様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　　　　　川島 誠　　　　　）	
論文題名	Linear independence of special values of formal Laurent series (形式的ローラン級数の特殊値の線形独立性)

論文内容の要旨

以下pで素数を表すものとする．

本論文は代数体係数の形式的Laurent級数の代数的数に於ける特殊値で張られる代数体上のベクトル空間の次元の下界を考察するものである．考察の方法はSiegelによる「数の近似」である．

本論文の主定理は3つある．主定理1,2はLerch関数に関連する形式的Laurent級数の族の有理数に於ける特殊値の代数体上のベクトル空間をそれぞれ，p進数体，複素数体の部分空間で考察し，それぞれの次元の下界を与えるものである．

主定理3は筆者により定義された形式的Mellin変換で表される，p進リーマンゼータ関数の正の整数点に於ける特殊値に関連する，形式的Laurent級数の族の有理数に於ける特殊値のベクトル空間の次元の下界を与えるものである．

次にそれぞれの主定理の内容を説明する．

主定理1,2 に登場するLerch関数はSiegelにより定義されたG-関数である．

G-関数の族の特殊値に関してはBombieri,Galochikinらにより，それらの特殊値で張られる代数体上のベクトル空間の次元の下界が，具体的なPade近似を構成することなく，与えられることが知られていた．本論文ではLerch関数に関連するG-関数の族に対して具体的にPade近似を構成することでそれらの特殊値で張られる代数体上のベクトル空間の次元の下界を与えている．具体的にPade近似を構成することで上述のBombieri,Galochikinらにより得られていた結果より精密な結果が得られている．これらの応用として，あるLerch関数の特殊値達が代数体上一次独立になることが示された．

主定理3はp進リーマンゼータ関数の正の整数点に於ける特殊値で張られる有理数体上のベクトル空間の次元の下界を求める目的のために考察されたものである．主定理3を得るために形式的Mellin変換の一般論として，形式的Mellin変換とMellin変換との関連性，形式的Mellin変換とp進Stieltjes変換との関連性，形式的Mellin変換で表わされる形式的Laurent級数のPade近似の性質が纏められている．これらの一般論を用い，更に，p進リーマンゼータ関数の正の整数点に於ける特殊値と関連する形式的Laurent級数のPade近似を具体的に与えることで，それらの有理数に於ける特殊値の代数体上のベクトル空間の下界を求めている．これらの応用として，あるp進Hurwitzゼータ関数の特殊値に関連する，p進Laurent級数の特殊値達が代数体上一次独立になることが示された．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（川島　誠　）	

論文審査担当者		（職）	氏　名
	主 査	教授	中村博昭
	副 査	教授	山ノ井克俊
	副 査	准教授	森山知則
	副 査	准教授	落合理
	副 査	准教授	安田正大

論文審査の結果の要旨

川島誠君は，本博士論文において，与えられた p 進数の無理性を Padé 近似を用いて調べる方法を整備し，その応用として，具体的な関数の組 $(f_1(z),\dots,f_m(z))$ の z に値を代入したときの数の組たちの無理性の問題に進展をもたらした．

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の正の奇数点での特殊値 $\zeta(n)$ たちの無理性や超越性を調べる問題は，それ自身非常に難しい．ただ，値 $\zeta(3)$，…，$\zeta(2k+1)$ で生成される有理数体上のベクトル空間の次元の下からの評価が近年 Rivoal らによって得られている．川島君は Rivoal らの結果の p 進類似として，p 進 Riemann ゼータ関数 $\zeta_p(s)$ の正の整数点 s=n での特殊値 $\zeta_p(n)$ たちのなす有理数体上のベクトル空間の次元の評価を得ることを研究目的としている．

今，n 重対数関数を $Li_n(z)$ と記すと $\zeta(n)=Li_n(1)$ なので，$\zeta(3)$，…，$\zeta(2k+1)$ で生成される有理数体上のベクトル空間は関数の組 $(Li_3(z),\dots,Li_{2k+1}(z))$ に z=1 を代入した値たちで生成されるベクトル空間である．Riemann ゼータ関数を p 進 Riemann ゼータ関数で置き換え，また n 重対数関数を p 進 n 重対数関数で置き換えた p 進類似でも，同様に，関数を止めて特殊化する変数を動かした値の組で生成されるベクトル空間は，変数を止めて関数を適切に動かした値の組で生成されるベクトル空間に相当するとみなせる．

さて，G-関数など重要なクラスに属する関数 $f(z)$ の特殊値 $f(\alpha)$ の無理性を論じるには，Padé 近似と呼ばれる特殊化する前の関数 $f(z)$ のレベルでの近似を考えることが有効であることは，Diophantus 理論の専門家にはある程度知られた事実である．また，関数 $f(z)$ を関数の組 $(f_1(z),\dots,f_m(z))$ にして考えるときも，同様に多重 Padé 近似が有効であることが知られている．川島君は，このような多重 Padé 近似の理論を組み合わせて，関数の組 $(f_1(z),\dots,f_m(z))$ に複素数または p 進数の $z=\alpha$ を代入した値に関する計算や理論を深く追求した．

実際，川島君は，彼が独自に導入した形式的 Mellin 変換を組み合わせる方法でこのような問題を研究し，適当な条件のもとで，関数の組 $(f_1(z),\dots,f_m(z))$ に代入できる α の範囲が従来より広くとれること，次元の下からの評価式も従来より改善されるなどの結果を得た．

川島君の研究は，従来から活発に研究されてきた Diophantus 問題の研究の p 進整数論への応用を与え，今後も様々な他の状況への応用が期待される．例えば，最初に述べた研究目的である関数の組 $(f_1(z),\dots,f_m(z))$ を p 進多重対数関数たちの組としてとる状況の問題には，現在の結果はまだ適用できないが，この方向で研究を進めることでそのような問題も射程に入ってくることが期待される．岩澤理論に現れるこれらの関数の特殊値は数論的には重要であるが従来ほとんど解明されてこなかった．この方向の研究は，そのようなことの解明への可能性を秘めていると言える．

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．