The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	エントロピーが支配する世界
Author(s)	長野, 八久
Citation	大阪大学高等教育研究. 2017, 5, p. 41-46
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/60485
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

大阪大学高等教育研究　5（2016），41 − 46

【教育実践レポート】

エントロピーが支配する世界

長野　八久

The World Entropy Dominates

Yatsuhisa NAGANO

The first year students enjoy a dice game in their chemical thermodynamics class. The game provides not only a good method of helping them understand the second law of thermodynamics, entropy and Boltzmann distribution from the statistical point of view, but also a material with which they study structural violence in peace studies.

Keywords：the second law of thermodynamics, entropy, Boltzmann distribution, structural violence

1. はじめに

人間が生活の中で直感的に認知できる空間・時間の範囲は限られている．これは人間の動物としての能力の限界から来るものなので，仕方のないことである．しかし，科学は人間に，その限界を遥かに超える手段を提供している．今や人間は，137億光年の広がりを持つ宇宙空間の歴史を語ることもできる．また，科学リテラシーが基本的人権を支える不可欠の要素となりつつある現代において，科学による限りない認知能力を提供する大学の教養教育の役割は大きい．[1)]

私たちの身の周りの事象がどのように発展していくのか．これについても，科学は明確な指針を与えてくれる．不可知論から来るニヒリズムや，お気楽な自由主義，あるいは盲目な精神主義から脱し，人間を必然性の洞察としての自由に導いてくれるのも科学なのである．

その中でも，熱力学は素粒子の世界から，化学物質，生物・生態系さらには人間社会をまで貫いて，それらの発展法則を示している．[1, 2)] このような宇宙を支配する発展法則の存在を理解させることは，とりわけ大学の教養教育にとって重要である．

本稿で紹介するサイコロを使った再分配実験は，科学について何の予備知識や経験も必要としない．理系文系を問わず，小学生からシニアまで誰でも気軽に参加できる．ただし，有意な実験結果を得るためには，少なくとも80人程度のクラスであることが望ましい．

極めて簡単な実験であるにもかかわらず，その実験結果が，日常生活の経験から直感的に期待されるものと全く正反対であることに，実験参加者は一様に驚くことになる．さらに，講義においては，それが厳然として熱力学法則（エントロピー増大則）に支配された結果であることが解説される．

サイコロを使った再分配実験は，学生たちが，自分の身近の経験から得た素朴な思い込みから脱し，科学的教養に基づいて判断することの大切さを体感することのできる格好の教育材料を提供している．

筆者は，全学教育推進機構で薬学部1年次の専門基礎教育科目として開講されている「化学熱力学1」を担当し，その1コマを使って，毎年この再分配実験を実施している．受講登録は約90名である．本稿では，2016年度に実施した内容を紹介しつつ，その結果についても解説する．この実験はよく知られており，既に多くの教育現場で実践されてきたものである．[3)] 本稿は，その1つの実践例を示すものである．

所　属：大阪大学大学院理学研究科附属構造熱科学研究センター
Affiliation : Research Center for Structural Thermodynamics, Graduate School of Science, Osaka University
連絡先：nagano@chem.sci.osaka-u.ac.jp

2. 実験の準備と手順

2.1 実験の材料

サイコロ（受講生数）: すべての目が等確率で出る必要があるので，あまり安価なものはお勧めできない．マドラースティック（受講生2人に30本ずつ）: プラスチックの使い捨てスティックを100円均一ショップなどで手に入れる．

2.2 実験場所

2人一組でサイコロを振る実験をするので，十分に広い水平なテーブルのある実験室が望ましい．筆者の講義では，全学教育実践機構実験棟マルチラボで実施した．

広いテーブルが確保できない場合には，1組に1個ずつ底の平らなバスケットを配布し，バスケット内にサイコロを振り込むようにすればよい．

2.3 実験手順

2人一組で実験を行なう．50人未満のクラスでは，1人ずつで実施することも可能であるが，一人でサイコロを振り続けるのは単調で退屈である．100人を超えるクラスでは，3人一組でもよい．

各組にサイコロ2個，マドラー30本ずつを配布する．各組には，1から6までのサイコロの目の数に対応した6人の仮想的なプレイヤーがいるとする．この6人の仮想プレイヤーを，組になった2人で分担する．したがって，実験は組数の6倍の仮想プレイヤーが参加するゲームとなる．

I. マドラーの初期分配

サイコロを振り，出たサイコロの目の数と同じ番号の仮想プレイヤーに，マドラーを1本分配する．これを30回繰り返し，30本のマドラーを6人の仮想プレイヤーに分配する．その結果を報告用紙に記入し，集計係（担当教員もしくは実験補助のTA）に提出する．

初期分配報告用紙

実験者氏名（　　）、（　　）

初期分配されたマドラーの数

#1	#2	#3	#4	#5	#6

集計係は，各組からの報告に基づいて，0本から30本までのマドラーを獲得した仮想プレイヤーが，それぞれ何人いるかを集計する．

II. マドラーの再分配

マドラーの初期分配が完了したら，以下の手続きに従って，仮想プレイヤー6人へのマドラーの再分配を100回繰り返す．

① サイコロを振り，マドラーを差し出す仮想プレイヤーAを決める．

② もう1度サイコロを振り，マドラーを受け取る仮想プレイヤーBを決める．

③ 仮想プレイヤーAから仮想プレイヤーBにマドラー1本を移譲する．

ただし，仮想プレイヤーAの持つマドラーが0本だった場合には，何の操作もせずに1回の再分配を行ったとしてカウントする．

100回の再分配を試行した後，達成された6人の仮想プレイヤーのマドラー数を報告用紙に記入し提出する．集計係は，初期分配実験の時と同じように，0本から30本までのマドラーを獲得した仮想プレイヤーが，それぞれ何人いるかを集計する．

さらに，再分配の試行を継続し，200回，300回となった時に，途中経過として6人の仮想プレイヤーのマドラー数を報告用紙に記入し，集計係に提出する．

3. 結果

図1に，74人37組で実験を行なった結果を示す．横軸のJは，仮想プレイヤーが獲得したマドラーの本数．マドラーをエネルギー量子に見立てれば，エネルギーの再分配実験を行なっていることになる．縦軸のn_Jは，分配されたマドラーの本数ごとの仮想プレイヤーの人数

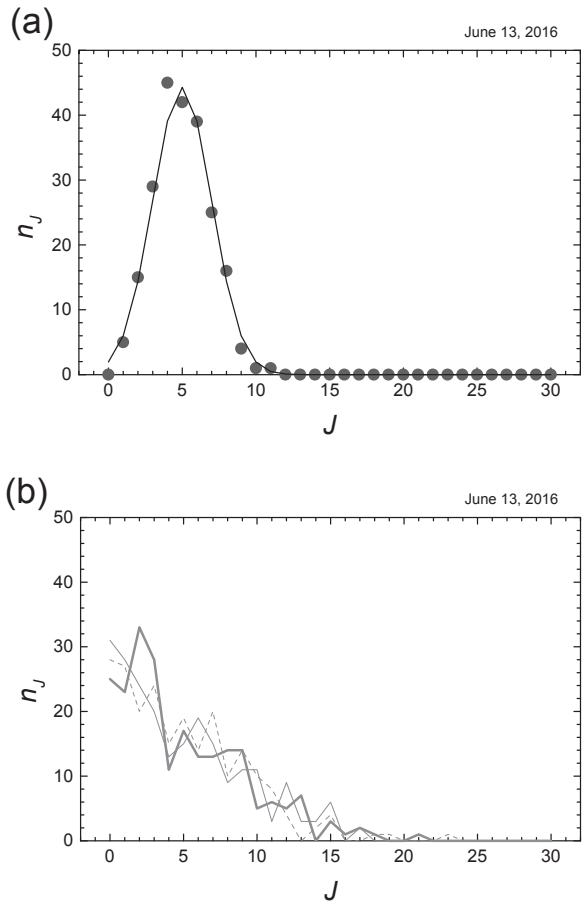

図 1．マドラーの分配実験結果
(a) 初期分配の結果（実線は $\sigma = 2$ の正規分布）
(b) 再分配の結果（破線，細線，太線は，それぞれ 100 回，200 回，300 回試行後の結果を示す．）

である．

3.1　初期分配

30本のマドラーを6人の仮想プレイヤーに分配するので，予想されるように，初期分配においては，その分布は$J = 5$にピークを持つ正規分布になる（図1（a））．実線は標準偏差σが2の場合で，実験結果をよく再現している．

3.2　再分配結果

ところが，マドラーの再分配を始めると，この分布が正規分布から大きく崩れ，単調な減衰関数になってゆくことが分かる（図1（b））．仮想プレイヤーの数があまり多くないので，揺らぎが大きいけれども，100回，200回，300回試行の結果を重ね合わせると，それが減衰関数であることは十分に読み取れる．

完全に等確率で現れるサイコロの目の数にのみに従って，即ち完全な機会均等の条件の下で，再分配が繰り返えされた．しかし，その結果は，驚くべきことに，たくさんのマドラーを保有する少数のプレイヤーと，僅かなマドラーの分配にしかありつけない多数のプレイヤーを生み出すのである．まるで，資本主義世界の中で拡大されてゆく貧富の格差を見るようである．

4．考察

後の理論で説明するように，再分配を繰り返した後に現れる分布は，ボルツマン分布で，指数関数となる．こ

log e (N !)

N	N !	ln(N !)	NlnN-N+ln(2 π N)/2
1	1	0.00	-0.08
2	2	0.69	0.65
3	6	1.79	1.76
4	24	3.18	3.16
5	120	4.79	4.77
6	720	6.58	6.57
7	5040	8.53	8.51
8	40320	10.60	10.59
9	362880	12.80	12.79
10	3628800	15.10	15.10
11	39916800	17.50	17.49
12	479001600	19.99	19.98
13	6227020800	22.55	22.55
14	87178291200	25.19	25.19
15	1.30767E+12	27.90	27.89
16	2.09228E+13	30.67	30.67
17	3.55687E+14	33.51	33.50
18	6.40237E+15	36.40	36.39
19	1.21645E+17	39.34	39.34
20	2.4329E+18	42.34	42.33
21			45.38
22			48.47
23			51.60
24			54.78
25			58.00
26			61.26
27			64.55
28			67.89
29			71.25
30			74.66
31			78.09
32			81.56
33			85.05
34			88.58
35			92.13
36			95.72
37			99.33
38			102.97
39			106.63
40			110.32
41			114.03
42			117.77
43			121.53
44			125.32
45			129.12

のことは，縦軸のn_Jを対数にすることで確認される（図2）．マドラー1本に相当する単位エネルギー量子をεとしたときに，ボルツマン分布は$n_J = n_{(0)} \cdot \exp(-J\varepsilon / k_B T)$で与えられる．$k_B$はボルツマン定数，$T$は温度．図2の直線は，$k_B T = \langle E / N \rangle = 30\varepsilon/6 = 5\varepsilon$のボルツマン分布関数である．ここで，$N$は仮想プレイヤーの総数，$E$は（マドラーの総数）×$\varepsilon$．原子の世界に置き換えれば，$N$は原子の総数，$E$は全エネルギーということになる．

また，折れ線は，初期分配と同じ標準偏差σ=2のばらつきを想定したときに達成されると期待される$k_B T = 5\varepsilon$のボルツマン分布を表わしている．いずれも実験結果をよく再現している．薬学部のクラスでは，受講生に片対数グラフ用紙を配布し，実験結果をプロットさせ，得られたボルツマン分布の直線の傾きから，実際に$k_B T$の大きさを求めさせた．

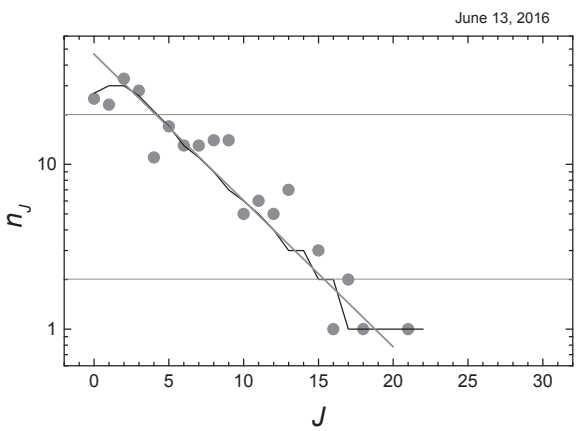

図 2. 300 回再分配後の分布の片対数プロット

再分配を繰り返すと，初期分配の正規分布が崩れて，ボルツマン分布になってゆくのは，NとEが一定の制約条件の下で，熱平衡状態，すなわちエントロピーが最大の状態に向かって，系が発展してゆくからである．

エントロピーSはボルツマンの式$S = k_B \log_e W$によって，系の状態の数Wと関係づけられる．k_Bはたまたま物理学において，水の3重点を$T = 273.16$ Kとする温度目盛りを採用していることに由来する比例定数に過ぎない．本質的には，エントロピーは，系の状態の数の対数を取ったものと等しいと言ってよい．つまり，$k_B = 1$とおいてしまえば，$S = \log_e W$と表わされる．

さてここで，例えば，1番と2番の2つの箱にそれぞれ，2個，1個，合計3個のボールを入れる時の状態の数（組み合わせの数）Wを考えると，$3! / (2! \cdot 1!) = 3$通りであることはすぐに理解される．同様にして，$6 \times 37 = 222$個のボールが，$J = 0$から30までの番号を付けた31個の箱に分配されている時の状態の数Wは，$222! / (n_{(0)}! \cdot n_{(1)}! \cdot n_{(2)}! \cdot \cdots \cdot n_{(30)}!)$となる．

マドラーの再分配実験においても，初期分配から再分配を繰り返して実現した分布から，それぞれの時点におけるWを原理的に計算することができる．実際には$n!$はnの階乗（$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$）なので，非常に大きな数になるが，対数にしてしまえば，スターリングの公式$\log_e(n!) = n \log_e n - n + \log_e(2\pi n)/2$によって，卓上でも容易に計算できるようになる．また，$\log_e(n!)$の数表を与えておけば，足し算・引き算だけなので，受講生は容易に筆算で$\log_e W$を計算できる．すなわち，実験の任意の時点において系のエントロピー$S = \log_e W$が，具体的数値として評価される．

図3は，正規分布を示す初期分配から，再分配を繰り返してゆく間の，$\log_e W$の変化を示している．$\log_e W = 546.34$の水平線は，無限に再分配を繰り返し，いずれ到達するはずの平衡状態（図2の折れ線分布）の値を示す．100回の試行で，既にほとんど平衡状態に達していることが分かる．

このように，再分配実験で観察された分布を基に，エントロピーが不可逆に平衡にむかって増大することが実際に確かめられた．

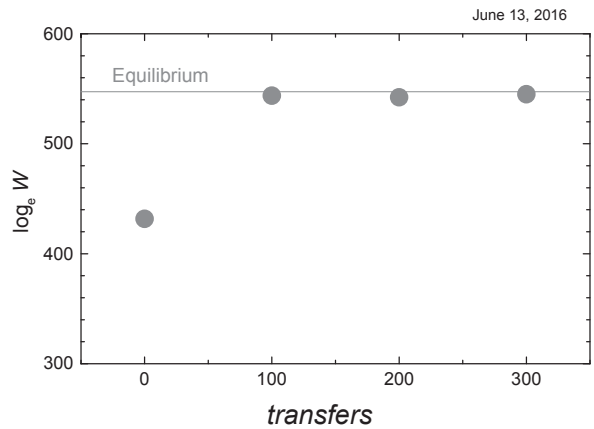

図 3. 再分配によるエントロピーの増大

また，あえて物理学のエントロピーやボルツマン分布という用語を持ち出さなくても，自然は必ず状態数Wの大きい方向に向かって変化し，均等分配は初期状態においてしか実現されないことを，実験結果から十分に理解させることができる．

すなわち，機会が均等であれば，もたらされる結果は平等であるという淡い期待は，経験的に分配の初期状態しか観察していないことによる思い込みに過ぎないので

ある．

ところで，物質科学では，エネルギー等分配則が知られている．100個の原子に100 eVのエネルギーを分配すれば，平衡状態においては，どの原子にも等しく1 eVずつ分配される．物理化学を学び始めた優秀な学生たちは，それと本稿で紹介した実験結果が矛盾していることに気づく．

実は，系がエネルギー等分配が実現されている平衡状態にあっても，任意の瞬間を切り出して見るならば，エネルギーの分配はやはりボルツマン分布になっているのである．原子間のエネルギー交換は，人間が瞬きをする間に1兆回も繰り返される．我々は結局その時間平均を見ているのである．どの瞬間においても，エネルギーが原子に等分配されているというのも，勝手な思い込みであって，現実にはそのようなことは決して起こらない．

5. 理論

文系学生も受講する一般教養科目として，取り上げる場合には，以上の議論で十分であろうし，正しい自然観を獲得させるという目的に叶うものである．しかし，理系の専門基礎教育科目においては，平衡状態で達成される分布が，厳密にボルツマン分布になることを納得させることが望ましい．以下に薬学部1年前期の「化学熱力学1」で実際に行っている導出例を示す．

N個の原子が，等間隔で無限に積み重なったエネルギー準位に，予め適当にばらまかれているとする．もし，この系の持つエネルギーの総和を一定に保ったまま，原子のエネルギー分布を変えようとするならば，ある原子がεだけエネルギーを得れば，必ず別の原子が同じだけのエネルギーを失うことになる．すぐに分かるように，これはサイコロを振って行った仮想プレイヤー間のマドラーの再分配と全く同じである．

このとき，系は既に熱平衡にあるとすると，系は最大エントロピーの状態にあるので，状態の数Wも最大になっている．したがって，その条件の下では，原子間で少々のエネルギーのやり取りがあっても，Wはもはやほとんど変化しない．

図4に，エネルギー量子εが，J番目のエネルギー準位にある2つの原子の間で受け渡される例を示す．エネルギー量子1個を与えた原子は1つ下の準位（J-1）に落ち，エネルギー量子をもらった原子は，1つ上の準位（J+1）に移る．

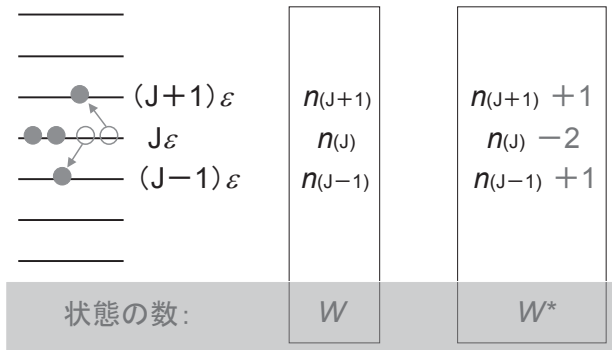

図 4. N，E 一定の条件下でのエネルギー量子移動

このやり取りの前後の系の状態数をW，W^*とすると，状態数の比W^*/Wは$n_{(J)}(n_{(J)}-1)/(n_{(J+1)}+1)(n_{(J-1)}+1)$となる．ここで，$n_{(J-1)}$，$n_{(J)}$，$n_{(J+1)}$はそれぞれ，もともと準位（J-1），J，（J+1）にあった原子数である．$n_{(J-1)}$，$n_{(J)}$，$n_{(J+1)}$が1よりも十分に大きいとすると，$W^*/W = n_{(J)}{}^2/(n_{(J+1)}\,n_{(J-1)})$となる．

系が熱平衡にあるとすれば，$W^*/W = 1$としてよいので，$n_{(J+1)}/n_{(J)} = n_{(J)}/n_{(J-1)}$が導かれる．すなわち，等間隔に並んだエネルギー準位に占める原子数は等比数列になっていることが分かる．もしJ番目のエネルギー準位に占める原子の数$n_{(J)}$を$n_{(0)}.\exp(-J\varepsilon\beta)$と表わすならば，この関係が満たされていることが分かる．ここでβは定数で，$1/k_BT$であるとすれば，これはまさしくボルツマン分布を与える式である．

6. おわりに

筆者は2004年以来，本学の他の教員と共に，全学共通教育科目「平和の探求」を担当している．[4, 5] 平和学は人間社会の様々な場面に現れる暴力や衝突の解決を目指す．その時に重視されるのが，一方の側か他方を打ち負かすのではなく，暴力をもたらしている原因を解明し，それを課題として当事者で共有するということである．これに成功すれば，衝突の相手は敵ではなく，パートナーとなる．（その意味において，最近流行のディベートというのは，あまり褒められた教育方法とは言えない．）

例えば，拡大し続ける貧富の格差は，構造的暴力の典型である．清貧なる多数者が，肥太った富者を追放すれば解決するというわけではない．貧富の格差は，社会経済システムによってもたらされているのであるから，システムを変革しない限り，格差は拡大再生産され続けることになる．

日々の経済活動において，生産手段を持たない庶民は，雇用を通じて富の分配に与ることができる．しかし，成長が止まり定常状態に達した経済においては，庶民は限られた雇用を互いに奪い合うことになる．この時，所得の分布はボルツマン分布に近い状態になるだろうと想像される．一方，経済が拡大成長している状態を考えても，金持ち程大きな所得を得る．つまり正のフィードバックが掛かっているので，所得の分布は対数正規分布となる．結局のところ，どちらの極限においても，政策的に富の再分配を行わない限り，けっして貧富の差は縮小することはない．このことは実際に各国の所得分布統計で確認される．[5, 6] あるいは，1個体ずつ隔離して平等に餌を与えて育てた遺伝子的に同質な兄弟稚ヒトデの大きさも，同様に対数正規分布になってしまう．[6, 7] すなわち，現実の世界においても，機会の平等が結果の平等をもたらすことはない．

本稿で紹介した再分配実験は，完全に等確率の理想的再分配においてさえも，期待に反して，多数の貧者と一握りの富者という格差が生み出されてしまうことを示している．実際に「平和の探求」の講義においてこの事実を紹介すると，受講生たちは驚くと同時に，「格差」はシステムによってもたらされるものであることよく理解してくれる．

あらゆる暴力を廃絶した平和な社会の実現のためには，私たちの生きている世界が，どのような法則に従って発展しているのかを知ることが，決定的に重要なのである．とりわけ，自分たちは「勝ち組」にいると錯覚している少なからぬ阪大生たちに，「格差」を自己責任論に解消させてはならないことに気づかせることの意味は大きいのではないだろうか．

受付 2016.08.20／受理 2017.01.20

参考文献

1） 長野八久「市民運動としてのサイエンスカフェ　－平和学・複雑系科学からの考察」『日本の科学者』48（3），40-46（2013年）．
2） G. ニコリス・I. プリゴジン『複雑性の探求』（みすず書房，1993年）
3） 例えば，大沢文夫『大沢流　手づくり統計力学』（名古屋大学出版会，2011年）．
4） 木戸衛一・長野八久編著『平和の探求 暴力のない世界をめざして』（解放出版社，2008年）．
5） 木戸衛一編『平和研究入門』（大阪大学出版会，2014年）．
6） 長野八久「熱力学との対比による複雑系科学の展望」『唯物論と現代』53，29-44（2015年）．
7） 長野八久・白井浩子「高密度飼育カエルにおける α 雌の出現」『阪大化学熱学レポート』33，52-53（2012年）．