様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　　増田　高行　　）	
論文題名	Twist deformations in affine geometry （アフィン幾何学における捩り変形）

論文内容の要旨

アフィン変形は，(1)ローレンツ幾何学の変換理論と(2)双曲構造の無限小変形理論に応用されている．著者は,affine twist cocycleと呼ぶ特別なアフィン変形を定義し上記2分野に応用した．

(1) 3次元ミンコフスキー空間への等長作用全体を$Isom$とする．境界をもつ双曲曲面Sを考え，Sのフックス群Gをローレンツ群の行列表現として考える．フックス群Gの**アフィン変形**とは，準同型写像:G→$Isom$であり，その線形パートの対応は恒等写像となるものを言う．アフィン変形の平行移動パートへの対応は**コサイクル**uと呼ばれる写像となる．フックス群Gに対してのアフィン変形全体の空間をHと記述する．Hはコサイクル全体の空間と同一視される．本論文の一つ目の目的は，Hにある座標系与えることである．

著者は，双曲曲面の分割曲線gに対して定義される **affine twist cocycle AT_g**という特別なコサイクルを定義した．双曲曲面Sは(0,b+1)型で各境界成分はcuspでないとする(b>3)．曲面Sのパンツ分解を一つ取る．この分割曲線を$g_1, g_2,\cdots,g_{b-2}$とする．もともとの$b+1$個の周囲的な閉曲線と，$b-2$個の分断曲線に対して，マルグリス不変量(アフィン空間での置換距離)がそれぞれ定義される．前者と後者の実数の組をそれぞれαとβとする．**命題11**で対応(α,β)→$u_0^{\alpha,\beta}$が単射線形写像であることが示される．ただし，$u_0^{\alpha,\beta}$とは(α,β)に対応するマルグリス不変量を持つコサイクルである．そして，次の**定理1**が示される；上記の(α,β)と分割曲線に与えた実数の重みt_k (k=1,..,b-2)$に対して，次のコサイクルは，(3b-3)次元の実線形空間とHの標準的な線形同型対応を与える．

$$u_0^{\alpha,\beta} + \Sigma_{k=1}^{b-2} t_k AT_{g_k}.$$

これよりHの座標系が与えられる．実際，Teichmuller理論の(無限小の意味での)Fenchel-Nielsen座標系と関連することが次の(2)より理解できる．

(2) Affine twist cocycleの双曲構造への無限小変形理論への応用させる．双曲曲面Sの**無限小変形**とは，Sのタイヒミュラー空間のSでの接ベクトルのことである．Goldman-Margulisは，ローレンツ空間と$PSL(2,R)$のリー環の自然な対応を用いて，コサイクルがSの無限小変形と見なせることを示した．コサイクルuによるフックス群Gの元σの変形を$\sigma^u(s)$と書くとき，双曲幾何の置換距離$L(\sigma^u(s))$の微分は，σのマルグリス不変量の2倍となることが示されている．著者はこの等式を利用して次の**定理2**を示した：$L(\sigma^{AT_g}(s))$の微分は次の和で与えられる．

$$\Sigma_{p} \cos(\theta_p).$$

ただし，pはS上の単純閉曲線σとgの交点であり，角度θ_pはpにおけるgとσが成す角度である．**定理2**は次のWolpertの公式との類似を持つと解釈できる．Wolpertの公式とは，twist変形による双曲構造の変形における単純閉曲線の長さの変動を，その閉曲線とtwist曲線との成す角度によるcosとの関係を表した式である．これらから**定理3**として，affine twist cocycle AT_gは，曲面上の単純閉曲線gに沿ったtwist変形の無限小変形と見なすことができると結論できる．

最後に，参考文献[27]では，双曲曲面Sがハンドルを持っている場合においても本論文の定理1から定理3と同様の結果が示されており，この内容も本論文内で言及されている．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名	（　増田高行　）		
論文審査担当者		(職)	氏　名
	主 査	教授	大鹿　健一
	副 査	教授	山ノ井　克俊
	副 査	准教授	宮地 秀樹
	副 査	准教授	金　英子
	副 査	准教授	伊藤　哲也

論文審査の結果の要旨

本論文は，３次元 Lorentz 空間に作用するアフィン変換のなす群に関する博士論文申請者（以下，申請者）の研究をまとめたものである．

はじめに背景を述べる．1978 年，Milnor は３次元 Euclid 空間に固有不連続に作用するアファイン作用は全て polycyclic であろう，という予想を提出した．これに対して Margulis は 1983 年に自由群によるアファイン変換のなす群の作用による反例を与えた．Margulis による反例は 2+1 型の Lorentz 空間に作用する等長写像を線形部分に持つため，双曲幾何学における変形理論と密接に関連するものであり，そしてその作用の豊富であること，特に Teichmüller 理論と同等の変形理論の存在を示唆される．そして現在では，Anti de Sitter 空間や Einstein 宇宙など定曲率擬 Riemann 多様体の作用と関連して，双曲幾何の研究者を始め，多くの研究者により広く研究されている．

申請者の第一の研究は，2+1 型の Lorentz 空間に作用する境界付き曲面の基本群と同型な等長的アフィン変換のなす群の変形空間の座標付けに関するものである．Goldman, Drumm, Charette は，Margulis により導入された双曲的アファイン変換に関する基本的不変量である Margulils 不変量を座標として座標付けを与えた．申請者は，Teichmüller 理論における Fenchel-Neilsen 座標を考慮して，曲面上のパンツ分解の分割曲線に対する Margulis 普遍量と，アファインツイストコサイクルと呼ばれる，Fenchel-Nielsen 座標における分割曲線に沿ったツイスト変数に対応するコサイクルを導入し，上記の Goldman, Drumm, Charette とは異なる座標を構成することに成功した．さらに，彼の導入した座標における真性不連続な部分についても議論した．

申請者の第二の研究は，上記で導入した座標のタイヒミュラー理論との類似に関するものである．アファイン変換のなす群の平行移動の部分は自然にリー環 sl(2,R)を値にもつ１次元コホモロジー群の元と考えることができる．このことから平行移動の部分から線形部分に対応する双曲曲面の，Teichmüller 空間内における無限小変形を考えることができる．この考え方の下，Goldman と Margulis は変分を用いた Margulis 不変量の意味付けを研究した．彼は Goldman と Margulis のアイデアの下，彼が導入したアファインツイストコサイクルの幾何学的な意味付けに成功した．実際，彼の導入したコサイクルに沿って無限小変形をした場合，Teichmüller 理論における，Wolpert によるツイスト変形に沿った変分公式と類似の公式を得た．このことは彼の導入したアファインツイストコサイクルが，Teichmüller 理論におけるツイスト変形と比較されることの重要な証拠となる．

本論文には参考論文として受理された論文の他に現在投稿中の論文も含められている．申請者は最初に第一の研究と第二の研究を穴あき球面の場合に行い，投稿中の論文においてそれらを一般の曲面を扱っている．投稿中の論文の手法は，位相幾何学的複雑さ以外の大部分は，基本的に受理された論文における研究に準じている．

以上のように，Teichmüller 理論において，Fenchel-Nielsen 座標は基本的座標であり様々な状況下で応用されている．彼の研究はアファイン変換のなす群の変形理論において，これと同等の座標系を構成したことになる．このことから申請者の研究は，Teichmüller 理論とアファイン変換のなす群の変形理論の間の辞書的な相互的関係を考える上で重要な研究であり，両者の研究の発展にも寄与するところ大である．よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．