



Title	二重振り子の振る舞いからカオスへ
Author(s)	玉置, 弦
Citation	平成28年度学部学生による自主研究奨励事業研究成果報告書. 2017
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/60332
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

平成28年度学部学生による自主研究奨励事業研究成果報告書					
ふりがな氏名	たまき げん 玉置 弦	学部学科	理学部 物理学科	学年	1年
ふりがな共同研究者名	こばたけ ようき 小畠 陽紀	学部学科	理学部 物理学科	学年	1年
	うきょう りき 右京 莉規		基礎工学部 情報科学科		1年
アドバイザー教員氏名	吉野 元	所属	サイバーメディアセンター		
研究課題名	二重振り子の振る舞いからカオスへ				
研究成果の概要	研究目的、研究計画、研究方法、研究経過、研究成果等について記述すること。必要に応じて用紙を追加してもよい。				
<div>【研究背景と目的】</div> <p>二重振り子は、カオスを示すことで有名であり、教育目的として展示や、解析力学で題材とされることも多い。ただ、これらにおいては摩擦の効果を考慮することや、実験と理論の両面から同時に研究することはされていない。そこで本研究では、二重振り子が連成振動からカオスへ遷移する過程を、実験と運動方程式の数値解析の2つの方法によって調べる。また、摩擦の影響がどのようにカオスと関係しているかを調べる。それにより、ある系がカオスであると決定する一般的な指標の確立を目的とした。</p> <div>【研究計画】</div> <p>‘カオス’は、『‘決定論的’なシステムにおける‘非周期的な長時間挙動’であり、‘初期条件への鋭敏な依存性’を示す。』という性質を持っている。(引用元[1])「初期条件への鋭敏な依存性」とは、初期条件が少し違うと後の運動が大きく変化することを意味している。そこで、変化の度合いを示すためにリアプノフ指数を導入する。リアプノフ指数とは、相空間上で近い2点$\boldsymbol{x}(t)$と$\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$のズレの大きさ$\ \boldsymbol{\delta}(t)\$が時間とともに指数関数的な速さで互いに離れていく指数を表し、$\ \boldsymbol{\delta}(t)\ \sim \ \boldsymbol{\delta}(0)\ e^{\lambda t}$を満たす$\lambda$である。</p> <p>これまでの研究において、その系がカオスであるかは、リアプノフ指数が正であることを測定することで判断されてきた。そこで、二重振り子に対して初期条件を変化させ、リアプノフ指数は連続的に変化するのか、それともある条件を満たすときに急激に変化するのかを調べた。</p> <div>【研究方法】</div> <p>実験系と数値解析系とに大別される。</p> <p>実験系</p> <p>(1) 木材(132×30×6mm 2本、123×30×6mm 1本)に穴を開け、図1のように木材とベアリングとナットをボル</p>					

トに通し、固定した。

- (2) 二重振り子を正面から見た図2のように、黒い紙を3箇所貼り、動画を分析する際の目印にした。

- (3) 二重振り子の運動を計測する前に、作成した1段目と2段目をそれぞれ単振り子に組み替え、単振り子の固有の振動数を調べた。振り子の正面に三脚でカメラを固定した。撮影を開始し、単振り子を90度まで持ち上げ、手を離れた。約25秒で二重振り子の運動が止まるので、撮影を止めた。シャッタースピードは1秒あたり240回である。

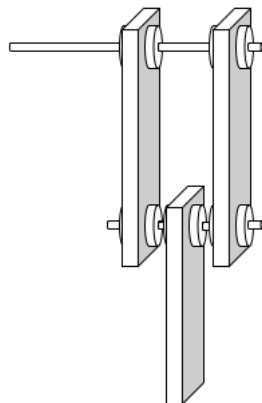


図1 二重振り子の構造

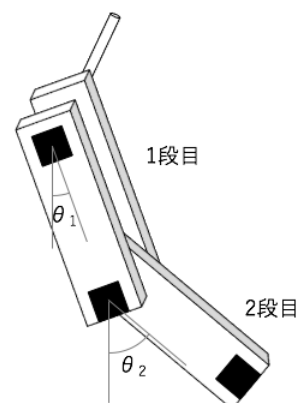


図2 二重振り子の構造

- (4) 撮影データから1段目、2段目それぞれ単振り子の運動を解析した。撮影データは xy 座標であるので、振れ角 θ と時間のデータに変換し、時間と振れ角のグラフを作成した。
- (5) 二重振り子の運動を撮影した。

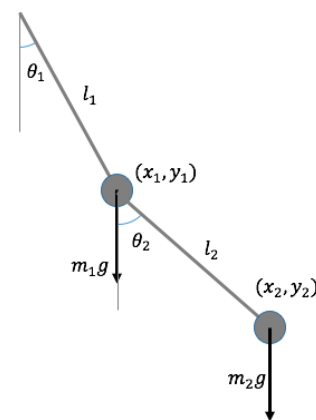


図3 理想化した二重振り子

数値解析系

- (1) ソフトウェア「processing」を用いてプログラムした。図3のような摩擦がない理想化した二重振り子の角度 θ_1, θ_2 に関する運動方程式は

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2(\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0 \\ m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ + m_2gl_2 \sin \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

ただし、ドットは時間微分を表し、 m_1, m_2 は質量、 l_1, l_2 は長さ、 g は重力加速度とする。この方程式を4次のルンゲクッタ法で数値計算するプログラムを作成した。

- (2) 二重振り子の xy 平面、 θ_1, θ_2 平面、リアプノフ指数を求めるためのグラフ(時間と $\ln\|\delta(t)\|$ のグラフ)を描いた。 $\ln\|\delta(t)\|$ は、わずかに異なる二つの初期値 a, b として、その後の運動から求めた。具体的には、初期値を $\theta_{1b} = \theta_{1a} + \delta\theta$, $\delta\theta = 0.001$ とし、 $\dot{\theta}_1(0) \equiv \dot{\theta}_{1a}$ をパラメータとした。ただし、 $m_1 = 2m_2$, $l_1 = l_2$, $\theta_{1a} = \theta_{1b} = 0$, $\theta_{2a} = \theta_{2b} = 0$, $\dot{\theta}_{2a} = \dot{\theta}_{2b} = 0$ である。ここで

$$\|\delta(t)\| = \sqrt{(\theta_{1a} - \theta_{1b})^2 + (\theta_{2a} - \theta_{2b})^2 + (\dot{\theta}_{1a} - \dot{\theta}_{1b})^2 + (\dot{\theta}_{2a} - \dot{\theta}_{2b})^2}$$

とし、時間 t と $\ln\|\delta(t)\|$ のグラフを描いた。グラフの傾きからリアプノフ指数を求めた。プログラムの計算精度(有効数字)は二進数にして24桁で行った。

【近似計算】

上の運動方程式を線形近似すると解析解が求められる。

$$3\theta_1 + \sqrt{3}\theta_2 = A \cos(\omega_- t - \alpha) \quad (\omega_- = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}} \frac{g}{l})$$

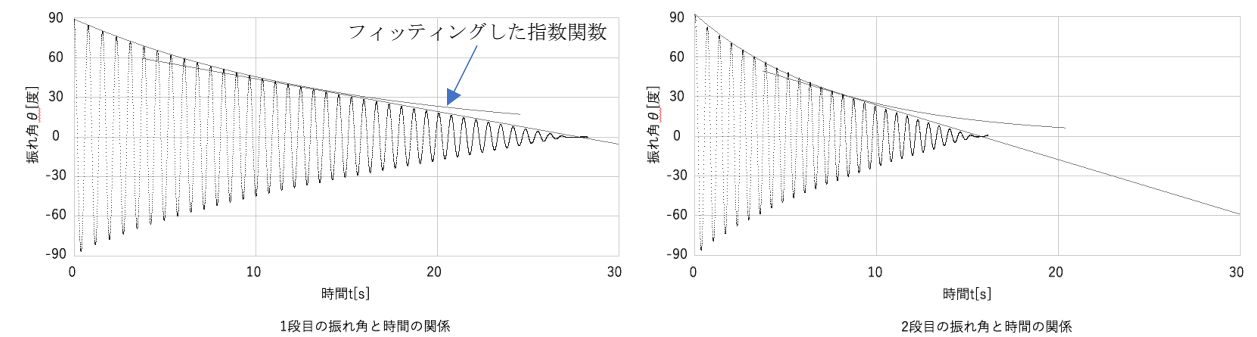
$$3\theta_1 - \sqrt{3}\theta_2 = B \cos(\omega_+ t - \beta) \quad (\omega_+ = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}} \frac{g}{l})$$

となり、固有の角振動数 ω_- , ω_+ が得られる。この2数の比は無理数となっている。

【研究経過】

実験系

単振り子での運動を調べた。初期条件 $\theta = 90$ 度の場合、振れ角と時間の関係を 1 段目、2 段目の振り子について以下に示す。図から振れ角はともに時間とともに小さくなっている。その減衰具合をよく近似する指数関数でフィットした。手を離れた直後は指数関数的に減衰しており、静止する直前は直線的に減衰している。周期は、1段目が 0.583s, 2段目が 0.683s であった。また緩和時間は、1段目が 0.46s, 2段目が 1.48s である。このデータから二重振り子について調べる場合に摩擦を考慮することが必要だということがわかった。

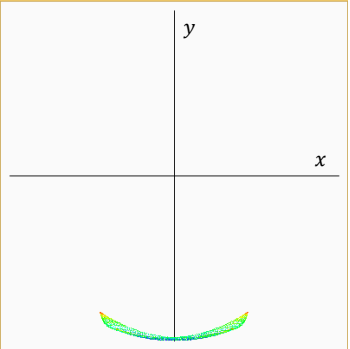
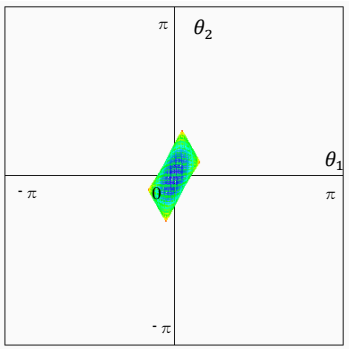
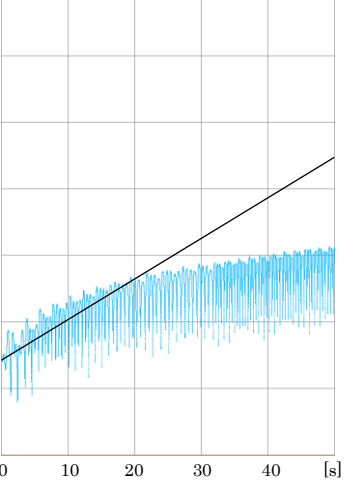
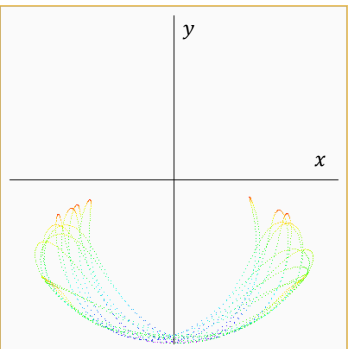
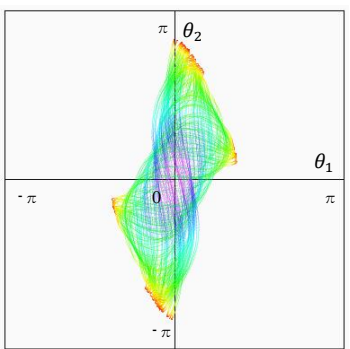
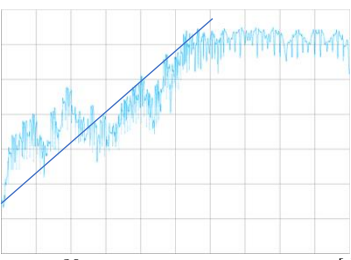
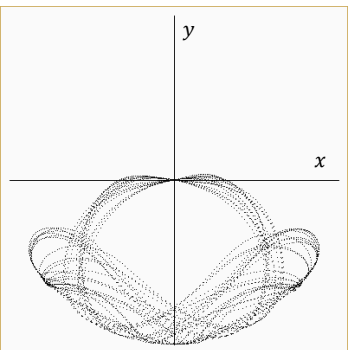
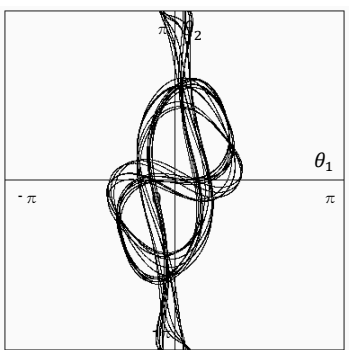



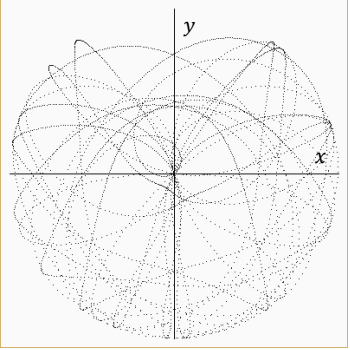
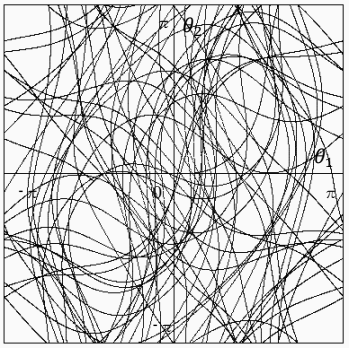
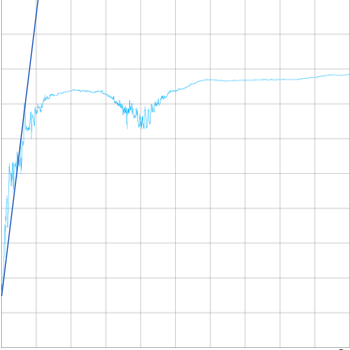
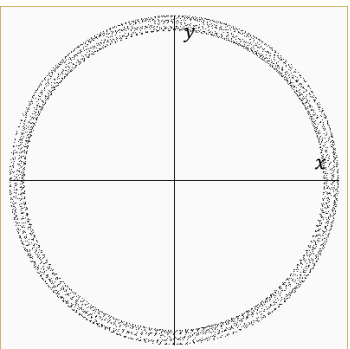
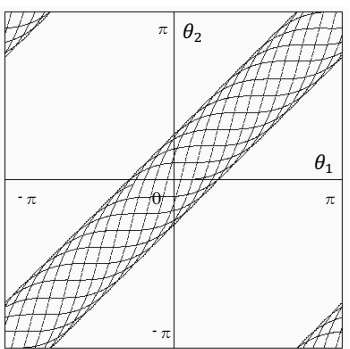
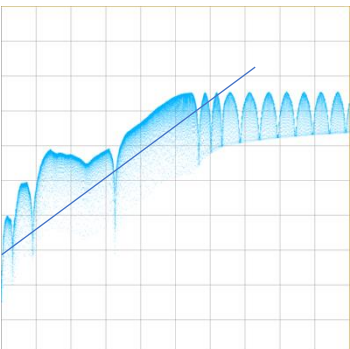
二重振り子の実験データは、解析途中である。この解析が終われば、実際の摩擦のある二重振り子で議論することができる。

数値解析系

以下に数値解析の結果を示す。ただし、ここでは摩擦のない場合を考察する。以下、 $\dot{\theta}_1(0)$ をパラメータとして、大きくしていく。これは持っているエネルギーの大きさの平方根に対応している。

$\dot{\theta}_1(0)$	xy平面	θ_1, θ_2 平面	$\ln\ \delta(t)\ $ のグラフ
0.01	<div><p>x 軸方向にかすかに振動している。</p></div>	<div><p>線形近似の計算から得られる結果と同様、重ならないような軌道を描いている。これは、ω_-/ω_+が無理数であることに注意。</p></div>	<div><p>細かい繰り返しと、大きな繰り返しで規則性がある。これは線形近似の結果のω_-, ω_+に対応している。</p><p>$\lambda=0$</p></div>

4			 <p>グラフが緩やかにカーブしてきたが繰り返しの規則性はある。図のように直線でフィットすると$\lambda=0.12$が得られた。</p>
9			 <p>規則性がなくなり、ランダムに見え始めた。50s 後にはそれ以上数値は大きくなっていく、激しく振動している。</p> <p>$\lambda=0.17$</p>
10	 <p>回転できるようなエネルギーを持った。</p>	 <p>回転はグラフの上下部分からはみ出す。</p>	 <p>60s 後振動はほぼ止まりなめらかな線となっている</p> <p>$\lambda=0.27$</p>

20	 <p>空間的に自由に運動している。</p>	 <p>規則性のないような軌道を描いている。</p>	 <p>上の図と同様に最後はなめらかな線となっている。$\lambda=1.7$</p>
100	 <p>安定して回転している</p>	 <p>規則的な図形を描いている。</p>	 <p>60s 後に規則性はあるように見えるが、激しく振動している。$\lambda=0.15$</p>

【研究成果】

実験系では、実験装置である二重振り子を作成できた。また、単振り子の撮影データから振れ角を求めることができるようになった。二重振り子の撮影データを解析する準備が整った。

数値解析系では図から、リアプノフ指数は、エネルギーを増加させていくと連続的に変化していくことがわかった。ただし、 λ の求め方については検討の余地がある。例えば振動の効果を取り除く工夫などが必要である。そこでより良い指標を確立する必要性が明確化した。ただ、元の $\ln\|\delta(t)\|$ のデータを見ると次のような顕著な特徴が見られた。60s 後の $\ln\|\delta(t)\|$ のグラフの変化に注目すると、初期値 θ_1, θ_{1a} が 10 と 20 の場合には、なめらかな線となり、それより小さいもしくは大きい場合には激しく振動している。この領域では他では起こっていない現象が起こっていると考えられる。

【今後の研究予定】

二重振り子の実験データを解析する必要がある。また数値解析においては、研究成果で得られた $\ln\|\delta(t)\|$ のグラフの変化は何であるかを突き止める。これらのことで、カオスを判別する他の指標を確立することができるだろう。

参考文献

[1] 『ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス』(2015)Steven H. Strogatz 著 田中久陽・中尾裕也・千葉逸人訳(丸善出版) p.12 p.349-353

山口巖「二重振り子の周期的な振る舞い」(2002)

鈴木三男「二重振り子におけるカオスの振舞」物理教育 第 48 巻 第 1 号 (2000)