

$\{\beta_{1,i}\}$ および $\{\beta_{2,i}\}$ は張力変数と呼ばれ, この値を変化させることにより曲線・曲面形状の張りを調節することができる。全ての節点において, 張力変数を同一の値に設定してBーススプラインを幾何学的な連続性に拡張した手法が β -ーススプライン[BB83]として提案された。また, β -ーススプラインを用いて生成された曲線・曲面に対する再分割手法[Joe87]も発表されている。さらに, β -ーススプラインを一般化し, 各節点において異なる張力変数の値を設定できるスプライン基底を多重節点で定義されるBーススプラインの線形和で構成する手法が, LT-ーススプライン[Coh87]として提案された。

一方, 2.3.2.1 節で述べたエネルギー積分関数 $E(t)$ を以下のように拡張し,

$$E(t) = \sum_i \lambda_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \frac{d^2 C_i^3(t)}{dt^2} \right\|^2 dt + \sum_i \nu_i \frac{d^h C_i^3(t_i)}{dt^h},$$

式 $dE(t)/dt \equiv 0$ を解いて疑似ノルム最小化曲線を生成する手法[Fol87a]が γ -ーススプラインとして提案された。この手法は, 定数 $\{\lambda_i\}$, $\{\nu_i\}$ の値を変化させることにより, 曲線・曲面の張りを調節できる。

これらのスプライン関数の数学モデルは張力スプラインと呼ばれ, 曲率変化の大きい尖った形状を記述するのに, 制御点を密に配置したり多重節点を用いる代わりに張力変数が用いられるという利点がある。しかし, 制御点を含むような補間曲線・曲面を生成する際には, 3次スプラインと同様に局所的な変形操作に対処できないという問題点がある。

2.3.3 ロフト曲面

ロフト曲面は, パッチの境界条件を表す曲線式を基に生成される曲面であり, クーンズパッチ, ゴードン曲面, グレゴリーパッチなど[Far90]が提案された。これらの手法は, 2次元メッシュ状に交差した曲線群から, 曲線で囲まれた領域の内部を埋める曲面を生成する。しかし, 曲面の境界における直交微分量を直観的に指定するのが困難であることや, 曲線間の交差状態のトポロジーに関する制約などの問題点がある。以下の節において, ロフト曲面の代表例であるクーンズパッチとグレゴリーパッチについて詳述する。

2.3.3.1 クーンズパッチ

クーンズパッチは, 曲面 $\mathbf{S}(u, v)$ のパッチ境界に相当する4本の曲線式とその境界での微分値を表す式から $n = 2k + 1$ 次のエルミート補間子 $\{H_i^n\}$ を用いて以下のように生成される。

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{S}_u(u, v) + \mathbf{S}_v(u, v) - \mathbf{S}_{uv}(u, v),$$

$$\mathbf{S}_u(u, v) = \sum_{i=0}^k H_i^n(v) \frac{\partial^i \mathbf{S}(u, 0)}{\partial v^i} + \sum_{i=k+1}^n H_i^n(v) \frac{\partial^{n-i} \mathbf{S}(u, 1)}{\partial v^{n-i}} ,$$

$$\mathbf{S}_v(u, v) = \sum_{i=0}^k H_i^n(u) \frac{\partial^i \mathbf{S}(0, v)}{\partial u^i} + \sum_{i=k+1}^n H_i^n(u) \frac{\partial^{n-i} \mathbf{S}(1, v)}{\partial u^{n-i}} ,$$

$$\mathbf{S}_{uv}(u, v) = \mathbf{H}_{\mathbf{u}} \mathbf{M} \mathbf{H}_{\mathbf{v}}^t , \quad \mathbf{H}_{\mathbf{u}} = [H_0^n(u), H_1^n(u), \dots, H_n^n(u)] ,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix} , \quad m_{i,j} = \frac{\partial^{a+b} \mathbf{S}(p, q)}{\partial u^a \partial v^b} ,$$

$$p = \begin{cases} 0 ; & j = 0, 1, \dots, k , \quad b = j \\ 1 ; & j = k + 1, k + 2, \dots, n , \quad b = n - j \end{cases} ,$$

$$q = \begin{cases} 0 ; & i = 0, 1, \dots, k , \quad a = i \\ 1 ; & i = k + 1, k + 2, \dots, n , \quad a = n - i \end{cases} .$$

クーンズパッチはパッチ境界における曲線式の次数や節点ベクトルを任意に指定できるという利点がある。しかし、パッチの四隅におけるツイストベクトルが両立しない

$$\frac{\partial(\partial \mathbf{S}(p, q)/\partial u)}{\partial v} \neq \frac{\partial(\partial \mathbf{S}(p, q)/\partial v)}{\partial u} , \quad (p, q) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) ,$$

という問題点がある。

2.3.3.2 グレゴリーパッチ

グレゴリーパッチは、パッチの四隅におけるツイストベクトルを両立させるようにクーンズパッチを拡張したものである。両立性の条件を満足させるために、曲面の四隅でのツイストベクトルを以下のように有理多項式で補正する。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}(p, q)}{\partial u \partial v} = \frac{u - p}{u - p + v - q} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{S}(p, q)}{\partial u} + \frac{v - q}{u - p + v - q} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{S}(p, q)}{\partial v} ,$$

$$(p, q) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) .$$

この両立性に関する補正法をベジエ曲面の制御点に対して施し、自由曲面間を融合するフィレット面やシャンファー面を生成してソリッドモデルに応用する研究 [CK83] が行われた。また、境界曲線が有理多項式で表されるグレゴリーパッチの応用 [TOTC90] も提案された。

三辺形パッチや多辺形パッチに対しても、その境界曲線の形状に影響しない内部の制御点を有理多項式で展開することによって、パッチの境界において G^1 級の連続性を満たす曲面を生成することができるが、これらの手法 [栗山 91b, Chi86] もグレゴリーパッチの拡張と見なすことができる。グレゴリーパッチは曲面間の接続を制御しやすいという利点があるが、曲面式が有理多項式となり、曲面の四隅において特異点を含むという問題点がある。

2.3.4 掃引曲面

形状の横断面を表す曲線を輪郭を表す曲線に沿って掃引させて生成される曲面は、一般的に掃引曲面（または、スワイープ曲面）と呼ばれる。掃引曲面はその生成規則により以下の4種に分類される [CL90].

- ・平行掃引 (Parallel sweep)

横断曲線を定義する切断平面が平行に掃引される。

- ・回転掃引 (Rotational sweep)

切断平面が回転軸回りに掃引される。

- ・脊柱掃引 (Spined sweep)

切断平面が脊柱に相当する曲線 (Spined curve) と垂直に交わりながら掃引される。

- ・同期掃引 (Synchronized sweep)

切断平面が2つの境界曲線の同じ媒介変数値の点を含むように掃引される。

図 2-5および図 2-6に示すように、切断平面上に変数 u 方向に定義される横断曲線を \mathbf{C} 、変数 v 方向に定義され切断平面を掃引させる軌跡を表す誘導曲線を \mathbf{g} 、切断平面と誘導曲線の交点を \mathbf{G} 、および切断平面と X-Y 平面との交線を表すベクトル \mathbf{IV} と X 軸とのなす角を $\theta(v)$ とすると、掃引曲面 $\mathbf{S}(u, v)$ は以下のように表される。

$$\mathbf{S}(u, v) = (\mathbf{C}(u) - \mathbf{C}(0)) \text{ Sweep}[\theta(v)] + \mathbf{g}(v) ,$$

$$\text{Sweep}[\theta(v)] := \begin{bmatrix} -\cos \theta(v) & \sin \theta(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \theta(v) & \cos \theta(v) & 0 \end{bmatrix} .$$

但し、 $\theta(v)$ の値は先に述べた4種の掃引規則によってそれぞれ以下のように計算される。

- ・平行掃引

$\theta(v) = \theta_0$ 。但し、 θ_0 は定数を表す。

- ・回転掃引

$$\theta(v) = \arctan(2(y_g(v) - a_y, x_g(v) - a_x)) .$$

但し、 $(x_g(v), y_g(v), z_g(v))$ は誘導曲線を、 $(a_x, a_y, 0)$ は回転軸を表す。

- ・脊柱掃引

$$\theta(v) = \arctan(2(dx_g(v)/dv, -dy_g(v)/dv)) .$$

- ・同期掃引

$$\theta(v) = \arctan(2(y_1(v) - y_2(v), x_1(v) - x_2(v))) .$$

但し、 $(x_i(v), y_i(v), z_i(v))$ 、 $i = 1, 2$ は i 番目の境界曲線を表す。

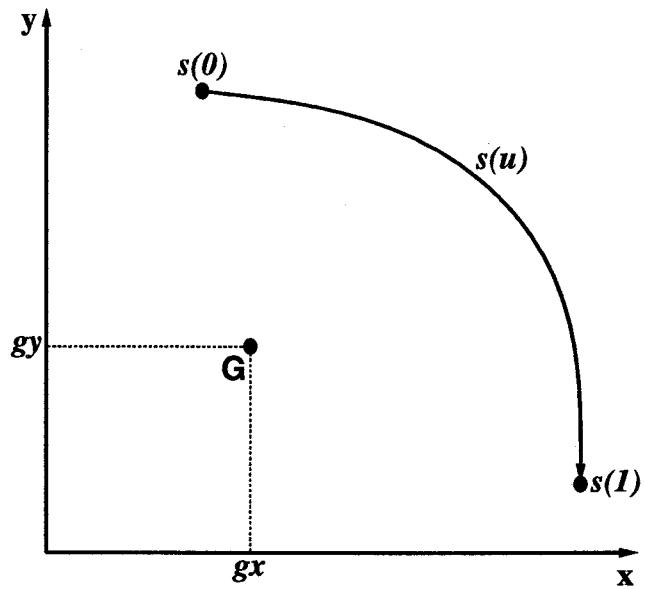


図 2-5: 切断平面の座標系

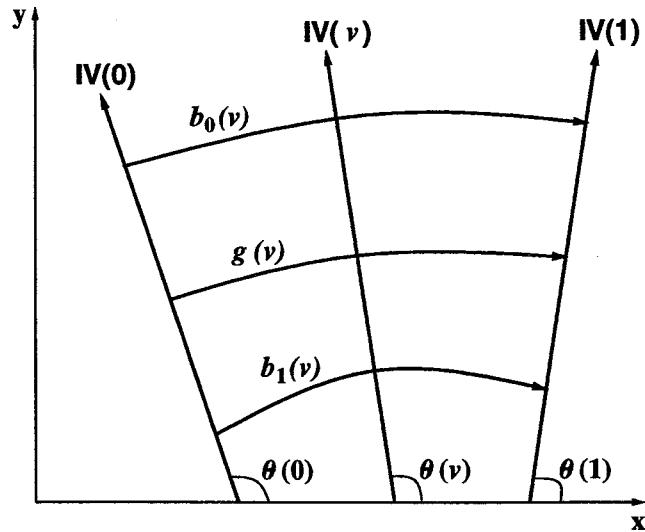


図 2-6: 切断平面と X-Y 平面との関係

掃引曲面として分類される他の曲面生成手法として、B-スプラインを用いた手法 [Woo88] や、3次元の曲面や立体を掃引させたときの包絡面を曲面とする手法 [MS90] などが提案されている。掃引曲面はその境界となる曲線式を、任意の次数および節点ベクトルで構成できるという利点があるが、各境界曲線の接続のトポロジーに関して制約が課せられるという問題点がある。

2.4 多変量変数曲面

これまでに述べてきたテンソル積曲面は、曲面の形状が自動車の本体のように主に矩形領域で表現される場合には有効であるが、閉曲面を構成する場合に制御点の集中する箇所が生じたり、分岐や穴を含む複雑なトポロジーをもつ曲面に十分対処できないという問題点がある。この制御点の配置のトポロジーに関する制約を取り除くために、多変量変数を用いた曲面の生成手法が提案されている。

多変量変数曲面は、曲面を定義する変数 b_1, b_2, \dots, b_n が 3 個以上 ($n \geq 3$) 存在し、それらが互いに 2 個の独立な変数 u, v によって定義されているので、 $\mathbf{S}(b_1(u, v), b_2(u, v), \dots, b_n(u, v))$ のように表される。故に、多変量変数曲面は、テンソル積曲面のように曲面の数学的な性質を曲線の生成手法の観点より述べることはできず、その性質の解析はより複雑なものになる。本節では、多変量変数曲面の代表例である三辺形パッチ曲面と多辺形パッチ曲面に関する諸手法の特徴および形状を設計する際の制約などについて詳述する。

2.4.1 三辺形パッチ曲面

2.4.1.1 ベジエ三辺形パッチ

n 次のベジエ三辺形パッチ [Far86] は、 n 次 3 変数のベジエ多項式 $\{B_{i,j,k}^n(b_1, b_2, b_3)\}$ と制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j,k}\}$ を用いて、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(b_1, b_2, b_3) &= \sum_{i,j,k \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{P}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(b_1, b_2, b_3) , \\ B_{i,j,k}^n(b_1, b_2, b_3) &= \frac{n!}{i! j! k!} b_1^i b_2^j b_3^k , \\ \mathbb{Z}^n := i \geq 0 \cap j \geq 0 \cap k \geq 0 \cap i + j + k = n . \end{aligned}$$

但し、 b_1, b_2, b_3 は三角形領域における重心座標系を表す。また、3 次のベジエ三辺形パッチの制御点の模式図を図 2-7 に示す。

ベジエ三辺形パッチで構成される曲面が、パッチ境界において G^r 級の連続性を有するためには、パッチの次数を $n = 4r + 1$ 以上に設定しなければならない。故に、境界において G^1 級の連続性を有する曲面を生成するには、5 次以上のベジエ三辺形パッチが必要となるが、このために計算すべき制御点の数は 21 個にもなり、それらの最適値を求める計算は複雑なものになる。

一方、パッチの次数を上げずに連続な曲面を生成する手法として、パッチを 3 つに再分割する手法 [Far83, Far85, Pip87] が提案された。この再分割手法は Clough-Tocher split 法と呼ばれ、 G^1 級の曲面を 3 分割された 4 次のベジエ三辺形パッチにより構成する。しかしこの手法は、曲面を構成する三辺形パッチの数を増加させ、各三辺形パッチの形状も細長く

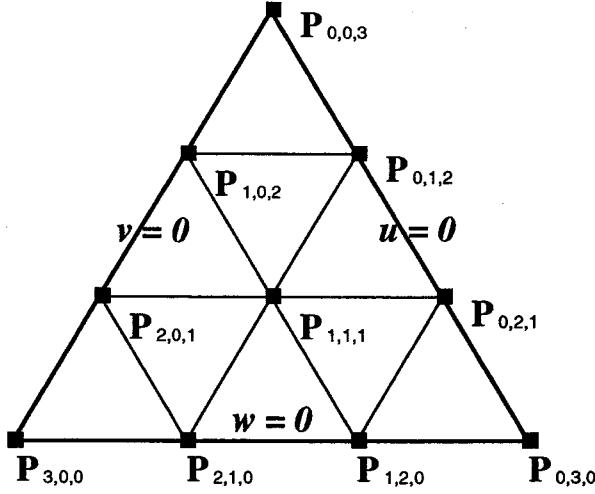


図 2-7: ベジエ三辺形パッチ模式図

なってしまうという問題点がある。また、境界において G^2 級の連続性を有する曲面は 9 次の三辺形パッチを用いるか、5 次の三辺形パッチによる Clough-Tocher split 法を用いる必要があり、いずれの場合も計算すべき制御点の数が膨大なものとなる。従って、ベジエ三辺形パッチを用いた G^2 級曲面の実用的な生成手法は未だ提案されていない。

2.4.1.2 超限補間三辺形パッチ

重心座標系 b_1, b_2, b_3 で構成される超限補間曲面 $T(b_1, b_2, b_3)$ [Nie87, HP89] は、副曲面 $\{\mathbf{S}_i^n(b_1, b_2, b_3)\}_{i=1,2,3}$ を関数 $\{G_i^n(b_1, b_2, b_3)\}_{i=1,2,3}$ で融合させて以下のように表される。

$$\mathbf{T}(b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^3 G_i^n(b_1, b_2, b_3) \mathbf{S}_i^n(b_1, b_2, b_3) .$$

但し、 n 次 i 番目の補間関数 $G_i^n(b_1, b_2, b_3)$ は次式で定義される。

$$G_i^n(b_1, b_2, b_3) = \frac{b_j^n b_k^n}{b_1^n b_2^n + b_2^n b_3^n + b_3^n b_1^n} , \quad i \neq j \neq k .$$

補間関数 $G_i^n(b_1, b_2, b_3)$ は三角形領域の $b_i = 0$ の境界上で、副曲面の $n - 1$ 次までの幾何学的な連続量を保存する、次式の性質を満たす。

$$[G_i^n(b_1, b_2, b_3)]_{b_1, b_2, b_3 \in e_j} = \delta_{i,j} , \quad i, j = 1, 2, 3 ,$$

$$\left[\frac{\partial^h G_i^n(b_1, b_2, b_3)}{\partial \bar{e}_i^h} \right]_{b_1, b_2, b_3 \in e_j} = 0 , \quad i = 1, 2, 3 , \quad h = 1, \dots, n - 1 .$$

但し、 $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタを、 $b_1, b_2, b_3 \in e_j$ は j 番目の辺上にある重心座標系 $b_j + b_{j+1} = 1$ を、また $\partial/\partial \bar{e}_i$ は i 番目の辺と直交する成分に関する微分を表す。例えば、2

番目の辺と直交する成分に関する微分は,

$$\frac{\partial G_i^n(b_1, b_2, b_3)}{\partial \bar{e}_2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G_i^n(b_1 - \epsilon, b_2 + 2\epsilon, b_3 - \epsilon) - G_i^n(b_1, b_2, b_3)}{\epsilon},$$

で表される。

副曲面 $S_i^n(b_1, b_2, b_3)$ は、三角形領域の各頂点において指定される幾何量（頂点座標および接線ベクトルなど）より、 $b_i = 0$ の境界で n 次の幾何学的連続性を満足するように生成される。本手法は、生成される曲面の幾何学的な連続性の次数を任意に設定できるが、曲面式の次数が高くなるという問題点がある。

2.4.2 多辺形パッチ曲面

多角形領域の内部を埋める補間曲面を三辺形パッチを用いて生成するには、多角形領域を三角形分割する必要があり、生成される曲面の形状がその分割方法に依存するという問題が生じる。このため、領域の三角形分割を行わずに N 角形領域に対して N 辺形のパッチを生成する手法が提案された。この手法は、多辺形パッチ曲面上の点の値を再帰的関数によって計算する手法、多変数ベジエ多項式を用いた手法、および有理多項式の融合関数を用いた手法に大別される。以下の節において、これらの手法の特徴について述べる。

2.4.2.1 再分割パッチ

3次のBーススプライン曲面上の点を求める式(2.5)で表される、ド・ボーのアルゴリズムを任意の n 辺形領域に拡張して、 n 辺形パッチ曲面上の点を再帰的に計算する手法[CC78, DS78, Nas87]が提案された。

この手法は、与えられた多面体に対して以下の手順で新たな点 \mathbf{F} , \mathbf{E} , \mathbf{V} を付け加えて、より丸みのある面数の多い多面体に変換していく。

1. n 辺形を取り囲む頂点 $\{\mathbf{V}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ の平均を新たな面上の点 $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i / n$ とする。
2. 辺の両端の点 $\mathbf{Ev}_1, \mathbf{Ev}_2$ と、その辺を挟んで隣接する面に対して手続き1.で求めた面上の点 $\mathbf{Fv}_1, \mathbf{Fv}_2$ の平均を新たな辺上の点 $\mathbf{E} = 1/4 \sum_{i=1}^2 (\mathbf{Ev}_i + \mathbf{Fv}_i)$ とする。
3. ある頂点 \mathbf{V} を共有する面上の手続き1.で求めた点を $\{\mathbf{Vf}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ とし、その頂点 \mathbf{V} を共有する辺の中点を $\{\mathbf{Ve}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ とすると、新たな頂点 $\bar{\mathbf{V}}$ は以下のように計算される。

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \mathbf{Vf}_i + \frac{2}{m^2} \sum_{i=1}^m \mathbf{Ve}_i + \frac{(m-3)}{m} \mathbf{V}.$$

4. 新たに生成された \mathbf{V} と \mathbf{E} および \mathbf{F} を互いに辺で結んで新たな多面体を構成する。

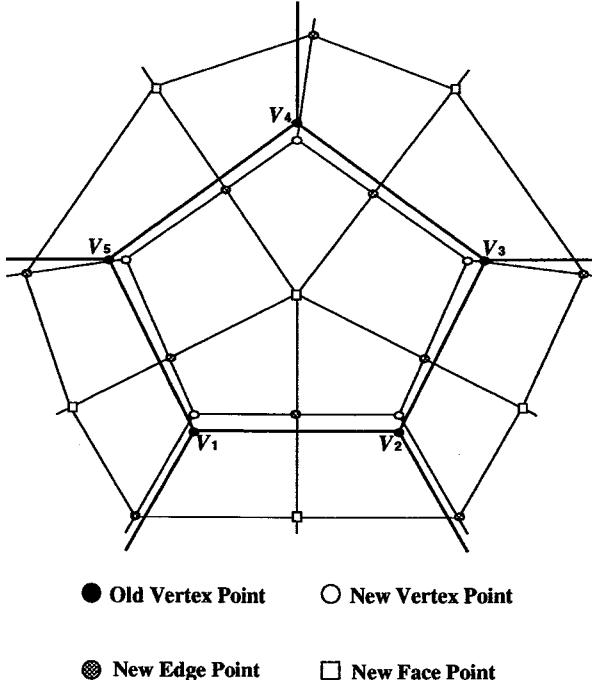


図 2-8: 再分割パッチ生成図

以上の手続きで生成される曲面は全ての領域が4辺形で構成される場合に、ド・ボーのアルゴリズムで生成される双3次のBースpline曲面に一致する。また、与えた初期点を補間するような2次の曲面を生成する再分割式 [Nas87] や、パッチの境界曲線の形状を制御する手法 [Nas91] などが提案されている。これらの再分割パッチの問題点として、生成される曲面を解析的に表現することができず、生成される曲面の連続性の次数が特異点において低くなる [DS78] という点が指摘される。

5辺形領域に対して再分割手法を用いた場合の模式図を図 2-8に示す。

2.4.2.2 S-パッチ

S-パッチ [HK84, LD89, LD90] は三角形領域に対する重心座標系を m 変量に一般化した座標系で定義される。この節ではまず、 m 変量重心座標系 $\mathbf{b} := \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ の定義を述べ、次にその座標系で表される曲面の数学モデルについて述べる。

2次元座標上の m 個の点 $P := \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ で定義される多角形（以後、領域多角形）内の各点 p を $m-1$ 次元アフィン空間 Y に含まれる m -単体 $\Delta := \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m\}$ に埋めこむ写像 $L : P \rightarrow \Delta$ を定義する。 $a_i(p)$ を p が領域多角形内に存在するときに正の値をとる三角形 pp_ip_{i+1} の符合付面積とし、

$$b_i(p) = \frac{\pi_i(p)}{\sum_{k=1}^m \pi_k(p)} , \quad \pi_i(p) = \frac{\prod_{k=1}^m a_k(p)}{a_{i-1}(p)a_i(p)} ,$$

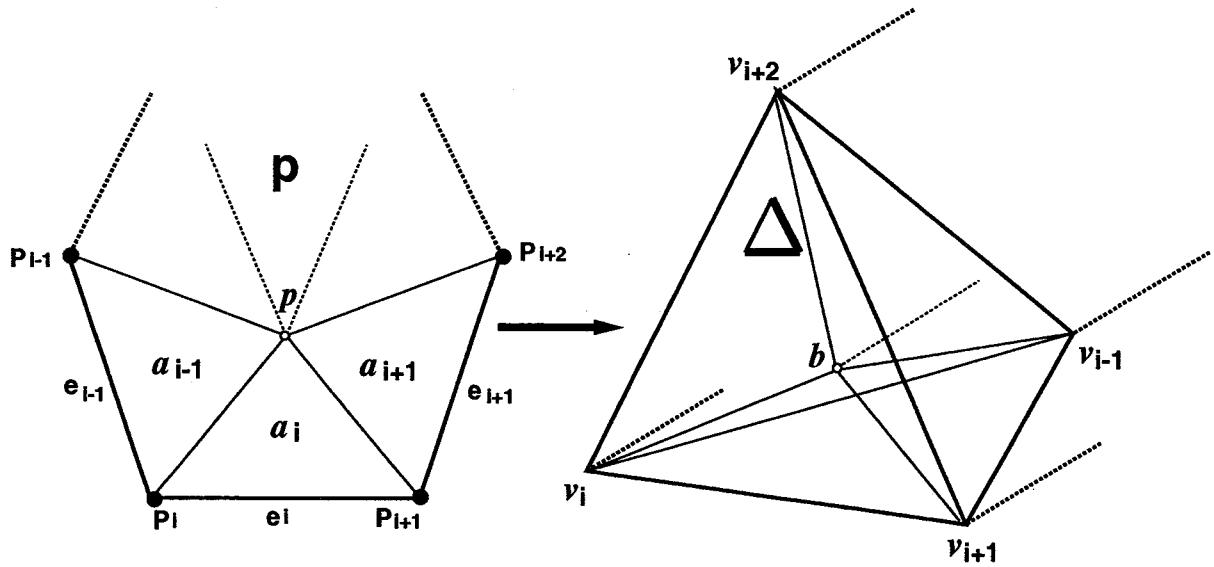


図 2-9: 一般重心座標系

によって重心座標系 \mathbf{b} を定義する (図 2-9参照) .

m 辺形パッチを定義する $\{b_i(p)\}$ は領域多角形上の点 p を空間 Y 内の点 $L(p) = \sum_{i=1}^m b_i(p) v_i$ に写像し, 以下のような性質をもつ.

- 1 の分割: $\sum_{i=1}^m b_i \equiv 1$.
- 頂点の保存: 領域多角形の頂点 p_i は m - 単体の頂点 v_i に一対一写像される.
- 辺の保存: 領域多角形の辺 e_i は m - 単体の辺 $v_i v_{i+1}$ に一対一写像される.
- 擬似アフィン性: 正 m 角形で与えられた領域多角形上の点 p は $p \equiv \sum_{i=1}^m b_i(p) p_i$ の関係を満たす [LD89].

n 次 m 変数の S - パッチ $\mathbf{S}(\mathbf{b})$ は, m 変量重心座標系 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ で表されるベジエ多項式 $\{B_{n_1, n_2, \dots, n_m}(\mathbf{b})\}$ を用いて以下のように表される.

$$\mathbf{S}(\mathbf{b}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m \in Z_m^n} P_{n_1, n_2, \dots, n_m} B_{n_1, n_2, \dots, n_m}(\mathbf{b}) ,$$

$$B_{n_1, n_2, \dots, n_m}(\mathbf{b}) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m n_i!} \prod_{i=1}^m b_i^{n_i} ,$$

$$Z_m^n := n_1 \geq 0 \cap, \dots, \cap n_m \geq 0 \cap \sum_{i=1}^m n_i = n .$$

S - パッチの形状を制御する点 $\{P_{n_1, n_2, \dots, n_m}\}$ を直接指定するのは困難なので, これを再分割パッチの生成式から計算する手法 [LD90] が提案された.

$m = 3$ の場合は、ベジエ三辺形パッチの定義式と一致することから推察されるように、この手法によって生成される曲面はベジエ三辺形パッチの特徴を継承するので、パッチの境界において高次な連続性を満たすように点 $\{P_{n_1, n_2, \dots, n_m}\}$ の値を制御するのが困難である。

2.4.2.3 グレゴリー・シャロットパッチ

グレゴリーとシャロットによって提案された多辺形パッチ [CG84] は、前節で述べた多変量重心座標系の代わりに、図 2-10 に示すような領域多角形の点 $\{\mathbf{V}_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ と対向する辺からの垂直距離を正規化したもの $\{r_i\}$ で m 変量座標系 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, $\sum_{i=1}^m r_i = 1$ を定義する。このとき、多辺形パッチ曲面 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ は副曲面 $\{\mathbf{F}_i(\mathbf{r})\}$ を関数 $\{\alpha_i(\mathbf{r})\}$ で融合させて、以下のように構成される。

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\mathbf{r}) \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) .$$

但し、融合関数 $\alpha_i(\mathbf{r})$ は以下のように定義される。

$$\alpha_i(\mathbf{r}) = \frac{\prod_{j \neq i-1, i} r_j^2}{\sum_{k=1}^m \prod_{j \neq k-1, k} r_j^2} . \quad (2.12)$$

このとき、融合関数 $\alpha_i(\mathbf{r})$ は m 角形の頂点 \mathbf{V}_i を共有する 2 辺を e_i, e_{i-1} とすると、

$$\alpha_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & ; \mathbf{r} \in e_{j=i-1, i} \\ 0 & ; \mathbf{r} \in e_{j \neq i-1, i} \end{cases} ,$$

を満たす。また、辺 e_i と直交する方向の 1 次の微分を $\partial/\partial e_i$ とすると、

$$\frac{\partial \alpha_i(\mathbf{r})}{\partial e_{j=i-1, i}} = 1 , \quad \frac{\partial \alpha_i(\mathbf{r})}{\partial e_{j \neq i-1, i}} = 0 ,$$

の関係を満たす。このとき、融合関数 $\alpha_i(\mathbf{r})$ の性質より、式 (2.12) で生成される曲面はパッチ境界において 1 次の幾何学的連続性の条件を満足する。

また、副曲面 $\mathbf{F}_i(\mathbf{r})$ は、媒介変数 u, v を

$$u = r_{i+2}/(r_{i-1} + r_{i+2}) , \quad v = r_{i-2}/(r_{i+1} + r_{i-2}) ,$$

で定義して、 m 角形の頂点 \mathbf{V}_i を共有する 2 辺上において境界と直交方向の 1 次の微分量が連続となるように構成される。ここで、 $r_i = 0$ の辺上における境界曲線の値を $F_i(t)$ 、同じ辺上における直交方向に関する接線ベクトル値を $\mathbf{F}n_i(t)$ とすると、副曲面 $\mathbf{F}_i(\mathbf{r})$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = & \mathbf{F}_{i+2}(1-v) + u\mathbf{F}n_{i+2}(1-v) + v\mathbf{F}n_{i-2}(u) + \mathbf{F}_{i-2}(u) \\ & - [\mathbf{V}_i + u\mathbf{F}n_{i+2}(1) + v\mathbf{F}n_{i-2}(0) + \frac{uv}{u+v} (v \frac{\partial \mathbf{F}n_{i+2}(1)}{\partial v} + u \frac{\partial \mathbf{F}n_{i-2}(0)}{\partial u})] . \end{aligned}$$

一般的に、副曲面 $\mathbf{F}_i(\mathbf{r})$ を生成する際に境界において共有される n 次の微分量を補間して n 次の連続性をもたせ、融合関数 $\alpha_i(\mathbf{r})$ の r_i のべき乗の次数を $n+1$ に設定することで、 n 次の連続性をもつ曲面 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ を生成することができる。

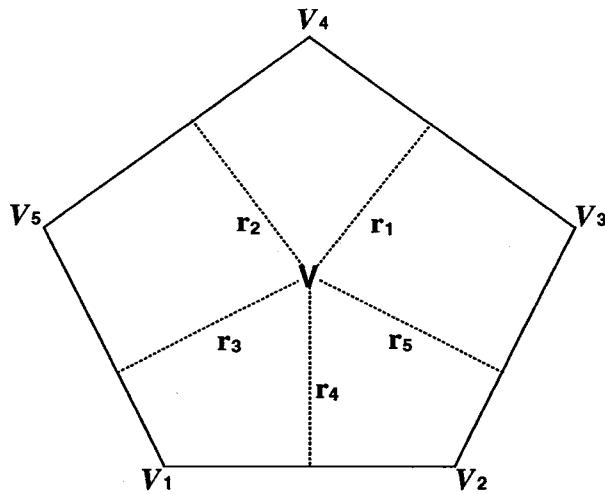


図 2-10: 5 辺形パッチ模式図

2.5 結言

これまでに提案された自由曲面の代表的な数学モデルについて述べた。

まず最初に、媒介変数曲面で幾何形状を設計する際に必要とされる数学的な性質について述べた。

次に、既存のサーフェイスモーデラーで用いられているテンソル積曲面として、ベジエ曲面、スプライン曲面、ロフト曲面、および掃引曲面について述べた。これらの曲面は、その形状を制御する点を含むような補間曲面を生成する際に局所的な変形操作ができない場合が多く、また制御点や境界曲線の配置のトポロジーに関する制約があるため、複雑な形状やトポロジーを有する曲面の設計には十分に対処できないことを示した。

最後に、多変量座標系で表される曲面として三辺形パッチと多辺形パッチに着目し、三辺形パッチとしてベジエ三辺形パッチ、超限補間三辺形パッチを、また多辺形パッチとして再分割パッチ、S-パッチ、グレゴリー・シャロットパッチについて解説した。多変量座標系で表される三辺形パッチおよび多辺形パッチは、トポロジーに関する制約が無いが、一般的にその形状あるいはパッチ境界における連続性の制御が困難であることを述べた。

また、これまでに提案された三辺形および多辺形パッチは、多角形領域の各頂点に対して与えられる頂点座標や各辺に沿った接線ベクトルなどの値から生成されるので、曲面の境界曲線をロフト曲面のように任意の形式で表せないことを示した。

第3章カーディナル基底による曲面生成法

3.1 緒言

CAGDシステムにおける自由曲面の数学モデルには、形状の滑かさおよび計算効率の良さからスプライン関数が広く用いられる。自由曲面は節点ベクトル $\{u_i\}, \{v_j\}$ より構成される、スプライン基底 $\{B_i(u)\}, \{B_j(v)\}$ のテンソル積と、2次元アレイの制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ を用いて $\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} B_i(u) B_j(v)$ のように表される。

スプライン基底としてBーススプラインを用いた曲面モデルは、形状の局所的な変形操作に適しているが、生成される曲面は与えられる制御点を含まないので、曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ が制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ を含むようにするには、 $\mathbf{P}_{s,t} = \sum_i \sum_j \bar{\mathbf{P}}_{i,j} B_i(u_s) B_j(v_t)$, $s = 0, 1, \dots, m$, $t = 0, 1, \dots, n$ を満たすような加重係数 $\{\bar{\mathbf{P}}_{i,j}\}$ の値を計算しなければならない。これには制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ の総数の2乗のオーダー $O((m \times n)^2)$ の計算量を必要とする線形システムを解かねばならず、制御点の総数の増加に伴いその計算量は膨大なものとなり、曲面形状を局所的かつ対話的に変形操作するのに障害となる。また、Bーススプラインのパラメトリックな連続性を幾何学的な連続性に拡張した β -ーススプライン [BB83] やLTーススプライン [Coh87] を基底に用いた曲面モデルも同様な問題点がある。また、3次スプラインによる曲面モデルは制御点を含む曲面を生成するが、Bーススプラインのような局所的な台をもたないため、制御点の局所的な変更に対しても曲面全体を再計算する必要があり、曲面形状の対話的な設計には適していない。

一方、基底 $\{B_i(u)\}, \{B_j(v)\}$ が補間子としての性質をもてば、曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ は基底の加重係数として用いられる制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ をそのまま節点 $u = u_i, v = v_j$ において含む。このように制御点を含むような曲面は補間曲面と呼ばれ、曲面形状を直接的に指定する際に用いられる。また、このとき基底の定義される区間の幅が狭ければ、曲面の形状は制御点の移動に伴い局所的に変更される。

補間子としての性質をもつスプライン基底としてCーススプライン、およびカトマルーロムーススプライン [CR74] が挙げられる。Cーススプラインは、基底の次数と連続性の次数に関してBーススプラインと同様の関係を有するが、その基底関数が局所的な台で定義されないという問題点がある。また、カトマルーロムーススプラインはラグランジュの補間係数とBーススプラインの線形和を用いた局所的な台で構成され、補間子としての性質とアフィン変換不变性を有し、曲線・曲面上の点の再帰的な計算 [BG88] が可能であるという利点があるが、生成される曲面の連続性の次数が基底の次数に比べて低いという問題点がある。本章では、これらの問題点を解決する新たなスプライン補間子の構成法を提案する。

まず、局所台をもつ補間子（または、カーディナル基底）を、等間隔節点で定義されるBーススプラインまたは β 2ーススプラインを用いて近似的に構成し、補間曲線・曲面を生成する

手法について述べる。

次に、節点における幾何学的な連続性の条件を厳密に満たし局所台をもつカーディナル基底を、次数を上げ節点を多重化したBーススプラインを用いて構成する手法を示す。また、このカーディナル基底を用いて補間曲線・曲面を生成する手法について述べ、このとき新たに定義される補助的な制御点の値の計算方法と、基底の再分割手法についても述べる。

最後に、節点ベクトルの異なる2曲面間を融合させる曲面を、基底の再分割手法を用いて生成する方法を具体的に述べる。

3.2 S-ーススプライン

本節では緒言で述べた問題点を解決するために、局所的な台をもつカーディナル基底を等間隔節点で定義されるBーススプラインの線形和で近似的に構成し、これを基に曲線・曲面を生成する手法について述べる。以後、このカーディナル基底をS-ーススプライン[栗山87]と呼ぶことにする。

3.2.1 定義

節点が等間隔に与えられる m 次 i 番目のBーススプライン $N_i^m(x)$ は畳込み積分(Convolution integral)⊗を用いて次式で表される。

$$N_i^0(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [i, i+1] \\ 0 & ; x \in (-\infty, i) \cup (i+1, \infty) \end{cases},$$

$$N_i^m(x) = \overbrace{N_i^0(x) \otimes N_i^0(x) \otimes \cdots \otimes N_i^0(x)}^{m+1}. \quad (3.1)$$

ここで、 $x=0$ の節点で1の値を取り他の全ての節点で0の値を取る、無限区間で定義される m 次のカーディナル基底 $S_0^m(x)$ を、Bーススプラインの線形和として以下のように表す。

$$S_0^m(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i N_i^m(x) = \delta_{0,j}, \quad j = -\infty, \dots, \infty. \quad (3.2)$$

但し、 $\delta_{0,j}$ はクロネッカーのデルタを表す。

式(3.2)で与えられる係数 $\{c_i\}$ の値は0に収束する $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0$ 。故に、 $S_0^m(x)$ を曲面のモデリングに用いる際には局所的な台をもつように、その定義域をある対称な有限区間 $x \in [-n, n]$ で打切ることにする。このとき、 c_n の値は定義域の打切りに伴う誤差を評価するのに参照される。以上のことから、 m 次 k 番目のS-ーススプライン $S_k^m(x)$ は式(3.2)を参照して次式のように定義される。

$$S_k^m(x) = \begin{cases} \sum_{i=-n}^n c_i N_i^m(x-k) & ; x \in [-n+k, n+k] \\ 0 & ; x \in (-\infty, -n+k) \cup (n+k, \infty) \end{cases}. \quad (3.3)$$

3.2.2 基底の計算法

式(3.1)で与えられるB-スプラインの m 次 0 番目の基底関数の $m+1$ 階導関数を超関数的に求めると,

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}N_0^m(x)}{dx^{m+1}} &= \overbrace{\frac{dN_0^0(x)}{dx} \otimes \frac{dN_0^0(x)}{dx} \otimes, \dots, \otimes \frac{dN_0^0(x)}{dx}}^{m+1} \\ &= \overbrace{(\delta(0) - \delta(1)) \otimes (\delta(0) - \delta(1)) \otimes, \dots, \otimes (\delta(0) - \delta(1))}^{m+1} \\ &= \sum_{p=0}^{m+1} (-1)^p {}_{m+1}C_p \delta(p) , \end{aligned} \quad (3.4)$$

のようになる。但し、 $\delta(x)$ はインパルス関数を表し、 ${}_mC_p = m!/\{(m-p)!p!\}$ とする。式(3.4)を再び $m+1$ 重積分すると、 $N_0^m(x)$ は切断べき関数 $(x-p)_+^m$ を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} N_0^m(x) &= \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^{m+1} (-1)^p {}_{m+1}C_p (x-p)_+^m , \quad (3.5) \\ (x-p)_+^m &= \begin{cases} (x-p)^m & ; \quad x-p \geq 0 \\ 0 & ; \quad x-p < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

m 次 0 番目のB-スプラインの節点での値 $\{V_j\}$ は、式(3.5)に $x = 1, 2, \dots, m$ の値を代入して以下のように表される。

$$V_j = N_0^m(j) = \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^{m+1} (-1)^p {}_{m+1}C_p (j-p)^m , \quad j = 1, 2, \dots, m . \quad (3.6)$$

ここで補間子としての性質を満たすための制約式(3.2)は、 $m = 2k-1$, $k \geq 2$ とすると式(3.2)および式(3.6)の関係より、 $\{c_i\}$ を用いて次式のように表される。

$$\sum_{i=-(k-1)}^{k-1} V_{k+i} c_{j-i} = \begin{cases} 1 & ; \quad |j| = 0 \\ 0 & ; \quad |j| = 1, 2, \dots, k-2 \end{cases} , \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=-(k-1)}^{k-1} V_{k+i} c_{j-i} = 0 , \quad |j| = k-1, k, \dots, n . \quad (3.8)$$

係数 $\{c_i\}$ は $S_0^m(x)$ が偶関数であることから明らかに $c_i = c_{-i}$ となり、式(3.8)より $\{c_i\}$ は m 階の漸化式で表されるので $c_i = \kappa \xi^i$ とおくと、

$$\kappa (V_1 \xi^{j+k-1} + V_2 \xi^{j+k-2} + \dots + V_{2k-1} \xi^{j-(k-1)}) = 0 ,$$

と表され、 $\kappa \neq 0$, $\xi \neq 0$ より、

$$V_1 \xi^{m-2} + V_2 \xi^{m-3} + \dots + V_{2k-1} = 0 , \quad (3.9)$$

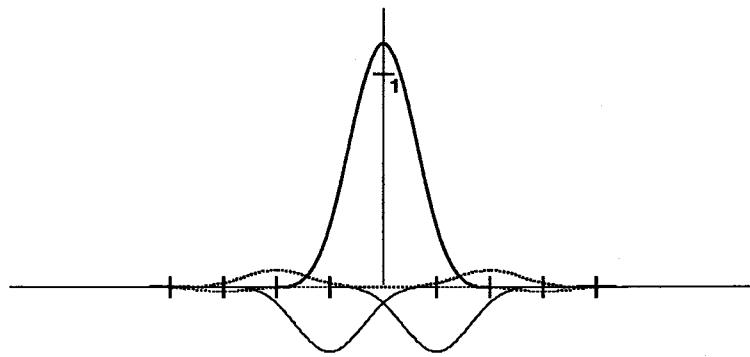


図 3-1: B-スプラインの構成図

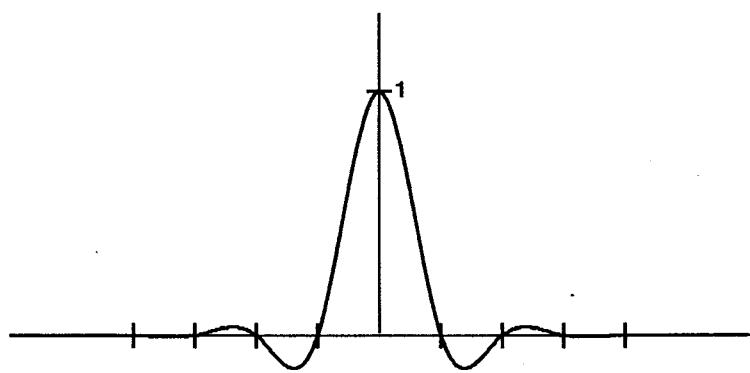


図 3-2: 3 次の S-スプラインの生成例

が導かれる。式 (3.9) は、区間 $(-1, 0)$ に $k - 1$ 個の実数解 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}$ をもつので、 $\{c_i\}$ は次式のように表される。

$$c_i = c_{-i} = \sum_{p=0}^{k-2} \kappa_p \xi_p^i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

このとき、定数 $\{\kappa_p\}$ の値は式 (3.7) の $k - 1$ 個の式から求められる。

以上の結果より、例えば $m = 3$ の場合の $\{c_i\}$ の値は、

$$c_i = c_{-i} = \sqrt{3} (-2 + \sqrt{3})^i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

で与えられる。 $m = 2k$ のときは、 $\{V_j\}$ の値を $V_j = N_0^m(j - 1/2)$ ， $j = 1, 2, \dots, m$ で求めて、式 (3.7) から式 (3.9) により同様に計算される。このとき、 $S_0^m(x)$ の零点は節点より $1/2$ だけずれる。

図 3-2 に 3 次の S-スプラインの生成例を示し、図 3-1 にこの基底に対する B-スプラインの構成図を示す。但し、打切り幅を $n = 4$ とする。

3.2.3 β 2-スプラインによる拡張

S-スプラインを構成するB-スプラインの次数は任意に設定でき、その次数が $n+1$ 次であれば C^n 級の連続性の条件を近似的に満たす。しかし、次数を高次に設定しても実際に生成される曲面の形状にはさほど影響を与えないで、計算量を抑えるためにも、その次数は3次ぐらいに選ぶのが適当である。また形状の設計においては、パラメトリックな連続性の条件を幾何学的なものに拡張して曲面式を定義する方が、形状の表現に柔軟性を与えることができる。

ここでは、3次のB-スプラインを幾何学的な連続性の条件で拡張した、軸対称な数式で表される β 2-スプライン [BD85] を用いて、S-スプラインの基底関数を構成する手法について述べる。この手法を用いることにより、基底関数の張力変数 β_2 の値を変えて、曲面形状の張りを調節することができる。 β 2-スプラインは、基底関数の節点 $\{x_j\}$ におけるパラメトリックな2階微分の連続性を曲率の連続性に拡張したものであり、この条件は基底関数 $B_i(x, \beta_2)$ の x に関する導関数を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned}\dot{B}_i(x_j + 0, \beta_2) &= \dot{B}_i(x_j - 0, \beta_2) , \\ \ddot{B}_i(x_j + 0, \beta_2) &= \ddot{B}_i(x_j - 0, \beta_2) + \beta_2 \dot{B}_i(x_j - 0, \beta_2) , \\ \dot{B}_i(x_j \pm 0, \beta_2) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial B_i(x_j \pm \delta, \beta_2)}{\partial x} , \\ \ddot{B}_i(x_j \pm 0, \beta_2) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial^2 B_i(x_j \pm \delta, \beta_2)}{\partial x^2} .\end{aligned}\quad (3.10)$$

ここで $\beta_2 = 0$ のとき、 $\{B_i(x, 0)\}$ は3次のB-スプライン $\{N_i^3(x)\}$ に一致する。

式(3.10)で導入される張力変数 β_2 は、生成される曲線・曲面の張りを変化させる変数で、その影響を直観的に把握しやすい。また、 β 2-スプラインの基底関数は、張力変数 β_2 の値を変えても関数の軸対称性が保存されるという特徴をもつ。

S-スプラインは、式(3.2)および式(3.3)を参照して以下のように構成される。

$$S_k(j, \beta_2) = \delta_{k,j} , \quad j = -\infty, \dots, \infty ,$$

$$S_k(x, \beta_2) = \begin{cases} \sum_{i=-n}^n c_i B_i(x - k, \beta_2) & ; \quad x \in [-n+k, n+k] \\ 0 & ; \quad x \in (-\infty, -n+k) \cup (n+k, \infty) \end{cases} .$$

β 2-スプラインの基底関数は以下に示す4つのセグメント多項式 $b_i(x, \beta_2)$ より構成される。

$$\begin{aligned}b_1(x, \beta_2) &= 2x^3/v , \quad v = \beta_2 + 12 , \\ b_0(x, \beta_2) &= \{2 + 6x + (3\beta_2 + 6)x^2 - (2\beta_2 + 6)x^3\}/v , \\ b_{-1}(x, \beta_2) &= \{(\beta_2 + 8) - (3\beta_2 + 12)x^2 + (2\beta_2 + 6)x^3\}/v , \\ b_{-2}(x, \beta_2) &= (2 - 6x + 6x^2 - 2x^3)/v .\end{aligned}$$

表 3-1: 係数 c_i の値の収束状態

| | c_0 | c_1 | c_2 | c_3 | c_4 |
|-----------------|----------|-----------|----------|-----------|----------|
| $\beta_2 = 0$ | 1.732051 | -0.464102 | 0.124356 | -0.033321 | 0.008928 |
| $\beta_2 = 5$ | 1.374369 | -0.216698 | 0.034167 | -0.005387 | 0.000849 |
| $\beta_2 = 25$ | 1.129541 | -0.068710 | 0.004180 | -0.000254 | 0.000015 |
| $\beta_2 = 100$ | 1.037749 | -0.019224 | 0.000356 | -0.000007 | 0.000000 |

節点における $\{V_j\}$ の値は $V_1 = V_3 = 2/v$, $V_2 = (\beta_2 + 8)/v$ となるので、式(3.9)より

$$\xi_0 = \frac{-(\beta_2 + 8) + \sqrt{v(\beta_2 + 4)}}{4} ,$$

が導かれ、式(3.7)の条件により、

$$\kappa_0 = (\xi_0 V_1 + V_2 + \xi_0 V_3)^{-1} = \sqrt{\frac{v}{\beta_2 + 4}} ,$$

が求まる。以上の結果より、係数 $\{c_i\}$ の値は次式で与えられる。

$$c_i = c_{-i} = \sqrt{\frac{\beta_2 + 12}{\beta_2 + 4}} \left[\frac{-(\beta_2 + 8) + \sqrt{(\beta_2 + 12)(\beta_2 + 4)}}{4} \right]^i , \quad i = 0, 1, \dots, n .$$

図 3-3, 図 3-4, および図 3-5に、 β_2 - スプラインによって拡張された 3 次の S - スプラインの生成例を、張力変数 $\beta_2 = 5, 25, 100$ について示す。但し、打切り幅は各々 $n = 4, 3, 2$ とする。また、表 3-1 に係数 $c_i, i = 0, 1, \dots, 4$ の値の収束状態を、 $\beta_2 = 0, 5, 25, 100$ について示す。

3.2.4 曲線・曲面補間法

S - スプラインを用いて、空間曲線および自由曲面を生成する手法を以下に述べる。

1 次元アレイの制御点 $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0,1,\dots,s}$ を、 m 次の S - スプライン $\{S_i^m(x)\}$ で補間して生成される空間曲線 $\mathbf{Q}^m(x)$ は、次式で表される。

$$\mathbf{Q}^m(x) = \sum_{i=-n}^{s+n} \mathbf{P}_i S_i^m(x) .$$

但し、定義されていない制御点 \mathbf{P}_i の値に関しては、開放端条件のときは、

$$\mathbf{P}_i = \begin{cases} \mathbf{P}_0 & ; \quad i = -n, -n+1, \dots, -1 \\ \mathbf{P}_s & ; \quad i = s+1, s+2, \dots, s+n \end{cases} ,$$

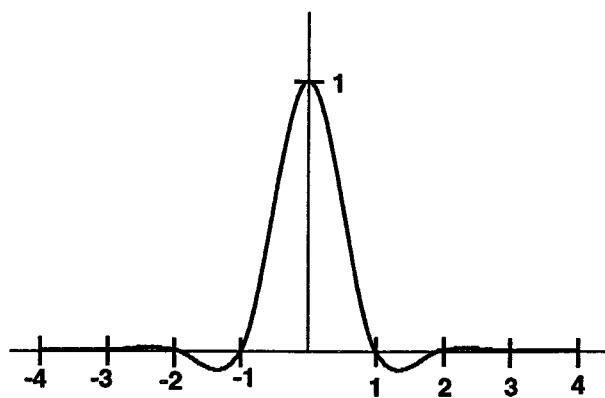


図 3-3: 3次のS－スプラインの生成例 ($\beta_2 = 5$)

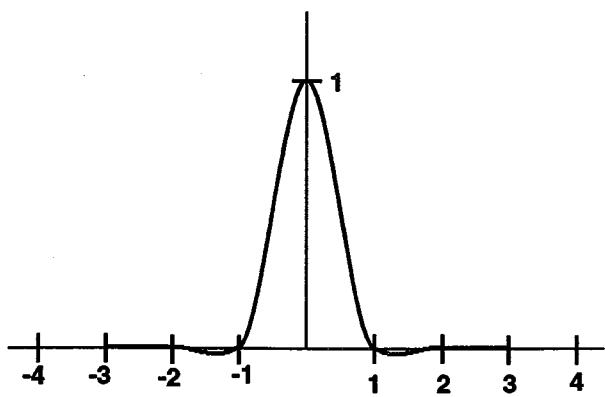


図 3-4: 3次のS－スプラインの生成例 ($\beta_2 = 25$)

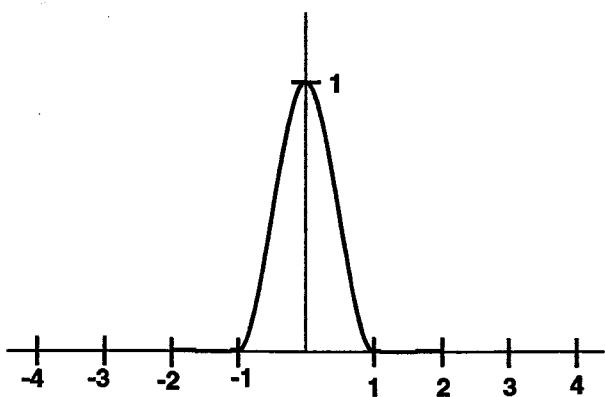


図 3-5: 3次のS－スプラインの生成例 ($\beta_2 = 100$)

周回端条件のときは,

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i \bmod s}, \quad i = -n, -n+1, \dots, -1, s+1, s+2, \dots, s+n,$$

と設定する。但し, $i \bmod s$ は s を法とする i の値とする。

また, 空間曲線の端点において接線ベクトルを $\dot{\mathbf{P}}_0$ と $\dot{\mathbf{P}}_s$ で固定するには,

$$\mathbf{P}_i = \begin{cases} \mathbf{P}_{-i} - \dot{\mathbf{P}}_0 & ; \quad i = -n, -n+1, \dots, -1 \\ \mathbf{P}_{2s-i} + \dot{\mathbf{P}}_s & ; \quad i = s+1, s+2, \dots, s+n \end{cases},$$

と設定する。

また, 2次元アレイの制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}_{i=0,1,\dots,s, j=0,1,\dots,t}$ を m 次と \bar{m} 次の S-スプライン $\{S_i^m(u)\}$ と $\{S_i^{\bar{m}}(v)\}$ で補間して生成される自由曲面 $\mathbf{Q}^{m,\bar{m}}(u, v)$ は, 次式で表される。

$$\mathbf{Q}^{m,\bar{m}}(u, v) = \sum_{j=-n}^{t+n} [\sum_{i=-n}^{s+n} \mathbf{P}_{i,j} S_i^m(u)] S_j^{\bar{m}}(v). \quad (3.11)$$

但し, 定義されていない制御点の値の設定は曲線の場合に準ずるものとする。

式 (3.11) は変数 u 方向に定義される空間曲線 $\mathbf{Q}_j^m(u) = \sum_{i=-n}^{s+n} \mathbf{P}_{i,j} S_i^m(u)$ を基底 $\{S_j^{\bar{m}}(v)\}$ で補間したものと見なすことができる。

図 3-2 から図 3-5 で示した 3 次の S-スプラインで生成される閉曲線の例を図 3-6 から図 3-9 に示す。

3.3 σ -スプライン

前節で述べた等間隔節点 B-スプラインの線形和によるカーディナル基底の近似的構成法は, 式 (3.3) に示される定義域 $x \in [-n, n]$ での強制的な打切りにより, 基底関数がその端点において連続性の条件を厳密には満たさない。しかし, 表 3-1 の結果より基底を構成する B-スプラインの加重係数 $\{c_i\}$ の収束の良さが認められ, $n = 3 \sim 4$ の値で $d^h S_k^m(-n)/dx^h = d^h S_k^m(n)/dx^h \approx 0$, $h = 1, 2$ を十分な精度で近似できることを確認した。しかし, 曲面の形状データを NC 工作機などに用いる場合は, 生成される曲面に厳密な連続性が要求される。

故に本節では, 基底の端点において連続性の誤差を含まず曲率までが連続なカーディナル基底を, 多重節点ベクトルにより定義される B-スプラインを用いて構成する手法を述べる。以後, この手法で生成されたスプライン基底を σ -スプライン [藤田 88, 栗山 89a] と呼ぶことにする。

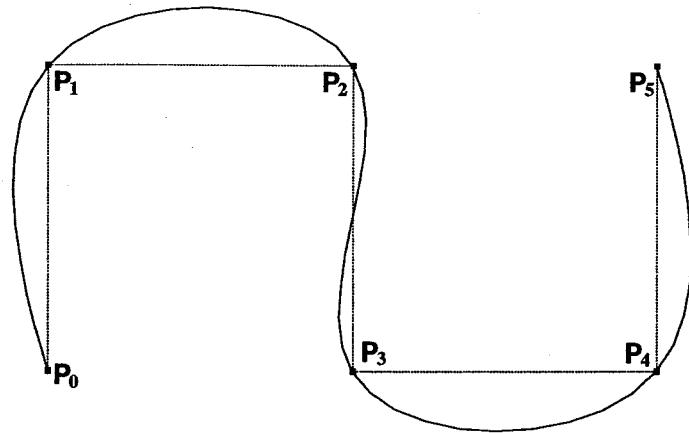


図 3-6: 3 次の S-スプラインによる曲線生成例 ($\beta_2 = 0$)

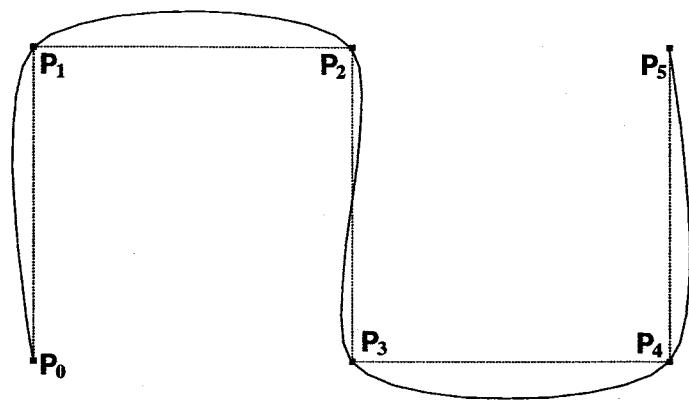


図 3-7: 3 次の S-スプラインによる曲線生成例 ($\beta_2 = 5$)

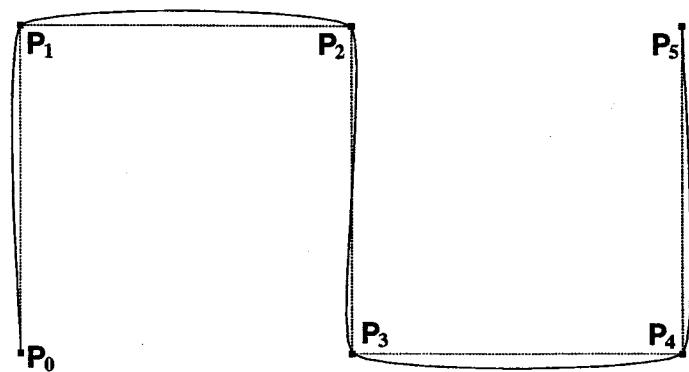


図 3-8: 3 次の S-スプラインによる曲線生成例 ($\beta_2 = 25$)

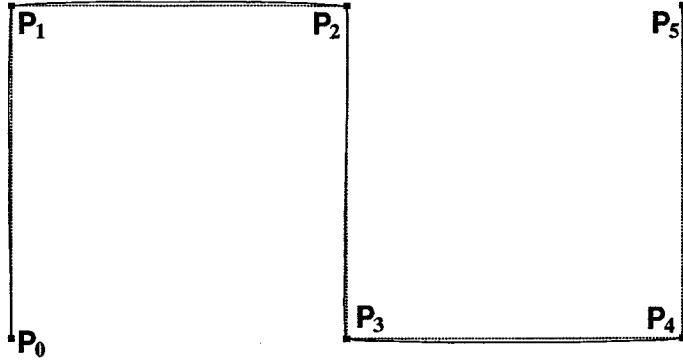


図 3-9: 3 次の S-スプラインによる曲線生成例 ($\beta_2 = 100$)

3.3.1 定義

基底関数 $F_i(x)$ の傾斜と曲率の連続性が節点 t_j において保たれるには、以下の式を満たさなければならない（式（2.11）および式（3.10）参照）。

$$\dot{F}_i(t_j + 0) = \beta_{1,j} \dot{F}_i(t_j - 0) , \quad (3.12)$$

$$\ddot{F}_i(t_j + 0) = \beta_{1,j}^2 \ddot{F}_i(t_j - 0) + \beta_{2,j} \dot{F}_i(t_j - 0) . \quad (3.13)$$

$\beta_{1,j}$, $\beta_{2,j}$ は、それぞれ節点 t_j における傾斜、曲率の連続性に影響する変数であるが、節点間隔を変えることによって $\beta_{1,j}$ の値を変化させると同様の効果が得られることから、ここでは一般性を失うことなく $\beta_{1,j} = 1$ と設定し、 $\beta_{2,j}$ の値のみを変えることにする。

基底関数がカーディナル基底の性質を持つためには、ある節点 t_j に対して、

$$F_i(t_j) = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} , \quad (3.14)$$

を満たさなければならない。式（3.12）と式（3.13）および式（3.14）を満たすスプライン基底を構成するための条件を以下に述べる。ここでは、多項式で構成される基底関数が切断べき関数の線形和で表される点に着目し、その次数および局所台の区間数の関係を調べる [Sch81]。

まず、構成される基底の次数を n 次、局所台の区間を $[t_0, t_d]$ とする。このとき式（3.12）を満たすためには、2次以上の切断べき関数で基底を構成すれば良い。故に、構成する基底 $B(x)$ は以下のように表される。

$$B(x) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=0}^d C_{i,j} (x - t_j)_+^i ,$$

但し、係数 $C_{i,j}$ の値は以下の制約式で決定される。

- 基底が局所台を持つ条件として, $x \geq t_d$ で $B(x) \equiv 0$ となるように x^0, x^1, \dots, x^n の項の係数を 0 とおく $n+1$ 個の制約式.
- 節点 t_0, t_1, \dots, t_d において, 式 (3.13) を満たすための $d+1$ 個の制約式.
- 両端を除く節点 t_1, t_2, \dots, t_{d-1} において, 式 (3.14) を満たすための $d-1$ 個の制約式 ($B(t_0) = B(t_d) = 0$ は局所台をもつ条件より自明).

故に, $(n-1)(d+1)$ 個の係数 $C_{i,j}$ に対して $(n+1)+(d+1)+(d-1) = n+2d+1$ 個の制約式が与えられるので, 係数 $C_{i,j}$ の値を解くための線形システムが解を一意に有するには,

$$(n-1)(d+1) = n+2d+1 , \quad (3.15)$$

の関係式を満たすことが必要条件となる. 多項式の次数を 3 次 ($n=3$) にすると式 (3.15) は不能解となる. 一方, 多項式の次数を 4 次 ($n=4$) にすると式 (3.15) は $d=2$ となる. 以上の結果より, 式 (3.12) と式 (3.13) および式 (3.14) を満たすスプライン基底の中で最小の次数のものは, 2 区間で定義される 4 次の多項式であることが示される.

一方, 生成される各々のカーディナル基底は 1 の分割の条件 (式 (2.2) 参照) を満たさず, アフィン変換に対する不变性を欠いてしまう. 故に, 式 (3.14) の代りに全ての節点において 0 を通る基底を定義し, これを加えることによって基底の和が恒等的に 1 に等しくなるようにする. ここで式 (3.14) の代わりに $F_i(t_j) = 0$ とおくと, 係数 $C_{i,j}$ の全ての値が 0 となる自明な解が存在してしまうので, $C_{i,j} \neq 0$ の解が存在するためには, 制約式の数が係数の数より 1 個少なくなるように,

$$(n-1)(d+1) = n+2d+2 , \quad (3.16)$$

の関係式を満たすことが必要条件となる. 多項式の次数をカーディナル基底の場合と同様に 4 次 ($n=4$) として, 式 (3.16) に代入すると, $d=3$ となるので, 全ての節点において 0 の値を通る基底は 3 区間で定義される. このとき, 線形システムで係数 $C_{i,j}$ の解を一意に求めるために, カーディナル基底との総和を恒等的に 1 とおく制約式を加える.

以下の節において, 節点 t_i でのみ 1 を通り他の節点で 0 を通る基底を $\{\sigma_i(x)\}$, 全ての節点で 0 を通る基底を $\{\hat{\sigma}_i(x)\}$ と表すことにし, $\{\sigma_i(x)\}$ と $\{\hat{\sigma}_i(x)\}$ の計算手順を示す. 但し, 2 次以上 4 次以下のべき関数で張られる基底の線形空間 $B(x) = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=0}^d C_{i,j}(x - t_j)^i$, $B(x) \equiv 0$, $t_0 > x \cap x > t_d$ は, 3 重節点を持つ 4 次の B-スプラインで張られる線形空間に一致するので, 説明の簡略化のため, 次節において基底の計算法を 3 重節点 4 次の B-スプラインを用いて述べる.

3.3.2 基底の計算法

3重節点ベクトル $\{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$; $t_i = \tau_{3i} = \tau_{3i+1} = \tau_{3i+2}$ によって与えられる4次のB-Spline基底は、区間 $x \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$ において以下のように構成される。

$$\begin{aligned}
 & x \in [t_{i-1}, t_i] : \\
 & N_{i,0}(x) = \frac{\Delta_i}{(\Delta_{i-1} + \Delta_i)} B_4^4(x_{i-1}) + B_4^3(x_{i-1}) , \\
 & N_{i,1}(x) = \frac{\Delta_{i-1}}{(\Delta_{i-1} + \Delta_i)} B_4^4(x_{i-1}) , \\
 & N_{i,2}(x) = B_4^2(x_{i-1}) , \\
 & N_{i,3}(x) = 0 , \\
 & x \in [t_i, t_{i+1}] : \\
 & N_{i,0}(x) = \frac{\Delta_i}{(\Delta_{i-1} + \Delta_i)} B_4^0(x_i) , \\
 & N_{i,1}(x) = \frac{\Delta_{i-1}}{(\Delta_{i-1} + \Delta_i)} B_4^0(x_i) + B_4^1(x_i) , \\
 & N_{i,2}(x) = 0 , \\
 & N_{i,3}(x) = B_4^2(x_i) , \\
 & \Delta_i = t_{i+1} - t_i , \quad x_i = \frac{(x - t_i)}{\Delta_i} , \\
 & B_4^k(x) = \frac{4!}{(4-k)! k!} x^k (1-x)^{4-k} .
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

基底 $\{\sigma_i(x)\}$ は $\{N_{i,j}(u)\}$ の線形結合として、

$$\sigma_i(x) = \sum_{j=0}^3 C_{i,j} N_{i,j}(x) , \quad x \in [t_{i-1}, t_{i+1}] , \tag{3.18}$$

と表される。 β_{2i} を節点 t_i における張力変数とすると、式(3.12)と式(3.13)および式(3.14)により、

$$\begin{aligned}
 \sigma_i(t_i) &= 1 , \\
 \ddot{\sigma}_i(t_{i-1} + 0) &= \ddot{\sigma}_i(t_{i+1} - 0) = 0 , \\
 \ddot{\sigma}_i(t_i + 0) &= \ddot{\sigma}_i(t_i - 0) + \beta_{2i} \dot{\sigma}_i(t_i - 0) ,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

となり、式(3.17)と式(3.18)を式(3.19)へ代入することにより、

$$\begin{aligned}
 C_{i,0} &= (\Delta_{i-1}/\Delta_i^2 + 1/\Delta_{i-1} + 2/\Delta_i + \beta_{2i}/3)/D_i , \\
 C_{i,1} &= (\Delta_i/\Delta_{i-1}^2 + 1/\Delta_i + 2/\Delta_{i-1} + \beta_{2i}/3)/D_i , \\
 C_{i,2} &= C_{i,3} = 0 , \\
 D_i &= 2/\Delta_{i-1} + 2/\Delta_i + \beta_{2i}/3 ,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

が得られる。同様に $\{\hat{\sigma}_i(x)\}$ は、

$$\hat{\sigma}_i(x) = \sum_{j=0}^2 \left(\hat{C}_{i,j} N_{i,j}(x) + \hat{C}_{i,j+3} N_{i+1,j}(x) \right) + \hat{C}_{i,6} N_{i+1,3}(x) , \quad x \in [t_{i-1}, t_{i+2}] , \quad (3.21)$$

で表され、式 (3.12) と式 (3.13) および全ての節点で 0 をとする条件により、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i(t_j) &= 0 , \\ \ddot{\hat{\sigma}}_i(t_{i-1} + 0) &= \ddot{\hat{\sigma}}_i(t_{i+2} - 0) = 0 , \\ \ddot{\hat{\sigma}}_i(t_j + 0) &= \ddot{\hat{\sigma}}_i(t_j - 0) + \beta_{2,j} \dot{\hat{\sigma}}_i(t_j - 0) , \quad j = i, i+1 , \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。式 (3.17) と式 (3.21) を式 (3.22) へ代入し、 $\{\sigma_i(x)\}$ と $\{\hat{\sigma}_i(x)\}$ の和が 1 に正規化される条件 $\sum_i [\sigma_i(x) + \hat{\sigma}_i(x)] \equiv 1$ により、

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,0} &= -\Delta_{i-1}/(\Delta_i^2 D_i) , \\ \hat{C}_{i,1} &= 1/(\Delta_i D_i) , \\ \hat{C}_{i,2} &= \hat{C}_{i,6} = 0 , \\ \hat{C}_{i,3} &= 1/(\Delta_i D_{i+1}) , \\ \hat{C}_{i,4} &= -\Delta_{i+1}/(\Delta_i^2 D_{i+1}) , \\ \hat{C}_{i,5} &= 1 , \end{aligned} \quad (3.23)$$

が得られる。ここで、 $\{D_i\}$ は式 (3.20) と同様に定義される。

$\{\sigma_i(x)\}$ と $\{\hat{\sigma}_i(x)\}$ の例を図 3-10, 図 3-11, および図 3-12 に示す。ここで、図 3-10 と図 3-11 は全ての節点で同一の張力変数 $\beta_{2,i} = 0$ を取るものとし、図 3-10 は開放端を有する等間隔多重節点、図 3-11 は周回端を有する不等間隔多重節点で定義される。また、図 3-12 は、各節点に異なる張力変数 $\beta_{2,i} = \{0, 0, 5, 25, 100, 0, 0, 0\}$ が割り当てられ、開放端を有する等間隔多重節点で定義される。但し、 $\{\sigma_i(u)\}$ を実線で $\{\hat{\sigma}_i(u)\}$ を点線で表す。

3.3.3 曲線・曲面補間法

本節では、制御点を σ -スプラインで補間して曲線および曲面を生成する手法について述べる。

3重節点と張力変数のベクトル $\{t_i\}$, $\{\beta_{2,i}\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ によって生成される基底を $\{\sigma_i(x)\}$, $\{\hat{\sigma}_i(x)\}$ とすると、曲線 $\mathbf{Q}(x)$ は基底関数 $\{\sigma_i(x)\}$ に対する加重係数としての制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ と、 $\{\hat{\sigma}_i(x)\}$ に対する加重係数としての制御点 $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ を用いて、以下のように表される。

$$\mathbf{Q}(x) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \sigma_i(x) + \sum_{i=n}^{\bar{n}} \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\sigma}_i(x) . \quad (3.24)$$

但し、開放端に対しては $\underline{n} = -1$, $\bar{n} = n$, 周回端に対しては $\underline{n} = 0$, $\bar{n} = n - 1$ の値を設定する。

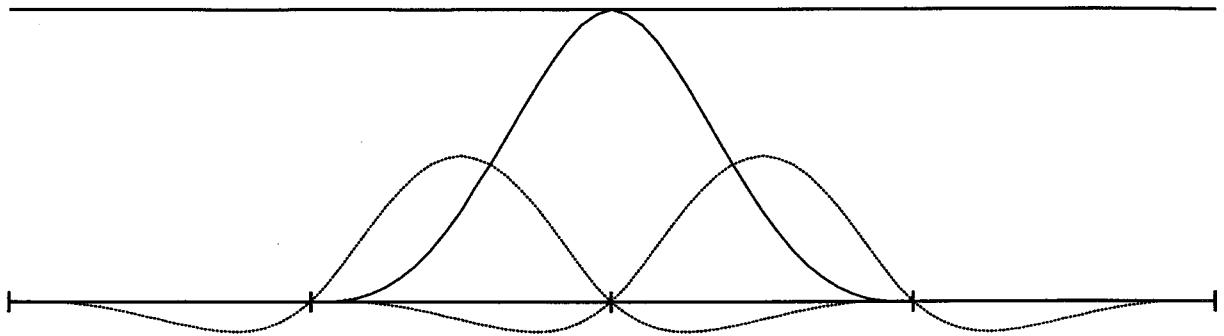


図 3-10: σ -スプライン基底の例（等間隔多重節点，開放端）

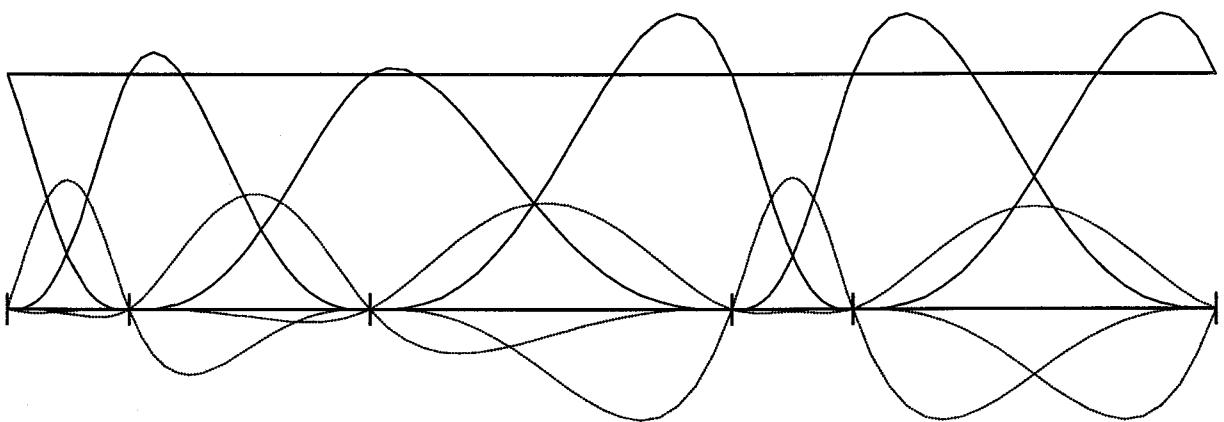


図 3-11: σ -スプライン基底の例（不等間隔多重節点，周回端）

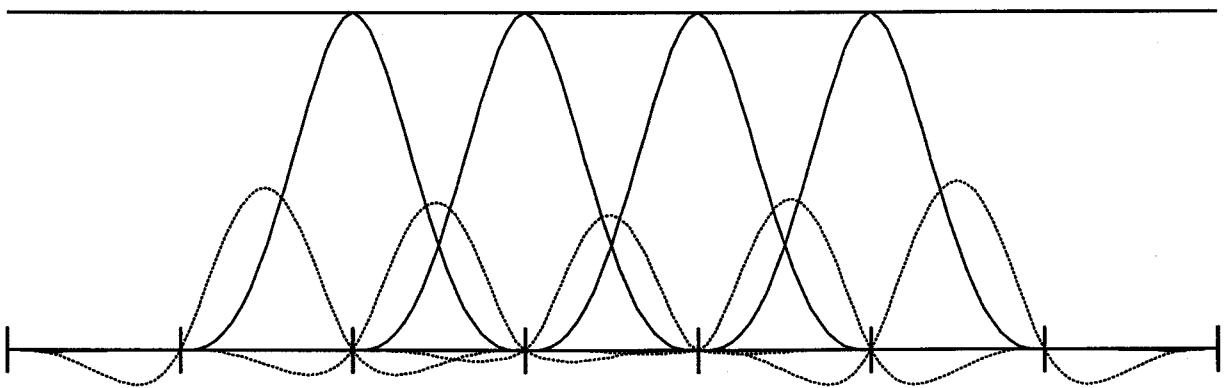


図 3-12: σ -スプライン基底の例（等間隔多重節点，開放端）

このとき、 $\mathbf{Q}(t_i) = \mathbf{P}_i$ の関係を満たすので、曲線 $\mathbf{Q}(x)$ は $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ の値にかかわらず常に $\{\mathbf{P}_i\}$ を曲線上の点として含む。故に、 $\{\mathbf{P}_i\}$ は曲線上に含まれる点（以後、補間点）として、また $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ は曲線上には含まれず補間点間の曲線の形状を制御する点（以後、形状制御点）として位置付けられる。

一方、 u 軸、 v 軸に関する3重節点と張力変数のベクトル $\{t_i^u\}, \{\beta_{2i}^u\}, \{t_j^v\}, \{\beta_{2j}^v\}$ から生成される基底関数をそれぞれ $\{\sigma_i(u)\}, \{\hat{\sigma}_i(u)\}, \{\sigma_j(v)\}, \{\hat{\sigma}_j(v)\}$ とすると、自由曲面は4種類の制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}, \{\mathbf{Pu}_{i,j}\}, \{\mathbf{Pv}_{i,j}\}, \{\mathbf{Puv}_{i,j}\}$ を基底のテンソル積の加重係数として、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} \sigma_i(u) \sigma_j(v) + \sum_{i=\underline{m}}^{\bar{m}} \sum_{j=0}^n \mathbf{Pu}_{i,j} \hat{\sigma}_i(u) \sigma_j(v) \\ &\quad + \sum_{i=0}^m \sum_{j=\underline{n}}^{\bar{n}} \mathbf{Pv}_{i,j} \sigma_i(u) \hat{\sigma}_j(v) + \sum_{i=\underline{m}}^{\bar{m}} \sum_{j=\underline{n}}^{\bar{n}} \mathbf{Puv}_{i,j} \hat{\sigma}_i(u) \hat{\sigma}_j(v) . \end{aligned} \quad (3.25)$$

但し、開放端に対しては $\underline{m} = -1, \bar{m} = m$ 、周回端に対しては $\underline{m} = 0, \bar{m} = m - 1$ の値をとるものとする（ n に対しても同様）。このとき、 $\mathbf{Q}(t_i^u, t_j^v) = \mathbf{P}_{i,j}$ の関係を満たすので、曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ は $\{\mathbf{Pu}_{i,j}\}, \{\mathbf{Pv}_{i,j}\}, \{\mathbf{Puv}_{i,j}\}$ の値にかかわらず常に $\mathbf{P}_{i,j}$ を曲面上の点として含む。故に曲線の場合と同様に、 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ は補間点として、また $\{\mathbf{Pu}_{i,j}\}, \{\mathbf{Pv}_{i,j}\}, \{\mathbf{Puv}_{i,j}\}$ は形状制御点として位置付けられる。

形状制御点の値はデザイナーが直接指定してもよいが、その値が形状に与える影響は補間点と比較して直観的に把握しにくいので、曲線・曲面の形状の全体の滑かさを考慮して、形状制御点のデフォルト値あるいは初期値を自動的に設定するのが望ましい。故に、次節において形状制御点のデフォルト値を制御点の値からヒューリスティクスを用いて自動的に計算する手法を述べる。

3.3.4 形状制御点の計算法

本節では、曲線に対する形状制御点 $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ のデフォルト値を、補間点 $\{\mathbf{P}_i\}$ の値から計算する手法を述べる。

4次のベジエ多項式で定義される曲線式 $\mathbf{C}(x) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{V}_i^4 B_i^4(x), x \in [0, 1]$ が3次の曲線を表すとき、制御点 \mathbf{V}_2^4 の値は、

$$\mathbf{V}_2^4 = \frac{1}{2} \{ \mathbf{C}(0) + \mathbf{C}(1) \} + \frac{1}{6} \{ \dot{\mathbf{C}}(0) + \dot{\mathbf{C}}(1) \} ,$$

で与えられる。但し、 $\dot{\mathbf{C}}(x)$ は曲線式 $\mathbf{C}(x)$ の1階微分値を表す。

\mathbf{V}_2^4 は $B_2^4(x)$ に対する加重係数となっているが、式(3.17)、式(3.21)、および式(3.23)より4次の σ -スプラインの基底関数は $\hat{\sigma}_i(x)$ のみが $x \in [t_i, t_{i+1}]$ において $B_2^4(x)$ を含むことが示される。故に、 $\hat{\mathbf{P}}_i$ は \mathbf{V}_2^4 に相当するものと見做せるので、 $x = 0, 1$ における曲線

の微分値を $\{\mathbf{P}_i\}$ の差分値で近似することによって $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ の値を決定する。ここでは、以下のような計算で形状制御点 $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ の値を求ることにする。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_i &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1}) + \frac{D_{i+1,i}}{6D_{i+1,i-1}}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{i-1}) + \frac{D_{i+1,i}}{6D_{i+2,i}}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i+2}) , \\ D_{p,q} &= |\mathbf{P}_p - \mathbf{P}_q| .\end{aligned}\quad (3.26)$$

次に、曲面に対する形状制御点 $\{\mathbf{Pu}_{i,j}\}, \{\mathbf{Pv}_{i,j}\}, \{\mathbf{Puv}_{i,j}\}$ のデフォルト値を、補間点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ の値から計算する手法を述べる。

曲線 $\{\mathbf{R}_j(u)\}, \{\mathbf{Rv}_j(u)\}$ を以下のように定義すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_j(u) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_{i,j} \sigma_i(u) + \sum_{i=\underline{m}}^{\bar{m}} \mathbf{Pu}_{i,j} \hat{\sigma}_i(u) , \\ \mathbf{Rv}_j(u) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{Pv}_{i,j} \sigma_i(u) + \sum_{i=\underline{m}}^{\bar{m}} \mathbf{Puv}_{i,j} \hat{\sigma}_i(u) ,\end{aligned}$$

曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ は次式で表すことができる。

$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{R}_j(u) \sigma_j(v) + \sum_{j=\underline{n}}^{\bar{n}} \mathbf{Rv}_j(u) \hat{\sigma}_j(v) .$$

これは、 $\mathbf{Q}(u, v)$ が曲線群 $\{\mathbf{R}_j(u)\}$ を補間して生成される曲面であることを示している。また同様に、 $\mathbf{Q}(u, v)$ が変数 v の方向に生成される曲線群 $\{\mathbf{R}_i(v)\}$ を補間して生成される曲面、

$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i=0}^m \mathbf{R}_i(v) \sigma_i(u) + \sum_{i=\underline{m}}^{\bar{m}} \mathbf{Ru}_i(v) \hat{\sigma}_i(u) ,$$

と見なすこともできる。故に、形状制御点 $\{\mathbf{Pu}_{i,j}\}, \{\mathbf{Pv}_{i,j}\}$ は変数 u および v の方向に沿った曲線に関して式 (3.26) に示した方法で計算される。形状制御点 $\{\mathbf{Puv}_{i,j}\}$ については、先に求めた $\{\mathbf{Pu}_{i,j}\}, \{\mathbf{Pv}_{i,j}\}$ の値より、以下の式で計算する。

$$\begin{aligned}\mathbf{Puv}_{i,j} &= \frac{1}{4}(\mathbf{Pu}_{i,j} + \mathbf{Pu}_{i,j+1} + \mathbf{Pv}_{i,j} + \mathbf{Pv}_{i+1,j}) \\ &+ \frac{Du_{j+1,j}}{12Du_{j+1,j-1}}(\mathbf{Pu}_{i,j+1} - \mathbf{Pu}_{i,j-1}) + \frac{Du_{j+1,j}}{12Du_{j+2,j}}(\mathbf{Pu}_{i,j} - \mathbf{Pu}_{i,j+2}) \\ &+ \frac{Dv_{i+1,i}}{12Dv_{i+1,i-1}}(\mathbf{Pv}_{i+1,j} - \mathbf{Pv}_{i-1,j}) + \frac{Dv_{i+1,i}}{12Dv_{i+2,i}}(\mathbf{Pv}_{i,j} - \mathbf{Pv}_{i+2,j}) .\end{aligned}$$

但し、

$$Du_{p,q} = |\mathbf{Pu}_{i,p} - \mathbf{Pu}_{i,q}| , \quad Dv_{p,q} = |\mathbf{Pv}_{p,j} - \mathbf{Pv}_{q,j}| ,$$

とする。

図 3-13 および図 3-14 に σ -スプラインによる曲線の生成例を示す。但し、図 3-13 は $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ の値を $\hat{\mathbf{P}}_i = (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1})/2$ によって設定した曲線の生成例を、また図 3-14 は $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ の値を式 (3.26) によって計算した曲線の生成例を示し、黒点は補間点 $\{\mathbf{P}_i\}$ を、白点は形状制御点 $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ を表す。

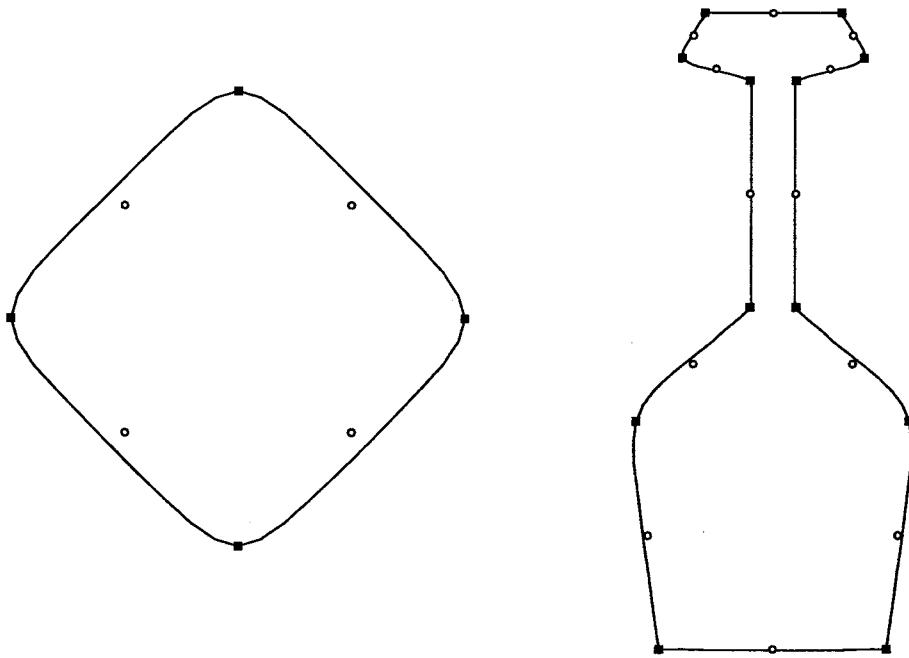


図 3-13: σ - スプライン曲線生成例 ($\hat{\mathbf{P}}_i = (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1})/2$)

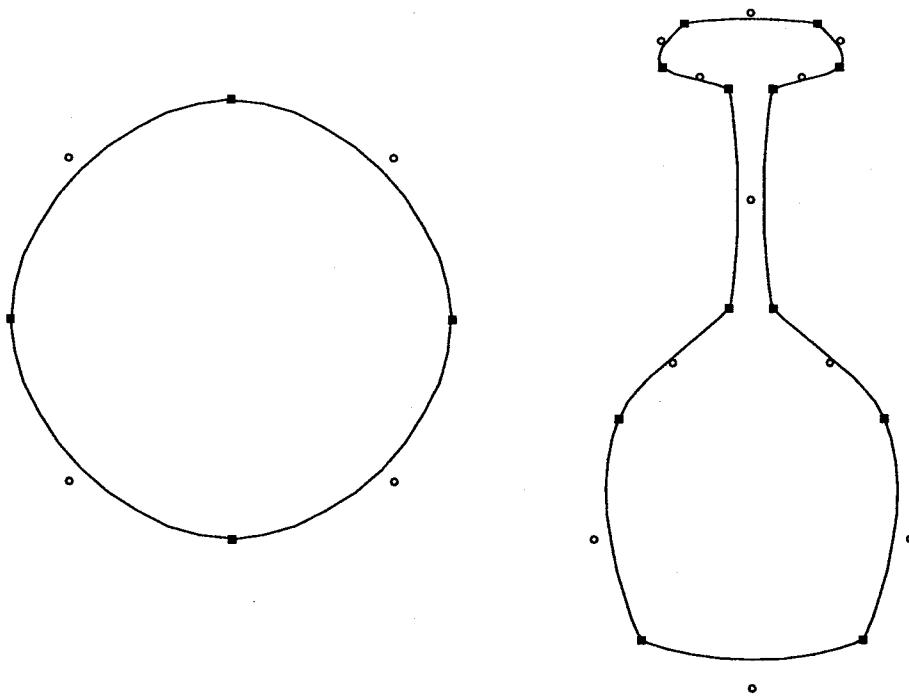


図 3-14: σ - スプライン曲線生成例 (式 3.26)

3.3.5 3次曲線・双3次曲面生成法

曲線に関する $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$, および曲面に関する $\{\mathbf{P}_{u,i,j}\}, \{\mathbf{P}_{v,i,j}\}, \{\mathbf{P}_{uv,i,j}\}$ の値は任意に設定することができるが, 4次曲線および双4次曲面は, 3次曲線および双3次曲面と比較してその形状に望ましくない振動を発生する傾向がある. 故に本節では, 3次曲線を生成するときの $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ の値および双3次曲面を生成するときの $\{\mathbf{P}_{u,i,j}\}, \{\mathbf{P}_{v,i,j}\}, \{\mathbf{P}_{uv,i,j}\}$ の値を計算する手法を示す.

σ -スプラインで生成される曲線 $\mathbf{Q}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i(x)$ は4次のバーンスタイン多項式の加重和として表わされ, x に関する4階の導関数を0とおくと,

$$\frac{d^4 \mathbf{Q}_i(x)}{dx^4} = \sum_{k=0}^4 \mathbf{b}_k \frac{d^4 B_4^k(x_i)}{dx^4} = 0 \quad ,$$

$$\mathbf{b}_0 - 4\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 - 4\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4 = 0 \quad , \quad (3.27)$$

となり, ベジエポリゴン $\{\mathbf{b}_k\}$ の値が式(3.27)の関係を満たすと, 曲線 $\mathbf{Q}(t)$ の次数は3次に縮退する. 故に $\{\hat{\mathbf{P}}_i\}$ の値は, 式(3.18)と式(3.21)を式(3.24)と式(3.27)に代入することにより, 以下の線形システムによって計算される.

$$\mu_{i,i-1} \hat{\mathbf{P}}_{i-1} + \mu_{i,i} \hat{\mathbf{P}}_i + \mu_{i,i+1} \hat{\mathbf{P}}_{i+1} = \nu_{i,i} \mathbf{P}_i + \nu_{i,i+1} \mathbf{P}_{i+1} \quad , \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i,i-1} &= -4 \hat{C}_{i-1,4} \quad , \quad \mu_{i,i} = 6 - 4 \hat{C}_{i,1} - 4 \hat{C}_{i,3} \quad , \\ \mu_{i,i+1} &= -4 \hat{C}_{i+1,0} \quad , \quad \nu_{i,i} = 4 C_{i,1} - 1 \quad , \\ \nu_{i,i+1} &= 4 C_{i+1,0} - 1 \quad , \\ i &= 0, 1, \dots, n-1 \quad . \end{aligned}$$

但し, $\{C_{i,j}\}$ と $\{\hat{C}_{i,j}\}$ は式(3.20)と式(3.23)によって計算される.

一方, σ -スプラインで生成される曲面 $\mathbf{Q}(u,v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{Q}_{i,j}(u,v)$ は4次のバーンスタイン多項式のテンソル積として表わされ, u と v に関する4階の導関数を0とおくと,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i,j}(u,v) &= \sum_{k=0}^4 \sum_{l=0}^4 \mathbf{b}_{k,l} B_4^k(u_i) B_4^l(v_j) \quad , \\ u_i &= \frac{(u - t_i^u)}{(t_{i+1}^u - t_i^u)} \quad , \quad v_j = \frac{(v - t_j^v)}{(t_{j+1}^v - t_j^v)} \quad , \\ \frac{\partial^4 \mathbf{Q}_{i,j}(u,v)}{\partial u^4} &= \sum_{k=0}^4 \sum_{l=0}^4 \mathbf{b}_{k,l} \frac{d^4 B_4^k(u_i)}{du^4} B_4^l(v_j) = 0 \quad , \\ \mathbf{b}_{0,l} - 4\mathbf{b}_{1,l} + 6\mathbf{b}_{2,l} - 4\mathbf{b}_{3,l} + \mathbf{b}_{4,l} &= 0 \quad , \quad (3.29) \\ \frac{\partial^4 \mathbf{Q}_{i,j}(u,v)}{\partial v^4} &= \sum_{k=0}^4 \sum_{l=0}^4 \mathbf{b}_{k,l} B_4^k(u_i) \frac{d^4 B_4^l(v_j)}{dv^4} = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$\mathbf{b}_{k,0} - 4\mathbf{b}_{k,1} + 6\mathbf{b}_{k,2} - 4\mathbf{b}_{k,3} + \mathbf{b}_{k,4} = 0 \quad , \quad (3.30)$$

となる。

曲線の場合と同様に、曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ の次数を双3次に縮退させる $\{\mathbf{Pu}_{i,j}\}$, $\{\mathbf{Pv}_{i,j}\}$, および $\{\mathbf{Puv}_{i,j}\}$ の値は、式(3.29)および式(3.30)に代入することにより以下の線形システムによって計算される。

$$\mu_{i,i-1} \mathbf{X}_{i-1,j} + \mu_{i,i} \mathbf{X}_{i,j} + \mu_{i,i+1} \mathbf{X}_{i+1,j} = \nu_{i,i} \mathbf{Y}_{i,j} + \nu_{i,i+1} \mathbf{Y}_{i+1,j} \quad , \quad (3.31)$$

$$\mu_{i,i-1} = -4 \hat{C}_{i-1,4} \quad , \quad \mu_{i,i} = 6 - 4 \hat{C}_{i,1} - 4 \hat{C}_{i,3} \quad ,$$

$$\mu_{i,i+1} = -4 \hat{C}_{i+1,0} \quad , \quad \nu_{i,i} = 4 C_{i,1} - 1 \quad ,$$

$$\nu_{i,i+1} = 4 C_{i+1,0} - 1 \quad ,$$

for $(\mathbf{X} = \mathbf{Pu}, \mathbf{Y} = \mathbf{P})$ or $(\mathbf{X} = \mathbf{Puv}, \mathbf{Y} = \mathbf{Pv})$,

$$\mu_{j,j-1} \mathbf{X}_{i,j-1} + \mu_{j,j} \mathbf{X}_{i,j} + \mu_{j,j+1} \mathbf{X}_{i,j+1} = \nu_{j,j} \mathbf{Y}_{i,j} + \nu_{j,j+1} \mathbf{Y}_{i,j+1} \quad , \quad (3.32)$$

$$\mu_{j,j-1} = -4 \hat{C}_{j-1,4} \quad , \quad \mu_{j,j} = 6 - 4 \hat{C}_{j,1} - 4 \hat{C}_{j,3} \quad ,$$

$$\mu_{j,j+1} = -4 \hat{C}_{j+1,0} \quad , \quad \nu_{j,j} = 4 C_{j,1} - 1 \quad ,$$

$$\nu_{j,j+1} = 4 C_{j+1,0} - 1 \quad ,$$

for $(\mathbf{X} = \mathbf{Pv}, \mathbf{Y} = \mathbf{P})$ or $(\mathbf{X} = \mathbf{Puv}, \mathbf{Y} = \mathbf{Pu})$,

$$i = 0, 1, \dots, m-1 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad .$$

但し $\{C_{i,j}\}, \{\hat{C}_{i,j}\}$ は、式(3.31)に関しては $\{t_i^u\}, \{\beta 2_i^u\}$ によって、また式(3.32)に関しては $\{t_j^v\}, \{\beta 2_j^v\}$ によって計算される。 $\{\mathbf{Puv}_{i,j}\}$ の値は $\{\mathbf{Pu}_{i,j}\}$ と $\{\mathbf{Pv}_{i,j}\}$ の両方から計算されるが、どちらによっても常に同じ結果が得られる。

開放端に関しては、終端点での傾き $\dot{\mathbf{P}}_0$ と $\dot{\mathbf{P}}_m$ を指定することにより、以下に示す新たな二つの制約式が加えられる。曲線の場合は、

$$\begin{aligned} 4 \hat{C}_{-1,4} \dot{\mathbf{P}}_{-1} + 4 \hat{C}_{0,1} \dot{\mathbf{P}}_0 &= \dot{\mathbf{P}}_0 + 4(1 - C_{0,1}) \mathbf{P}_0 \quad , \\ -4 \hat{C}_{m-1,3} \dot{\mathbf{P}}_{m-1} - 4 \hat{C}_{m,0} \dot{\mathbf{P}}_m &= \dot{\mathbf{P}}_m - 4(1 - C_{m,0}) \mathbf{P}_m \quad . \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。同様に、曲面の場合は、

$$\begin{aligned} 4 \hat{C}_{-1,4} \mathbf{X}_{-1,j} + 4 \hat{C}_{0,1} \mathbf{X}_{0,j} &= \mathbf{Y}_{0,j}^u + 4(1 - C_{0,1}) \mathbf{Y}_{0,j} \quad , \\ -4 \hat{C}_{m-1,3} \mathbf{X}_{m-1,j} - 4 \hat{C}_{m,0} \mathbf{X}_{m,j} &= \mathbf{Y}_{m,j}^u - 4(1 - C_{m,0}) \mathbf{Y}_{m,j} \quad , \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$j = j0, j0 + 1, \dots, n \quad , \quad j0 = \begin{cases} 0 & ; \quad \mathbf{X} = \mathbf{Pu}, \mathbf{Y} = \mathbf{P} \\ -1 & ; \quad \mathbf{X} = \mathbf{Puv}, \mathbf{Y} = \mathbf{Pv} \end{cases} \quad ,$$

となる。但し、 $\{\mathbf{Y}_{i,j}^u\}$ は u 軸に関する 1 階微分値を表す。また、 v 軸に関する式も同様に導出される。このとき、 $\{\mathbf{Pv}_{0,j}^u\}$, $\{\mathbf{Pv}_{m,j}^u\}$ または $\{\mathbf{Pu}_{i,0}^v\}$, $\{\mathbf{Pu}_{i,n}^v\}$ の値は直観的に捉えにくい値なので、0 をそのデフォルト値とする。

式 (3.28) と式 (3.33) より構成される線形システムは $\{\mathbf{P}_i\}$ のアフィン変換に対する不变性を有し、同様に式 (3.31), 式 (3.32), および式 (3.34) より構成される線形システムは $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ のアフィン変換に対する不变性を有する。

張力変数 $\{\beta_{2,i}\}$ が 0 以上の値をとるものとすると、

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,1} &\leq 1/2, \quad \hat{C}_{i,3} \leq 1/2, \quad \hat{C}_{i,0} < 0, \quad \hat{C}_{i,4} < 0, \\ \mu_{i,i+1} &> 0, \quad \mu_{i,i-1} > 0, \quad \mu_{i,i} \geq 2, \\ i &= 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3.35)$$

により、 μ から構成されるマトリクスは、最上行と最下行を除いて正値帯行列となるので、ブロック三角化因子分解を用いたガウス消去法が適用でき、その解を $\{\mathbf{P}_i\}$ または $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ の総数に比例した計算量で数値的に安定に求めることができる [DER86]。このとき生成される曲線 $\mathbf{Q}(t)$ または曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ は、3次のバーンスタイン多項式の線形和として展開することができる。 $\{\mathbf{P}_i\}$ または $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ を LT-スプライン [Coh87] で補間することによっても同じ3次曲線または双3次曲面が得られ、このときに要する計算量は $\{\mathbf{P}_i\}$ または $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ の総数に比例し、本手法による計算量とほぼ一致する。

図 3-15 に式 (3.28) によって 3 次曲線を生成した例を示す。また図 3-16 に、一部の形状制御点を移動させてこの曲線を局所的に変形させた例を示す。

3.3.6 曲面の再分割手法

スプライン曲線・曲面の形状を設計する際に、一度定義した節点ベクトルに新たな節点を挿入して、曲線・曲面の形状をより詳細に設計する手法が広く用いられている。新たな節点を挿入することによりスプライン基底関数の系列が再定義され、基底およびそれらに対応する制御点の数が増える。このとき元の曲線・曲面の形状を一定に保つために制御点の値を再計算する必要があるが、これを効率よく行う手法が数多く提案されている。

これらの手法は再分割手法と呼ばれており、有名なものとして B-スプラインの効率的な再分割手法（オスロアルゴリズム）[CLR80] や、 β -スプラインの再分割手法 [Joe87] などが挙げられる。また、再分割手法を用いた曲面の階層的な詳細化の手法 [FB88] により、複雑な形状の曲面が効率良く設計できることが示された。ここでは、 σ -スプラインに対する再分割手法を述べる。

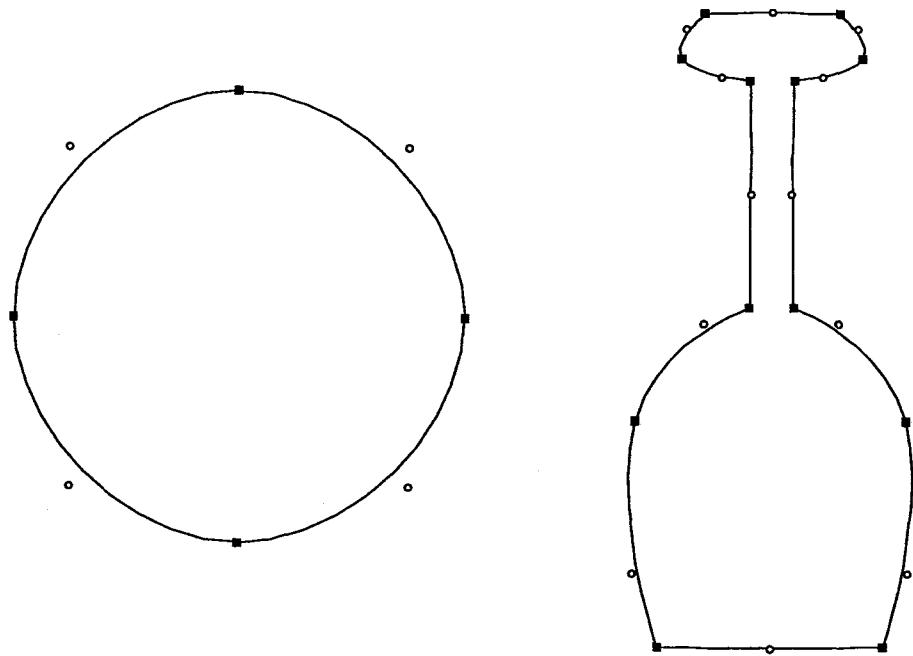


図 3-15: σ -スプライン曲線生成例（3次曲線）

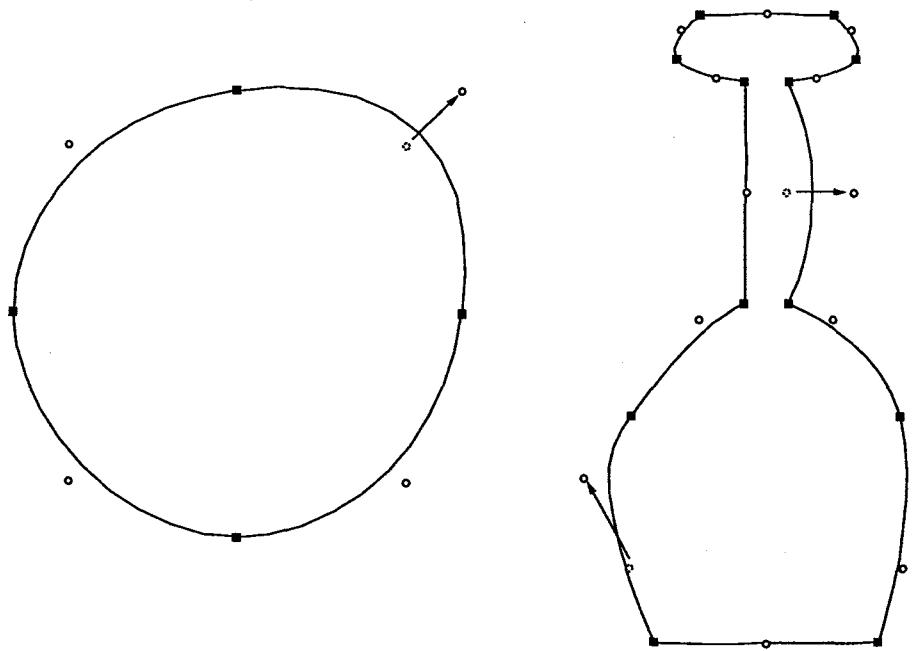


図 3-16: σ -スプライン曲線生成例（形状制御点の移動例）

多重節点と張力変数のベクトル $\{t_i^u\}, \{\beta 2_i^u\}, i = 0, 1, \dots, m, \{t_j^v\}, \{\beta 2_j^v\}, j = 0, 1, \dots, n$ に新たな節点を挿入して, $\{\tilde{t}_i^u\}, \{\tilde{\beta} 2_i^u\}, i = 0, 1, \dots, g, g \geq m, \{\tilde{t}_j^v\}, \{\tilde{\beta} 2_j^v\}, j = 0, 1, \dots, h, h \geq n$ を改めて定義し, それによって生成される $\{\sigma_i(x)\}, \{\hat{\sigma}_i(x)\}$ に相当する新たな基底関数をそれぞれ $\{\varsigma_i(x)\}, \{\hat{\varsigma}_i(x)\}$ とする. このとき, 挿入された節点に対する $\{\tilde{\beta} 2_i\}$ の値は 0 とおく.

式 (3.25) を新たに生成された基底関数で表したときに, その形状が不变であるように $\{\mathbf{P}_{i,j}\}, \{\mathbf{P}_{\mathbf{u}_{i,j}}\}, \{\mathbf{P}_{\mathbf{v}_{i,j}}\}, \{\mathbf{P}_{\mathbf{uv}_{i,j}}\}$ に対応する $\{\tilde{\mathbf{P}}_{i,j}\}, \{\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{u}_{i,j}}\}, \{\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{v}_{i,j}}\}, \{\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{uv}_{i,j}}\}$ の値を計算する. 自由曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ がバーンスタイン多項式で表されることに着目して, これを再分割公式 [SBD86] に代入して $\{\mathbf{b}_{k,l}\}$ に対応する $\{\tilde{\mathbf{b}}_{k,l}\}$ を求めると, $\{\tilde{\mathbf{P}}_{i,j}\}$ が新たな補間点となることとバーンスタイン多項式の性質より $\tilde{\mathbf{P}}_{i,j} = \tilde{\mathbf{b}}_{0,0}$ となり, また 3.3.4 節で述べたように, $\hat{\varsigma}_i(\tilde{u}_i)$ のみが $B_4^2(\tilde{u}_i)$ を含むことから $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{u}_{i,j}} = \tilde{\mathbf{b}}_{2,0}, \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{v}_{i,j}} = \tilde{\mathbf{b}}_{0,2}, \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{uv}_{i,j}} = \tilde{\mathbf{b}}_{2,2}$ が導かれる.

3.3.7 自由曲面間の融合手法

複雑な形状を部品ごとに分け, 各部品を構成する曲面を異なる節点ベクトルで定義し, それらを融合させることにより曲面の構造的な設計が可能となる. 故に本節では, 異なる節点ベクトルで生成される 2 曲面間を再分割手法を用いて融合する方法について述べる. 但し, 以下に述べる方法はテンソル積曲面の数学モデルのみを対象としているので, 制御点の配置のトポロジーに整合性のない曲面間には, 融合曲面を生成できない. 媒介変数曲面に対して各曲面の制御点の配置のトポロジーに依存しない融合を行うには, 三辺形パッチもしくは多辺形パッチを用いることが考えられる.

まず, $\mathbf{Q}^{mn}(u, v)$ と $\mathbf{Q}^{st}(u, v)$ を $(m+1) \times (n+1)$ と $(s+1) \times (t+1)$ の制御点で生成されたテンソル積曲面とする. また, $\{u_i^m\}, \{v_j^n\}$ と $\{u_i^s\}, \{v_j^t\}$ をそれぞれの制御点に対する u 軸と v 軸に沿った節点ベクトルとする.

これまでに提案してきた手法では, v 軸に沿って融合をおこなうときベクトル $\{u_i^m\}$ と $\{u_i^s\}$ の値は等しくなければならないが, ここでは任意の値をとるものとし u 軸に沿ったそれらの和集合を $\{u_i^{m+s}\}$ によって表す. また, v 軸に関する節点ベクトル $\{v_j^n\}$ と $\{v_j^t\}$ を直列結合させたベクトルを $\{v_j^{n+t}\}$ とし, 曲面の融合区間を $v_n^{n+t} \leq v \leq v_{n+2}^{n+t}$ とする. (融合区間における節点ベクトルの模式図を図 3-17 に示す). このとき, 基底 $\{\varsigma_i(u)\}$ と $\{\varsigma_j(v)\}$ は $\{u_i^{m+s}\}$ と $\{v_j^{n+t}\}$ によって生成される.

曲面を滑かに融合させる際には, 融合を受ける元の曲面の形状を変化させずに, その間に新たな曲面を内挿するのが望ましいことから, 上述した二つの曲面を融合させる曲面

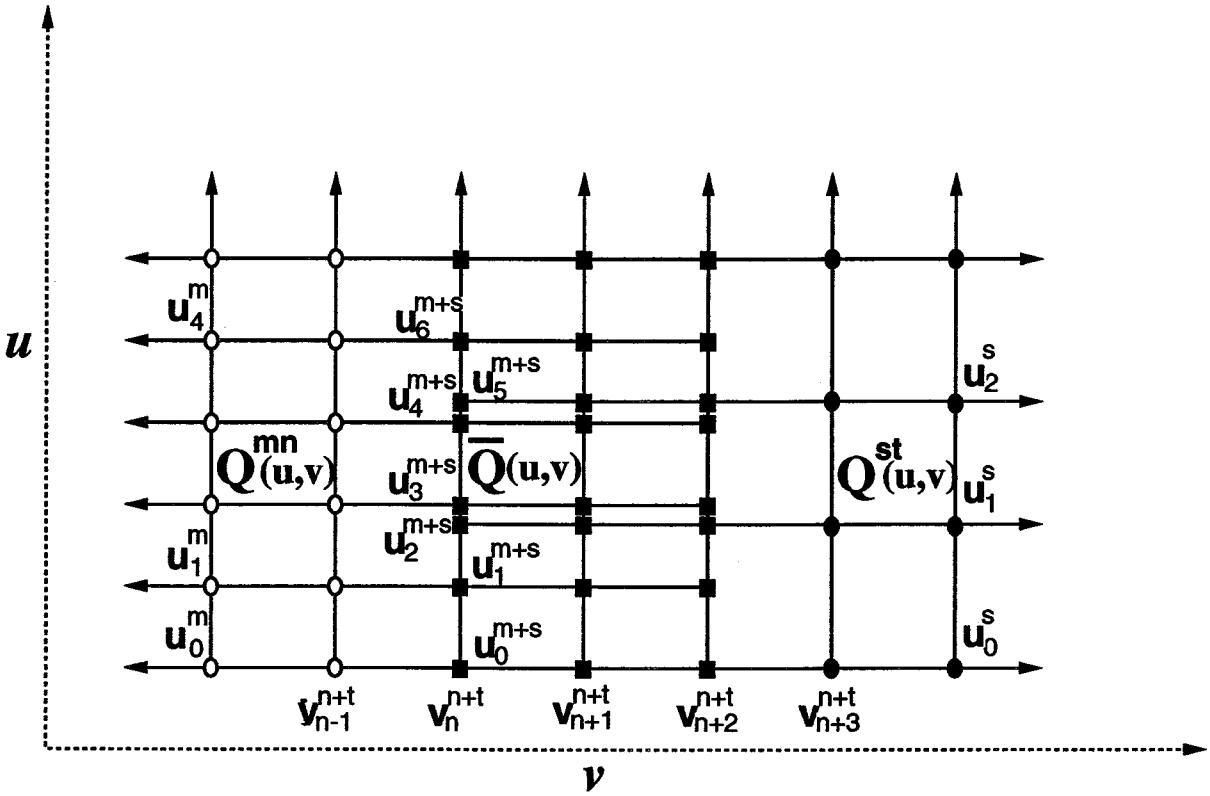


図 3-17: $\mathbf{Q}^{mn}(u, v)$ と $\mathbf{Q}^{st}(u, v)$ の節点模式図

$\bar{\mathbf{Q}}(u, v)$ を以下のように生成する。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}}(u, v) = & \sum_{j=n}^{n+2} \sum_{i=0}^p \bar{\mathbf{P}}_{i,j} \zeta_i(u) \zeta_j(v) + \sum_{j=n}^{n+2} \sum_{i=p}^{\bar{p}} \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u},i,j} \hat{\zeta}_i(u) \zeta_j(v) \\ & + \sum_{j=n-1}^{n+2} \sum_{i=0}^p \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{v},i,j} \zeta_i(u) \hat{\zeta}_j(v) + \sum_{j=n-1}^{n+2} \sum_{i=p}^{\bar{p}} \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u}\mathbf{v},i,j} \hat{\zeta}_i(u) \hat{\zeta}_j(v).\end{aligned}\quad (3.36)$$

ここで、 p は $\{u_i^{m+s}\}$ の数を表し、 \underline{p}, \bar{p} は式 (3.25) と同様に定義される。

$\{\bar{\mathbf{P}}_{i,n}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u},i,n}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{v},i,n-1}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{v},i,n}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u}\mathbf{v},i,n-1}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u}\mathbf{v},i,n}\}$ は、 $\mathbf{Q}^{mn}(u, v)$ を再分割することにより求められ、同様に $\{\bar{\mathbf{P}}_{i,n+2}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u},i,n+2}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{v},i,n+1}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{v},i,n+2}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u}\mathbf{v},i,n+2}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u}\mathbf{v},i,n+1}\}$ は $\mathbf{Q}^{st}(u, v)$ を再分割することによって求められる。これらの値は $O(p)$ の計算量で求められる。

節点 $v = t_{n+1}^n$ における曲線の形状を決定する $\{\bar{\mathbf{P}}_{i,n+1}\}$ と $\{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u},i,n+1}\}$ の値は任意に設定できるが、滑かな形状がノルム最小性 (2.3.2.1 節参照) を有することを利用してそのデフォルト値を以下のように計算する。

まず、生成される融合曲面式式 (3.36) を以下のように表すと、

$$\bar{\mathbf{Q}}(u, v) = \sum_{i=0}^p \bar{\mathbf{q}}_i(v) \varsigma_i(u) + \sum_{i=\underline{p}}^{\bar{p}} \hat{\bar{\mathbf{q}}}_i(v) \hat{\varsigma}_i(u) , \quad (3.37)$$

曲線 $\bar{\mathbf{q}}_i(v)$ は次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{q}}_i(v) = \sum_{j=n}^{n+2} \bar{\mathbf{P}}_{i,j} \varsigma_j(v) + \sum_{j=n-1}^{n+2} \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{v},i,j} \hat{\varsigma}_j(v) . \quad (3.38)$$

ここで、 $\int_{t_n^n}^{t_{n+2}^n} [\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i(v)]^2 dv$ が最小値をとるように、これを $\bar{\mathbf{P}}_{i,n+1}$ で微分した式：

$$2 \int_{t_n^n}^{t_{n+2}^n} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i(v) \frac{\partial \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i(v)}{\partial \bar{\mathbf{P}}_{i,n+1}} = 2 \int_{t_n^n}^{t_{n+2}^n} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i(v) \ddot{\varsigma}_{n+1}(v) .$$

を 0 とおいて以下の式を得る。

$$\bar{\mathbf{P}}_{i,n+1} = \frac{- \int_{t_n^n}^{t_{n+2}^n} [\sum_{j=n, j \neq n+1}^{n+2} \bar{\mathbf{P}}_{i,j} \ddot{\varsigma}_j(v) + \sum_{j=n-1}^{n+2} \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{v},i,j} \ddot{\hat{\varsigma}}_j(v)] \ddot{\varsigma}_{n+1}(v) dv}{\int_{t_n^n}^{t_{n+2}^n} [\ddot{\varsigma}_{n+1}(v)]^2 dv} , \quad (3.39)$$

但し、 $\ddot{\varsigma}(v)$ は v 軸に関する 2 次の導関数を表すものとする。

式 (3.39) より $\{\bar{\mathbf{P}}_{i,n+1}\}$ の値が求まり、それを式 (3.31) および式 (3.32) に代入することにより $\{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u},i,n+1}\}$ の値が求まる。与えられた元の曲面の次数が双 3 次であっても、生成される融合曲面の次数は双 4 次となる。また、融合を受ける元の曲面が C^2 級である場合、融合曲面もパッチの境界において C^2 級となり、元の曲面が G^2 級である場合、融合曲面は G^1 級となる。

図 3-18 に σ -スプラインを用いて生成した、断面が各々円形、星形、および壺形を有する双 3 次曲面の例を示し、図 3-19 にそれらの曲面から $\{\bar{\mathbf{P}}_{i,n+1}\}$ 、 $\{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{u},i,n+1}\}$ を式 (3.39) により計算して融合曲面を生成した例を示す。

但し、各曲面は断面を定義する曲線のノットベクトルが

円形： $\{10, 10, 10, 10\}$

星形： $\{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}$

壺形： $\{4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}$

で与えられ 4×2 , 10×2 , 12×2 の制御点で生成される。

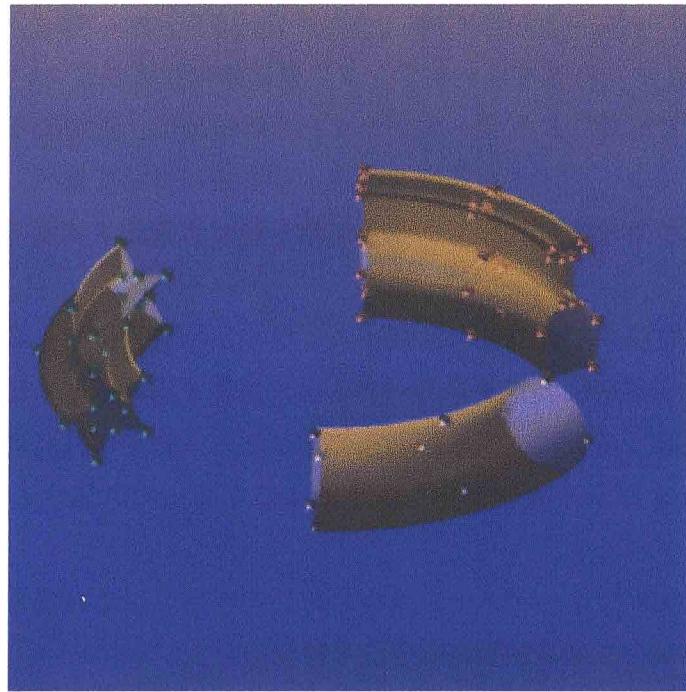


図 3-18: σ -スプラインによる双3次曲面生成例

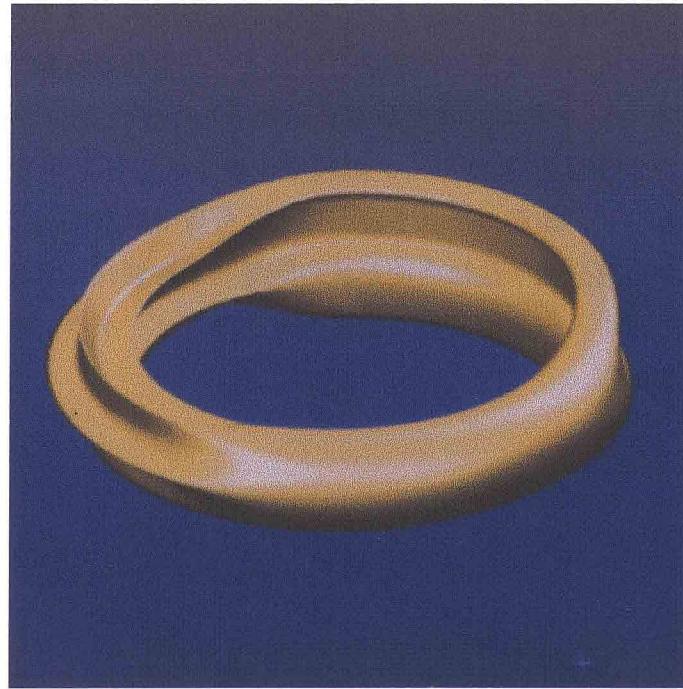


図 3-19: 融合曲面生成例

3.4 結言

本章では、カーディナル基底を用いたテンソル積曲面の生成法について述べた。

まず、等間隔節点で定義されるBースplineの線形和で、局所的な台をもち連続性の条件を近似的に満足するカーディナル基底を構成する手法について述べ、さらに3次のBースplineを β 2ースplineに拡張し、張力変数を用いて曲線・曲面の形状を制御できることを示した。

次に、不等間隔多重節点で定義されるBースplineの線形和で、局所的な台をもち幾何学的な連続性の条件を厳密に満足するカーディナル基底を構成する手法について述べた。また、曲線・曲面を生成する際に、形状制御点のデフォルト値を補間点の値を用いて計算する方法と、3次曲線および双3次曲面を生成する条件を用いて計算する方法についても述べた。

最後に、多重節点をもつカーディナル基底の再分割手法、および異なる節点ベクトルで定義された2曲面間を融合させる曲面の生成法を提案した。

カーディナル基底を用いた曲面のモデリングは、与えた制御点を含む曲面を生成できるという点で直接的な曲面形状の記述に適しており、また基底を局所的な台で定義することにより、形状の部分的な変形・修正操作を可能とする。

σ -ースplineを用いた曲面モデルは、 G^2 級の連続性の条件を厳密に満たし、各節点ごとに異なる張力変数の値を設定できる。またこのとき、 σ -ースplineの基底の次数は4次となり、カトマルーロムースplineの基底と比較して、より低次数で G^2 級の曲面を構成できるという利点がある。 σ -ースpline基底の再分割手法を用いた融合曲面の生成手法は、任意の節点ベクトルおよびスpline関数で生成される曲面間を、元の曲面の形状を変化させずに融合するので、曲面の形状を部品ごとに分けて設計することが可能になる。さらに、 σ -ースplineの再分割手法は曲面形状の階層的な詳細化による設計も可能にするので、形状設計においてボトムアップ的な構造化と、トップダウン的な詳細化という双方の作業環境が実現される。

第4章 多面体による曲面生成法

4.1 緒言

第3章で述べた、制御点をスプライン関数で補間するテンソル積曲面の数学モデルは、制御点を2次元アレイに配置するという制約があり、閉曲面を構成する際に制御点の集中する部分を生じたり、制御点の配置のトポロジーが異なる曲面間を融合できないという問題点がある。従って、テンソル積曲面の数学モデルは、設計の対象となる物体が車体などのように、形状が主に矩形領域で定義される曲面の設計には適しているが、矩形領域だけでは定義できない複雑な形状やトポロジーを有する曲面の設計には十分に対処できない。故に、本章ではこのテンソル積曲面における問題点を解決するため、2次元アレイに配置された制御点の代わりに多面体によって形状を記述し、多面体の頂点を含むようなパッチ曲面を生成する手法を提案する。

多面体より曲面を生成する手法として、多面体の頂点の座標値を基に、B-スプライン曲面の数学モデルから導かれる再帰的計算式を用いて曲面上の点を計算する手法 [CC78, DS78, Nas87] が提案されたが、この手法は媒介変数形式の曲面式としての表現ができず、張力変数などを用いた形状の局所的な変形・修正操作ができないという問題点がある。故に本手法では、多面体の各多辺形領域を複数の三角領域に分割し、各々の三角領域に一つの三辺形パッチを割り当てて曲面を構成する。

三辺形パッチによる曲面の生成法として、以下のものが提案されている。

- (a) 有理多項式で表される三辺形パッチを用いる手法 [Her85, Nie87].
- (b) 有理項を含まないベジエ三辺形パッチを用い、Clough-Tocher split と呼ばれる、三辺形パッチの3分割法を適用する手法 [Far83, Far85, Far86, Pip87, Far90].

(a) の手法は曲面の次数が高く、曲面を陰影表示（レンダリング）するときや曲面間の演算（交線計算など）を行うときの計算量が多くなってしまう。(b) の手法は三辺形パッチの次数を低くすることができるが、各三辺形パッチを3分割するので与えられる三角形の個数の3倍の数のパッチが生成され、各パッチの形状も細長くなってしまうという問題点がある。また、これらの手法で曲面を生成するためには、三角形の頂点の座標値の他に、頂点を共有する各辺に沿った接線ベクトルの値も必要となるが、いずれの手法もこの値を自動的に決定する方法については言及していない。

本章では以上に述べた問題点を考慮して、多面体の頂点を通り辺に沿った曲線網を生成して、曲線網を補間する三辺形パッチ曲面を生成する手法について述べる。

まず、多面体の各辺に沿った3次曲線網を想定し、各曲線の値を決定する接線ベクトルを各頂点において同一の接平面上に設定し、曲線の張力変数を含む擬似ノルムの和を最小化す

るような曲線網を求める手法を示す。さらに、多面体の各多辺形領域に対して 1 点を加え、その点と多辺形の各頂点とを結ぶことにより領域を三角形分割する 3 次曲線網を想定し、同様に擬似ノルムの和を最小化するように曲線網を求める手法を示す。

次に、4 次の三辺形パッチの定義式を拡張し、多面体を三角形分割する 3 次曲線網を補間して 1 次の幾何学的連続性の条件を満たすパッチの制御点を計算する手法について述べ、この三辺形パッチが双 3 次パッチとも同次の連続性で接続できることを示す。最後に、各種の多面体からの曲面の生成例を示すことにより、本手法で生成される曲面の形状を評価する。

4.2 擬似ノルム最小化関数による曲線網の生成

4.2.1 多面体の辺に沿う曲線網の生成

曲面を構成する三辺形パッチ間の境界曲線に相当する 3 次曲線網の生成法を以下に述べる。まず最初に、多面体の各頂点 \mathbf{P} を共有する n 本の辺の中で周回順 i 番目のもの（以後、 e_i ）に関して \mathbf{P} と対向する頂点を $\bar{\mathbf{P}}_i$ とし、それらの点において e_i に沿う接線ベクトルを $\mathbf{T}_i, \bar{\mathbf{T}}_i$ とすると、辺に沿った 3 次曲線 $\mathbf{C}_i(s)$ はバーンスタイン多項式 $B_k^n(s)$ を用いて、以下のように定義される（図 4-1 参照）。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i(s) &= \sum_{k=0}^3 \mathbf{V}_k B_k^3(s), \quad B_k^n(s) = \frac{n!}{k!(n-k)!} s^k (1-s)^{n-k}, \\ \mathbf{V}_0 &= \mathbf{P}, \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{P} + \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{V}_2 = \bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{T}}_i, \quad \mathbf{V}_3 = \bar{\mathbf{P}}_i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで、曲線 $\mathbf{C}_i(s)$ が頂点 \mathbf{P} において滑かに接続されるために、頂点における接線ベクトル $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ が同一接平面上に存在するように設定する。故に、これらの値を接平面を表す平行でない二つのベクトル $\mathbf{T}^s, \mathbf{T}^c$ の線形和として以下のように表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i &= \mathbf{T}^s \sin \theta_i + \mathbf{T}^c \cos \theta_i, \\ \theta_i &= 2\pi(i-1)/n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

但し、その頂点が開曲面の開いた境界上にある場合は、式 (4.2) の接線ベクトル $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_n$ が開いた境界となる辺に沿って $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_n = \mathbf{T}^c$ となるように $\theta_i = \pi(i-1)/(n-1)$ とおく。以上の設定により、多面体の辺に沿う曲線網は各頂点における接平面ベクトル $\mathbf{T}^s, \mathbf{T}^c$ の値により決定される。

3 次の自然スプライン曲線は、擬似ノルム（曲線の媒介変数に関する 2 次導関数を 2 乗積分したもの）の総和を最小化する性質 [BL66]（2.3.2.1 節参照）を有するが、これをを利用してノルム最小化曲線網（Minimum Norm Network）を生成する手法 [Nie83] が提案された。ここでは、曲線網から生成される曲面の形状を対話的に制御できるように、2 種類の張力変数を含む拡張された擬似ノルム [Fol87a, Fol87b]（2.3.2.4 節参照）の総和を表す関数 $\sigma(\mathbf{C})$ を以下のように定義する。

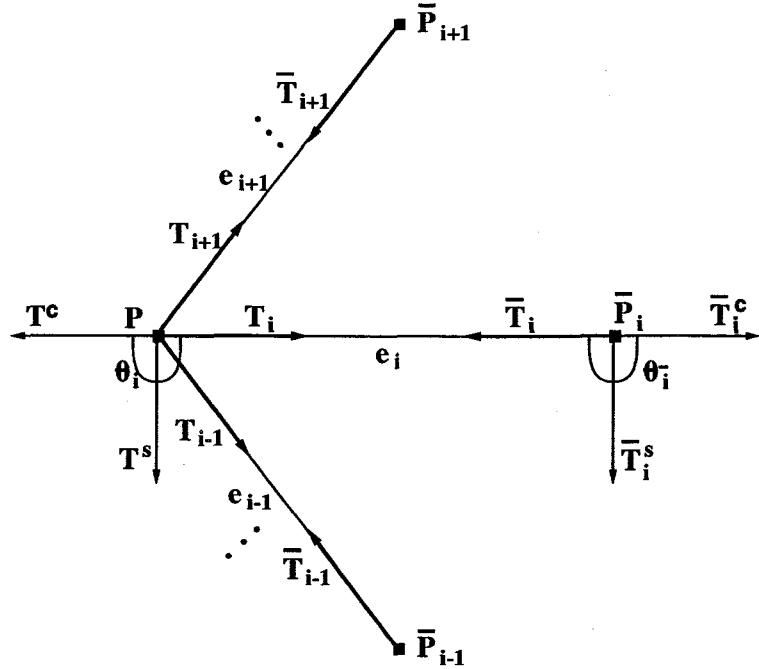


図 4-1: 点 \mathbf{P} を含む辺と接線ベクトル

$$\sigma(\mathbf{C}) = \sum_{v \in \mathbf{V}} \sum_{e_i^v \in E_v} \left\{ \frac{\beta_i^v}{2} \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s)^2 ds + \alpha^v \dot{\mathbf{C}}_i(0)^2 \right\} , \quad (4.3)$$

$$\ddot{\mathbf{C}}_i(s) = \frac{d^2 \mathbf{C}_i(s)}{ds^2} , \quad \dot{\mathbf{C}}_i(s) = \frac{d \mathbf{C}_i(s)}{ds} , \quad \mathbf{C}_i(0) = \mathbf{P} .$$

但し、 \mathbf{V} を多面体の頂点の集合、 E_v を座標 \mathbf{P} の頂点 $v \in \mathbf{V}$ を含む辺の集合とする。また α^v, β_i^v を、多面体の各頂点 v および各辺 $e_i^v \in E_v$ に対する張力変数を表すものとする。

α^v の値を増やすと、接線ベクトル $\{\mathbf{T}_i\}$ の長さを減少させ、頂点 v において曲線に張りを加えたような効果をもたらす。また β_i^v の値を増やすと、曲線の両端点における接線ベクトル \mathbf{T}_i と $-\bar{\mathbf{T}}_i$ がベクトル $\bar{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P}$ の方向に漸近し、辺 e_i に沿って曲線に張りを加えたような効果をもたらす。全ての張力変数の値が $\alpha^v = 0, \beta_i^v = 1$ のとき、式 (4.3) で表される関数は 3 次の自然スプライン曲線の定義で用いられる擬似ノルムの総和を表す。

式 (4.1) の $\mathbf{C}_i(s)$ を式 (4.3) に代入すると $\sigma(\mathbf{C})$ の値は、

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{C}}_i(s) &= \sum_{k=0}^1 (\mathbf{V}_{k+2} - 2\mathbf{V}_{k+1} + \mathbf{V}_k) B_k^1(s) \\ &= (\bar{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P} + \bar{\mathbf{T}}_i - 2\mathbf{T}_i) B_0^1(s) + (\mathbf{P} - \bar{\mathbf{P}}_i + \mathbf{T}_i - 2\bar{\mathbf{T}}_i) B_1^1(s) , \\ \dot{\mathbf{C}}_i(0) &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 = \mathbf{T}_i , \end{aligned} \quad (4.4)$$

の関係を用いて計算される。但し、 $\{\mathbf{T}_i\}$ は頂点 \mathbf{P} における接平面ベクトル $\mathbf{T}^s, \mathbf{T}^c$ によつ

て式(4.2)のように設定され、同様に $\{\bar{\mathbf{T}}_i\}$ は点 $\bar{\mathbf{P}}_i$ における接平面ベクトル $\bar{\mathbf{T}}_i^s, \bar{\mathbf{T}}_i^c$ の線形和として $\bar{\mathbf{T}}_i = \bar{\mathbf{T}}_i^s \sin\theta_i + \bar{\mathbf{T}}_i^c \cos\theta_i$ のように設定される（このとき、 i は $\bar{\mathbf{P}}_i$ から見た場合の e_i の周回順とする）。ここで $\sigma(\mathbf{C})$ を最小化する接平面ベクトルの値を求めるために、 $\sigma(\mathbf{C})$ の \mathbf{T}^s に関する変分を式(4.1)から式(4.4)を用いて求めると以下の式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{T}^s} &= \sum_{v\in\mathbf{V}} \sum_{e_i^v\in E_v} \beta_i^v \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \frac{\partial\dot{\mathbf{C}}_i(s)}{\partial\mathbf{T}_i} \frac{\partial\mathbf{T}_i}{\partial\mathbf{T}^s} ds + 2\alpha^v \dot{\mathbf{C}}_i(0) \frac{\partial\dot{\mathbf{C}}_i(0)}{\partial\mathbf{T}_i} \frac{\partial\mathbf{T}_i}{\partial\mathbf{T}^s} \\ &= \sum_{e_i^v\in E_v} 2\beta_i^v \sin\theta_i \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \{-2B_0^1(s) + B_1^1(s)\} ds + 2\alpha^v \sin\theta_i \dot{\mathbf{C}}_i(0) \\ &= -\sum_{e_i^v\in E_v} \beta_i^v \sin\theta_i (\bar{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P} + \bar{\mathbf{T}}_i - 2\mathbf{T}_i) + 2\alpha^v \sin\theta_i \mathbf{T}_i .\end{aligned}\quad (4.5)$$

式(4.5)の1行目において、右辺の和 $\sum_{v\in\mathbf{V}} \sum_{e_i^v\in E_v}$ の中で \mathbf{T}^s を含む項のみを考えると、 $\ddot{\mathbf{C}}_i(s)$ はその両端点 \mathbf{P} と $\bar{\mathbf{P}}_i$ に関する和において同じ曲線を表すものとして2度現れるので、 \mathbf{P} に関するものだけを考えてそれを2倍し、また $\dot{\mathbf{C}}_i(0)$ は $\mathbf{P} \in \mathbf{V}$ に関するものだけを考えればよいことから、式(4.5)の2行目のような $\sum_{e_i^v\in E_v}$ だけの和の形式に置き換えることができる。

また、 $\sigma(\mathbf{C})$ の \mathbf{T}^c に関する変分を同様に求めると以下の式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{T}^c} &= \sum_{v\in\mathbf{V}} \sum_{e_i^v\in E_v} \beta_i^v \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \frac{\partial\dot{\mathbf{C}}_i(s)}{\partial\mathbf{T}_i} \frac{\partial\mathbf{T}_i}{\partial\mathbf{T}^c} ds + 2\alpha^v \dot{\mathbf{C}}_i(0) \frac{\partial\dot{\mathbf{C}}_i(0)}{\partial\mathbf{T}_i} \frac{\partial\mathbf{T}_i}{\partial\mathbf{T}^c} \\ &= \sum_{e_i^v\in E_v} 2\beta_i^v \cos\theta_i \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \{-2B_0^1(s) + B_1^1(s)\} ds + 2\alpha^v \cos\theta_i \dot{\mathbf{C}}_i(0) \\ &= -\sum_{e_i^v\in E_v} \beta_i^v \cos\theta_i (\bar{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P} + \bar{\mathbf{T}}_i - 2\mathbf{T}_i) + 2\alpha^v \cos\theta_i \mathbf{T}_i .\end{aligned}\quad (4.6)$$

ここで、 $\mathbf{T}^s, \mathbf{T}^c$ に関する $\sigma(\mathbf{C})$ の変分を0とおくと、式(4.5)および式(4.6)より次式が得られる。

$$\begin{aligned}\sum_{e_i^v\in E_v} k_i \left\{ 2(\beta_i^v + \alpha^v) (\sin\theta_i \mathbf{T}^s + \cos\theta_i \mathbf{T}^c) - \beta_i^v (\sin\theta_i \bar{\mathbf{T}}_i^s + \cos\theta_i \bar{\mathbf{T}}_i^c) \right\} \\ = \sum_{e_i^v\in E_v} k_i \beta_i^v (\bar{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P}) ,\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$k_i = \begin{cases} \sin\theta_i ; & \text{for } \partial\sigma(\mathbf{C})/\partial\mathbf{T}^s = 0 \\ \cos\theta_i ; & \text{for } \partial\sigma(\mathbf{C})/\partial\mathbf{T}^c = 0 \end{cases}$$

式(4.7)は多面体の全ての頂点に対して導かれるので、頂点の総数 v 個に対し $2v \times 2v$ の線形システムが生成される。この線形システムの行列は一般的に零要素の多い疎な行列となるので、繰返し法を用いることにより効率的にその解を計算することができる[Nie83]。以上の計算により全ての頂点に対する接平面ベクトルの値が求められ、多面体の辺に沿った曲線網を生成することができる。

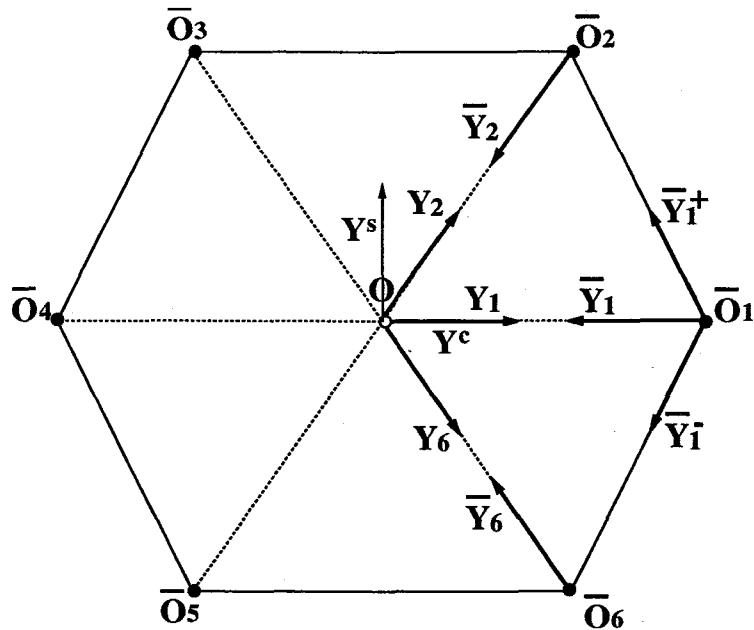


図 4-2: 分割点 \mathbf{O} を含む辺と接線ベクトル

4.2.2 多面体を三角形分割する曲線網の生成

多面体の各 n 辺形領域に対して、領域を三角形分割するために 1 点（以後、分割点）を加え、 n 辺形の各頂点と分割点を結ぶ n 本の辺（以後、分割辺）を加えて、領域を n 個の三角形に分割する。ここで分割点の座標値を \mathbf{O} 、周回順 i 番目の分割辺に沿う接線ベクトルを \mathbf{Y}_i とし、 $\{\mathbf{Y}_i\}$ を分割点における接平面ベクトル $\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^c$ の線形和を用いて式 (4.2) と同様に設定する。但し、 i 番目の分割辺を挟んで \mathbf{O} と対向する点 $\bar{\mathbf{O}}_i$ の分割辺に沿った接線ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}_i$ は、この n 辺形の点 $\bar{\mathbf{O}}_i$ を含む 2 辺に沿った、4.2.1 節においてすでに求められた接線ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}_i^+, \bar{\mathbf{Y}}_i^-$ を用いて、

$$\bar{\mathbf{Y}}_i = \frac{1}{2(1 - \cos(2\pi/n))} (\bar{\mathbf{Y}}_i^+ + \bar{\mathbf{Y}}_i^-) ,$$

と設定する [Pet90]（図 4-2 参照）。

これにより分割辺に沿った 3 次曲線網を想定し、式 (4.3) で表される擬似ノルムの総和関数 $\sigma(\mathbf{C})$ を求めると $\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^c$ 、および \mathbf{O} に関する式となる。但し、分割点および分割辺はデザイナーが入力する多面体に新たに付加されるものなので、曲面を生成する際に目立たないようにするのが望ましいことから、分割点および分割辺に対する張力値は自然スプライン曲線の定義で用いられる擬似ノルムと一致する値 $\alpha^v = 0, \beta_i^v = 1$ を選ぶことにする。

ここで、式 (4.5) あるいは式 (4.6) において $\alpha = 0, \beta_i = 1$ を代入し、 $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{O}, \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Y}$ と置き換え、4.2.1 節で述べた手法と同様に分割点における接平面ベクトル $\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^c$ に関する

る $\sigma(\mathbf{C})$ の変分を求める以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{Y}^s} &= \sum_{o \in \mathbf{O}} \sum_{e_i^o \in E_o} \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \frac{\partial \ddot{\mathbf{C}}_i(s)}{\partial \mathbf{Y}_i} \frac{\partial \mathbf{Y}_i}{\partial \mathbf{Y}^s} ds \\ &= \sum_{e_i^o \in E_o} 2 \sin \theta_i \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \left\{ -2B_0^1(s) + B_1^1(s) \right\} ds \\ &= - \sum_{e_i^o \in E_o} \sin \theta_i (\bar{\mathbf{O}}_i - \mathbf{O} + \bar{\mathbf{Y}}_i - 2\mathbf{Y}_i) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{Y}^c} &= \sum_{o \in \mathbf{O}} \sum_{e_i^o \in E_o} \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \frac{\partial \ddot{\mathbf{C}}_i(s)}{\partial \mathbf{Y}_i} \frac{\partial \mathbf{Y}_i}{\partial \mathbf{Y}^c} ds \\ &= \sum_{e_i^o \in E_o} 2 \cos \theta_i \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \left\{ -2B_0^1(s) + B_1^1(s) \right\} ds \\ &= - \sum_{e_i^o \in E_o} \cos \theta_i (\bar{\mathbf{O}}_i - \mathbf{O} + \bar{\mathbf{Y}}_i - 2\mathbf{Y}_i) .\end{aligned}$$

以上の結果より、 $\sigma(\mathbf{C})$ の $\mathbf{T}^s, \mathbf{T}^c$ に関する変分を 0 とおくと以下の式が得られる。

$$\sum_{e_i^o \in E_o} k_i (\mathbf{O} + 2 \sin \theta_i \mathbf{Y}^s + 2 \cos \theta_i \mathbf{Y}^c) = \sum_{e_i^o \in E_o} k_i (\bar{\mathbf{O}}_i + \bar{\mathbf{Y}}_i) . \quad (4.8)$$

但し、 $\{k_i\}$ は式(4.7)の定義に従う。

同様に、分割点 \mathbf{O} に関する $\sigma(\mathbf{C})$ の変分を求める

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{O}} &= \sum_{o \in \mathbf{V}} \sum_{e_i^o \in E_o} \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \frac{\partial \ddot{\mathbf{C}}_i(s)}{\partial \mathbf{O}} ds \\ &= \sum_{e_i^o \in E_o} 2 \int_0^1 \ddot{\mathbf{C}}_i(s) \left\{ -B_0^1(s) + B_1^1(s) \right\} ds \\ &= \frac{1}{6} (-2\bar{\mathbf{O}}_i + 2\mathbf{O} - 3\bar{\mathbf{Y}}_i + 3\mathbf{Y}_i) ,\end{aligned} \quad (4.9)$$

が求まり、これを 0 とおくことにより以下の式が得られる。

$$\sum_{e_i^o \in E_o} (2\mathbf{O} + 3 \sin \theta_i \mathbf{Y}^s + 3 \cos \theta_i \mathbf{Y}^c) = \sum_{e_i^o \in E_o} (2\bar{\mathbf{O}}_i + 3\bar{\mathbf{Y}}_i) . \quad (4.10)$$

式(4.8)および式(4.10)より、各分割点ごとに 3×3 の線形システムが生成され、これを解くことにより分割点の座標値 \mathbf{O} および接平面ベクトルの値 $\mathbf{Y}^s, \mathbf{Y}^c$ が求められ、分割辺に沿った曲線網を生成することができる。

図4-3から図4-5に多面体から生成される曲線網の例を示す。まず、図4-3のような多面体に対して、4.2.1節で述べた手法により多面体の各辺に沿った曲線網が図4-4のように生成され（但し、 $\alpha^v = 0, \beta_i^v = 1$ ），次に、4.2.2節で述べた手法により三角形分割された曲線網が図4-5のように生成される。

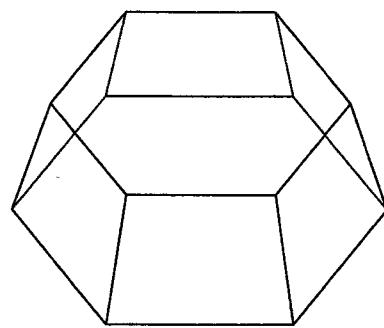


図 4-3: 多面体入力例

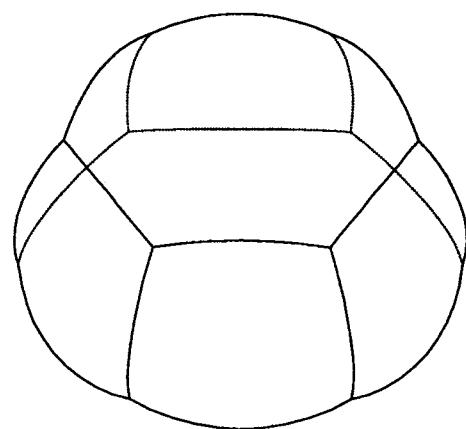


図 4-4: 多面体の稜に沿う曲線網の生成

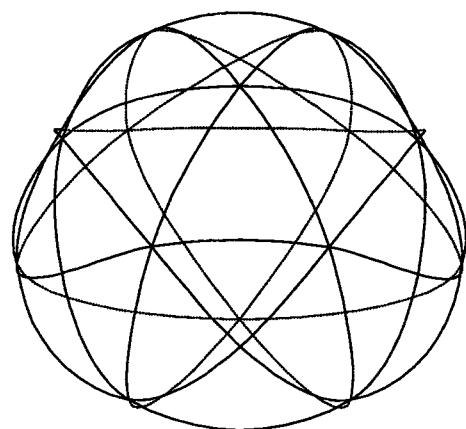


図 4-5: 多面体を三角形分割する曲線網の生成

4.3 三辺形パッチによる曲面生成

4.3.1 曲線網補間と G^1 級の接続条件

n 次の三辺形パッチは三角領域に対する重心座標系を表す変数 u, v, w , $0 \leq u, v, w \leq 1$, $u + v + w = 1$ を用いた, n 次3変数のベジエ多項式 $\{B_{i,j,k}^n(u, v, w)\}$ の線形和の形式を用いて, 以下のように表される.

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(u, v, w) &= \sum_{i,j,k \in Z^n} \mathbf{D}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(u, v, w) , \\ Z^n &:= \{i, j, k | i \geq 0 \cap j \geq 0 \cap k \geq 0 \cap i + j + k = n\} , \\ B_{i,j,k}^n(u, v, w) &= \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k .\end{aligned}\quad (4.11)$$

ここでは三辺形パッチの次数を4次とし, その境界における曲線が4.2節において計算した3次曲線と一致するように, 変数 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}\}$, $i, j, k \in Z^4 \cap i+j+k=0$ (以後, この条件を満足する変数を境界変数と呼ぶ) の値を決める. 例えば, $w=0$ の境界での曲線が式(4.1)で表される3次曲線と一致するように境界変数の値を決定する場合は, 以下の式を適用する.

$$\mathbf{D}_{i,4-i,0} = \frac{i}{4} \mathbf{V}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{4}\right) \mathbf{V}_i , \quad i = 0, 1, \dots, 4 . \quad (4.12)$$

他の境界 $u=0, v=0$ についても, 同様に境界変数の値を決定することができる.

次に, 4次の三辺形パッチで構成される曲面のパッチ境界における連続性の条件について考える. 一般的に, 曲面を構成する三辺形パッチが隣接する境界において滑らかに接続されるためには, その境界上の全ての点で曲面の単位法線ベクトルが一致するという, 1次の幾何学的連続性 (G^1 級) の条件を満足することが必要である(2.2.3節参照).

隣接する曲面を G^1 級で接続するには, 変数 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}\}$, $i, j, k \in Z^4 \cap i+j+k \neq 0$ (以後, この条件を満足する変数を内部変数と呼ぶ) の値を調節する必要がある. いま図4-6で示されるように, $w=0$ の境界において接続されている2つの三辺形パッチ $\mathbf{Q}(u, v, w)$ と $\bar{\mathbf{Q}}(u, v, w)$ がそれぞれ変数 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}\}$ と $\{\bar{\mathbf{D}}_{i,j,k}\}$ をもち, $w=0$ の境界での境界変数が式(4.12)で与えられているものとする. このとき, G^1 級の連続性で接続されるための必要十分な条件は以下の式で表される [Far83, LH89].

$$\alpha \mathbf{D}_{0,3,1} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{D}}_{0,3,1} = \beta \mathbf{V}_0 + (1 - \beta) \mathbf{V}_1 , \quad (4.13)$$

$$\alpha \mathbf{D}_{3,0,1} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{D}}_{3,0,1} = \gamma \mathbf{V}_2 + (1 - \gamma) \mathbf{V}_3 , \quad (4.14)$$

$$\alpha \mathbf{D}_{1,2,1} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{D}}_{1,2,1} = \frac{2}{3}(\beta \mathbf{V}_1 + (1 - \beta) \mathbf{V}_2) + \frac{1}{3}(\gamma \mathbf{V}_0 + (1 - \gamma) \mathbf{V}_1) , \quad (4.15)$$

$$\alpha \mathbf{D}_{2,1,1} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{D}}_{2,1,1} = \frac{1}{3}(\beta \mathbf{V}_2 + (1 - \beta) \mathbf{V}_3) + \frac{2}{3}(\gamma \mathbf{V}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{V}_2) . \quad (4.16)$$

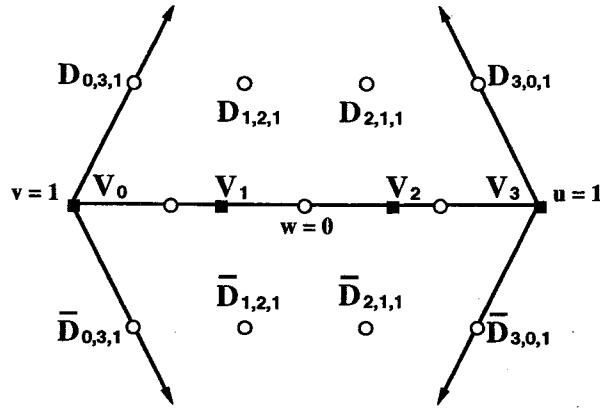


図 4-6: 隣接する三辺形パッチの制御点

ここで, $\alpha : 1 - \alpha = |(\mathbf{D}_{0,3,1} - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)| : |(\bar{\mathbf{D}}_{0,3,1} - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)|$ の関係式が成り立ち,

$$\begin{aligned}
 |(\mathbf{D}_{0,3,1} - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)| &= \left| \frac{3}{4} \mathbf{T}_{i+1} \times \mathbf{T}_i \right| \\
 &= \frac{3}{4} |(\mathbf{T}^s \sin \theta_{i+1} + \mathbf{T}^c \cos \theta_{i+1}) \times (\mathbf{T}^s \sin \theta_i + \mathbf{T}^c \cos \theta_i)| \\
 &= \frac{3}{4} |\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^c| \sin \frac{2\pi}{n} , \\
 |(\bar{\mathbf{D}}_{0,3,1} - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)| &= \left| \frac{3}{4} \mathbf{T}_{i-1} \times \mathbf{T}_i \right| \\
 &= \frac{3}{4} |\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^c| \sin \frac{2\pi}{n} ,
 \end{aligned}$$

となることから, $\alpha = 1/2$ が導かれる. 但し, n は頂点 \mathbf{V}_0 を共有する辺の数とする.

また, 式 (4.13) の左右の項より \mathbf{V}_0 を減じると以下の式が導かれる.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\mathbf{D}_{0,3,1} + \bar{\mathbf{D}}_{0,3,1}) - \mathbf{V}_0 &= \frac{3}{8} (\mathbf{T}_{i+1} + \mathbf{T}_{i-1}) \\
 &= \frac{3}{8} [\mathbf{T}^s (\sin \theta_{i+1} + \sin \theta_{i-1}) + \mathbf{T}^c (\cos \theta_{i+1} + \cos \theta_{i-1})] \\
 &= \frac{3}{4} (\mathbf{T}^s \cos \frac{2\pi}{n} \sin \theta_i + \mathbf{T}^c \cos \frac{2\pi}{n} \cos \theta_i) \\
 &= \frac{3}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \mathbf{T}_i , \\
 \beta \mathbf{V}_0 + (1 - \beta) \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 &= (1 - \beta) \mathbf{T}_i .
 \end{aligned}$$

故に, $\beta = 1 - (3/4) \cos(2\pi/n)$ が導かれる.

同様にして, 式 (4.14) の左右の項より \mathbf{V}_3 を減じて $\gamma = (3/4) \cos(2\pi/\bar{n})$ が導かれる. 但し, \bar{n} は頂点 \mathbf{V}_3 を共有する辺の数とする.

以上の結果と式 (4.15) および式 (4.16) より, 内部変数 $\{\mathbf{D}_{1,2,1}, \bar{\mathbf{D}}_{1,2,1}\}$ と $\{\mathbf{D}_{2,1,1}, \bar{\mathbf{D}}_{2,1,1}\}$ に関する制約式が導かれる.

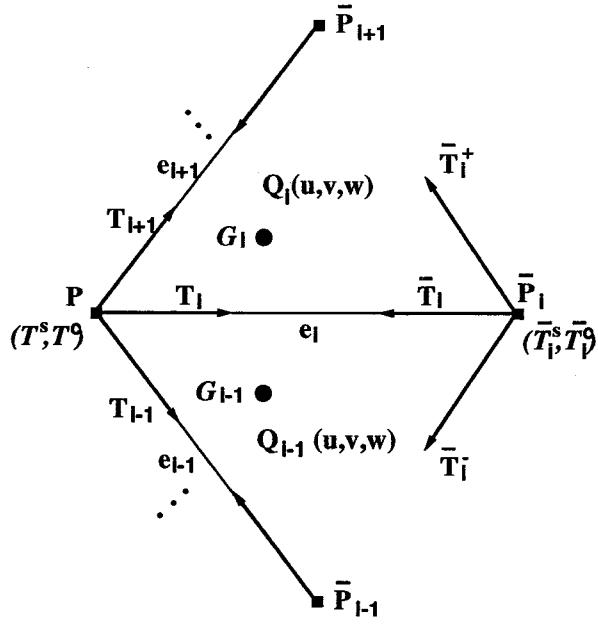


図 4-7: 境界 e_i に関する G^1 級接続

次に、三辺形パッチが全てのパッチ境界において G^1 級の連続性を満たす条件を考える。

まず、点 $\{\mathbf{P}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_i\}$ や接線ベクトル $\{\mathbf{T}_i\}, \{\bar{\mathbf{T}}_i\}$ などが 4.2 節で述べた定義に従うものとし、辺 e_i, e_{i+1} で囲まれる i 番目の三辺形パッチを $\mathbf{Q}_i(u, v, w)$ とする。また、 $\mathbf{Q}_i(u, v, w)$ の点 \mathbf{P} に関する内部変数を \mathbf{G}_i とし、 \mathbf{P} の位置によって、

$$\mathbf{G}_i = \begin{cases} \mathbf{D}_{2,1,1} & ; \text{ if } \mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}_i(1, 0, 0) \\ \mathbf{D}_{1,2,1} & ; \text{ if } \mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}_i(0, 1, 0) , \\ \mathbf{D}_{1,1,2} & ; \text{ if } \mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}_i(0, 0, 1) \end{cases}$$

のように設定する。このとき、点 \mathbf{P} を共有する n 本の辺 $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,n} \in E_{\mathbf{P}}$ に沿う全ての境界に関して式 (4.15) または式 (4.16) で表される連続性の条件を考えると、 \mathbf{G}_i に関する周回的な制約式群が得られる。

ここで、 i 番目の辺に沿う境界に関して \mathbf{P} と対向する点 $\bar{\mathbf{P}}_i$ を共有する辺の数 \bar{n}_i を用いて $\gamma_i = (3/4) \cos(2\pi/\bar{n}_i)$ とし、式 (4.13) から式 (4.16) の $\{\mathbf{V}_i\}, \{\mathbf{D}_{i,j,k}\}, \{\bar{\mathbf{D}}_{i,j,k}\}$ の値をそれらに対応する $\{\mathbf{P}\}, \{\bar{\mathbf{P}}_i\}, \{\mathbf{T}_i\}, \{\bar{\mathbf{T}}_i\}$ などで置き換えると、 G^1 級の制約式群は以下に述べるような線形システムで表される（図 4-7 参照）。

$$\mathbf{G}_i + \mathbf{G}_{i-1} = \mathbf{R}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \frac{4}{3}[\beta(\mathbf{P} + \mathbf{T}_i) + (1 - \beta)(\bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{T}}_i)] + \frac{2}{3}[\gamma \mathbf{P} + (1 - \gamma)(\mathbf{P} + \mathbf{T}_i)] \\ &= \frac{2}{3}[(2\beta + 1)\mathbf{P} + 2(1 - \beta)(\bar{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{T}}_i) + (1 + 2\beta - \gamma)\mathbf{T}_i] \quad . \end{aligned}$$

但し、添字 i は n を法とする周回番号で定義される。

点 \mathbf{P} が開曲面の開いた境界上にある場合は、その境界に沿った接線ベクトル $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_n$ と点 \mathbf{P} における接平面の法線ベクトル $\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^c$ によって張られる平面に対して面对称な関係にある $\{\mathbf{T}_i\}, \{\bar{\mathbf{T}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{T}}_i\}$ の値を想定して $\{\mathbf{R}_i\}$ の値を求め、閉曲面の境界と同様に式 (4.17) を計算する。故に、多面体の各頂点に対して式 (4.17) で表される線形システムによって内部変数の値を解くことができれば、全ての三辺形パッチの境界において G^1 級の連続性の条件が満足される。

4.3.2 三辺形パッチの拡張モデル

式 (4.17) で表される制約式群は n の値が偶数のときに従属な関係となるので、解が存在するためには $\{\mathbf{R}_i\}$ の奇数番目と偶数番目の差分の総和 $Dif(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{R}_i$ が 0 となる条件を満足しなければならない。従って、4次の三辺形パッチはその全ての境界において常に G^1 級連続の条件を満たす曲面を生成することはできないので、4次の三辺形パッチの定義式を拡張することが必要となる。

ここで、式 (4.11) で表される三辺形パッチの内部変数を、それを挟む二つの境界に関するものに分解して、以下のように有理多項式で展開する [HK84] (図 4-8 参照)。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{2,1,1} &= \frac{v \mathbf{D}_{2,1,1}^w + w \mathbf{D}_{2,1,1}^v}{v+w}, \\ \mathbf{D}_{1,2,1} &= \frac{u \mathbf{D}_{1,2,1}^w + w \mathbf{D}_{1,2,1}^u}{u+w}, \\ \mathbf{D}_{1,1,2} &= \frac{u \mathbf{D}_{1,1,2}^v + v \mathbf{D}_{1,1,2}^u}{u+v}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

但し $\{\mathbf{D}_{i,j,k}^s\}$ は、それぞれ $s = 0, s = u, v, w$ の境界に関する連続性のみに影響する変数であり (以後、この変数を内部有理変数と呼ぶ)、その境界における G^1 級の連続性に関する制約式は式 (4.15) または式 (4.16) において内部変数 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}\}$ を内部有理変数 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}^s\}$ で置き換えたものに等しくなる。故に、各境界に対して個別に式 (4.15) または式 (4.16) の制約式を満たすように内部有理変数の値を決定することにより、全ての境界において G^1 級連続の条件を満足する曲面を生成することができる。しかし、各境界に関する内部有理変数の数 (=4) が制約式の数 (=2) の 2 倍になっており変数の解が任意性を有するので、以下に述べる制約を加えてその値を一意に決定する。

まず \mathbf{G}_i が式 (4.18) と同様に、辺 e_i と e_{i+1} の境界に対する $\mathbf{G}_i^{e_i}$ と $\mathbf{G}_i^{e_{i+1}}$ に分解されているものとする (図 4-9 参照)。

点 \mathbf{P} を共有する辺の数 n が奇数の場合は、式 (4.17) により G^1 級連続の条件を満足する内部変数 $\{\mathbf{G}_i\}$ の値を求めることができるので、 $\mathbf{G}_i^{e_i} \equiv \mathbf{G}_i^{e_{i+1}} \equiv \mathbf{G}_i$ のように設定する。

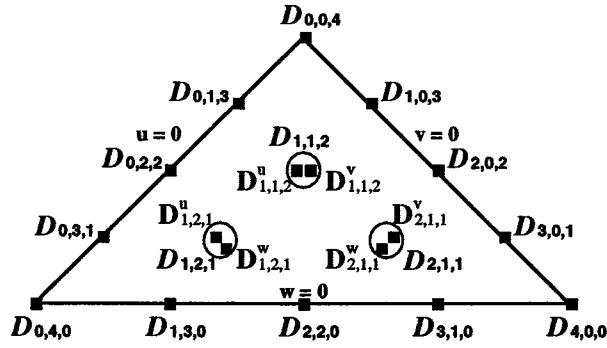


図 4-8: 4 次の三辺形パッチの拡張モデル

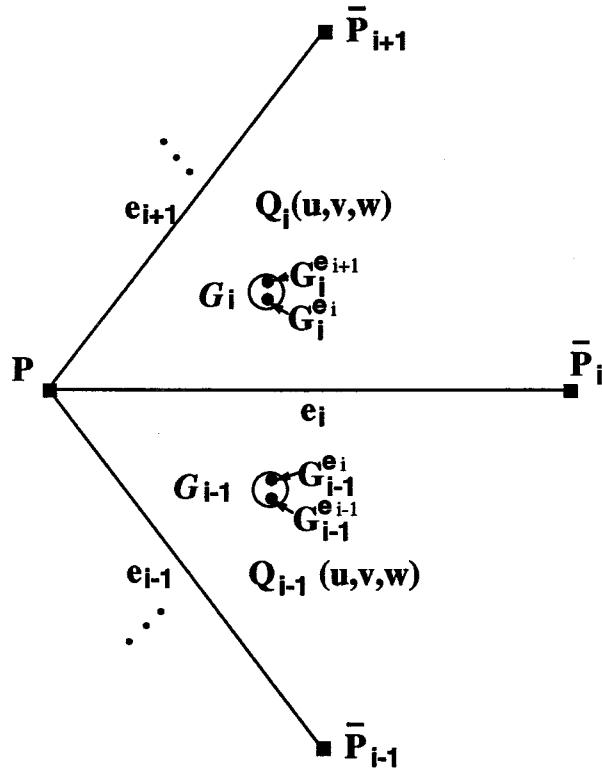


図 4-9: 内部変数 G_i の分解

辺の数 n が偶数の場合は、まず $\{\mathbf{R}_i\}$ の近似値 $\{\tilde{\mathbf{R}}_i\}$ を、

$$\tilde{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_i + \frac{(-1)^{i-1}}{n} Dif(\mathbf{R}) ,$$

によって設定する。このとき、式 (4.17) で表される制約式群の $\{\mathbf{R}_i\}$ を $\{\tilde{\mathbf{R}}_i\}$ で置き換えると $Dif(\tilde{\mathbf{R}}) = 0$ の関係より解 $\{G_i\}$ が存在する。但し、式 (4.17) で表される制約式群が従属関係にあり、変数の数が独立な制約式の数よりも 1 個だけ多いために解が任意性を有す

るので、形状の対称性を考慮した制約式 $\sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{G}_i = 0$ を加えて解を一意に求める。

次に、内部有理変数 $\{\mathbf{G}_i^{e_i}\}$, $\{\mathbf{G}_i^{e_i+1}\}$ の値が $\{\tilde{\mathbf{R}}_i\}$ より求めた $\{\mathbf{G}_i\}$ の近似値となるようする。従って、 $\mathbf{G}_i^{e_i}$, $\mathbf{G}_{i-1}^{e_i}$ については辺 e_i に沿った境界に関して式(4.17)の制約条件 $\mathbf{G}_i^{e_i} + \mathbf{G}_{i-1}^{e_i} = \mathbf{R}_i$ を満足し、 $(\mathbf{G}_i^{e_i} - \mathbf{G}_i)^2 + (\mathbf{G}_{i-1}^{e_i} - \mathbf{G}_{i-1})^2$ の値が最小となるように、以下のように設定する。

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_i^{e_i} &= \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{i-1} + \mathbf{R}_i) , \\ \mathbf{G}_{i-1}^{e_i} &= \frac{1}{2} (\mathbf{G}_{i-1} - \mathbf{G}_i + \mathbf{R}_i) .\end{aligned}\quad (4.19)$$

但し、式(4.19)は $Dif(\mathbf{R}) = 0$ のとき $\mathbf{G}_i^{e_i} \equiv \mathbf{G}_i^{e_i+1} \equiv \mathbf{G}_i$ となる。

以上に述べた、点 \mathbf{P} を含む各辺 $e_i \in E_{\mathbf{P}}$ についての計算を、全ての頂点 $\mathbf{P} \in \mathbf{V}$ に関して行うことにより、内部有理変数 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}^s\}$ の全ての値を一意に決定することができ、三辺形パッチの全ての制御点の値が求まる。このとき生成される曲面は G^1 級の連続性の条件を満足し、4.2節で生成される曲線網の形状の対称性を保持する。また、4次の三辺形パッチは式(4.18)で拡張することにより有理多項式となるが、その次数は他の手法[Her85, Nie87]で用いられる有理多項式の三辺形パッチの次数よりも低くなるという利点がある。頂点の位置を移動させた際には、その点を含む三辺形パッチの内部と外部の変数、およびそれらのパッチと隣接するパッチの内部有理変数の値のみを再計算すればよいので、曲面の局所的な変形・修正操作が実現される。

4.3.3 三辺形パッチと双3次パッチとの G^1 級接続

既存のCAGDシステムの多くは曲面の数学モデルに双3次パッチを用いているが、本章で述べた曲面の数学モデルは、式(4.18)の内部有理変数 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}^s\}$ がそれぞれ独立して各境界の連続性に影響することから、双3次パッチと G^1 級の連続性で接続しやすい形式となっており[LH89]、既存のシステムへの組み込みが容易となる。以下に、 G^1 級接続の方法を具体的に述べる。

式(4.11)および式(4.18)で表される有理展開した4次の三辺形パッチと、3次のバーンスタイン多項式のテンソル積で表される双3次パッチ、

$$\mathbf{S}(u, w) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(w) ,$$

が $w = 0$ の境界において接続され、

$$\mathbf{D}_{i,4-i,0} = \frac{i}{4} \mathbf{P}_{i-1,0} + \left(1 - \frac{i}{4}\right) \mathbf{P}_{i,0} , \quad i = 0, 1, \dots, 4 ,$$

の関係を満たすものとする(図4-10参照)。このとき、 $\mathbf{Q}(u, v, w)$ と $\mathbf{S}(u, w)$ がその境界において G^1 級の連続性を有するための必要十分な条件は $B_i^n(u) = B_{i,n-i,0}^n(u, v, 0)$ の関係

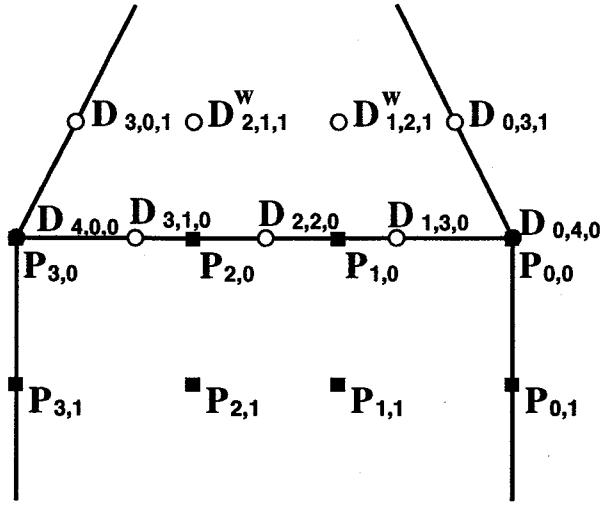


図 4-10: 三辺形パッチと双3次パッチとの接続図

を用いて、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 \det(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) &\equiv 0 , \\
 \mathbf{X}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{S}(u, 0)}{\partial u} &= \sum_{i=0}^2 3(\mathbf{P}_{i+1,0} - \mathbf{P}_{i,0}) B_{i,2-i,0}^2(u, v, 0) , \\
 \mathbf{Y}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{S}(u, 0)}{\partial w} &= \sum_{i=0}^3 3(\mathbf{P}_{i,1} - \mathbf{P}_{i,0}) B_{i,3-i,0}^3(u, v, 0) , \\
 Z(u, v) = \frac{\partial \mathbf{Q}(u, v, 0)}{\partial w} - \frac{\partial \mathbf{Q}(u, v, 0)}{\partial u} &= \sum_{i=0}^3 4(\mathbf{D}_{i,3-i,1} - \mathbf{D}_{i,4-i,0}) B_{i,3-i,0}^3(u, v, 0) .
 \end{aligned}$$

但し、内部変数 $\mathbf{D}_{1,2,1}$, $\mathbf{D}_{2,1,1}$ は、 $w = 0$ の境界に関する内部有理変数 $\mathbf{D}_{1,2,1}^w$, $\mathbf{D}_{2,1,1}^w$ を表すものとする。

この条件は、 $(l_1 u + l_2 v) \mathbf{X}(u, v) + \mathbf{Y}(u, v) + \mathbf{Z}(u, v) \equiv 0$ (但し、 l_1, l_2 は任意の定数) と置き換えることができ、これを各係数 $u^i v^j$, $i + j = 3$ について解くことにより、

$$\begin{aligned}
 4(\mathbf{D}_{0,4,0} - \mathbf{D}_{0,3,1}) &= 3l_1(\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}) + 3(\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}) , \\
 4(\mathbf{D}_{3,1,0} - \mathbf{D}_{3,0,1}) &= 3l_2(\mathbf{P}_{3,0} - \mathbf{P}_{2,0}) + 3(\mathbf{P}_{3,1} - \mathbf{P}_{3,0}) , \\
 4(\mathbf{D}_{1,3,0} - \mathbf{D}_{1,2,1}) &= l_2(\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}) + 2l_1(\mathbf{P}_{2,0} - \mathbf{P}_{1,0}) + 3(\mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{1,0}) , \\
 4(\mathbf{D}_{2,2,0} - \mathbf{D}_{2,1,1}) &= l_1(\mathbf{P}_{3,0} - \mathbf{P}_{2,0}) + 2l_2(\mathbf{P}_{2,0} - \mathbf{P}_{1,0}) + 3(\mathbf{P}_{2,1} - \mathbf{P}_{2,0}) ,
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

の関係式が得られる。故に、双3次パッチの制御点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ の値が与えられた場合に、式(4.20)において l_1, l_2 の値を適当に与えることにより三辺形パッチの制御点 $\{\mathbf{D}_{i,j,k}\}$ の値を求めれば、三辺形パッチと双3次パッチを G^1 級の連続性で接続することができる。逆に $\{\mathbf{D}_{i,j,k}\}$ の値が与えられた場合にも、同様にして $\{\mathbf{P}_{i,j}\}$ の値を求めるこにより G^1 級

接続が行える。また、他の境界同士の組み合わせについても、同様な条件式を導くことができる。

4.3.4 曲面生成例

本章で述べた、多面体より三辺形パッチ曲面を生成する手法を以下に要約する。

1. 入力された多面体の各頂点および各辺に対する張力変数 $\{\alpha^v\}, \{\beta_i^v\}$ の値を設定する。
2. 多面体の辺に沿った曲線網の張力変数を含む疑似ノルムの総和が最小になるように、各頂点に関する接平面を定義するベクトル $\{T^s\}, \{T^c\}$ の値を計算する。
3. 多面体の各面を三角形分割する点を含む曲線網の疑似ノルムの総和が最小になるように、分割点の座標値 $\{O\}$ と接平面ベクトル $\{Y^s\}, \{Y^c\}$ の値を計算する。
4. 三辺形パッチの境界曲線に相当する外部の制御点（境界変数）の値を、手続き 2. および 3. で決定した曲線網の値より計算する。
5. 三辺形パッチの内部の制御点を有理多項式で展開した変数（内部有理変数）の値を、曲面が G^1 級の連続性の条件を満足し、4 次のベジエ三辺形パッチを近似するように計算する。

以上の手続きで生成される三辺形パッチ曲面の例を図 4-11から図 4-14に示す。

図 4-11は、図 4-5で与えられた曲線網から生成された曲面を表す。図 4-12は、図 4-3で与えられた多面体で、上部の六辺形領域に曲面が存在しない場合の開曲面の例を示す。図 4-13は、図 4-3の多面体の上部の六辺形に含まれる全ての辺に対する張力値の値を $\beta_i^v = 10$ に変えた場合の曲面、図 4-14は、同じ六辺形に含まれる全ての頂点に対する張力値の値を $\alpha^v = 10$ に変えた場合の曲面を表す。

β_i^v の値を増やすことによって、上部の六辺形領域に含まれる三辺形パッチの形状が平たくなる。一方、 α^v の値を増やすことによっても同じ領域の三辺形パッチの形状が平たくなるが、 β_i^v のときと違って各頂点において尖った部分形状をなす。以上の例が示すように、張力変数 $\{\alpha^v\}, \{\beta_i^v\}$ を曲線網を生成する際の形状制御変数として用いることにより、曲面の局所的かつ直観的な変形操作が実現できる。

本章で述べた、多面体による三辺形パッチ曲面の生成手法は、単調な形状の曲面の生成にも有効であることを示す。ここでは、単調な曲面の代表例として球面とトーラス面を取りあげ、それらの近似多面体から本手法によって生成された曲面の例を示す。

まず、球面やトーラス面上の点を等間隔で標本化して構成した多面体の例を図 4-15および図 4-16に示す。次に、これらの多面体から生成された三辺形パッチ曲面の生成例を図 4-19および図 4-20に示す。但し、各図の右側には NURBs（式（2.8）参照）によって数学

的に厳密に表現された球面およびトーラス面の生成例を、図の左側には本手法による三辺形パッチ曲面の生成例を示す。NURBs曲面との比較により本手法が単調な形状の曲面の再現性に優れていることが示された。

本章で述べた曲面生成法は、任意の多面体に対して滑らかな曲面を生成することができるが、多面体の種類によっては直観的な形状を得られない場合がある。例えば、凹形の多辺形を含む多面体（図4-17）を与えた場合、凹形領域に対する分割点がその領域の外部にくるように曲線網が計算されることがあるので、直観的に把握しにくい形状（図4-21）を生成してしまう。しかし、凹形の領域を複数の凸形部分（図4-18）に再分割すれば、分割点がその領域の内部に存在するような曲線網が計算され、直観に合った形状（図4-22）を生成することができる。

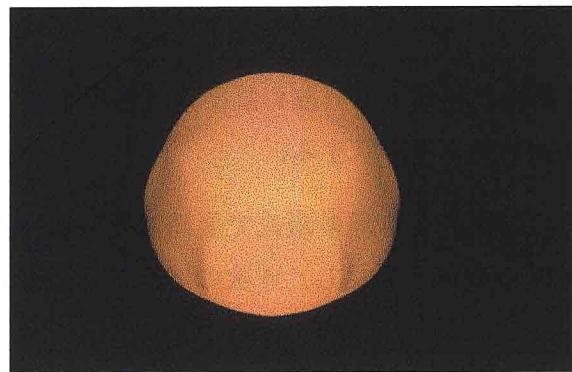


図 4-11: 閉曲面生成例

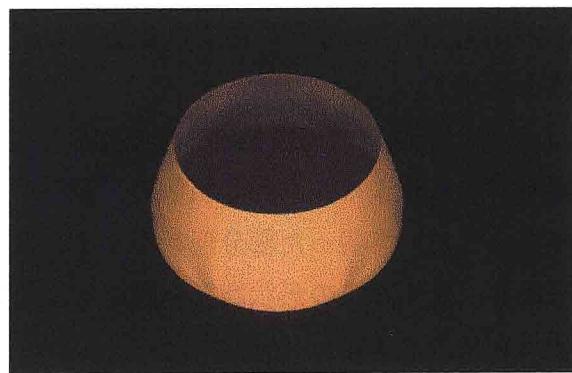


図 4-12: 開曲面生成例

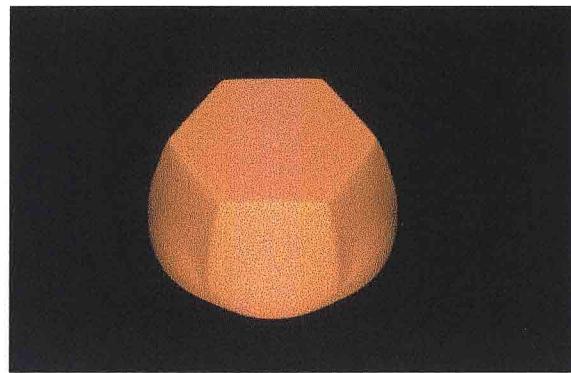


図 4-13: 張力変数を用いた曲面生成例 ($\alpha = 0, \beta = 10$)

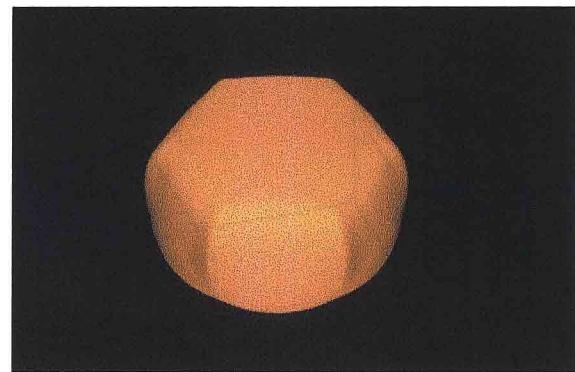


図 4-14: 張力変数を用いた曲面生成例 ($\alpha = 10, \beta = 0$)

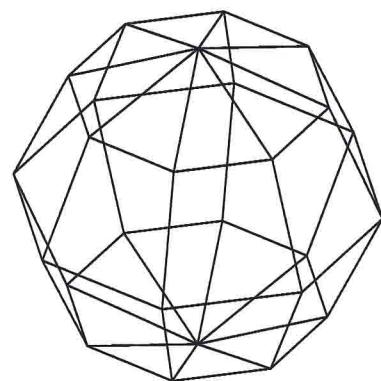


図 4-15: 球面から構成される多面体

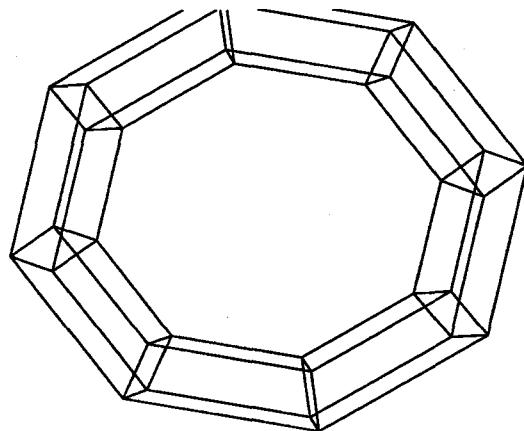


図 4-16: トーラス面から構成される多面体

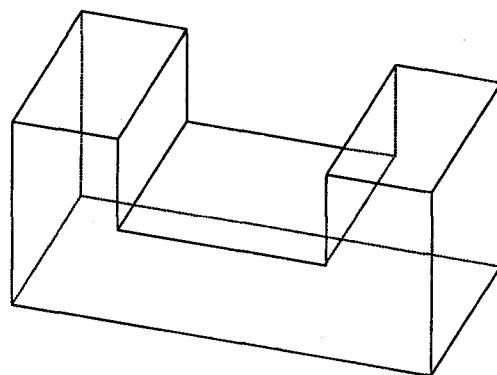


図 4-17: 凹形領域を含む多面体

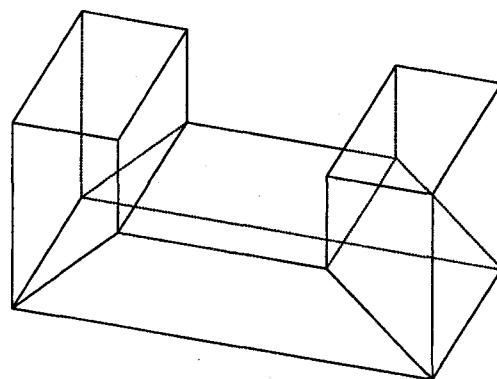


図 4-18: 再分割された凹形領域を含む多面体

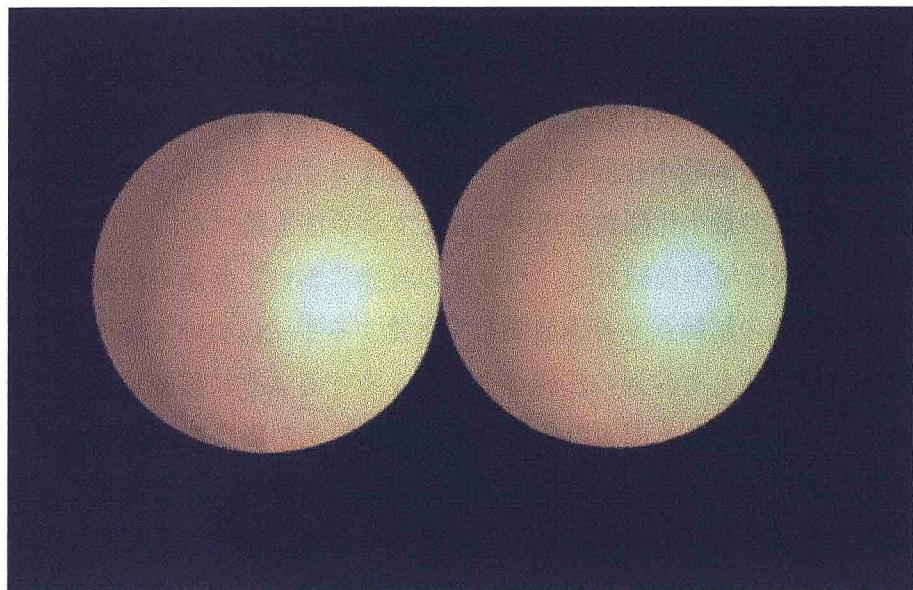


図 4-19: 球面をあらわす NURBs 曲面と三辺形パッチ曲面

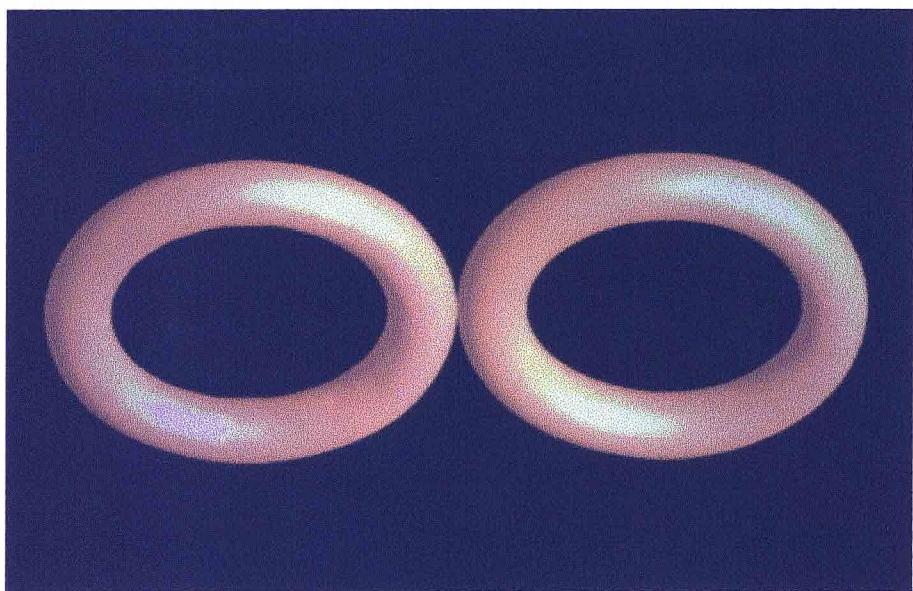


図 4-20: トーラス面をあらわす NURBs 曲面と三辺形パッチ曲面

4.4 結言

本章では、三辺形パッチを用いて多面体から自由曲面を生成する手法について述べた。

まず、多面体の頂点を含み稜に沿う滑かな曲線網を、各頂点および辺に対して付与される張力変数を含む疑似ノルム最小化関数を用いて計算する手法を述べ、多面体の各面を三角形分割する曲線網を同様の最小化関数を用いて計算する手法を述べた。

次に、求めた曲線網を境界曲線とし、パッチの境界において共通の法線ベクトルを有する三辺形パッチを、内部の制御点を有理展開して計算する手法について述べ、このとき生成される曲面が双3次パッチとも共通の法線ベクトルを有するように接続可能なことを示し、最後に本手法によって生成される曲面の各種の例を示してその形状を評価した。

本手法により、デザイナーは形状のおおまかな構造を多面体により記述し、多面体の各頂点および辺に対する張力変数の値を調節して簡略かつ柔軟に曲面の形状を設計することができる。また本手法は、多面体の構造を任意に指定できるので、テンソル積曲面間の融合の際に問題となった、制御点の配置のトポロジーに関する制約を受けず、テンソル積曲面に基づく既存の手法と比較して、複雑な形状やトポロジーをもつ曲面をより柔軟に設計できる。

曲面形状を変形・修正する際に、各頂点における接平面ベクトルの値は擬似ノルム最小化関数を用いずに直接的に指定することも可能である。また、多面体の各面領域を定義する頂点群は幾何的に同一平面上にある必要はないので、各頂点の位置は任意に移動できる。このとき、局所的に曲面を再計算すればよいので、多面体の複雑度とは無関係に形状を局所的に制御できる。

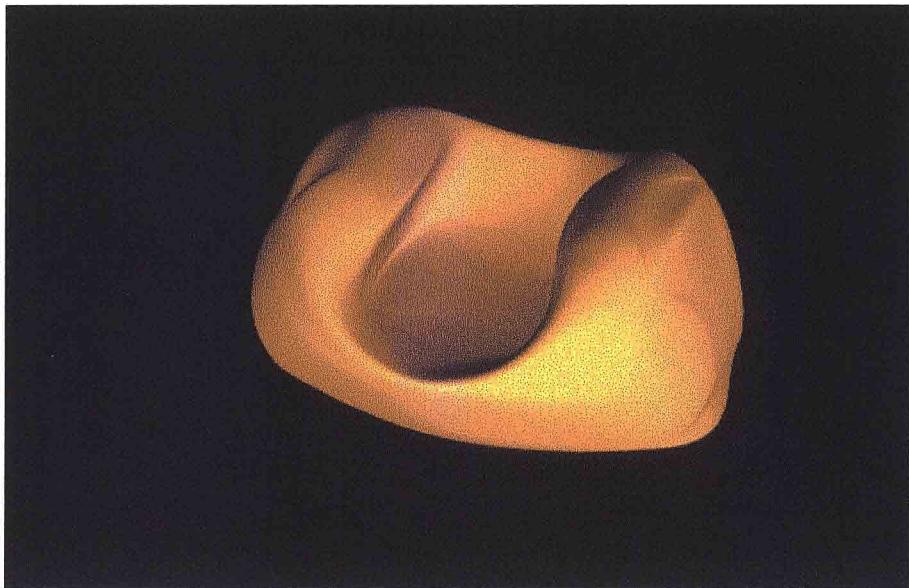


図 4-21: 凹形領域を含む曲面の生成例

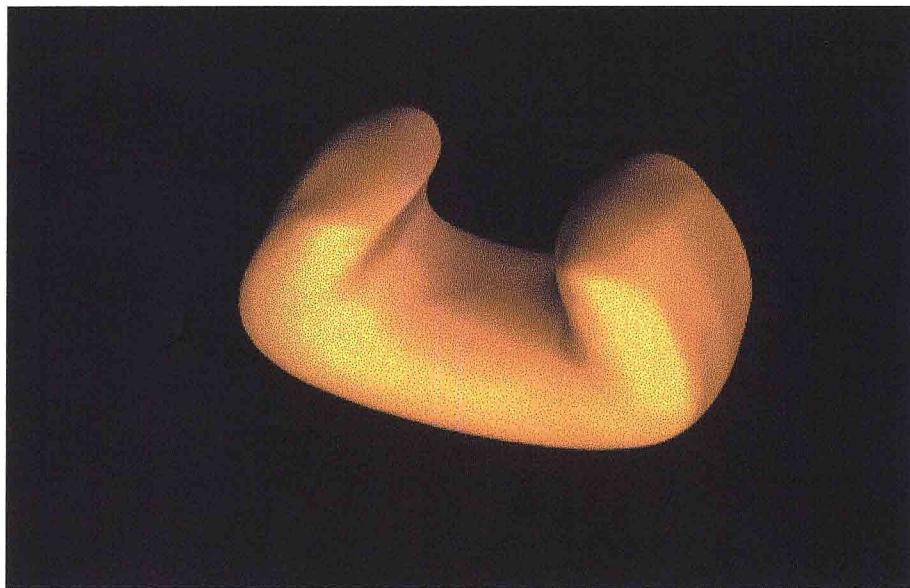


図 4-22: 再分割された凹形領域を含む曲面の生成例

第5章 曲線網による曲面生成法

5.1 緒言

第3章で述べたスプライン補間曲面や、曲線を掃引して得られる掃引曲面は、曲線式の次数と節点ベクトルの値を任意に選べ、2次の幾何学的連続性(G^2 級)の条件を満たす曲面を生成できるが、曲面の設計の際に制御点や曲線の配置のトポロジーに関する制約を受ける。一方、第4章で述べた多面体による三辺形パッチ曲面の生成手法はトポロジーに関する制約を受けずに曲面を設計できるが、パッチの境界において共通の法線ベクトルをもつという G^1 級の条件しか満たさない。しかし、工業デザインにおいては生成される曲面がパッチ間の境界において G^2 級の連続性の条件を満たすように接続され、陰影表示された曲面の光の反射曲線が連続かつ滑らかに見えることが要求される。また、三辺形パッチは全ての曲面の張られる多角形領域を三角形に分割する必要性が生じ、生成される形状がその分割方法に影響を受けるという問題点がある。これに対して、多辺形パッチは任意の数の側を有することができるので、多角形の領域に対して曲面を生成するのにより適している。

曲面形状の特徴を表す空間曲線をトポロジーに関する制約を受けずに任意に配置できれば、曲面を柔軟に設計できる。しかし、これまでに提案された三辺形パッチ[Far86, Whe86, Pip87, HP89, 栗山91b]、あるいは多辺形パッチ[HK84, CG84, Gre86, LD89, Var91]の数学モデルは、多辺形の各頂点に対して与えられる座標値や接線ベクトル値などの幾何データから曲面が生成されるので、各辺に沿った境界曲線を任意の次数および節点ベクトルで指定できず、曲面形状を任意の曲線によって設計するのには対処できない。故に、本章では任意の次数、節点ベクトル、および交差のトポロジーを有する曲線網から、任意の次数の幾何学的連続性の条件を満たす多辺形パッチ曲面を生成する手法と、その手法を応用して開発したサーフェイスモデラーについて述べる。

まず、曲線網から多辺形パッチ曲面を生成する手法を示す。ここでは、N角形領域に対する重心座標系で定義される直交変数と、互いに交わる境界曲線対で副曲面を構成し、それを超限補間関数によって融合させて多辺形パッチ曲面を生成する手法を提案する。さらに、本手法で生成される曲面の幾何学的な連続性の次数が、曲線網を構成する各曲線のパラメトリックな連続性の次数と同次であることを示す。また、曲線網が特異な交差状態を含む場合に、曲面の構成法を修正して幾何学的に連続な曲面を生成する手法についても解説する。

次に、本手法を用いて試作された、形状特徴曲線の入力に基づくサーフェイスモデラーのシステム構成と各構成部の機能について述べ、さらに本システムで用いられる曲線網に対するトポロジーデータおよび幾何データについて詳述する。また、曲線網のトポロジーを曲線間の交点における幾何学的な特徴量より推定して曲線網を生成する手法と、曲線網より多辺形パッチ曲面を生成する手法について述べる。

最後に、本システムを用いた曲面形状の設計過程における入力操作例を具体的に示す。

5.2 多辺形パッチによる曲面生成

5.2.1 副曲面の生成

本節では、N本の曲線によって囲まれたN辺形のパッチをN変量の重心座標系によって定義し、ある曲線を誘導曲線、その曲線と交わる2本の曲線を横断曲線とし、横断曲線を誘導曲線に沿ってそれぞれ掃引させた曲面式の線形結合により副曲面を生成する手法を述べる。このとき副曲面の誘導曲線上における幾何学的な連続性の次数は、横断曲線の連続性の次数と一致する。

i 番目の副曲面 \mathbf{S}_i は辺 e_i, e_{i-1} 、および e_{i+1} 上の境界曲線により生成される。辺 e_i に対する境界曲線 \mathbf{C}_i は変数区間 $t \in [t_i^0, t_i^1]$ で定義され、図 5-1 に示すように辺 e_{i-1} (e_{i+1}) に対する境界曲線 \mathbf{C}_{i-1} (\mathbf{C}_{i+1}) と $t = t_i^0$ (t_i^1) で交わり、その交点 $\mathbf{C}_i(t_i^0)$ および $\mathbf{C}_{i-1}(t_i^0)$ ($\mathbf{C}_i(t_i^1)$ および $\mathbf{C}_{i+1}(t_i^0)$) を、頂点 p_i (p_{i+1}) と一致させる。境界曲線 \mathbf{C}_i の次数に関する制約はなく、変数区間 $t \in [t_i^0, t_i^1]$ 内に任意の節点ベクトルを含むものとする。ここでは、 \mathbf{C}_i を誘導曲線とし、 \mathbf{C}_{i-1} と \mathbf{C}_{i+1} の各々を横断曲線として掃引した曲面を線形結合したものを考える。

まず最初に、 u_i を誘導曲線の、 v_i を横断曲線の媒介変数とし、辺 e_i に対する直交変数 (u_i, v_i) を一般化された重心座標系 \mathbf{b} (2.4.2.2 節参照) を用いて以下の関係式で定義する。

$$\begin{aligned} u_i &= \begin{cases} \Delta_i \sum_{k=1}^{N/2} b_{i+k} & ; N \text{ is even} \\ \Delta_i / (1 - b_{i+(N+1)/2}) \sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_{i+k} & ; N \text{ is odd} \end{cases}, \\ v_i &= Fu_i(u_i) \sum_{k=2}^{N-1} b_{i+k}, \quad \Delta_i = t_i^1 - t_i^0, \\ Fu_i(u_i) &= \Delta_{i-1} (1 - \tilde{u}_i) + \Delta_{i+1} \tilde{u}_i, \quad \tilde{u}_i = u_i / \Delta_i. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、 b の添字は N を法として周回的に定義され、 \tilde{u}_i は u_i の正規化変数とする。

このとき、副曲面 \mathbf{S}_i は直交変数 (u_i, v_i) を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{S}_i(u_i, v_i) = g_{i-1}(u_i) \mathbf{T}_{i-1,i}(u_i, v_i) + g_{i+1}(u_i) \mathbf{T}_{i+1,i}(u_i, v_i), \quad (5.2)$$

但し、 $\mathbf{T}_{p,i}(u_i, v_i)$ は横断曲線 \mathbf{C}_p を誘導曲線 \mathbf{C}_i に沿って平行掃引させた曲面で、以下のように表される。

$$\mathbf{T}_{p,i}(u_i, v_i) = \mathbf{C}_p(v_i + t_p^0) - \mathbf{C}_p(t_p^0) + \mathbf{C}_i(u_i + t_i^0), \quad p = i-1, i+1.$$

加重係数 g_{i-1}, g_{i+1} は以下の制約式、

$$g_{i-1}(u_i) + g_{i+1}(u_i) \equiv 1, \quad u_i \in [0, \Delta_i],$$

$$g_{i-1}(0) = g_{i+1}(\Delta_i) = 1,$$

を満たす任意の関数を設定することができる。ここでは、各曲線 C_i に対して曲面形状への影響度を指定する変数 w_i を割り当て、この値を用いて加重係数 g_{i-1}, g_{i+1} を以下のように構成する。

$$\begin{aligned} g_{i-1}(u_i) &= \frac{w_{i-1} (1 - \tilde{u}_i)}{w_{i-1} (1 - \tilde{u}_i) + w_{i+1} \tilde{u}_i} , \\ g_{i+1}(u_i) &= \frac{w_{i+1} \tilde{u}_i}{w_{i-1} (1 - \tilde{u}_i) + w_{i+1} \tilde{u}_i} . \end{aligned}$$

また、副曲面 S_i の別の構成法として、 3×3 のアフィン変換行列 $M_{p,i}$ による以下の定義が用いられる。

$$\begin{aligned} S_i(u_i, v_i) &= \hat{C}_{i-1}(v_i) M_{i-1,i}(u_i) + \hat{C}_{i+1}(v_i) M_{i+1,i}(u_i) + C_i(u_i + t_i^0) , \\ \hat{C}_p(v_i) &= C_p(v_i + t_p^0) - C_p(t_p^0) , \quad p = i-1, i+1 , \end{aligned}$$

但し、アフィン変換行列 $M_{p,i}$ の各要素は変数 u_i のみに依存する任意の関数で表される。

ここで、行列 $M_{p,i}$ の j 行 k 列の要素 $m_{p,i}^{(j,k)}$ を2次関数で定義し、その値を横断曲線を補間するように以下のように設定する。

$$M_{i-1,i}(0) = M_{i+1,i}(\Delta_i) = I , \quad M_{i-1,i}(\Delta_i) = M_{i+1,i}(0) = O ,$$

但し、 I は単位行列を、 O はゼロ行列を表す。故に、行列 $M_{p,i}$ の値は以下のように設定される。

$$\begin{aligned} m_{p,i}^{(j,k)}(u_i) &= c_{p,i}^{(j,k)}(u_i^2 - \Delta_i u_i) + g_{p,i}^{(j,k)}(u_i) , \\ g_{p,i}^{(j,k)}(u_i) &= \begin{cases} (\Delta_i - u_i)/\Delta_i & \text{for } p = i-1 \wedge j = k \\ u_i/\Delta_i & \text{for } p = i+1 \wedge j = k \\ 0 & \text{for } j \neq k \end{cases} , \end{aligned}$$

但し、 $c_{p,i}^{(j,k)}$ は未定係数を表し、全ての $c_{p,i}^{(j,k)}$ の値をゼロに設定すると、横断曲線 C_p を誘導曲線 C_i に沿って平行に掃引した曲面を線形結合した副曲面が得られる。

ここで、副曲面式 S_i を局所変数 u_i, v_i の変数変換を用いて以下のように近似し、

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i(u, v) &= \hat{C}_{i-1}(\Delta_{i-1} v) M_{i-1,i}(\Delta_i u) + \hat{C}_{i+1}(\Delta_{i+1} v) M_{i+1,i}(\Delta_i u) + C_i(\Delta_i u + t_i^0) , \\ 0 \leq u, v &\leq 1 , \end{aligned}$$

副曲面 S_i のエネルギー関数 E_i を、以下のように定義する。

$$E_i = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}_i(u, v)}{\partial u^2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}_i(u, v)}{\partial u \partial v} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}_i(u, v)}{\partial v^2} \right\|^2 dv du .$$

このとき滑らかな副曲面を生成するために、誘導曲線 C_i を共有して隣接する2つの副曲面 S_i と \bar{S}_i のエネルギー関数 E_i と \bar{E}_i の和を最小化するように、係数 $c_{p,i}^{(j,k)}$ の値を変分法

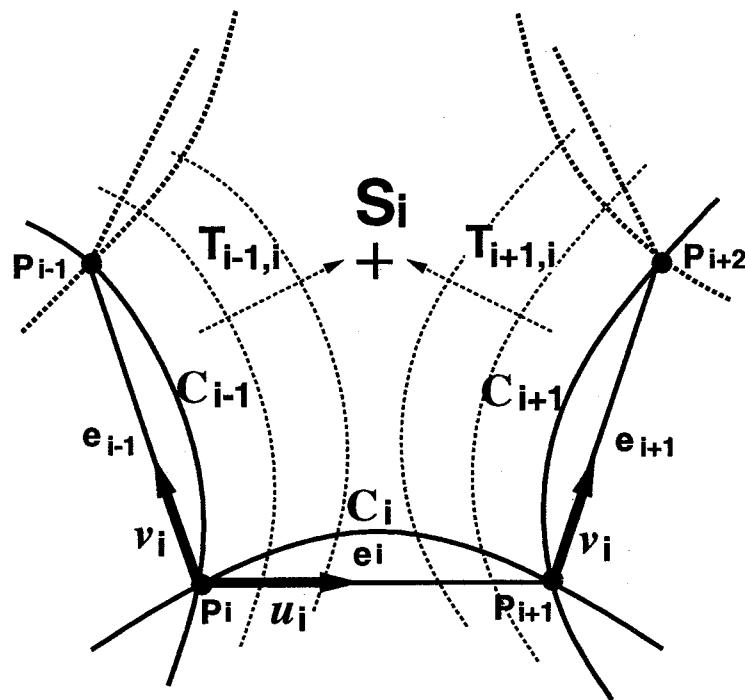


図 5-1: 副曲面生成図

$\partial(E_i + \bar{E}_i)/\partial c_{p,i}^{(j,k)} = 0$ で得られる線形システムにより計算し、隣接する 2 つの副曲面 S_i と \bar{S}_i の変換行列を求める。また、より滑らかな副曲面を生成するために、行列 $M_{p,i}$ の定義を 2 次のスプライン関数に拡張することも可能である。

図 5-1に、副曲面の生成の模式図を示す。

5.2.2 副曲面の融合

本節では、各曲線を誘導曲線として生成した N 個の副曲面を、超限補間関数によって融合して N 辺形パッチ曲面を生成する手法について述べる。このとき用いられる超限補間関数は、各副曲面の誘導曲線上における幾何的な値を補間する性質をもつので、生成される曲面はパッチ間の全ての境界において、誘導曲線を共有する副曲面間の幾何学的な連続性を継承する。

まず、 m 次の超限補間関数 $\{B_i^m\}$ を

$$B_i^m(\mathbf{b}) = \frac{(b_i b_{i+1})^m}{\sum_{k=1}^N (b_k b_{k+1})^m} , \quad i = 1, 2, \dots, N , \quad (5.3)$$

で定義して、 N 辺形パッチ \mathbf{Q}^N を以下のように生成する。

$$\mathbf{Q}^N(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i(\mathbf{b}) B_i^m(\mathbf{b}) .$$

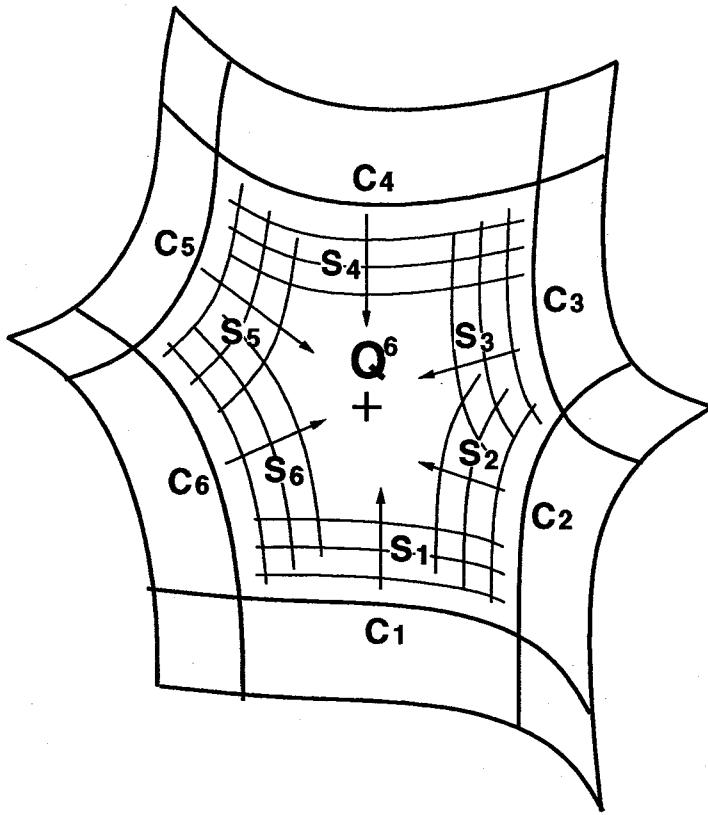


図 5-2: 副曲面融合図

超限補間関数 B_i^m は領域多角形の頂点において特異点をもつので、 B_i^m の頂点近傍における極限的振る舞いを考慮して、頂点における値を以下のように設定する。

$$B_i^m(\mathbf{b})_{\mathbf{b} \in p_j} = \begin{cases} 0 & ; j \neq i, i+1 \\ 1/2 & ; j = i, i+1 \end{cases}$$

但し、 $\mathbf{b} \in p_i := \{b_i = 1, b_{j \neq i} = 0\}$ は頂点 p_i における \mathbf{b} の値を表す。この設定によって、関数 B_i^m は全ての領域で連続な関数となる。

ここで提案する超限補間関数 $\{B_i^m\}$ は、ニルソン [Nie87] とヘイゲン [HP89] によって提案された、三角領域に対する補間関数の一般化と見なすことができる。シャロットとグレゴリー [CG84] は同様の性質を有する融合関数を用いた曲面の生成法を提案したが、この手法では多変量座標系を正多角形内の点と各辺との間の垂直距離の比によって定義し、領域多角形（5角形）の2辺にわたって値を補間するように、融合関数を多変量座標系の3変数の組み合わせで構成している（2.4.2.3 節参照）。図 5-2に、副曲面の融合の模式図を示す。また、3角、4角、および5角形領域についての関数 B_i^3 の分布図を図 5-3に示す。また、図 5-4に C^2 級の条件を満たす3次スプラインの閉曲線網の例と、その曲線網から生成された閉曲面を示す。

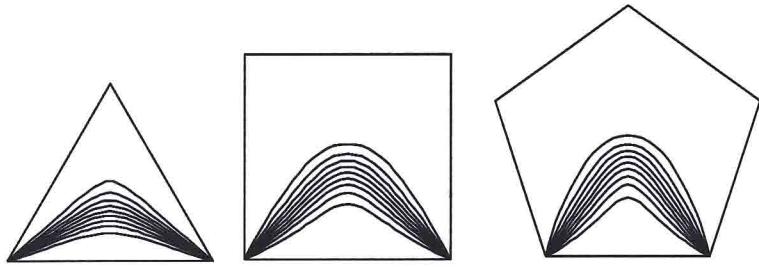


図 5-3: 超限補間関数 B_i^3 の分布図

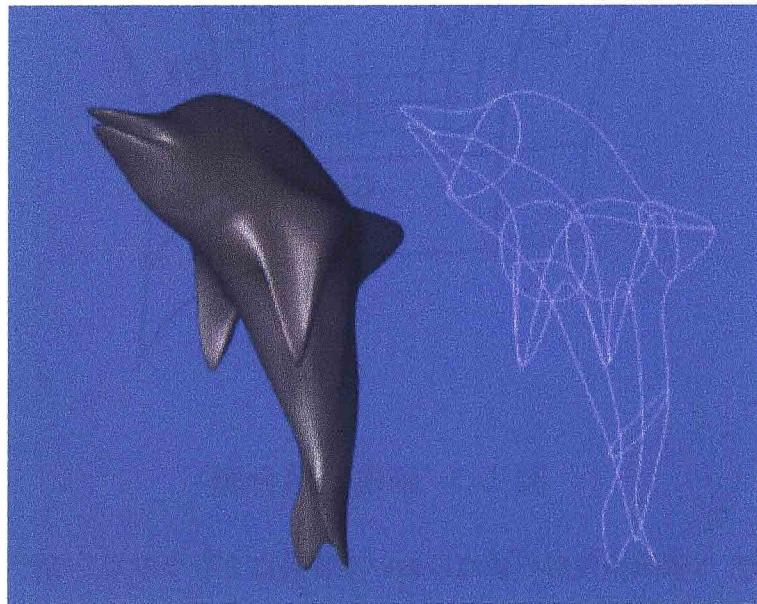


図 5-4: C^2 級閉曲線網と閉曲面生成例

次に、図 5-5および図 5-6において、本章で述べた曲面の生成手法を既存の CAGD システムで用いられる曲面の生成に応用した例を示す。

図 5-5にはフィレット曲面の生成例を示す。フィレット面には陰関数曲面やローリング・ボール法による曲面 [CJ89, HL88]、および媒介変数曲面が用いられるが、媒介変数曲面によるフィレット面の生成には領域を 3 辺形あるいは 4 边形に再分割して G^1 級のグレゴリーパッチで曲面を内挿する手法が提案されている [Chi86, Sar87]。一方、本章で提案する手法は、領域の再分割を伴わずに高次の連続性を有するフィレット面が生成できるという利点がある。また、図 5-6にはトリム曲面の生成例を示す。境界曲線によって囲まれる領域が凹形状をなす場合は、生成される曲面に不自然な折り返し、隆起、突起が現れてしまうことがあるので、図 5-6の例のようにそれらの領域に曲線を加えて凸形状の領域に再分割する必要がある。

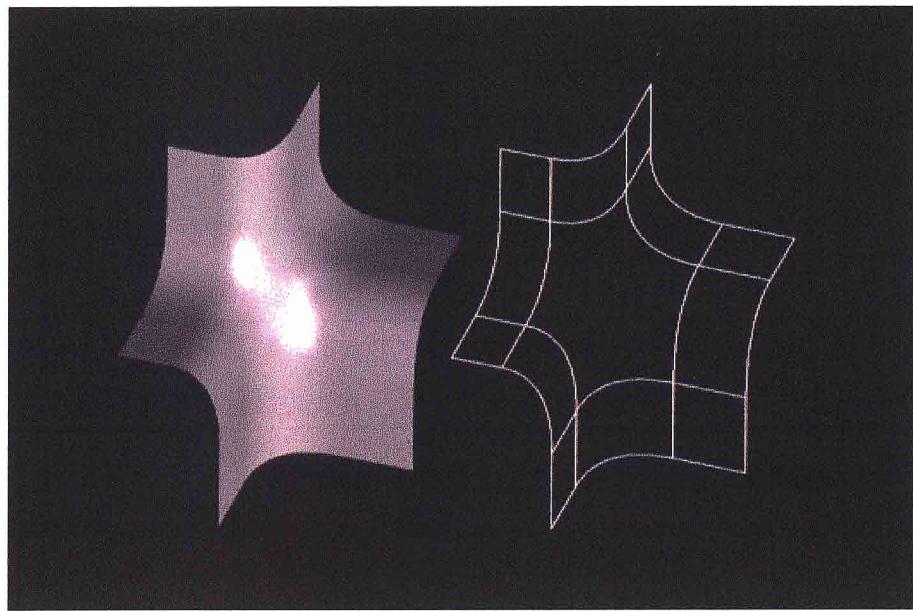


図 5-5: フィレット曲面生成例

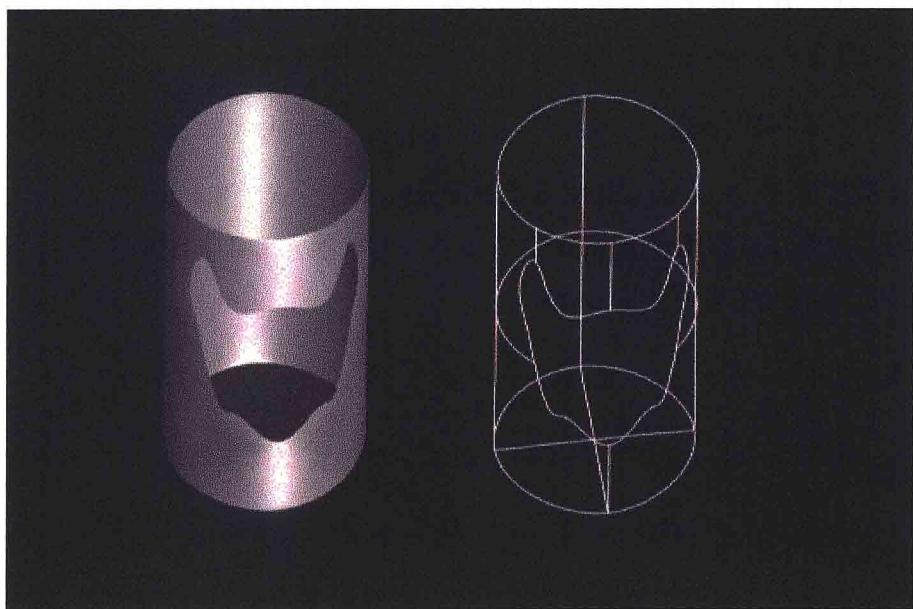


図 5-6: トリム曲面生成例

5.2.3 曲面の幾何学的連続性

本節では、5.2 節で提案される手法が、 n 次のパラメトリックな連続性の条件を満たす (C^n 級) 曲線から、 n 次の幾何学的連続性の条件を満たす (G^n 級) 多辺形パッチ曲面を生成することを証明する。 G^n 級は C^n 級を拡張したものであり、パッチ間の境界における接続の幾何学的な滑かさを表す。幾何学的連続性は、パッチの変数変換に対して不変であるという観点より以下のように定義される [Her87]。

定義：二つの曲面パッチは、その境界において n 次のパラメトリックな連続性の条件を満たすように変数変換できるならば、 n 次の幾何学的連続性を有する。

式 (5.3) は領域多角形の辺上において以下の条件を満たす。

$$\begin{aligned} B_i^n(\mathbf{b})_{\mathbf{b} \in e_i} &= 1, \\ B_i^n(\mathbf{b})_{\mathbf{b} \in e_j \neq i} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^h B_i^n(\mathbf{b})}{\partial b_j^h} \right)_{\mathbf{b} \in e_k=1,\dots,N} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad h = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

但し、 $\mathbf{b} \in e_i := \{b_i + b_{i+1} = 1, b_{j \neq i,i+1} = 0\}$ は、辺 e_i 上における \mathbf{b} の値を表す。

方向微分 D は、 \mathbf{b} に関する偏微分の線形結合で表されるので、結果的に \mathbf{Q}^N は \mathbf{S}_i の $n-1$ 階までの任意の方向微分値を辺 e_i 上において保存する。

$$(D^h \mathbf{Q}^N(\mathbf{b}))_{\mathbf{b} \in e_i} = (D^h \mathbf{S}_i(\mathbf{b}))_{\mathbf{b} \in e_i}, \quad h = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.4)$$

但し、 D^h は演算子 D を h 回適用することを意味する。式 (5.4) よりパッチ \mathbf{Q}^m の辺 e_i 上での G^n 級の条件は、副曲面 \mathbf{S}_i に対する条件に置き換えることができる。

ここで、辺 e_i と直交する方向微分 D_i を、

$$D_i = (b_i + b_{i-1}) \frac{\partial}{\partial b_{i-1}} + (b_{i+1} + b_{i+2}) \frac{\partial}{\partial b_{i+2}} + \sum_{k=3}^{N-2} b_{i+k} \frac{\partial}{\partial b_{i+k}} - (1 - u_i) \frac{\partial}{\partial b_i} - u_i \frac{\partial}{\partial b_{i+1}},$$

で定義すると、座標系 (u_i, v_i) に関して以下のようない性質が得られる。

$$D_i u_i = 0, \quad D_i v_i = F u_i(u_i).$$

故に、 u_i と v_i は D_i に関して直交関係にあり、副曲面 \mathbf{S}_i の D_i に関する方向微分も、

$$\begin{aligned} D_i^h \mathbf{S}_i(u_i, v_i) &= g_{i-1}(u_i) \mathbf{M}_{i-1} D_i^h \mathbf{C}_{i-1}(v_i + t_{i-1}^0) + g_{i+1}(u_i) \mathbf{M}_{i+1} D_i^h \mathbf{C}_{i+1}(v_i + t_{i+1}^0) \\ &= g_{i-1}(u_i) \mathbf{M}_{i-1} \frac{d^h \mathbf{C}_{i-1}(v_i + t_{i-1}^0)}{dv_i^h} + g_{i+1}(u_i) \mathbf{M}_{i+1} \frac{d^h \mathbf{C}_{i+1}(v_i + t_{i+1}^0)}{dv_i^h}, \\ h &= 0, 1, \dots, \infty, \end{aligned} \quad (5.5)$$

のよう簡略な式で表すことができる。

ここでは一般性を失うことなく、以下の前提条件を仮定する（図 5-7 参照）。

前提条件：

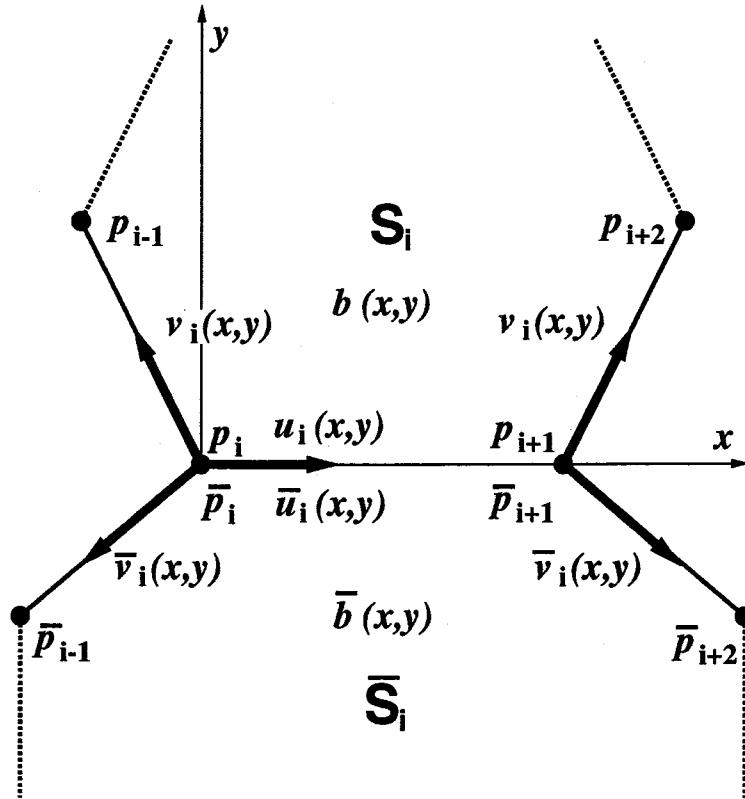


図 5-7: 隣接する副曲面の模式図

1. 隣接する副曲面 S_i と \bar{S}_i は領域多角形の辺 e_i を共有する.
2. 副曲面 S_i (\bar{S}_i) は、式 (5.1) によって \mathbf{b} ($\bar{\mathbf{b}}$) より生成される直交変数 u_i と v_i (\bar{u}_i と \bar{v}_i) によって定義され、重心座標 \mathbf{b} ($\bar{\mathbf{b}}$) は共有する 2 次元座標系 (x, y) によって計算される.
3. 座標系 (x, y) は p_i (\bar{p}_i) を原点にもち、 x 座標軸は e_i を含み、点 p_{i+1} (p_{i+1}) は座標 $(1, 0)$ と一致する.

このとき G^n 級の条件は以下のように表される.

条件： 曲面 \bar{S}_i には以下の条件式を満たす変数変換 $\tilde{x}(x, y)$ と $\tilde{y}(x, y)$ が存在する.

$$\frac{\partial^h \mathbf{S}_i(u_i(x, 0), v_i(x, 0))}{\partial x^h} = \frac{\partial^h \bar{\mathbf{S}}_i(\bar{u}_i(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0), \bar{v}_i(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0))}{\partial x^h}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^h \mathbf{S}_i(u_i(x, 0), v_i(x, 0))}{\partial y^h} = \frac{\partial^h \bar{\mathbf{S}}_i(\bar{u}_i(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0), \bar{v}_i(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0))}{\partial y^h}, \quad (5.7)$$

$$\tilde{x}_0 = \tilde{x}(x, 0), \quad \tilde{y}_0 = \tilde{y}(x, 0), \quad h = 0, 1, \dots, n.$$

但し $y = 0$ の代入は、偏微分を計算してからおこなわれる.

ここでは記述の煩雑さを避けるため, $n = 2$ の場合のみについて証明するが, より高次の場合も同様に証明できる.

前提条件より, u_i と \bar{u}_i は辺 e_i 上で以下のように表される.

$$u_i(x, 0) = \frac{b_i}{b_i + b_{i+1}} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_{i+1}} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_{i+1}} = \frac{h1x}{(h1 - h2)x + h2} ,$$

$$\bar{u}_i(x, 0) = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_i + \bar{b}_{i+1}} = \frac{\bar{h}1x}{(\bar{h}1 - \bar{h}2)x + \bar{h}2} .$$

ここで, $h1$ ($\bar{h}1$) と $h2$ ($\bar{h}2$) はそれぞれ p_{i-1} (\bar{p}_{i-1}) と p_{i+2} (\bar{p}_{i+2}) に対する y の座標値を表す. 変数変換 $\tilde{x}(x, y)$ が以下の式で表されるとき,

$$\tilde{x}(x, y) = \frac{cx}{ax + b} , \quad (5.8)$$

$$a = \frac{h1\bar{h}2 - \bar{h}1h2}{\bar{h}1\bar{h}2} , \quad b = \frac{h2}{\bar{h}2} , \quad c = \frac{h1}{\bar{h}1} ,$$

恒等式 $u_i(x, 0) \equiv \bar{u}_i(\tilde{x}(x, y), 0)$ が成立する.

式 (5.2) より S_i と \bar{S}_i は辺 e_i 上では C_i によって表され, 以下の式が成り立つ.

$$\left(\frac{\partial^h S_i}{\partial x^h} \right)_{b \in e_i} = \frac{\partial^h C_i(u_i + t_i^0)}{\partial x^h} ,$$

$$\left(\frac{\partial^h \bar{S}_i}{\partial x^h} \right)_{b \in e_i} = \frac{\partial^h C_i(\bar{u}_i + t_i^0)}{\partial x^h} , \quad h = 0, 1, \dots, \infty .$$

結果的に, 式 (5.6) は変数変換 $\tilde{x}(x, y)$ により常に成立する.

曲線 C_{i-1} と C_{i+1} が C^2 級の条件を満たすと, 副曲面 S_i と \bar{S}_i は式 (5.5) より辺 e_i 上において, 以下のように表される.

$$\frac{\partial S_i(u_i, v_i)}{\partial v_i} = \frac{\partial \bar{S}_i(\bar{u}_i, \bar{v}_i)}{\partial \bar{v}_i} , \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 S_i(u_i, v_i)}{\partial v_i^2} = \frac{\partial^2 \bar{S}_i(\bar{u}_i, \bar{v}_i)}{\partial \bar{v}_i^2} . \quad (5.10)$$

ここで

$$\tilde{y}(x, y) = R1(x)y + \frac{1}{2}R2(x)y^2$$

と設定し, 式 $\partial v_i(x, 0)/\partial y$ ($\partial \bar{v}_i(\tilde{x}, 0)/\partial \tilde{y}$) と $\partial^2 v_i(x, 0)/\partial y^2$ ($\partial^2 \bar{v}_i(\tilde{x}, 0)/\partial \tilde{y}^2$) を $V_y(x)$ ($\bar{V}_{\tilde{y}}(\tilde{x})$) と $V_{yy}(x)$ ($\bar{V}_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tilde{x})$) で表す.

このとき, 式 (5.8) における $\tilde{x}(x, y)$ は $\partial \tilde{x}(x, y)/\partial y = 0$ と $\partial u_i(x, 0)/\partial y = \partial \bar{u}_i(\tilde{x}, 0)/\partial \tilde{y} = 0$ の関係を満たすことに留意すると, 式 (5.7) は式 (5.9) と式 (5.10) を用いて以下のように表される.

$$V_y(x) = R1(x)\bar{V}_{\tilde{y}}(\tilde{x}) ,$$

$$V_{yy}(x) = R1(x)^2 \bar{V}_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tilde{x}) + R2(x)\bar{V}_{\tilde{y}}(\tilde{x}) .$$

$\bar{V}_{\tilde{y}}(\tilde{x})$ の値は明らかに辺 e_i 上で 0 とはならないので関数 $R1(x)$ と $R2(x)$ は以下のように常に存在する.

$$R1(x) = \frac{V_y(x)}{\bar{V}_{\tilde{y}}(\tilde{x})},$$

$$R2(x) = \frac{V_{yy}(x) - R1(x)^2 \bar{V}_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tilde{x})}{\bar{V}_{\tilde{y}}(\tilde{x})}.$$

以上のことから、 G^2 級の条件が満たされることが証明された。□

G^n ($n > 2$) 級の条件に対しても、変数変換式を

$$\tilde{y}(x, y) = \sum_{i=1}^n (1/i!) R_i(x) y^i$$

のように置き換えることにより同様に証明することができる。

5.2.4 特異なトポロジーに対する曲面生成

本章で提案される多辺形パッチの曲面モデルは、与えられる曲線群が以下に述べる特異なトポロジー構造で交わる場合、幾何学的に連続な曲面を生成することができない。

構造 a. 3 本以上の曲線が交わる点（以後、多重交点）を含む。

構造 b. 開曲線が開放端において交わる点（以後、T型交点）を含む。

構造 c. 開曲線を含む境界曲線群で囲まれる開領域を含む。

構造 d. 2 曲線によって囲まれた閉領域を含む。

しかし、曲面形状を柔軟に設計するためには、これらの特異なトポロジー構造を有する曲線網に対しても幾何学的に連続な曲面を生成することが望まれる。故に、以下の節において特異なトポロジー構造 a. - d. に対して曲面の構成方法を修正して、幾何学的に連続な曲面を生成する手法について述べる。

5.2.4.1 多重交点に対する曲面生成法

構造 a. は、3 本以上の曲線が同じ点で交わる状態を示す。ここで図 5-8 に示すように、誘導曲線 $C_i(t)$ が $t = 0$ において多重交点を有するものとする。この場合、隣接する副曲面 S_i と \hat{S}_i は連続な変数空間で定義されない曲線 C_{i-1}^0 と C_{i-1}^1 を横断曲線として生成されるため、その境界において幾何学的な連続性の条件を満たすことができない。故に、ここでは横断曲線 C_{i-1}^0 と C_{i-1}^1 を曲線 \bar{C}_{i-1} で以下のように置き換える。

$$\bar{C}_{i-1}(t) = \frac{\sum_{k=1}^{\lambda} C_{i-1}^k(t)}{\lambda}.$$

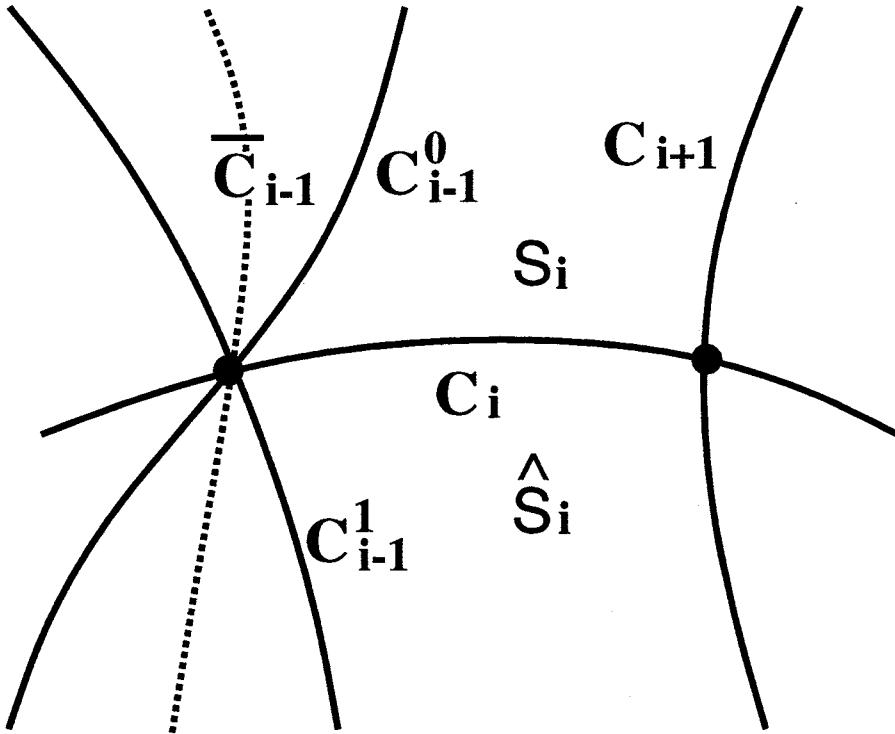


図 5-8: 多重交点を含む曲面

但し、 C_{i-1}^k は曲線 C_i と多重交点で交わる λ 本の曲線を表す。このとき、曲線は \bar{C}_{i-1} 多重交点において曲線 C_{i-1}^k と同次の連続性の条件を満たす。

横断曲線を修正することにより、副曲面 S_i と \hat{S}_i は曲線 C_{i-1}^k と同次の幾何学的連続性の条件を満たすが、融合関数によって最終的に生成される曲面は、多重交点において連続性の条件を満たさない。これは多重交点における曲面の連続性に関する制約条件が、周回依存性を有することから生じ、頂点包囲問題 (vertex-enclosure problem) [Pet92] と呼ばれる。この問題を解決するためには、多重交点における各曲線の連続性を、その点で曲面が満たすべき連続性の次数の倍の次数に設定するのが望ましい。

5.2.4.2 T型交点に対する曲面生成法

構造 b. は、開曲線が開放端において他の曲線と交わる状態を示す。ここで図 5-9 に示すように、開放端を有する曲線 C_T が他の曲線 $C_i(u_i)$ と $u_i = r_i \Delta_i$ で交わるものとする。この場合、2 曲面 S_i^0 , S_i^1 がそれぞれ $[C_{i-1}^0, C_i^0, C_{i+1}^0]$ と $[C_{i-1}^1, C_i^1, C_{i+1}^1]$ より生成されるため、境界において隣接する曲面 \hat{S}_i と幾何学的な連続性を満足しない。故に、生成される曲面が \hat{S}_i と幾何学的に連続に接続されるように、以下の手続きで副曲面 S_i^0, S_i^1 を生成する。

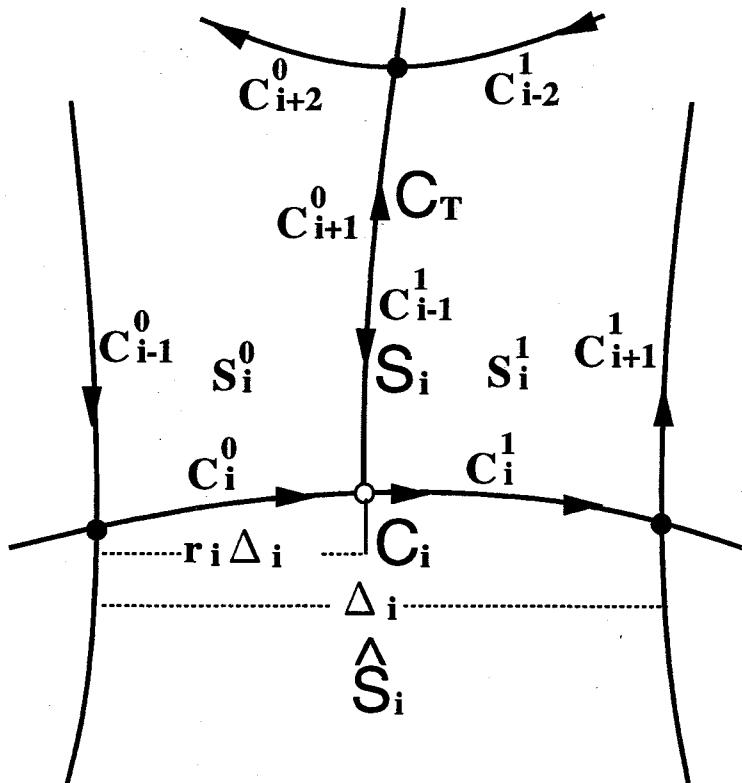


図 5-9: T型交点を含む曲面

1. 曲線 C_T を考慮せずに曲線 C_{i-1}^0 と C_{i+1}^1 を横断曲線とし、曲線 $C_i := C_i^0 \cup C_i^1$ を誘導曲線として副曲面 S_i を生成する。
2. 副曲面 $S_i(u_i, v_i)$ を $u_i = r_i \Delta_i$ において以下のように二つに分割する。
 $S_i^0(u_i, v_i) := S_i(r_i u_i, v_i)$, $S_i^1(u_i, v_i) := S_i((1 - r_i) u_i + r_i \Delta_i, v_i)$.

但し、開放端を含む曲線 C_T は副曲面 S_{i+1}^0 と S_{i-1}^1 を生成する際に誘導曲線として用いられ、副曲面 S_{i+2}^0 と S_{i-2}^1 を生成する際には、横断曲線として用いられる。これらの副曲面を融合させて得られる曲面は、隣接する曲面 \hat{S}_i との幾何学的な連続性の条件を満足し、開曲線 C_T は副曲面 S_{i+1}^0 と S_{i-1}^1 によって補間される。

図 5-10において多重交点と T型交点を含む曲線網の例を示し、図 5-11にその曲線網から生成された曲面を示す。但し、図 5-10において多重交点を緑色の球で、T型交点を赤色の球で表す。多重交点を含む曲線網は、球状の曲面や曲線を軸周りに回転させて得られる軸対称な曲面の記述を可能にし、T型交点を含む曲線網は形状の階層的な記述を可能にするので、多重交点や開放端を含む曲線網を用いることにより、複雑な形状をより柔軟に記述できる。

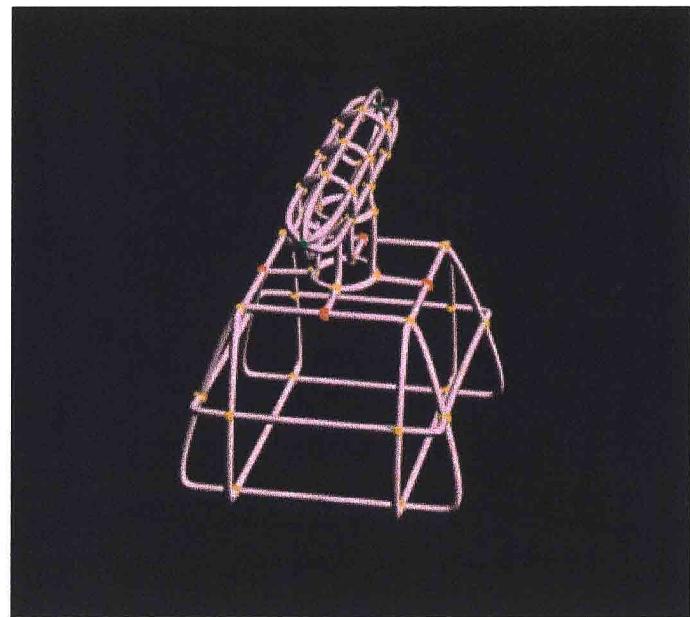


図 5-10: 多重交点, T型交点をもつ曲線網例

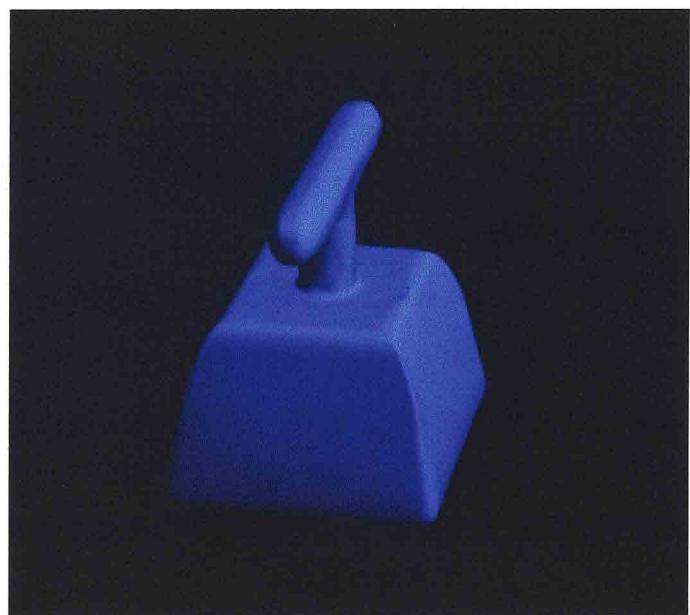


図 5-11: 曲面生成例

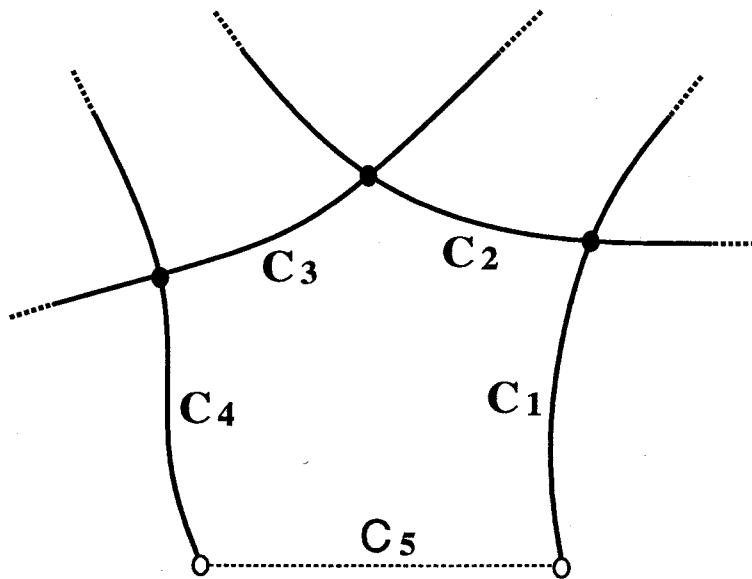


図 5-12: 開領域曲線網を含む曲面

5.2.4.3 開領域に対する曲面生成法

構造 c. は、境界曲線群が閉領域を構成しない状態を示す。ここで図 5-12に示すように、仮想的な曲線 C_m を曲線群 C_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$ に加えることによって閉じたm辺形領域を構成するものとする。この場合仮想曲線 C_m を横断曲線として用いる掃引曲面 $T_{1,m}$ と $T_{m-1,m}$ が定義されなくなるので副曲面 S_1 と S_{m-1} は各々 $T_{1,2}$ と $T_{m-1,m-2}$ に一致させる。m辺形パッチ Q^m は副曲面 S_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$ を以下のように融合させて得られる。

$$Q^m(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m-1} S_i(\mathbf{b}) \bar{B}_i^n(\mathbf{b}) .$$

但し、超限補間関数 $\bar{B}_i^n(\mathbf{b})$ は次式で与えられる。

$$\bar{B}_i^n(\mathbf{b}) = \frac{(\ell_i \ell_{i+1})^n + \kappa (\ell_1 \ell_m)^n}{\sum_{k=1}^m (\ell_k \ell_{k+1})^n}, \quad \kappa = \begin{cases} \tilde{u}_m & ; i = 0 \\ 1 - \tilde{u}_m & ; i = m-1 \\ 0 & ; i \neq 0, m-1 \end{cases} .$$

5.2.4.4 2 曲線領域に対する曲面生成法

構造 d. は、2 曲線で閉領域が構成される状態を示す。ここで図 5-13に示すように、2 曲線 C_1 と C_2 で閉領域が囲まれるものとする。この場合、領域多角形が2 辺形となり重心座標系が定義されなくなるので、2 曲線で囲まれた領域に対して 4 辺 $e_{i=1,2,3,4}$ で囲まれる領域を当てはめ、4 変数の重心座標系を構成する。各辺に対する境界曲線は、 C_1 と C_2 をそれ

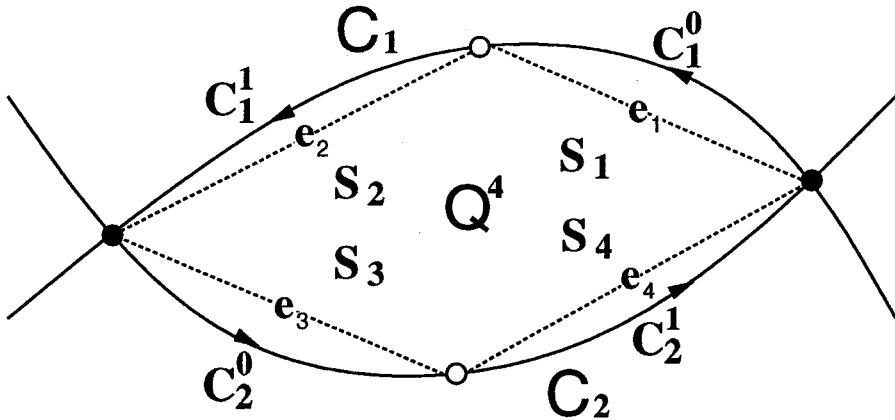


図 5-13: 2 曲線で囲まれた曲面

ぞれの媒介変数空間で 2 分等した曲線を以下のように割当てる。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1^0(t) &:= \mathbf{C}_1\left(\frac{t}{2}\right) ; \text{ for } e_1 , \quad \mathbf{C}_1^1(t) := \mathbf{C}_1\left(\frac{\Delta_1 + t}{2}\right) ; \text{ for } e_2 , \\ \mathbf{C}_2^0(t) &:= \mathbf{C}_2\left(\frac{t}{2}\right) ; \text{ for } e_3 , \quad \mathbf{C}_2^1(t) := \mathbf{C}_2\left(\frac{\Delta_2 + t}{2}\right) ; \text{ for } e_4 . \end{aligned}$$

辺 e_1 と e_2 に対する副曲面 S_1 と S_2 には C_1^0 と C_1^1 を、また辺 e_3 と e_4 に対する副曲面 S_3 と S_4 には C_2^0 と C_2^1 を横断曲線として用い、各辺に割当てられた曲線を誘導曲線として掃引曲面を生成する。4 辺形パッチ曲面 \mathbf{Q}^4 は、これら 4 個の副曲面を、以下のように融合させて得られる。

$$\mathbf{Q}^4(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{S}_i(\mathbf{b}) B_i^n(\mathbf{b}) .$$

図 5-14において開領域および 2 曲線で囲まれた領域を含む曲線網の例を示し、図 5-15にその曲線網から生成された曲面を示す。このような単純な構造の曲線網に対しても幾何的に連続な曲面を生成することにより、曲面設計の初期段階での形状の確認が可能となる。

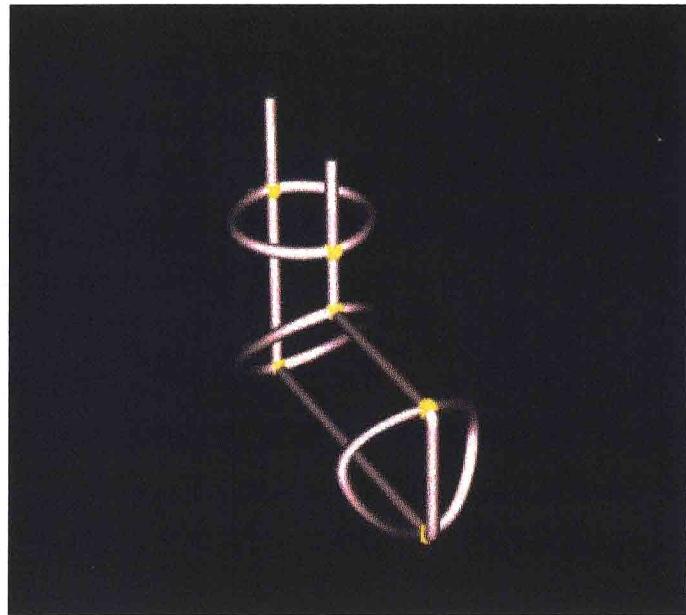


図 5-14: 開領域, 2 曲線領域をもつ曲線網例

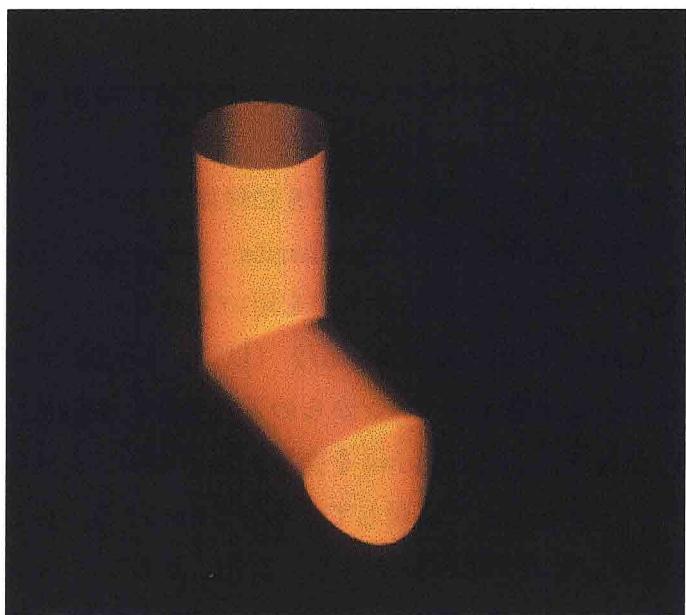


図 5-15: 曲面生成例

5.3 形状特徴曲線に基づくサーフェイスモデラー

既存の CAGD システムにおけるサーフェイスモデラーは、2 次元メッシュ状に配置した制御点や境界曲線よりスプライン曲面やロフト曲面などを生成する。これに対し、本研究では 3 次元空間の任意の位置と傾きで座標平面を設定し、その平面上にタブレットなどで形状の特徴を表す曲線を入力して曲面を設計するシステムを試作した。以後、このサーフェイスモデラーを *IF³D*(Interactive Feature curve based Free-Form surface Design system) と命名する。

本節ではまず、*IF³D* システムのハードウェアとソフトウェアの構成について説明する。次に、本システムで用いられる曲線網のデータ構造と生成機構について述べ、曲線網のトポロジーを曲線の幾何学的な特徴量により推定する機構を明らかにする。また、曲線網から多辺形パッチ曲面を生成する機構を要約し、最後に、本システムを用いて曲面形状を対話的に設計する際の入力操作例を示す。

5.3.1 システム構成

5.3.1.1 ハードウェア構成

本システムはエンジニアリング・ワークステーション（以後、EWS）の IBM・Power-Station 上に開発されており、幾何データの陰影表示の計算には Power-Station のジオメトリックエンジンが用いられている。

データの入力に用いられる機器としては、EWS に付属のタブレット (IBM・5083・CursorPad) の他、液晶タブレット (Wacom・Handwrite・Digitizer・HD648A) や、タッチパネル (HyperTouch) を CRT 上に取り付けたものを用いている。

液晶タブレットは、IBM・Personal System/2（以後、PS/2）と接続され、PS/2 からの画面表示用の信号を VGA で受取り、ペンからの入力信号を RS232C を介して PS/2 に出力する。タブレットの制御は、X Windows を変更してタブレットからのイベントをマウスと同じようにキューイングすることで実現している。これにより、従来の X Windows のアプリケーションは変更なしでペンを利用できる。また、PS/2 と Power-Station とが LAN で接続され、Power-Station からは Remote X Access で容易に入出力が可能である。

また、タッチパネルは 1024×1024 の解像度を有する静電容量式の装置で、画面上からの電荷のリークを利用して接触点の座標を計算する。タッチパネルは特別な入力装置として登録するのではなく、その出力をプロトコル変換しハードウェア的に Power-Station のタブレットポートに取り付けている。これにより、マウスあるいはタブレットを用いる全てのアプリケーションは変更なしにペンを利用できる。

5.3.1.2 ソフトウェア構成

本システムのソフトウェアをその機能で分類すると、入力デバイス部、曲線・曲面生成部、2次元・3次元データ表示部、共有データ管理部、システム制御部に分けられる。以下にそれぞれの機能を説明する。

[入力デバイス部 (Input Device)]

液晶タブレットやタッチパネルなどで入力されるベクターデータを曲線生成部と2次元データ表示部に送出する。

[曲線生成部 (Curve Generator)]

入力デバイス部から受け取るベクターデータの間引きを自動的に行い、指定された次数（通常は3次）のスプライン補間曲線を生成する。また、曲線データの消去および形状の局所的な変形・修正を行う。データ表示部に対しては、曲線のテセレーションデータを送出する。

[曲面生成部 (Surface Generator)]

形状を定義する曲線の入力が終了すると曲線生成部より曲線データ群を受け取り、曲線相互の交差関係と曲線の交点における幾何学的な特徴量より、曲線網のトポロジーデータを推定して多辺形パッチ曲面を生成する。データ表示部に対しては、多辺形パッチのテセレーションデータを送出する。

[2次元データ表示部 (2-D Display Manager)]

3次元空間に設定された平面上の2次元座標のメッシュを表示し、その上にタブレット、デジタイザ、およびタッチセンサーパネルなどの入力デバイスから受け取るベクターデータを表示する。また、曲線生成部より受け取る曲線のテセレーションデータをワイヤーフレーム表示する。パネルには座標面の選択や、曲線の編集に用いられるインターフェースを備え、2次元座標面における曲線形状の対話的な設計環境を提供する。

[3次元データ表示部 (3-D Display Manager)]

3次元データ表示部は、3次元空間における座標平面の原点位置や主軸方向、生成された曲線の形状、および曲線相互の交点の位置などを表示する。また、曲面生成部から受け取る多辺形パッチのテセレーションデータを陰影表示する。パネルには、視点、光源、および平面の位置などを操作して曲線・曲面の形状を3次元空間上で確認するインターフェースを備える。なお、2次元・3次元データ表示部における画像生成部のプログラミング・インターフェースにはgraPHIGSが用いられている。

[共有データ管理部 (Object Data Manager)]

曲線・曲面生成部と2次元・3次元データ表示部の間で共有される曲線、曲線網、および曲面などのデータを一括管理する。

[システム制御部 (System Controller)]

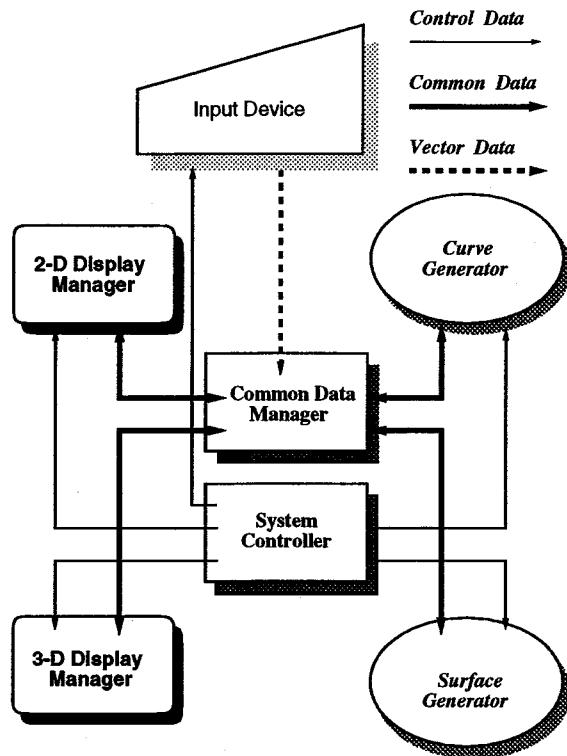


図 5-16: IF^3D システム構成図

入力デバイスおよびシステムの各構成部の初期化、各表示部のウインドウ生成、ファイル入出力などの、システム全体の制御・監視を行う。

図 5-16に、 IF^3D のシステム構成と各構成部間のデータの流れを示す。

5.3.2 曲線網のデータ構造

本節では、 IF^3D システムで多辺形パッチ曲面を生成するのに用いられる、曲線網のデータ構造について述べる。

曲線に関する幾何データは、曲線の終端条件（周回端か開放端）、曲線を構成する節点の総数、曲線のセグメントデータのリスト、曲線の定義される平面、および曲線に含まれる交点データのリストから構成される。曲線の各セグメントに関するデータは、セグメントの曲線式を表す有理ベジエ多項式の次数とそのベジエポリゴン、セグメントを定義する節点ベクトル、セグメントの始端に位置する点、端点を共有して繋がるセグメント、およびセグメントを含むエッヂから構成される。各曲線が定義される平面のデータは、平面座標の原点の座標値および平面の法線ベクトル値で構成され、点のデータは、3次元座標値で構成される。

次に、曲線網のトポロジーモデルについて述べる。立体のトポロジーを表すのに、幾何学的な単体をその境界となる単体の集合によって表す手法が用いられる。例えば、エッヂは両

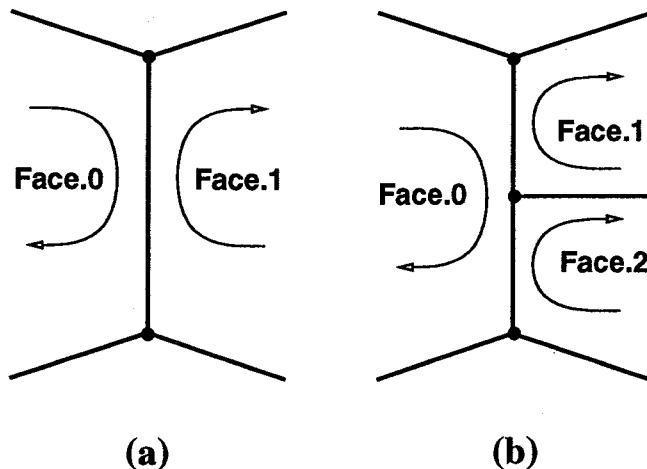


図 5-17: 曲線網トポロジー

端のバーテックスによって、フェイスはそれを囲むエッジの集合によって、ソリッドはその境界面を表すフェイスの集合によって定義される。このようなトポロジーの表現方法は、対合関数によって定義される n 次元空間の写像によって一般化することができる [Lie91, Duf91]。

代表的な境界表現のトポロジーモデルである B-Rep (あるいは Winged-edge) モデルは、各エッジがそれを境界として隣接する 2 つのフェイスによって定義されるという制約があるので、曲線網を構成する曲線群の中に開放端の交点をもつものが存在する場合、隣接する 2 つのフェイスの境界としてエッジを一意に定義することができない。例えば、図 5-17(a) のようなトポロジーを表現することはできるが、図 5-17(b) のようなトポロジーを表現することはできない。このため、 IF^3D システムは曲線網のトポロジーを B-Rep モデルよりも表現の自由度の高いハーフエッジモデル (あるいは Modified Winged-edge) [Wei85, M88] を用いて表している。このトポロジーモデルは、各エッジを境界として隣接する 2 個のポリゴン面の各々に関してハーフエッジと呼ばれるエッジデータを個別に用意し、バーテックスやフェイスをハーフエッジを基準にして定義する。

図 5-18 にハーフエッジモデルの模式図を示す。

5.3.3 曲線網の生成機構

IF^3D システムでは、形状の特徴を表す曲線網を入力して多辺形パッチ曲面を生成する。本節では、入力デバイスで受け取るベクターデータより曲線網を構成する手法について述べる。

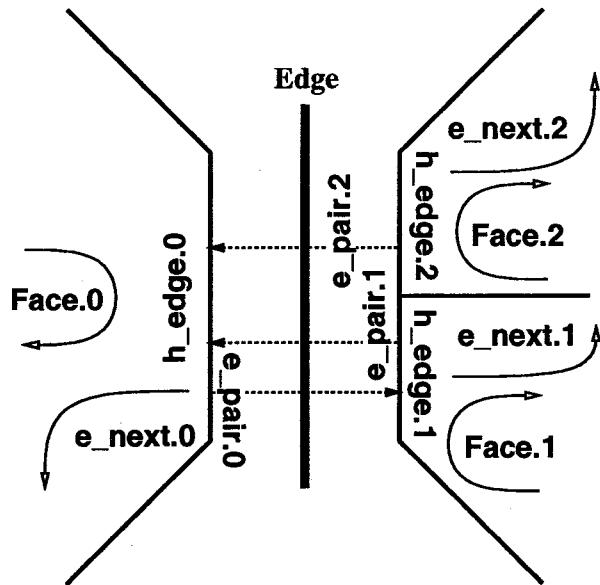


図 5-18: ハーフエッヂモデル

5.3.3.1 節点ベクトルの計算法

まず、デジタイザやタブレットなどによって入力されるベクターデータから 3 次スプラインを用いて補間曲線を生成する。このとき、ベクターデータを間引いて得られる制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ に対する節点ベクトル $\{t_i\}$ の値を設定しなければならないが、本システムは節点ベクトルの値を以下に示す 3 通りの方法で計算する機構を備えている。

1. 節点間隔を制御点間の距離に比例するように設定する。

$$\frac{t_{k+1} - t_k}{t_k - t_{k-1}} = \frac{\|\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k\|}{\|\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_{k-1}\|} .$$

2. 曲線の求心力を平滑化するような、物理的なヒューリスティクスを用いて節点間隔を設定する [Far90]。

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \sqrt{\frac{\|\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k\|}{\|\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_{k-1}\|}} .$$

3. 2 次元平面上の制御点の位置の分布状態から、統計的な手法により求められる距離測度を用いて節点間隔を設定する [NF89]。

スプライン曲線の設計の際に節点を等間隔に指定すると、制御点が相対的に密に配置された箇所で曲線の形状に不自然な振動や折り返しが生じるが、以上に述べた 1. から 3. の手法で節点ベクトルを設定すると振動や折り返しが生じ難くなる。また、1. と 2. の手法は制御点間の距離から節点間隔の値を決定しているが、この値は制御点に対する任意のアフィン

変換に対して一定とはならないので、形状のアフィン変換に対する不变性を失う。一方、3. の手法で決定される節点ベクトルの値は、制御点の2次元平面上でのアフィン変換（平行・回転移動および拡大変換など）に対して不变であるという利点がある。

5.3.3.2 曲線式の補正法

これまで、幾何学的な連続性の条件を満足する多辺形パッチを生成するには、曲線網の多辺形領域を取り囲む曲線同士が精確に交わることを前提条件としてきたが、デザイナーに曲線間の交点を厳密に指示させるのは、形状設計の簡略なインターフェースを構築するのに障害となる。故に、*IF³D* システムでは独立に生成される曲線間の相互の位置関係より交点となる場所を推定し、曲線同士が精確に交わるように各曲線式を自動的に補正する前処理を行う。以下にその手順を示す。

1. i 番目の平面 PL_i 上に入力された曲線 $C_i(t)$ が、 PL_i と重なり合わない平面 $PL_{j \neq i}$ によって切断される点 CP_i （以後、切断点）を全て求める。
2. 異なる平面上に存在する切断点 CP_i と CP_j の間のユークリッド距離が、予め設定された域値以下の場合にそれらを曲線 $C_i(t)$ と $C_j(t)$ の交点と見做し、その精確な3次元位置座標を $CP_{i,j} = w_i CP_i + w_j CP_j$ によって計算する。但し、 w_i, w_j はそれぞれ曲線 $C_i(t), C_j(t)$ に関する加重係数とする（通常は、 $w_i = w_j = 1/2$ に設定する）。
3. 各曲線式 $C_i(t)$ について求めた交点 $CP_{i,j}$ と曲線の切断点 CP_i との差分ベクトル $CP_{i,j} - CP_i$ を用いて副曲線 $\hat{C}_i(t)$ を生成し、補正曲線式 $\bar{C}_i(t)$ を $\bar{C}_i(t) = C_i(t) + \hat{C}_i(t)$ のように生成する。

5.3.3.3 トポロジーの推定法

IF³D システムの曲面生成部は、曲線網のトポロジーを推定する機構を備えている。以下にその機構について述べる。

曲線網のトポロジーデータを構成する交点データとハーフエッヂデータは、曲線間の交点が求められた際に生成される。しかしながら、交点の情報だけからフェイスデータを自動的に生成することはできず、曲面の張られる閉ループ領域を推定する必要がある。2次元の接続グラフから閉ループ領域を探索する手法は数多く提案されている[白川 83]が、3次元空間に張られた接続グラフから閉ループを探索する一般的な手法は提案されていない。これは、3次元空間における曲線の交差情報から構成される閉ループ領域の選択には任意性があることに起因する。故に本手法では、曲線間の交点における接平面法線ベクトルの値より閉ループ領域を推定して、デザイナーの意図する曲面のフェイスデータを構成する。以下に、フェイスデータの構成手順を示す。

フェイスデータの構成法

- L.1 曲線間の交点のデータよりハーフエッヂデータを生成する。
- L.2 全てのハーフエッヂデータをエッヂスタックに格納する。
- L.3 エッヂスタックからハーフエッヂを1つ取り出してエッヂリストに加え、その始端点を出発点として登録する。
- L.4 取り出したハーフエッヂの終端点を始端点にもつ他のハーフエッヂデータの中で、共有する交点における接線ベクトルの外積がその交点における接平面法線ベクトルと一致するものをエッヂスタックから取り出し、エッヂリストに加える。
- L.5 次候補のハーフエッヂが見つからない場合は、エッヂリストを空にしてそのまま手続き L.3 に戻る。
- L.6 取り出したハーフエッヂの終端点が、手続き L.3 で登録した出発点と一致するまで手続き L.4 と L.5 を繰り返す。
- L.7 エッヂリストからフェイスデータを構成し、エッヂリストを空にする。
- L.8 手続き L.3 から L.7 までを、エッヂスタックが空になるまで繰り返す。

但し、手続き L.4 で用いられる各交点での接平面法線ベクトルの値は、以下の手順に従って決定される（図 5-19 参照）。

交点における接平面法線ベクトルの計算法

- N.1 平面上の閉曲線の周回方向の判定を行い、曲線の各点での接線ベクトル \mathbf{T} と平面の法線ベクトル \mathbf{N} との外積が、曲線で囲まれた閉領域の外側 C を向くように、曲線の接線ベクトルの方向を決定する。
- N.2 交差する 2 曲線の交点における接線ベクトル \mathbf{T}_1 と \mathbf{T}_2 の外積より、交点での接平面法線ベクトル \mathbf{N}_{12} を求める。
- N.3 交点 P_{12} における各曲線の接線ベクトルと平面の法線ベクトルとの外積より定義される曲線の外向ベクトル $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ と、手続き N.2 で求めた接平面法線ベクトルの内積 $V_i = \mathbf{C}_i \bullet \mathbf{N}_{12}, i = 1, 2$ が共に正になるように接平面法線ベクトルの符号を決定する。
- N.4 手続き N.3 で求めた、各曲線に対する接平面法線ベクトルの符号が一致しない $V_1 \bullet V_2 < 0$ 場合は、その交点における接平面法線ベクトルの向きは不定とする。

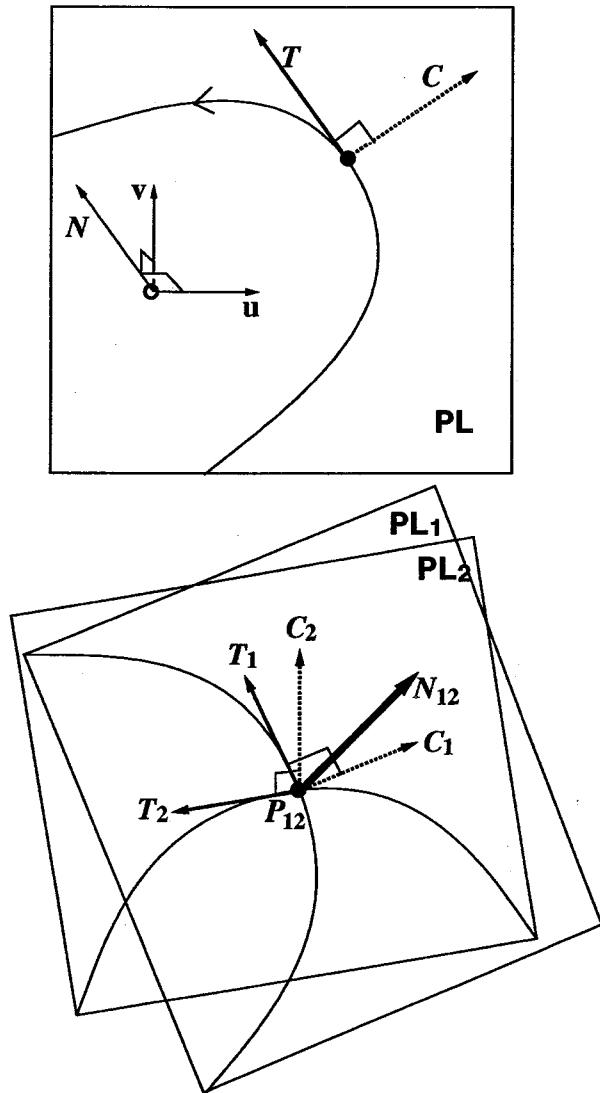


図 5-19: 交点における接平面法線ベクトル

既存のソリッドモデルでは、オイラー・オペレーション [M88] により立体のトポロジーが順次展開されていくが、本節で提案した曲線網の生成機構は、任意の順序で入力した曲線群の幾何データより曲線網のトポロジーを自動的に推定するので、デザイナーが曲面のトポロジーを意識せずに形状を設計できるという利点がある。しかし、曲線網の形状やトポロジーが複雑になるにつれ、トポロジーの幾何的な推定が困難になり、デザイナーの意図する曲面のトポロジー構造を一意に決定できなくなる。故に、トポロジーの推定に曖昧性が残る場合は、候補となるトポロジー構造を有する曲面の例を全て表示して、その中から意図するものをデザイナーに選択させることが必要となる。しかしながら、本システムを用いて設計した多くの曲面の例より、工業製品の対象となる程度の複雑さを有する曲面形状に対しては、ほぼ一意に所望のトポロジー構造を決定できることを確認した。

5.3.4 多辺形パッチの生成機構

IF^3D システムにおける多辺形パッチ曲面の生成機構を以下に要約する。

- a.1 平面上に入力された曲線の他の平面との切断点より曲線間の交点の位置座標を求め、各曲線が精確に交わるように曲線式を補正する。
- a.2 曲線間の相互の交差関係と交点での幾何学的な特徴量より、曲線網の閉領域を推定してトポロジーデータを生成する。
- a.3 トポロジーデータに曲線の幾何データを対応させて曲線網データを生成する。
- a.4 曲線網データから多辺形パッチ曲面を生成する。但し、特異なトポロジーを有する曲線網に対しては、曲面の生成法を修正して適用する。

曲線網データから多辺形パッチ曲面を生成する手続き a.4 は、以下の手順で実行される。

- b.1 曲線網のデータより、各閉領域の境界をなす曲線のデータを読み込む。
- b.2 閉領域の辺数Nとテセレーションのピッチ数を参照して、標本点座標 (x, y) における一般重心座標、直交変数、および超限補間関数の値と、それらの x, y に関する導関数の値を計算してテーブルに格納する。
- b.3 互いに交差し隣接する 3 本の曲線のデータと手続き b.2 で計算したテーブルの値より、副曲面上の座標値とその x, y に関する導関数の値を計算する。
- b.4 手続き b.3 で計算した閉領域を囲む全ての曲線に関する副曲面のデータと、手続き b.2 で計算した超限補間関数の値より、多辺形パッチの座標値とその x, y に関する導関数の値を計算する。
- b.5 手続き b.4 で計算した値より陰影表示の対象となるテセレーションデータ（通常は三角形帯 (Triangular Strip) 形式または、ポリゴン (Polygon) 形式のデータ）を生成する。

図 5-20 に多辺形パッチ曲面を生成する際のデータ処理の流れを示す。

5.3.5 入力操作例

本節では、 IF^3D システムを用いて曲面形状を設計する際の入力操作例を示す。まず、図 5-21 に IF^3D システムの操作画面の全体図を示す。画面の上方には 2 次元および 3 次元データ表示部のウィンドウが配置され、システム制御部のウィンドウが左下方部に配置されている。

デザイナーはまず最初に、あらかじめ登録された平面集合の中で、これから曲線が描かれる平面を 2 次元データ表示部内のメニューから選択し、その平面上に曲線の形状を液晶タブ

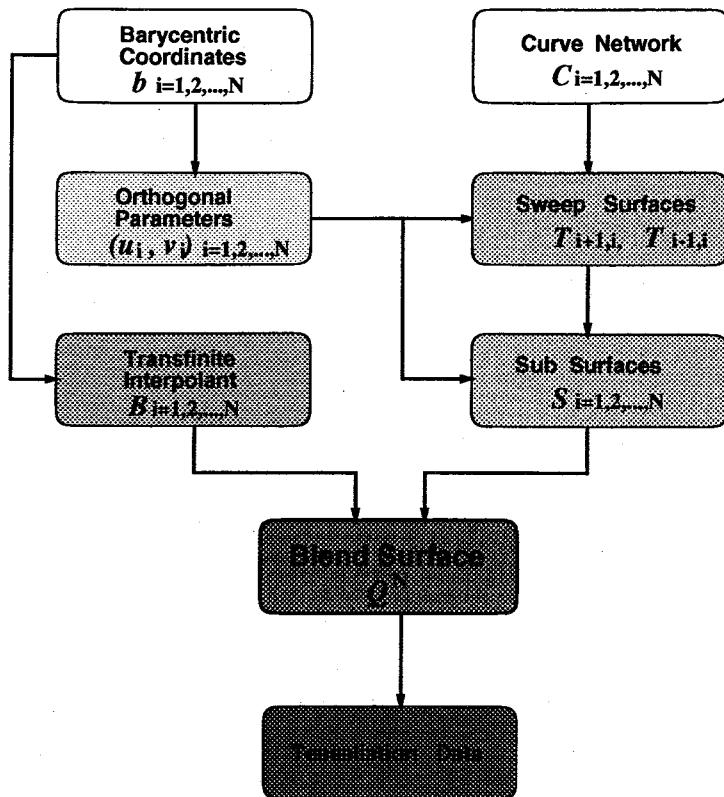


図 5-20: 多辺形パッチ・データフロー図

レットまたはタッチパネルなどを用いてペン入力する（図 5-22参照）。選択された平面上には、それまでに入力された曲線とその面との交点が表示されるので、デザイナーはそれらの点の近傍を通過するように曲線の形状を入力して、曲線間の交差関係を指示する。また、デザイナーが新たな位置および傾きに平面を設定する場合は制御パネルから平面設定モードを選択し、3次元データ表示部内で平面の位置・傾きの設定を行う（図 5-23参照）。このように、各平面を3次元空間上の任意の位置および傾きで配置して、曲線間の交差のトポロジーを意識せずに曲面を設計できる点が本システムの特徴である。

異なる平面を順次選択しながら曲線形状の入力を繰り返し行い、物体形状の記述に十分な曲線の入力を終了すると、制御パネルの曲面生成ボタンをクリックして曲面のテセレーションデータを計算する。テセレーションデータの値は3次元データ表示部にワイヤーフレーム表示、あるいは陰影表示され、視点および光源の位置を任意に移動させて曲面の形状を確認することができる（図 5-24参照）。一度生成した曲面形状を部分的に変形するには、既に入力した平面曲線を変形する方法と、曲線網に新たな平面曲線を付け加える方法の2通りが選択できる。新たな平面が既に生成された曲面と交差する位置・傾きに設定されると、その平面と曲面との交差曲線が2次元データ表示部にワイヤーフレーム表示されるので、その形状を参照しながら新たな曲線形状を入力して曲面の形状を微妙に修正することができる。

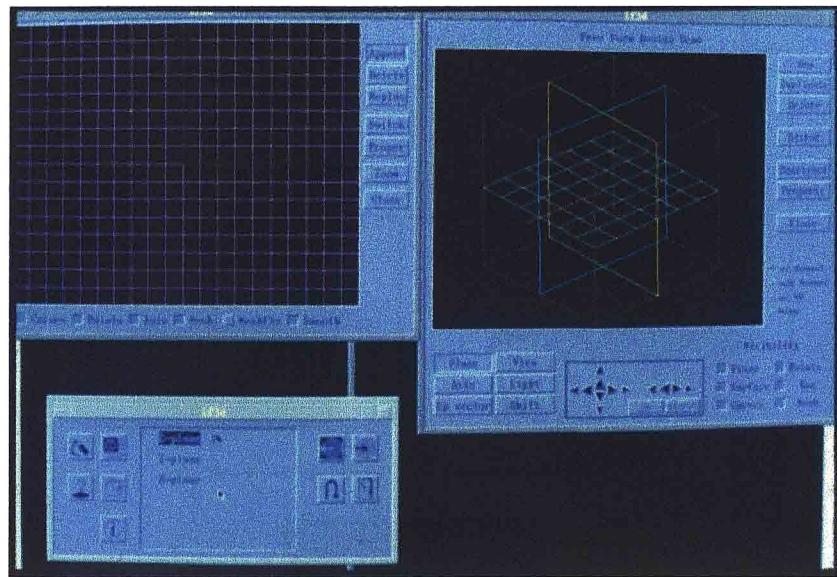


図 5-21: 全画面表示例

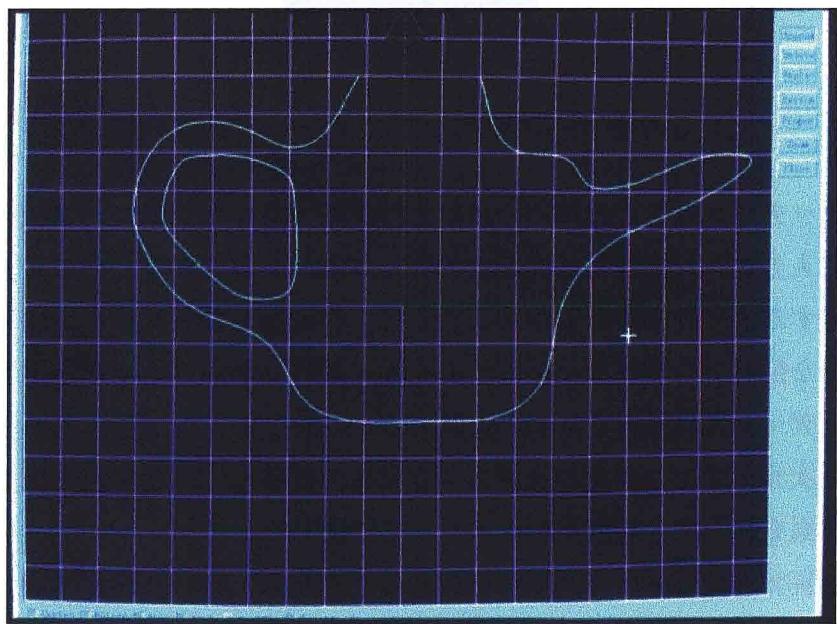


図 5-22: 2次元データ表示部および形状入力例

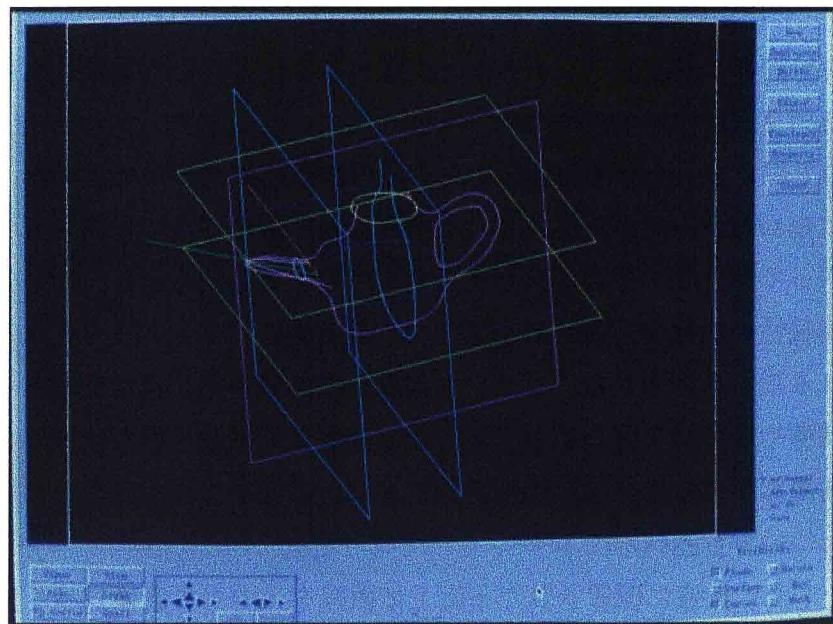


図 5-23: 平面の位置および傾きの設定

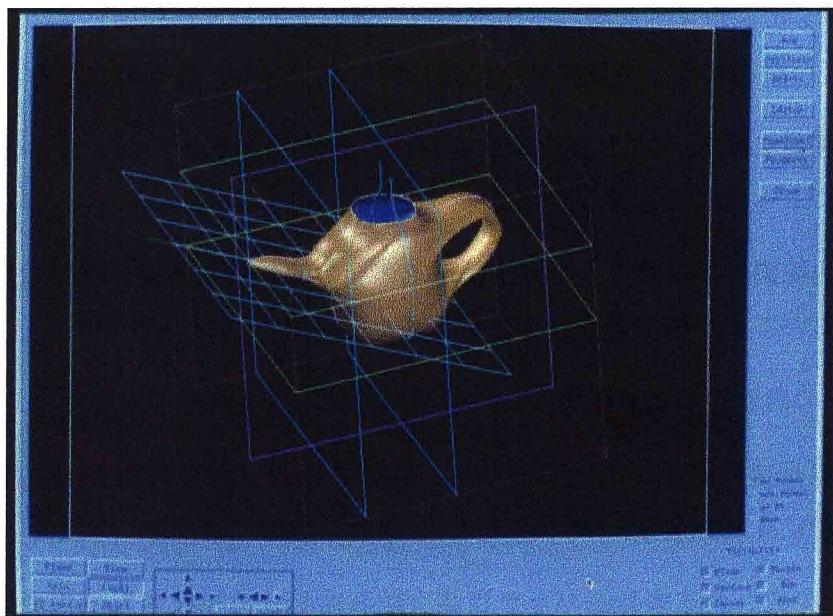


図 5-24: 3 次元データ表示部での陰影表示

5.4 結言

本章では、曲線網より多辺形パッチ曲面を生成する手法と、その手法を応用して開発したサーフェイスモデラーについて述べた。

まず、任意のトポロジーを許す曲線網からの曲面の生成法について述べた。パッチの境界に相当し互いに交わる曲線対から生成される掃引曲面の線形結合で構成される副曲面を、超限補間関数によって融合して多辺形パッチ曲面を生成する手法を示し、パッチの境界における幾何学的な連続性の次数が、曲線網を構成する各曲線のパラメトリックな連続性の次数によって決定されることを証明した。また、3本以上の曲線が同じ点で交わる状態、開曲線がT型に交わる状態や開領域を囲む状態、および2曲線が閉領域を囲む状態などの特異なトポロジー構造を曲線網が含む場合に、幾何学的に連続な曲面を生成するために曲面の構成法を修正する手法についても述べた。

次に、3次元空間に任意に配置された平面上に曲線を入力して曲面形状を設計するシステムの構成について述べ、多辺形パッチを生成する際に必要となる曲線網のデータ構造とトポロジーの推定機構を含む曲線網の生成機構、および曲線網からの多辺形パッチの生成機構について解説した。また最後に、本システムを用いて曲面形状を設計する際の入力操作例を具体的に示した。

本章で述べた多辺形パッチ曲面の生成手法は、掃引曲面の変数空間を互いに独立な2個の媒介変数から互いに従属な多変量変数へ拡張したものであり、以下のような利点がある。

- 曲面は、任意の次数（有理多項式を含む）、節点ベクトル、およびトポロジーをもつた曲線網によって記述される。
- 曲面は、曲線網を構成する全ての曲線が C^n 級の連続性の条件を満たせば、全てのパッチ境界において G^n 級の連続性の条件を満たす。
- G^2 級以上の曲面はパッチ境界において同一のツイストベクトルを有する。
- 曲面は、媒介変数形式の関数で表され、曲面の幾何学的な特微量（法線や曲率の値など）を厳密に計算できる。

本手法により生成される多辺形パッチは高次数の曲面式で構成されるので、曲線の与え方によっては不自然な突起や隆起が生ずる可能性がある。そのような場合は生成された曲面形状に対して、曲面の2次偏微分量の2乗積分値で定義される擬似ノルム関数の最小化に基づき、曲面を平滑化することが必要になる。また、複雑な接続関係を有する曲線網に対して、生成される曲面のトポロジを推論する機構の開発も今後の課題である。

第6章 3次元ウィジェットによる変形操作

6.1 緒言

これまでに述べた曲面の生成手法は、デザイナーが多面体や曲線網を入力・操作して曲面の形状を設計するものであるが、生成した曲面形状のデータを再利用・再加工するためには、曲面に対して変形操作を施し形状データを編集する機能が必須となる。本章では、計算機内の3次元物体との対話的な直接操作によって、曲面形状を変形するツールを構成する手法について述べる。特に、形状を制御するために格子状に配置される点を直観的かつ簡略に操作するための3次元ウィジェットの構成法について取り上げ、オブジェクト指向のグラフィクス・アプリケーション開発ツールを用いて、変形ツールを対話的に作成するシステムを提案する。

人間と計算機との間の対話を支援する技術として開発してきた、グラフィカル・ユーザ・インターフェース（以後、GUI）[OSF]は、ウィジェットと呼ばれる直接操作のための部品をウインドウ上に配置して、ユーザに視覚的かつ直観的な対話手段を提供している。このウィジェットを3次元的な形状とその振る舞いに拡張した、3次元ウィジェットと呼ばれるツールが近年提案された[SH92,ZH93,SC92]。この3次元ウィジェットを操作することによって、3次元の形状に対して対話的にアフィン変換などの線形変換を施すことができる。しかしながら、これらの3次元ウィジェットが提供する変形操作の種類は限られているので、3次元空間における物体の配置などには役立つが、曲面形状の設計には機能的に不十分である。

一方、3次元空間での複雑な変形操作を実現するために、制御点を3次元格子状に配置してパラメトリック空間を定義し、その制御点を操作して空間内部に包含される幾何形状を変形する手法[SP86,Coq90,LW94,HHK92]が提案された。この手法は、変形を任意の解析曲面やポリゴンデータ等に、そのトポロジに関係なく適用でき、格子点の数によって変形の複雑度を増減できるという利点を有する。しかしながら、格子を構成する多数の制御点を操作することによって変形の具合を調節することから、例えばスプライン曲面を定義する2次元配置の制御点を操作するのと同程度の煩雑な作業が要求されることになるので、制御点を操作する際に直観的なインターフェースが必要となる。

曲面形状の設計を支援するCADシステムは、形状を設計するのに制御点を用いる。しかし、マウスなどの2次元ポインティング・デバイスは、制御点の平面上における操作には向いているが、平面上に拘束されない点を操作するには、3面図などの複数の対話ウインドウを用いた操作により3次元空間での位置を指定しなければならず、そのような操作に熟練するには訓練が必要とされる。また、制御点が形状に影響を及ぼす範囲は他の制御点の影響範囲と重なっているのが一般的であり、制御点群の部分集合を一定の条件で同期させて操作す

る方が、各点を個別に操作するよりも形状を直観的に制御しやすくなることが考えられる。

以上の考察より、制御点群を3次元空間で効率良く操作するためには、以下の機能が要求される。

- 3次元格子を構成する制御点の複数個を同時に操作できる。
- 同時に操作される制御点の動作に関して拘束条件を設定できる。
- 制御点の動作およびその拘束条件を容易に変更できる。

本研究の目的は、これらの機能を実現する3次元ウィジェットを3次元空間における直接操作により作成するシステムを開発し、直観的かつ簡略な変形ツールを提供することである。このシステムにより、プログラミングの知識を持たないユーザにでも、様々な変形操作が可能な独自の3次元ウィジェットが柔軟に作成できるようになる。

6.2 3次元ウィジェットの構成

ここでは、制御点を操作する3次元ウィジェットに要求される機能を実現するために、以下の機構を導入する。

- 制御点とその隣接関係を表わす幾何胞体を複合的に3次元ウィジェット化する。
- 幾何胞体を表わす3次元ウィジェットにアフィン変換を施すための3次元ウィジェットを導入する。
- 対話時におけるウィジェット間の動作の拘束条件を直接操作により指定する。
- 3次元ウィジェットの階層的な構成を直接操作により指定する。

6.2.1 幾何胞体および対話操作のウィジェット

まず最初に、格子状に配置された制御点およびその隣接関係を定義する幾何胞体（点、辺、面）を3次元ウィジェット化したものをセル・ウィジェットと命名し、それらにアフィン変換を施す対話部品を3次元ウィジェット化したものをアフィン・ウィジェットと命名する。

点や辺および面を表わすセル・ウィジェットの位置、向き、大きさは、それらの基準形に対するアフィン変換要素で表わされ、その変換要素はセルを構成する制御点の位置より計算される。アフィン・ウィジェットは、平行移動、回転移動、拡大縮小のアフィン変換を施す対話オブジェクトとして設計され、セル・ウィジェットに装着してその位置や向き、および大きさを変化させる。但し、実際にはアフィン・ウィジェットはセル・ウィジェットを構成

する制御点の位置を変化させ、その結果としてセルのアフィン変換要素の値が更新されてセルの位置や向き等が変化する。制御点の作業空間での位置は、初期的に設定される基準位置に対するアフィン変換行列で決定され、この変換行列はアフィン・ウェイジエット自身の位置、向き等を決定するアフィン変換要素と、アフィン・ウェイジエットを直接操作して得られるアフィン変換の局所的な変動量より計算される。故に、制御点の平行移動の向きや回転移動の回転軸などはアフィン・ウェイジエット自身の位置や向きで決定されることとなるが、これらの値を更新するには、アフィン・ウェイジエットの位置や向きを直接操作する別の対話部品を使用する。

また、アフィン・ウェイジエットは直接操作の対象外の時は、その位置や向き等を決定するアフィン変換要素が、装着しているセル・ウェイジエットのアフィン変換要素の値に影響され、そのセルの動作に追随するようになる。これは、アフィン・ウェイジエットがセル・ウェイジエットに装着されると同時に、両ウェイジエット間にアフィン変換要素の拘束条件による束縛関係が設定されるためであり、これらの拘束条件により、セル・ウェイジエットに対するアフィン・ウェイジエットの相対的な位置関係を、操作を通じて一定に保つことが可能となる。

図 6-1に、3次元格子点とその幾何胞体を構成するセル・ウェイジエットの構成例を示す。但し、表示の繁雑さを避けるため、面を表すセル・ウェイジエットは選択された場合にのみ線画で表示される。また、図 6-2に図 6-1のセル・ウェイジエットに対してアフィン・ウェイジエットを装着した例を示す。この例では、矢印と円環で表される平行移動と回転移動のアフィン・ウェイジエットが、同色のセル・ウェイジエットに対して装着されている。なお図 6-2は、正規空間 ($0 \leq x, y, z \leq 1$) で定義されたセル・ウェイジエットに対して、赤の面のセル・ウェイジエットに装着されたアフィン・ウェイジエットを z 軸回りに正方向から見て反時計回りに約 5 度回転移動させ、緑の辺のセル・ウェイジエットに装着されたアフィン・ウェイジエットを x 軸の正方向に約 0.5 平行移動させ、青の点のセル・ウェイジエットに装着されたアフィン・ウェイジエットを z 軸の正方向に約 0.25 平行移動させた例である。

6.2.2 ウェイジエット間の束縛

一つの操作で複数の制御点を規則的に同期して移動させる場合、制御点間に拘束条件を設定する必要がある。辺や面を表すセル・ウェイジエットは、そのセルを構成する制御点間の拘束条件を設定しているが、これだけでは隣接する制御点間だけしか同時に移動できない。故に、ウェイジエット間に束縛関係を指定することによって、より広い範囲にわたる制御点間に拘束条件を設定する。このとき束縛関係を指定されたウェイジエットの種類によって、以下の効果がもたらされる。

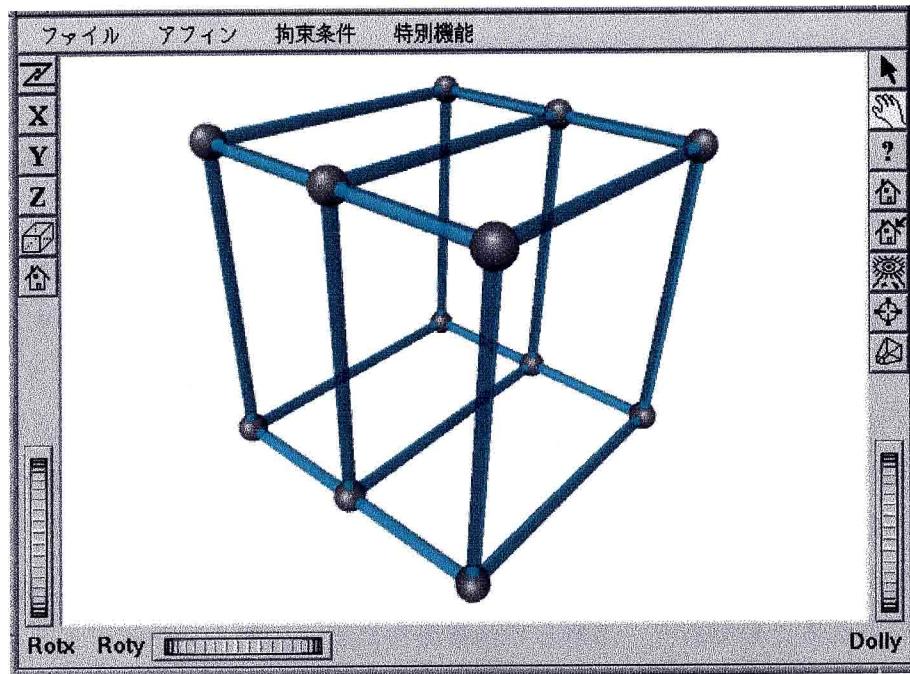


図 6-1: 格子を構成するセル・ウィジェットの生成例

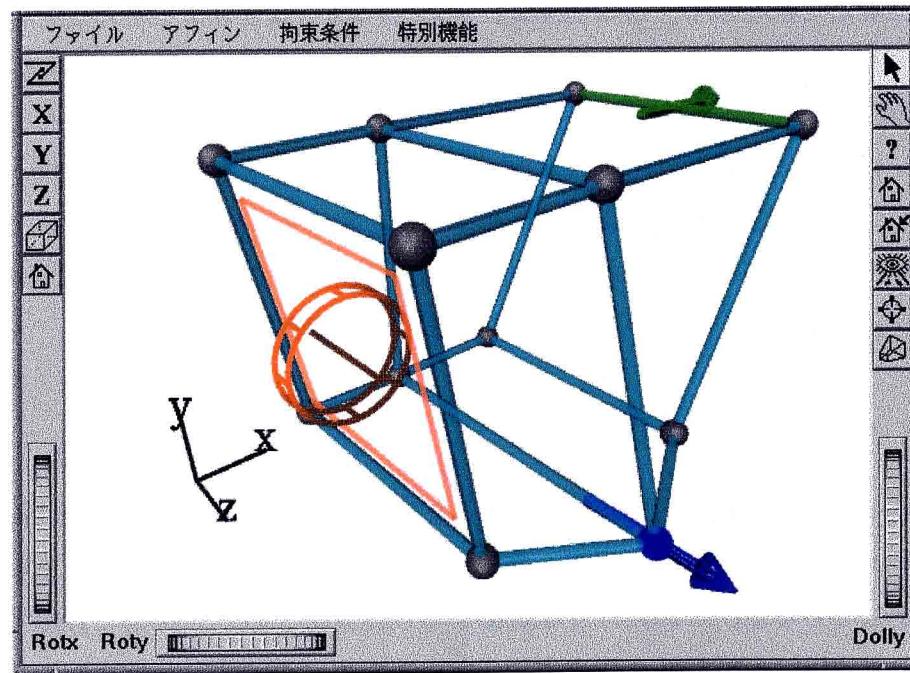


図 6-2: アフィン・ウィジェットの装着例

- セル・ウィジェット対アフィン・ウィジェット

アフィン・ウィジェットを操作することによって、セル・ウィジェットにアフィン変換が施される。アフィン・ウィジェットが操作されていない場合は、セル・ウィジェットのアフィン変換要素に従ってアフィン・ウィジェットに変換が施される。この際、アフィン変換の平行移動、回転移動、および拡大縮小の各要素に関して、セル・ウィジェットからの拘束の有無を指定できる。但し、セルの種類によりデフォルトの値が設定され、例えば点を表わすセル・ウィジェットに対しては、平行移動の要素のみがアフィン・ウィジェットへの拘束条件として初期設定される。

- アフィン・ウィジェット対アフィン・ウィジェット

一方のアフィン・ウィジェットを操作することにより、その変動量が他方のアフィン・ウィジェットの変動量に伝播する。アフィン変換要素の種類が異なる場合には適当な変換則が自動的に適用され、例えば平行移動のウィジェットと回転移動のウィジェットが束縛関係にある場合は、平行移動の距離が回転移動の回転角に変換される。ユーザは変動量を変換する機構の入出力関係と、変換の際に用いられる諸定数の値を2次元ウィジェットを用いて指定し、変換則を柔軟かつ詳細に設定できる。

- セル・ウィジェット対セル・ウィジェット

一方のセル・ウィジェットに変換が施されることにより、そのアフィン変換要素が他方のセル・ウィジェットのアフィン変換要素に伝播する。この場合もセル・ウィジェット対アフィン・ウィジェットの場合と同様に、アフィン変換の各要素に対する拘束条件を各束縛関係ごとに設定できる。

これらの効果により、一つのアフィン・ウィジェットを操作するだけで、複数のアフィンおよびセルのウィジェットが動作するので、複数の制御点を複合的に同期して移動させることが可能になる。

ウィジェット間に拘束条件を設定することにより、形状を変形するツールを構成する上で望ましい、以下に列挙する環境が実現できる。

- 対称性を有する変形を行なうウィジェットを容易に構成できる：

面对称の位置にあるセル・ウィジェット間に束縛関係を指定したり、それらに装着した同種のアフィン・ウィジェット間に束縛関係を指定することにより、面对称な変形が構成できる。

- 工作機械のアフォーダンスを用いたウィジェットを構成できる：

回転移動のアフィン・ウィジェットと平行移動のアフィン・ウィジェットに束縛関係を指定すると、ハンドルを回すことによって上下動の圧搾をおこなうプレス機や万力等の操作を模倣できる。

- ユーザ・インターフェースの一貫性を保持できる：

セル・ウェジットとアフィン・ウェジットの両方に対して同様の操作で束縛関係を指定できるので、両ウェジットの違いを意識せずに一貫性のある操作で変形ツールを構成できる。

- 柔軟かつ多様に拘束条件を設定できる：

セル・ウェジット間の束縛関係により、それらを構成する全ての制御点に常に同様の動作をもたらす静的な拘束条件が設定できる。一方、アフィン・ウェジット間の束縛関係により、各ウェジットの位置、向き等の状態によって異なる動作をもたらす動的な拘束条件が設定できる。

6.2.3 格子ウェジットの階層化

3次元格子点の幾何胞体を構成するセル・ウェジットの集合と、それらに装着されたアフィン・ウェジットの集合は、格子点を操作するために複合的なウェジット（以後、格子ウェジット）を構成する。この格子ウェジットが変形操作の最小単位となるが、それに含まれる各ウェジットは、他の格子のウェジットと前節で述べた束縛関係を任意に指定できる。形状設計の実際の作業には複数の格子ウェジットを用いることが考えられるが、それらの格子を構成するセルおよびアフィンのウェジット間に束縛関係を指定することにより複合的な変形機構を実現できる。

また本システムでは、格子ウェジットをアフィン・ウェジットの拡張として実装し、前節で述べた様に格子ウェジットと他の格子ウェジットに含まれるセル・ウェジット間に束縛関係を設定する。この束縛関係により、前者の格子ウェジットを後者の格子ウェジットに含まれる対話部品として機能させ、格子ウェジットの階層的な表現を可能とする。例えば、キャラクタ・デザインにおける顔面形状のような設計には、曲面自身を階層的に定義して複雑な形状を設計する方が効率が良いので、本システムの3次元ウェジットにも階層的な構成を導入する。

図 6-3に、階層的に定義された格子ウェジットの構成例を示す。この例では、緑の格子ウェジットが、シアンの格子ウェジットに含まれる緑の面のセル・ウェジットと束縛関係にある。またウェジットの階層構造は、システム内では図 6-4で示されるような、木構造のデータで保持される。

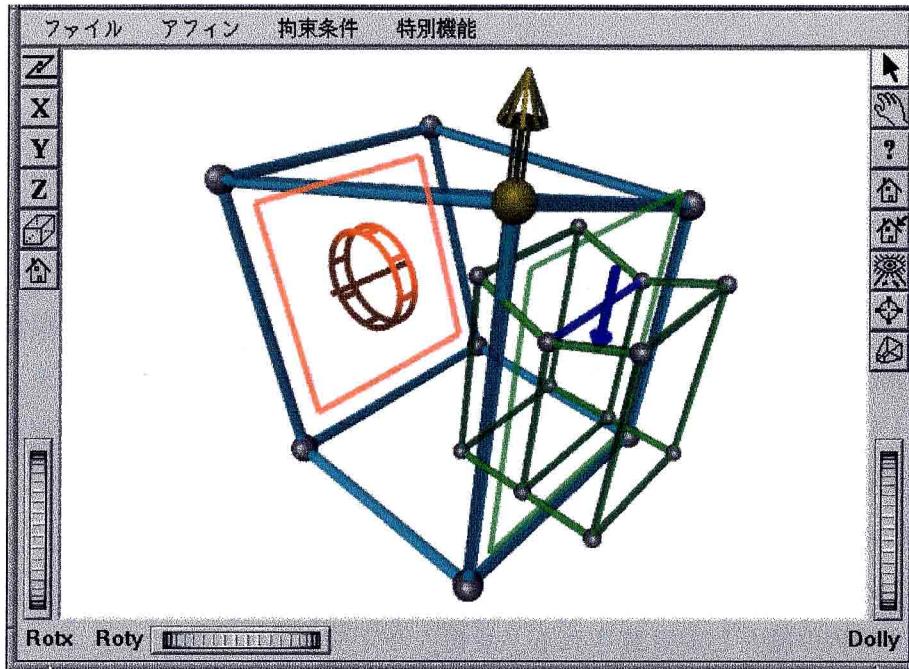


図 6-3: 階層的な格子ウィジェットの構成例

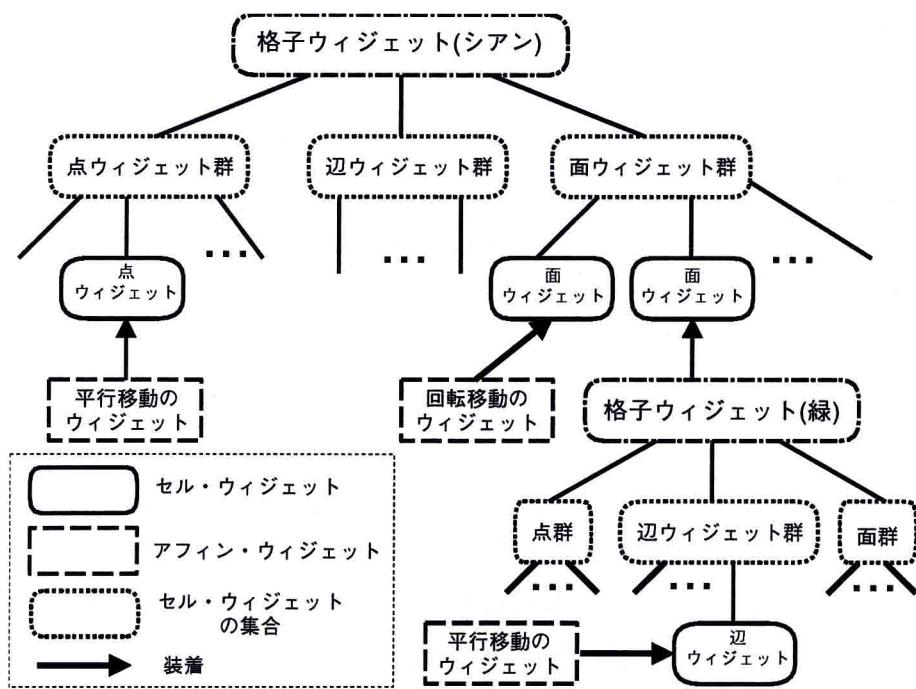


図 6-4: 図3のウィジェットに対する木構造データ

6.3 変形ツールの構築

6.3.1 ウィジェットの実装

3次元格子状に配置されている制御点は、アフィン・ウィジェットが操作される際に生じる局所変動量と、そのウィジェットに対するアフィン変換要素の値より計算されるアフィン変換行列によって移動する。また、セル・ウィジェットやアフィン・ウィジェットは、その位置や向き、および大きさを決定するアフィン変換行列を内部変数として保持し、セル・ウィジェットに対するアフィン変換行列は、制御点の移動後の値より計算され、アフィン・ウィジェットに対するアフィン変換行列は、その初期値と操作に伴い生じる局所変動量の値より計算される。

一方、束縛関係が設定されたウィジェットに対するアフィン変換行列の値は、束縛相手のウィジェットのアフィン変換行列の値と、自身のウィジェットが操作された際に更新されるアフィン変換行列の積として計算される。故に、ウィジェットを操作するイベントが発生した際に、自身の変換行列の値と共に、束縛関係にあるウィジェットの変換行列の値が更新される。但し、束縛する側のウィジェットのアフィン変換行列は、各束縛関係に対して設定された拘束条件に従って平行移動、回転移動等の成分に分解され、束縛される側のウィジェットのアフィン変換行列を更新する。

これらの機構により、各ウィジェットがそのアフィン拘束条件に従って、イベント駆動型で同期して動作することになる。図 6-5に、アフィン・ウィジェットとセル・ウィジェットに束縛関係が設定されている例を用いて、格子点とウィジェット間にアフィン変換が伝播する機構を示す。

アフィン・ウィジェット間に束縛関係が設定された場合は、そのアフィン変換の局所的な変動量を保持する内部変数の値が伝播して同時に更新されるようになる。但し、アフィン・ウィジェットの種類（すなわち、アフィン変換の型）が異なる場合は、内部変数の値がデータ・タイプを変換する機構を通して（例えば、平行移動距離の変動量が回転角の変動量に変換される）更新され、種類の異なるアフィン・ウィジェットが同時に動作する。このとき、種類の異なるアフィン・ウィジェット間の入出力関係、および変動量の変換則を柔軟に設定できる機構を有するオブジェクトが生成される。

アフィン・ウィジェットのアフィン変換行列の値は、自身が操作された際の局所的な座標空間におけるアフィン変換の変動量を、大域的な世界座標系での値に変換するのに用いられる。一方、格子ウィジェットもアフィン・ウィジェットと同様に構成されるが、格子ウィジェットが内部変数として保持するアフィン変換行列は、格子の局所的な座標空間を世界座標系での値に変換するのに用いられる。

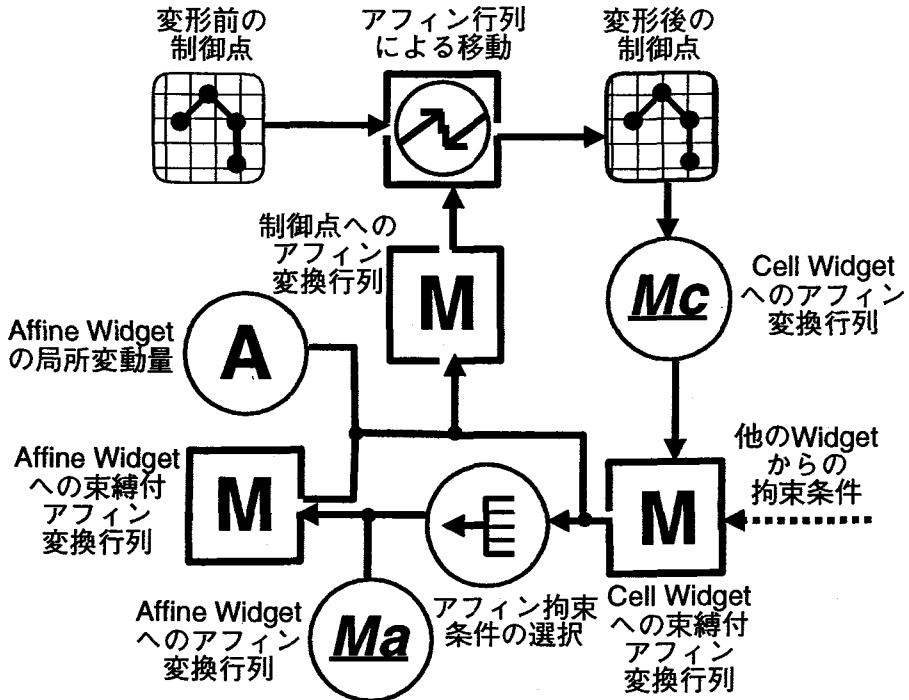


図 6-5: 格子点とウィジェットの制御機構

6.3.2 変形の数学モデル

ここでは、3次元ウィジェットを用いた変形ツールの構築例として、Free-From Deformation（以後、FFD）と呼ばれる数学モデルを取り挙げる。この手法は、3次元格子状に配置された制御点を操作して幾何形状を変形させるもので、変形の大域的な指定が可能であり、変形を任意の解析曲面、ポリゴンデータ等に適用できるので汎用性を有する。また、格子点の数を増やすことにより、いくらでも複雑な変形を指定することが可能である。

FFDの数学モデルは、3次元格子状の制御点の位置座標 $\mathbf{P}_{i,j,k}$ を3変数の基底関数の係数に用いた以下の式で表わされる。

$$\mathbf{X}_{FFD} = \sum_{i,j,k} B_i(u) B_j(v) B_k(w) \mathbf{P}_{i,j,k} \quad (6.1)$$

但し、基底関数 $B_l(x)$, $l = i, j, k$, $x = u, v, w$ は通常、バーンスタイン（ベジエ）多項式やBースplineが用いられる。

FFDを用いた変形操作は、変形される物体の形状を定義する点を3次元格子内での変数空間における局所的な座標値 (u, v, w) に埋め込む計算と、その局所座標値 (u, v, w) を点 \mathbf{X}_{FFD} に式(6.1)を用いて写像する計算に2分される。局所的な座標値 (u, v, w) への埋め

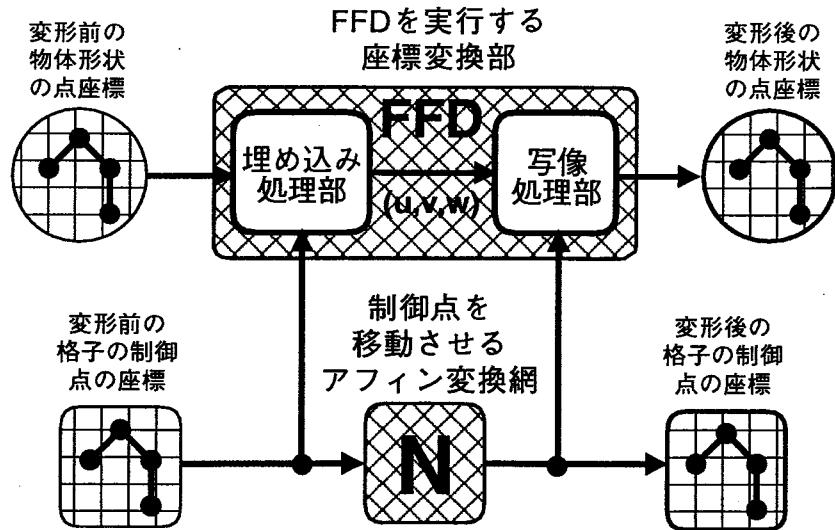


図 6-6: F F D の処理機構

込みの計算は、物体を構成する各点 \mathbf{Q}_n に対して、

$$\mathbf{Q}_n = \sum_{i,j,k} B_i(u_n) B_j(v_n) B_k(w_n) \bar{\mathbf{P}}_{i,j,k} \quad (6.2)$$

を満たす座標値 u_n, v_n, w_n を計算する。但し、 $\bar{\mathbf{P}}_{i,j,k}$ は変形前の制御点の基準位置座標とする。

基底関数がバーンスタイン多項式で、 $\bar{\mathbf{P}}_{i,j,k}$ が直交座標上に等間隔に配置されている場合は、式 (6.2) の計算は線形方程式を解いて行われるが、他の基底関数を用いた場合や格子の点が不等間隔に配置された場合、あるいは円柱座標系で格子の点が配置された場合などは、式 (6.2) の計算は非線形方程式を数値解析手法を用いて近似的に求めることになり計算量も増大する。しかしながら、格子点を操作して変形を行なっている際には局所座標値 u_n, v_n, w_n は変化しないので、式 (6.2) の局所座標値の計算は、FFDの格子と変形する物体の相互の位置関係が決まった際に一度だけ計算すれば良い。

以上の観点から、FFDの機構を局所座標への埋め込みを計算する処理部分と、写像点を計算する処理部分に分けて実装する。ここではこの埋め込みと写像の処理部分をイベント駆動型のデータ処理を行なうオブジェクトとして設計し、FFD全体の処理をこれらのオブジェクトを用いて図 6-6に示すような機構で実現する。このとき埋め込みの処理部は、変形する物体に対するFFDの制御点の初期配置が決まったときに値が更新され、写像の処理部はウィジェットによる対話操作により制御点が位置を変化ごとに値が更新される。

一方、FFDの各制御点のウィジェットの操作に伴う位置の座標は、アフィン変換網と呼ばれるイベント駆動型の処理機構によって計算される。この処理機構は、セル・ウィジェットにアフィン・ウィジェットを装着した際とウィジェット間に束縛関係を設定した際に、ア

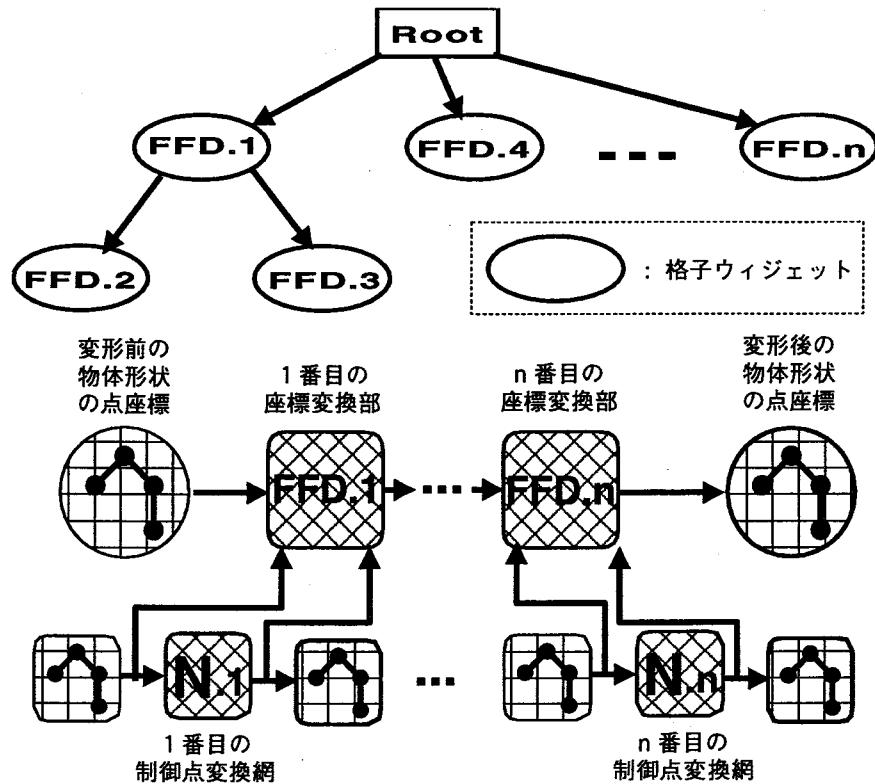


図 6-7: 階層的な格子の F F D パイプライン処理化

フィン変換行列の値を計算する図 6-5で表されるオブジェクトを動的にネットワーク状に結合して構成される。

6.2.3 節で述べた様に格子を階層的に構成した場合、変形する物体上の点が複数の格子内の変数空間に含まれるようになるので、ある格子に対する物体の変形後の出力座標値を他の格子の変形前の入力座標値として、各点の変形後の座標値を逐次計算する必要がある。本システムでは、木構造で表現される階層的な構造に対して、各格子のウィジェットを図 6-7に示すように行きがけ順で探索しながら、各格子に対する F F D の処理機構を直列にパイプライン化する。このとき、階層関係において親に相当する格子に関する変形が先に行なわれ、その格子の対話部品として含まれる子の格子に関する変形が後に行なわれる。同レベルの階層にある格子間の優先順位は、実際にはウィジェットの設計者によって対話的に指定され、それがデータの木構造に反映される。

変形機構をパイプライン化した場合、パイプラインの後段の格子の埋め込み処理部の値はその前段の格子の写像処理部の値と同じ頻度で更新されるので、前段の格子を操作する際の計算量が増大してしまい、対話操作の実時間応答性に支障が生じる。故に、全体の計算量を軽減するために、操作の対象となっている格子以外の F F D の埋め込み処理部の値の更新の頻度を調節できるようにする。

6.3.3 システムの開発環境

3次元ウィジェットを用いた対話環境を実現するシステムの開発用ツールとして、Silicon Graphics 社が OpenGL 上に開発した Open Inventor [Wer94A,Wer94B] と呼ばれるツールを用いた。Open Inventor は、シーン・データベースと呼ばれるオブジェクトに基づいた、オブジェクト指向のグラフィクス・アプリケーション構築ツールであり、これをプログラミング・インターフェースとして用いることにより、試作システムの開発期間を大幅に短縮することができた。このツールは、3次元物体の形状および属性を定義するシーン・オブジェクトと呼ばれるクラス・ライブラリに加えて、3次元物体のアフィン変換を行う対話型のオブジェクトである *Manipulator* や、その構成部品である *Dragger* およびイベント駆動型のデータ処理を行うアニメーション・オブジェクトである *Engine* 等を備える。本システムでは、この *Dragger* や *Engine* に対する C++ のクラス・ライブラリを拡張して、制御点を操作する 3次元ウィジェットのクラス・ライブラリを構築する。また、対話的な操作を通して、ウィジェットの形状および属性を編集する GUI も、Open Inventor の Motif の機能を組み込んだクラス・ライブラリを利用する。

Open Inventor は、幾何形状や面の属性および光源などのデータと同様に、対話モデルに関しても標準的なデータ・ファイル形式を定義しているので、変形ツールのデータが他の 3次元グラフィクスデータと明確な区別なくデータベース化できるという利点を有する。また、そのデータ・ファイル形式は計算機の機種に依存しないように設計されているので、この形式を用いることにより変形ツールの異機種間での可搬性、互換性が達成される。さらに、World Wide Web のホームページの記述を 3次元の仮想空間の記述に拡張した言語である Virtual Reality Modeling Language は、Open Inventor を基本言語として実装されているので、本システムはその共同作業空間をインターネット上に容易に組み込める。

6.4 変形ツール作成の対話的実装

本システムを用いて 3次元ウィジェットを作成し、幾何物体に変形を施す一連の操作を以下に詳説する。

- 3次元格子を構成するセル・ウィジェットの生成：

ダイアログ・ボックスにより格子の各軸に沿う制御点の数を指定すると、その格子点および幾何胞体を構成するセル・ウィジェット群が ($0 \leq x, y, z \leq 1$) の正規空間上に生成される。

- アフィン・ウィジェットのセル・ウィジェットへの装着：

セル・ウィジェットを画面上でピックした後、メニューでアフィン・ウィジェットの種類を選択すると装着が実行される。

- アフィン・ウィジェットと格子ウィジェットの状態の指定：

アフィン・ウィジェットまたは格子ウィジェットを画面上でピックすると、それに対してアフィン変換を施す対話部品が自動的に装着され、その部品を画面上で直接操作してウィジェットの位置や向き、および大きさを調節する。また、画面上の何もない場所をピックすると、装着された対話部品が自動的に脱着される。

- ウィジェット間の束縛関係の指定：

画面上で二つのウィジェットをピックして束縛メニューを実行すると、ピックされたウィジェットの種類で決まる束縛関係が指定される。

- 拘束条件を決めるアフィン変換要素の設定：

束縛されている側のウィジェットを画面上でピックすると、その地点で設定されている拘束条件をトグル・ボタンで示すメニューが表示されるので、それを用いてアフィン変換の各要素毎に拘束の有無を再設定できる。

- ウィジェットの幾何物体への装着および脱着：

幾何物体と格子ウィジェットを画面上でピックした状態で、装着メニューを実行すると、その格子ウィジェットの座標空間が幾何物体の外接直方体と一致するように変換され、幾何物体を構成する点の座標がF F Dの処理機構に取り込まれ、アフィン・ウィジェットの直接操作により形状を変形できる状態になる。また、格子ウィジェットを画面上でピックした状態で脱着メニューを実行すると幾何物体の点がF F Dの処理機構から切り離される。

- 基本形状を用いた、変形動作の確認：

格子ウィジェットの変形動作を即座に確認するために、球や円柱等の基本形状の種類や向きおよびポリゴンでの分割数等をダイアログ・ボックスで指定すると、ピックされたウィジェットに基本形状が自動的に装着または脱着される。

- アフィン・ウィジェットの形状および属性の変更：

格子ウィジェットのアフォーダンスを改良するために、工作機械を構成する部品のデータ・ベースから幾何および属性のデータを選択し、ピックされたアフィン・ウィジェットのデータに入れ換える。また、アフィン変換を施す対話部品を用いて、入れ換えた幾何データの位置や向きおよび大きさを調節する。

- ウィジェットのファイル入出力：

ダイアログ・ボックスで変形ツールの名前を指定してファイルの入出力を実行する。

以上の操作は、3次元作業空間における3次元ウィジェットのピックおよび直接操作を基本に行なわれるが、数値およびテキスト入力が要求される操作や特殊な命令の実行に対して

は、ダイアログ・ボックスやアプリケーション・ボタン、およびメニュー・パネル等の2次元ウィジェット（Motif[OSF]により実装）を使用する。

本システムは、変形ツールの作成過程と変形操作の実行過程における状態の遷移を意識させない、モードレスな対話環境を提供しているので、変形動作を指定してウィジェットを設計する作業と、ウィジェットを操作して装着された幾何物体を変形する作業が並行して行なえる。すなわち、上記の全ての操作は順序に関する依存性がなく独立に実行できる。また、階層的な格子ウィジェットを構成する際には、複数のウインドウ上で個別に格子ウィジェットを構成し、ある格子ウィジェットのセル・ウィジェットと他の格子ウィジェットの全体を選択した後、束縛関係を指定して構成される。

6.5 3次元ウィジェットによる変形操作例

図6-8と図6-9に、3次元ウィジェットを用いて具体的な幾何形状に変形操作を施した例を示す。

図6-8は、 $2 \times 3 \times 2$ の制御点を有する格子を構成するセル・ウィジェットを生成し、2つの面のウィジェットに平行および回転移動のウィジェットを装着して移動の向き、回転軸を調節した後、2つの辺に対して平行移動のウィジェットを逆向きに装着してそれらに束縛関係を指定して、面对称な変形を行なった例である。また図6-9は、階層的なウィジェットの構成による変形ツールの操作例を示しており、 $2 \times 2 \times 2$ の制御点を有する格子を構成するセル・ウィジェットの面のウィジェットに、階層的に格子ウィジェットを束縛させた例である。また、2つの点のウィジェットに装着した平行移動のウィジェット同士と、異なる格子ウィジェットに含まれる2つの辺のウィジェットに装着した平行移動のウィジェット同士には、各々束縛関係が指定されている。

本システムでは、変形ツールとしての3次元ウィジェットのアフォーダンス（その概観から、部品の使用法および機能が簡単に推察される性質）を改良するために、標準的に指定されるアフィン・ウィジェットの概観を工作機械で用いられる部品の概観と入れ換えるための編集機能を装備している。ユーザは工作機械の部品の形状および属性のデータをブラウザで検索しながら適当なものを選び、画面上でピックされているアフィン・ウィジェットの概観のデータを選択したデータと入れ換えた後、Manipulator を用いてその位置や向きおよび大きさの値を調節する。

図6-10および図6-11に、インダストリアル・デザインの現場において実際に用いられる変形道具を模倣してウィジェットを装飾した例を示す。但し、図6-11の例では円柱座標系で格子点が配置されており、FFDの数学モデルを拡張したE F F D [Coq90] の手法が用いられている。

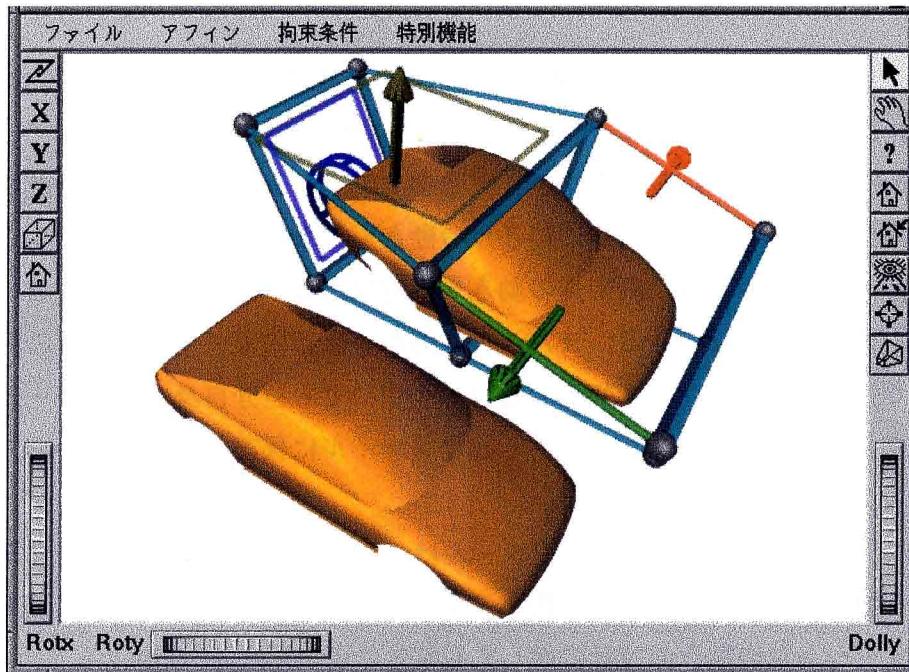


図 6-8: 3次元 ウィジェットを用いた変形操作例

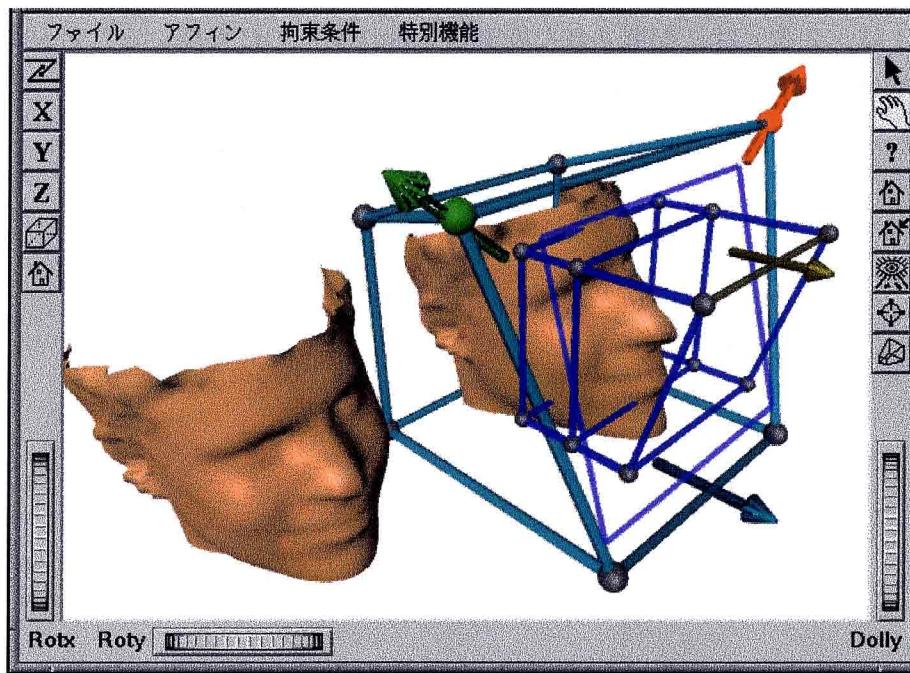


図 6-9: 階層的な ウィジェットを用いた変形操作例

6.6 結言

本章では、3次元形状に対する複雑な変形操作を実現するツールとしての3次元ウィジェットを、対話的な直接操作によって構成する手法について述べた。

本システムにより作成される複合的な3次元ウィジェットは、アフィン変換要素を用いた拘束条件を指定することにより複数の格子点の動きを複合的に同期して制御することができる。故に、格子状に配置された制御点の動きを単純化あるいは類型化することにより、形状の変形操作が直観的に把握できる。また、視覚的かつ直接的なウィジェットの設計を支援することにより、プログラミングの知識のないユーザにでも自分自身の変形ツールが容易に作成できる。また、ウィジェットがデータとしてファイルに保存されることから、変形ツールの再利用および共有が可能となる。

さらに、本システムで構成される変形ツールは、変形の数学モデルであるFFDの手法の全ての利点を継承するので、例えば時間因子を3次元ウィジェットに対して導入することにより、アニメーションの動作の設計に対しても有効に用いられる [CJ91]。

本研究では変形の数学モデルとしてFFDを取り上げたが、本手法は本質的にはその数学モデルに限定されるものではなく、多数の制御点を操作対象とする全ての変形手法に適用可能である。それらの変形手法の数学モデルをコールバック関数として実装すれば、ウィジェットの作成環境をそのまま用いることができる。また、本システムで作成される3次元ウィジェットは、2次元状に配置された制御点を操作するのにも用いることが可能なので、例えば、スプライン曲面等の形状を直接操作するツールとしても役立つ。

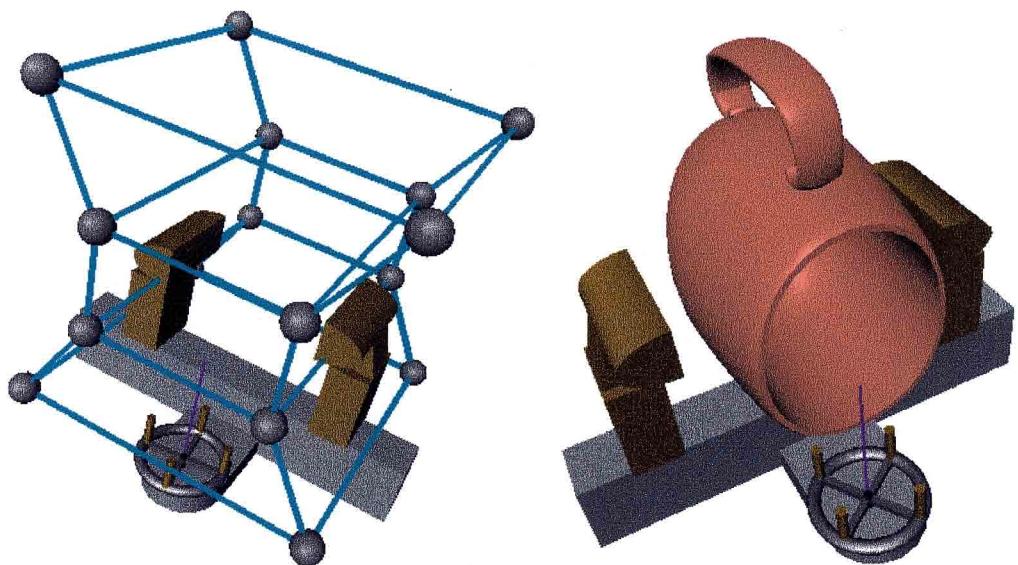


図 6-10: 工作機械のアフォーダンスを用いた変形操作例

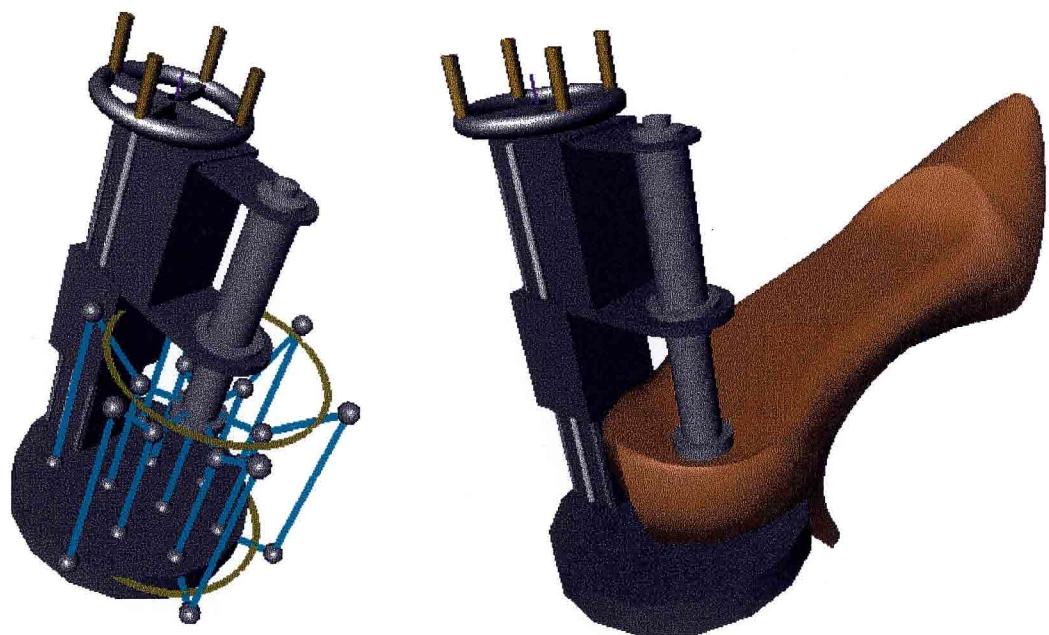


図 6-11: 工作機械のアフォーダンスを用いた変形操作例（円柱座標格子）

第7章 結論

本研究で得られた成果について簡単にまとめておく。

第2章では、これまでに提案された媒介変数曲面の数学モデルについて、その数学的性質および特徴などを幾何学的な観点から述べ、形状を設計する際の制約条件から生じる問題点を指摘することにより、本論文で提案される手法の理論的な背景を述べた。

第3章では、1次元あるいは2次元アレイで配置された点をスプライン関数で補間して、形状の局所的な制御が可能な曲線・曲面を生成する手法について述べた。

局所的な台をもつカーディナル基底を、等間隔節点をもつ3次のBーススプラインまたは β 2ーススプラインで近似的に構成する手法(Sーススプライン)と、多重節点をもつ4次のBーススプラインで幾何学的な連続性の条件を厳密に満足するように構成する手法(σ -ーススプライン)を提案し、これらの基底を用いて補間曲線・曲面を生成する手法を示した。また、 σ -ーススプラインで曲線・曲面を生成する際に補間されない制御点のデフォルト値を自動的に決定する手法として、ヒューリスティクスで求める方法と次数を3次に縮退させるように求める方法を提案した。最後に、 σ -ーススプラインで生成される曲線・曲面の再分割手法、および異なる節点ベクトルで定義されるスプライン曲面間を融合する手法について述べた。

この手法は、曲面形状をより柔軟かつ直観的に設計するための、序論において述べた以下の特徴を備えている。

1. 曲面上の点を陽に指定できる。
2. 形状を局所的に制御できる。
3. 形状を張力変数によって制御できる。
4. 形状を階層的に指定できる。

本手法は、1.と2.の特徴を両方備えているという点において、既存のスプライン曲線・曲面モーラーの手法より優れている。

第4章では、多面体の稜に沿い面領域を三角形分割する3次曲線網を計算し、その曲線網を三辺形パッチで補間して曲面を生成する手法について述べた。

曲線網の形状は、多面体の各頂点および辺に対して付与される張力変数を含む、拡張された疑似ノルム最小化関数を用いることにより直観的に制御できる。また、4次3変数のベジエ多項式の内部の制御点を有理多項式で展開した三辺形パッチを用いることにより、曲線網を補間しパッチの境界で法線ベクトルの連続な曲面が生成できることを示した。さらに、本手法で提案する三辺形パッチ曲面とベジエ多項式のテンソル積で表される曲面との法線ベクトルの連続な接続方法について述べた。また、本手法で生成される各種の曲面の例を挙げて、その形状の評価を行った。

この手法が用いる曲面の数学モデルは、第3章における手法が有する特徴に加えて、形状の記述に対する柔軟性を高めるための以下の特徴を備えている。

5. 形状を点の任意の配置により指定できる。
6. 形状をそのトポロジーに依存せずに指定できる。

本手法は、多面体やテンソル積曲面の入力のみを扱う既存のモーダラーに、三辺形パッチの数学モデルを容易に組み込めるという利点を有する。

第5章では、任意の接続関係で交差する曲線群から形状の特徴を表す曲線網を構成して、その曲線網から多辺形パッチ曲面を生成する手法について述べた。また、この手法を用いて試作されたサーフェイスモーダラーのシステム構成、曲線網のデータ構造と生成機構、曲面の生成機構、および曲面形状の入力操作例などを具体的に示した。

多辺形パッチ曲面は、パッチの境界に相当し互いに交わる曲線対で定義される掃引曲面から構成される副曲面を、超限補間関数によって融合して生成されることを述べた。またこのとき、パッチの境界における幾何学的な連続性の次数は、その境界と交わる各曲線の交点における連続性の次数によって決定されることを示した。

この手法が用いる曲面の数学モデルは、第4章における手法が有する特徴に加えて、曲面形状の設計の際に望ましい以下の特徴を備えている。

5. 形状を曲線の任意の配置により指定できる。
7. パッチ境界における連続性を任意に指定できる。

本手法は、ワイヤーフレームモデルの入力のみを扱う既存のモーダラーに、多辺形パッチの数学モデルを容易に組み込めるという利点を有する。

第3章から第5章で提案された3種類の曲面の数学モデルに基づく曲面形状の設計環境は、デザイナーが設計の際にどのようなアプローチを取るかによって、それぞれ選択的に用いられるものである。例えば、第3章で述べた手法は、物体の表面上の点の座標値を、3次元デジタイザなどによって2次元メッシュ状に標本化したデータから、曲面を生成・編集したり曲面間を融合させるのに適しており、市販のスプライン曲面モーダラーの形状操作に対する柔軟性を高めることができる。第4章で述べた手法は、多面体を用いて曲面形状を立体的に構成して設計するのに適しており、市販のソリッドモーダラーを利用して、簡略かつ直観的な曲面形状の設計環境を構築できる。第5章で述べた手法は、曲面形状をその特徴曲線で構成して設計するのに適しており、市販のスケッチ入力によるワイヤーフレームモーダラーのデータから曲面を生成してCADやFEMのデータ等を出力できる。また、第3章におけるスプライン曲線の生成手法や、第4章における多面体からの曲線網の生成手法は、第5章で用いられる特徴曲線の設計に用いることができる。これらの特徴は、市販の3D-CAGD

システムにはない形状の柔軟な記述方法を導入することにより、デザイナーの設計環境をより簡略、柔軟、かつ直観的なものに改善している。

第6章では、曲面形状を変形するツールとしての3次元ウィジェットを構成する手法について述べた。この手法は、第3章から第5章において曲面を生成するための基本データとなる、3次元空間での制御点、多面体、および曲線網を簡略に入力するための、より良いグラフィカル・ユーザ・インターフェースを提供することができる。特に、生成された曲面形状をポリゴン化した後、3次元空間での対話的な直接操作のみによってその形状を直観的に変形・修正するためのツールとして用いられる。また、3次元ウィジェットの作成にはプログラミングの知識を一切必要としないので、デザイナーが自分自身の変形ツールを簡単に作成することができる。また、3次元ウィジェットのデータは標準的なファイル形式で保存されるので、変形ツールの共有化およびデータベース化が可能となる。

最後に、残された課題についてまとめておく。

本論文で提案された3種類の曲面の数学モデルの全てに共通する点として、曲面の形状操作に対する自由度を高めるために曲面式の次数を上げていることが指摘される。一般的に、高次数の曲面式はその形状に不自然な振動、突起、隆起、折り返しなどを発生しやすくなるので、それらを未然に予測して回避するか、簡単に修正できる機能をもたせる必要がある。また、既存のソリッドモデルに曲面モデルを取り込む場合に曲面間の干渉および交線を求めたり、加工工程において工作機械で扱われる曲面形状の数値データを出力する必要があるが、本論文で提案する高次数の曲面式に対してこれらを数値的に安定に計算する手法の確立が要請される。

3次元ウィジェットを用いた変形ツールの構成法に関しては、スペース・ボール、データ・グローブ等の3次元ポインティング・デバイスによる、3次元ウィジェットの効率的な操作方法が今後の検討課題である。

謝辞

大阪大学大学院電子工学科在籍中における本研究の全過程を通じて、懇切な御指導、御鞭撻、御助言を賜った寺田浩詔教授に衷心より謝意を表する。

本研究に関し、御指導、御教示を賜った大村皓一助教授（現在、宝塚造形大学教授）に心から謝意を表する。

本論文の内容に関して、貴重な御指導、御助言を賜わった白川功教授、藤岡弘教授、岸野文郎教授に心から謝意を表する。

本論文に関して、御指導を頂いた西尾章治郎教授、薦田憲久教授、鈴木胖教授、村上孝三教授に心から感謝の意を表する。

寺田研究室在籍中に、温かい御支援、御助言を頂いた浅田勝彦助教授（現在、福井大学教授）、笛尾勤助手（現在、九州工業大学教授）、西川博昭助手（現在、筑波大学助教授）、江木康雄技官、岩田誠助手に深く感謝する。

大学院前期過程において、電子工学一般および各専門分野に関し御指導、御教示賜った児玉慎三教授（現在、近畿大学教授）、小山次郎教授、西原浩教授、濱口智尋教授、裏克己教授（現在、大阪産業大学教授）、塙輝雄教授（現在、大阪工業大学教授）に感謝する。

本研究を進めるにあたり、種々の面で御指導、御助言を賜った河田享助教授（現在、シャープ（株））、築山修治助教授（現在、中央大学教授）、出口弘講師（現在、神戸女学院大学助教授）、山井成良講師に深謝する。

寺田研究室在籍中に、共同研究者として適切なる御助言ならびに御協力を頂いた、本学卒業生、（株）SunGraphics の西村仁志氏、（株）イマジカの大野廣司氏、大阪電気通信大学助教授の河合利幸氏、（株）Triaxis の山下伸一氏、日本電気（株）の西田政人氏、那須雅樹氏、日本電信電話（株）の正田博司氏、山名岳志氏、シャープ（株）の若井裕久氏、舟渡信彦氏、富士通（株）の藤田卓志氏、高山浩一郎氏、（株）野村総合研究所の和田充弘氏、住友電工（株）の井上博之氏、富士写真フィルム（株）の望月康幸氏、本田技研工業（株）の澤多靖浩氏、ならびに関西大学卒業生、三菱電気（株）の岸良行氏に感謝の意を表する。

システム利用者の立場から有益なる御助言を頂いた元研究生、メタ・コーポレーション・ジャパン（株）の高沖英二氏、（株）七音社の松浦季里嬢、（株）アイ・コムの中川桂子嬢、岡勝利氏、太陽企画（株）の石田晃氏、佐藤裕英氏、（株）リンクスの並木茂氏に感謝する。

寺田研究室元秘書の河合典子嬢、西田典子嬢、高田有香子嬢、白川研究室元秘書の前川礼子嬢には種々の面で御協力頂いた。ここに記して感謝する。

日頃から御支援頂いた寺田研究室、白川研究室、関西大学電気工学科尾崎研究室の皆様に心から感謝の意を表する。

日本IBM(株)における本研究の過程を通じて、親切なる御指導、御教示、御助言を賜った鈴木則久所長(現在、ソニー半導体デバイス副社長)、金子豊久氏(現在、豊橋技術科学大学教授)、清水和哉氏、宇野栄氏、小出昭夫氏、香田正人氏、杉本和敏氏に心から謝意を表する。

東京サイエンティフィックセンターにおいて種々の面で御助言、御協力頂いたグラフィックスシステムグループの浦野直樹氏(現在、シャープ(株))、南方博視氏、小野眞氏、室橋茂雄氏、奥山健一氏、木下恒男氏、本条信満氏、先進グラフィクス応用グループの土井章男氏(現在、岩手大学講師)、宮田一乗氏、宮沢達夫氏、小山田耕二氏、広田源太郎氏(現在、ノース・カロライナ大学)、小林メイ嬢、森脇淳氏、太田高志氏、村尾高秋氏、CIMテクノロジグループの吉田武稔氏、吉川博文氏、沼尾雅之氏、岡野彰氏、増田宏氏、清水周一氏、井上恵介氏、田島玲氏に深謝する。

多くの御協力を頂いた東京サイエンティフィックセンター秘書の中村悦子嬢、元秘書の有留美樹嬢に感謝する。

本研究を進めるにあたり、御援助頂いた日本IBM(株)の関係各位に感謝する。

広島市立大学・情報科学部・情報機械システム工学科・システムインタフェース講座にて、貴重な御指導、御助言を頂いている橋啓八郎教授に、心からの謝意を表する。また、同講座の川本佳代助手、高井博之助手には、種々の面で御協力頂いた。ここに記して感謝する。

システムの設計面で、共同研究者としての有益なる御助言、御協力を頂いている、広島市立大学・芸術学部・デザイン工芸学科の中嶋健明助教授、吉田幸弘講師に心から感謝の意を表する。

本研究を進めるにあたり、御援助頂いた広島市立大学・情報科学部の関係各位に感謝する。

参考文献

- [AB87a] S. Abhyankar and C. Bajaj. Automatic rational parameterization of curves and surfaces I: Conics and conicoids. *Computer Aided Design*, Vol. 19, No. 1, pp. 11–14, 1987.
- [AB87b] S. Abhyankar and C. Bajaj. Automatic rational parameterization of curves and surfaces II: Cubics and cubicoids. *Computer Aided Design*, Vol. 19, No. 9, pp. 499–502, 1987.
- [AWW89] J. B. Allan, B. Wyvill, and I. H. Witten. A methodology for direct manipulation of polygon meshes. In R. A. Earnshaw and B. Wyvill, editors, *CG international '89*, pp. 451–469. Springer-Verlag, 1989.
- [Bé66] P. Bézier. Définition numérique des courbes et surfaces i. *Automatisme*, Vol. 11,, 1966.
- [Bé67] P. Bézier. Définition numérique des courbes et surfaces ii. *Automatisme*, Vol. 12,, 1967.
- [Bé71] P. Bézier. Example of an existing system in the motor industry: The UNISURF system. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A321, pp. 207–218, 1971.
- [Bar91] P. J. Barry. Polar forms and rational B-spline curves. In *ACM SIGGRAPH '91, Course Notes*, volume 26, pp. 7.0–7.36. ACM, 1991.
- [Bau75] B. Baumgart. A polyhedron representation for computer vision. In *Proc. AFIPS. Nat. Conf. 44*, pp. 589–596, 1975.
- [BB83] B. A. Barsky and J. C. Beatty. Local control of bias and tension in Beta-splines. *Computer Graphics*, Vol. 17, No. 3, pp. 193–218, 1983.
- [BBG73] R. E. Barnhill, G. Birkhoff, and W. J. Gordon. Smooth interpolation in triangles. *J. Approx. Theory*, pp. 114–128, 1973.
- [BD85] B. A. Barsky and T. D. DeRose. The Beta2-spline : A special case of the Beta-spline curve and surface representation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 5, No. 9, pp. 46–58, 1985.
- [BG88] P. J. Barry and R. N. Goldman. A recursive evaluation algorithm for a class of Catmull-Rom splines. *Computer Graphics*, Vol. 22, No. 4, pp. 199–204, 1988.

- [BL66] C. D. Boor and R. E. Lynch. On splines and their minimum properties. *J. Math. Mech.*, Vol. 15, pp. 953–969, 1966.
- [Boh84] W. Bohm. A survey of curve and surface methods in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 1, pp. 1–60, 1984.
- [Boo72] C. D. Boor. On calculating with B-splines. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 6, pp. 50–62, 1972.
- [Cas59] P. D. Casteljau. Outils méthodes calcul. Technical report, A. Citroen, Paris, 1959.
- [Cas63] P. D. Casteljau. Courbes et surfaces à poles. Technical report, A. Citroen, Paris, 1963.
- [CC78] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, Vol. 10, No. 6, pp. 350–355, 1978.
- [CG84] P. Charrot and J. A. Gregory. A pentagonal surface patch for computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 1, pp. 87–94, 1984.
- [Chi86] H. Chiayokura. Localized surface interpolation for irregular meshes. In T. L. Kunii, editor, *Advanced Computer Graphics (Proc. Computer Graphics Tokyo '86)*, pp. 3–19. Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
- [CJ89] B. K. Choi and S. Y. Ju. Constant-radius blending in surface modelling. *Computer Aided Design*, Vol. 21, No. 4, pp. 213–220, 1989.
- [CJ91] S. Coquillart and P. Jancene, Animated Free-Form Deformation: An Interactive Animation Technique, *Computer Graphics*, Vol. 25, No. 4, pp. 23–26, 1991.
- [CK83] H. Chiayokura and F. Kimura. Design of solids with free-form surfaces. *Computer Graphics*, Vol. 17, No. 3, pp. 289–298, 1983.
- [CL90] B. K. Choi and C. S. Lee. Sweep surfaces modelling via coordinate transformations and blending. *Computer Aided Design*, Vol. 22, No. 2, pp. 87–96, 1990.
- [CLR80] E. Cohen, T. Lyche, and R. Riesenfeld. Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 14, pp. 87–111, 1980.

- [Coh87] E. Cohen. A new local basis for designing with tensioned splines. *ACM Trans. on Graphics*, pp. 81–122, 1987.
- [Coo67] S. A. Coons. Surfaces for computer aided design of space forms. Technical report, MIT Project MAC-TR-41, 1967.
- [Coq90] S. Coquillart, Extended Free-Form Deformation: A Sculpting Tool for 3D Geometric Modeling, *Computer Graphics*, Vol. 24, No. 4, pp. 187–196, 1990.
- [CR74] E. Catmull and R. Rom. A class of local interpolating splines. In R. Riesenfeld and R. Barnhill, editors, *Computer Aided Geometric Design*, pp. 317–326, New York, 1974. Academic Press.
- [CR94] Y. K. Chang and A. P. Rockwood, A Generalized de Casteljau Approach to 3D Free-form Deformation, *Computer Graphics*, Vol. 28, No. 5, pp. 257–260, 1994.
- [DER86] T. S. Duff, A. M. Erisman, and J. K. Reid. *Direct Methods for Sparse Matrices*. Oxford University Press, New York, 1986.
- [DS78] D. Doo and M. Sabin. Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, Vol. 10, No. 6, pp. 356–360, November 1978.
- [Duf91] J. F. Dufourd. Formal specification of topological subdivisions using hypermaps. *Computer Aided Design*, Vol. 23, No. 2, pp. 99–116, 1991.
- [Far83] G. Farin. Smooth interpolation to scattered 3D data. In R. E. Barnhill and W. Boehm, editors, *Surfaces in CAGD*, pp. 43–63. North-Holland, 1983.
- [Far85] G. Farin. A modified Clough-Tocher interpolant. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 2, pp. 19–27, 1985.
- [Far86] G. Farin. Triangular Bernstein-Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 3, pp. 83–127, 1986.
- [Far90] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide*. Academic Press, 1988, 1990.
- [FB88] D. R. Forsey and R. H. Bartels. Hierarchical B-spline refinement. *Computer Graphics*, Vol. 22, No. 4, pp. 205–212, 1988.

- [Fer64] J. C. Ferguson. Multivariable curve interpolation. *ACM II*, Vol. 2, pp. 221–228, 1964.
- [Fol87a] T. A. Foley. Interpolation with interval and point tension controls using cubic weighted γ -splines. *ACM Trans. Math. Soft.*, Vol. 13, No. 1, pp. 68–96, 1987.
- [Fol87b] T. A. Foley. Weighted bicubic spline interpolation to rapidly varying data. *ACM Trans. on Graphics*, Vol. 6, No. 1, pp. 1–18, 1987.
- [FR87] R. T. Farouki and V. T. Rajan. On the numerical condition of polynomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, pp. 191–216, 1987.
- [FR88] R. T. Farouki and V. T. Rajan. Algorithms for polynomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, pp. 1–26, 1988.
- [Gor71] W. Gordon. Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation. *SIAM, Numerical Analysis*, Vol. 8, pp. 158–177, 1971.
- [GP89] E. L. Gursoz and F. B. Prinz. A point set approach in geometric modelling. *Advanced Geometric Modelling For Engineering Applications*, pp. 63–77, 1989.
- [GR74] W. Gordon and R. F. Riesenfeld. B-spline curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, pp. 95–126, 1974.
- [Gre74] J. A. Gregory. Smooth interpolation without twist constraints. *Computer Aided Geometric Design*, pp. 71–88, 1974.
- [Gre86] J. A. Gregory. N-sided surface patches. In J. A. Gregory, editor, *The Mathematics of Surfaces*, pp. 217–232. Clarendon Press, 1986.
- [GSA84] R. Goldman, T. Sederberg, and D. Anderson. Vector elimination: A technique for the implicitization, inversion and intersection of planar parametric rational polynomial curves. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 1, pp. 327–356, 1984.
- [Her85] G. Herron. Smooth closed surfaces with discrete triangular interpolants. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 2, pp. 297–306, 1985.
- [Her87] G. Herron. Techniques for visual continuity. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pp. 163–174. SIAM, 1987.

- [HHK89] C. M. Hoffmann, J. E. Hopcroft, and M. S. Karasick. Robust set operations on polyhedral solids. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 9, No. 11, pp. 50–59, 1989.
- [HK84] M. Hosaka and F. Kimura. Non-four-sided patch expressions with control points. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 1, pp. 75–86, 1984.
- [HL88] L. Holmström and T. Laakko. Rounding facility for solid modelling of mechanical parts. *Computer Aided Design*, Vol. 20, No. 10, pp. 605–614, 1988.
- [HHK92] W. M. Hsu, J. F. Hughes and H. Kaufman, Direct Manipulation of Free-Form Deformations, *Computer Graphics*, Vol. 26, No. 2, pp. 177–184, 1992.
- [HP89] H. Hagen and H. Pottmann. Curvature continuous triangular interpolants. In T. Lyche and L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, pp. 373–384. Academic Press, 1989.
- [Joe87] B. Joe. Discrete Beta-splines. *Computer Graphics*, Vol. 21, No. 4, pp. 137–144, 1987.
- [Kur93a] S. Kuriyama. Surface Generation from an Irregular Network of Parametric Curves *Modelling in Computer Graphics*, pp. 255–274, 1993.
- [Kur93b] S. Kuriyama. Generation of G^n Multisided Patch Surfaces *Systems & Computers in Japan*, SCRIPTA TECHNICA, Vol. 24, No. 4, pp. 46–54, 1993.
- [Kur94] S. Kuriyama. Surface Modeling with an Irregular Network of Curves via Sweeping and Blending *Computer Aided Design*, Vol. 26, No. 8, pp. 597–606, 1994.
- [Kur95] S. Kuriyama and K. Tachibana. Interactive 3D widget for Free-Form Deformation *Computer Graphics and Applications*, pp. 320–329, 1995.
- [LCJ93] F. Lazarus, S. Coquillart, and P. Jancene, Interactive Axial Deformations, *Modeling in Computer Graphics*, Springer-Verlag, pp. 241–254, 1993.
- [LD89] C. T. Loop and T. D. DeRose. A multisided generalization of Bézier surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 8, No. 3, pp. 204–234, July 1989.
- [LD90] C. T. Loop and T. D. DeRose. Generalized B-spline surfaces of arbitrary topology. *Computer Graphics*, Vol. 24, No. 4, pp. 347–356, 1990.
- [LH89] D. Liu and J. Hoschek. GC^1 continuity conditions between adjacent rectangular and triangular Bézier surface patches. *Computer Aided Design*, Vol. 21, No. 4, pp. 194–200, 1989.

- [Lie91] P. Lienhardt. Topological models for boundary representation: a comparison with n-dimensional generalized maps. *Computer Aided Design*, Vol. 23, No. 1, pp. 59–82, 1991.
- [LW94] H. J. Lamousin and W. N. Waggoner Jr., NURBS-Based Free-Form Deformations, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 14, No. 6, pp. 59–65, 1994.
- [Mä88] M. Mäntylä. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press, 1988.
- [MS90] R. R. Martin and P. C. Stephenson. Sweeping of three-dimensional objects. *Computer Aided Design*, Vol. 22, No. 4, pp. 223–234, 1990.
- [MSNK89] H. Masuda, K. Shimada, M. Numao, and S. Kawabe. A mathematical theory and applications of non-manifold geometric modeling. In F. L. Krause and H. Jansen, editors, *Advanced Geometric Modelling for Engineering Applications*, pp. 89–103. North-Holland, 1989.
- [Nas87] A. H. Nasri. Polyhedral subdivision method for free-form surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 6, No. 1, pp. 29–73, January 1987.
- [Nas91] A. H. Nasri. Boundary-corner control in recursive-subdivision surfaces. *Computer Aided Design*, Vol. 23, No. 6, pp. 405–410, 1991.
- [NF89] G. M. Nielson and T. Foley. A survey of applications of an affine invariant norm. In T. Lyche and L. Schumaker, editors, *Mathematical Aspects in Computer Aided Geometric Design*, pp. 445–468. Academic Press, 1989.
- [Nie83] G. M. Nielson. A method for interpolating scattered data based upon a minimum norm network. *Mathematics of Computation*, Vol. 40, No. 161, pp. 253–271, 1983.
- [Nie87] G. M. Nielson. A transfinite, visually continuous, triangular interpolant. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pp. 235–246. SIAM, 1987.
- [OSF] Open Software Foundation, *OSF/Motif Reference Guide*.
- [Pat85] R. R. Patterson. Projective transformations of the parameter of a Bernstein-Bézier curve. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 4, No. 4, pp. 276–290, October 1985.

- [Pet90] J. Peters. Smooth mesh interpolation with cubic patches. *Computer Aided Design*, Vol. 22, No. 2, pp. 109–120, 1990.
- [Pet92] J. Peters. Joining smooth patches around a vertex to form a C^k surface. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 9, No. 5, pp. 387–411, 1992.
- [Pip87] B. R. Piper. Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pp. 221–233. SIAM, 1987.
- [Ram89] L. Ramshaw. Blossoms are polar forms. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 6, pp. 323–358, 1989.
- [Rie73] R. F. Riesenfeld. Applications of B-spline approximation to geometric problems of computer-aided design. Technical report, Diss. Syracuse University, 1973.
- [RV85] A. A. G. Requicha and H. B. Voelcker. Boolean operations in solid modeling: Boundary evaluation and merging algorithms. *Proc. IEEE*, Vol. 73, No. 1, pp. 30–44, 1985.
- [Sab77] M. A. Sabin. The use of piecewise forms for the numerical representation of shape. Technical report, Diss. MTA Budapest, 1977.
- [Sab83] M. Sabin. Non-rectangular surface patches suitable for inclusion in a B-spline surface. In Hagen P., editor, *Proceedings of Eurographics '83*, pp. 57–69. North-Holland, 1983.
- [SAG84] T. Sederberg, D. Anderson, and R. Goldman. Implicit representation of parametric curves and surfaces. *Computer Vision, Graphics and Image processing*, Vol. 28, pp. 72–84, 1984.
- [Sar87] R. F. Sarraga. G1 interpolation of generally unrestricted cubic Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, No. 1-2, pp. 23–39, 1987.
- [SBD86] F. J. M. Schmitt, B. A. Barsky, and Wen-Hui Du. An adaptive subdivision method for surface-fitting from sampled data. *Computer Graphics*, Vol. 20, No. 4, pp. 179–188, 1986.
- [SC92] P. S. Strauss and R. Carey, An Object-Oriented 3D Graphics Toolkit, *Computer Graphics*, Vol. 26, No. 2, pp. 341–349, 1992.

- [Sch66] D. G. Schweikert. An interpolation curve using a spline in tension. *Math. & Phys.*, Vol. 45, pp. 312–317, 1966.
- [Sch81] L. L. Schumaker. *Spline Functions Basic Theory*. Wiley-Interscience, 1981.
- [SH92] S. S. Snibbe, K. P. Herdon, etc., Using Deformation to Explore 3D Widget Design, *Computer Graphics*, Vol. 26, No. 2, pp. 351–352, 1992.
- [Sha91] J. J. Shah. Assessment of features technology. *Computer Aided Design*, Vol. 23, No. 5, pp. 331–343, 1991.
- [SP86] T .W. Sederberg and S. R. Parry, Free-Form Deformation of Solid Geometric Models, *Computer Graphics*, Vol. 20, No. 4, pp. 151–160, 1986.
- [STTC91] T. Satoh, T. Takamura, H. Toriya, and H. Chiyokura. Boolean operations on solids bounded by a variety of surfaces. *Modelling in Computer Graphics*, pp. 141–154, 1991.
- [Sut63] I. E. Sutherland. Sketchpad: A man-machine graphical communication system. In *Proc. AFIPS. SJCC*, pp. 329, 1963.
- [TOTC90] T. Takamura, M. Ohta, H. Toriya, and H. Chiyokura. A method to convert a Gregory patch and a rational boundary Gregory patch to a rational Bèzier patch and its applications. In T. S. Chua and T. L. Kunii, editors, *Advanced Computer Graphics (Proc. CG International '90)*, pp. 543–562. Tokyo: Springer-Verlag, 1990.
- [Var91] T. Varady. Overlap patches: A new scheme for interpolating curve networks with n-sided regions. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 8, pp. 7–27, 1991.
- [Ver75] K. J. Versprille. Computer-aided design applications of the rational B-spline application form. Technical report, Ph. D. Thesis, Syracuse University, 1975.
- [Wei85] K. Weiler. Edge-based data structures for solid modeling in curved-surface environments. *Comput. Graph. Appl.*, Vol. 5, No. 1, pp. 21–40, 1985.
- [Wer94A] J. Wernecke and Open Inventor Architecture Group, *The Inventor Mentor : Programming Object-Oriented 3D Graphics with Open InventorTM*, Release 2, Addison Wesley, 1994.
- [Wer94B] J. Wernecke and Open Inventor Architecture Group, *The Inventor Toolmaker : Extending Open InventorTM*, Release 2, Addison Wesley, 1994.

- [Whe86] T. Whelan. A representation of a C^2 interpolant over triangles. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 3, pp. 53–66, 1986.
- [Woo88] C. D. Woodward. Skinning technique for interactive B-spline surface interpolation. *Computer Aided Design*, Vol. 20, No. 8, pp. 441–451, 1988.
- [WW92] W. Welch and A. Witkin. Variational surface modeling. *Computer Graphics*, Vol. 26, No. 2, pp. 157–166, 1992.
- [YJ89] S. N. Yang and B. S. Jong. Optimal linear octree construction algorithm by sweep operations. In R. A. Earnshaw and B. Wyvill, editors, *CG international '89*, pp. 183–192. Springer-Verlag, 1989.
- [ZH93] R. C. Zeleznik, K. P. Herndon, etc. An Interactive 3D Toolkit Constructing 3D Widgets, *Computer Graphics*, Vol. 27, No. 4, pp. 81–84, 1993.
- [白川 83] 白川, 伊理他. 演習グラフ理論 - 基礎と応用 -. (株) コロナ社, 1983.
- [西村 85] 西村, 平井, 河合, 河田, 白川, 大村. 分布関数による物体のモデリングと画像生成の一手法. 信学論 (D), Vol. J68-D, No. 4, pp. 718–725, 1985.
- [河合 88] 河合, 藤田, 大村. 2重節点をもつスプライン基底の一構成法. 信学論 (D) 研究速報, Vol. J71-D, No. 6, pp. 1149–1150, 1988.
- [藤田 88] 藤田, 岸, 栗山, 河合, 大村. 多重節点を持つスプライン基底関数を用いた曲面補間法. テレビジョン学会技術報告, Vol. ICS88-16, No. IPA88-11,, 1988.
- [浦野 89] 浦野, 南方, 栗山. インダストリアルデザインのための自由曲面の 入力について. グラフィックスと CAD シンポジウム論文集, pp. 59–69. 情処学, 1989.
- [栗山 87] 栗山, 河合, 大村. カージナルスプラインを用いた自由曲面の モデリング手法. 情処学グラフィックスと CAD 研究, Vol. 25, No. 3,, 1987.
- [栗山 89a] 栗山繁. カージナルスプラインによる自由曲面の融合法. 信学論 (D-2), Vol. J72-D-II, No. 9, pp. 1341–1347, 1989.
- [栗山 89b] 栗山繁. シグマースプラインによる自由曲面モデリング. 第 39 回情処学全国大会講演論文集 (2), pp. 858–859. 情処学, 1989.
- [栗山 90] 栗山繁. 多面体入力に基づく三辺形パッチ曲面モデル. 第 41 回情処学全国大会講演論文集 (2), pp. 275–276. 情処学, 1990.
- [栗山 91a] 栗山繁. 形状特徴曲線からの多辺形パッチ曲面生成. 第 7 回 NICOGRAH 論文コンテスト, pp. 129–136. 日本コンピュータグラフィックス協会, 1991.

- [栗山 91b] 栗山繁. 多面体による三辺形パッチ曲面の生成法. 情処学論, Vol. 32, No. 5, pp. 655–664, 1991.
- [栗山 92] 栗山繁. G^n 級多辺形パッチ曲面の生成手法. 信学論 (D-2), Vol. J75-D-II, No. 2, pp. 379–385, 1992.
- [栗山 95] 栗山繁, 橋啓八郎: 形状デザインにおける変形ツールの構築環境. 情処学グラフィクスと C A D 研究, Vol. 77, No. 6, pp. 35–41, 1995.