



Title	Slopes and local invariants of fibered surfaces
Author(s)	榎園, 誠
Citation	大阪大学, 2017, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/61496
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (榎園 誠)	
論文題名	Slopes and local invariants of fibered surfaces (ファイバー曲面のスロープと局所不変量)
論文内容の要旨 非特異な複素射影曲面から非特異な射影曲線（コンパクトリーマン面）への全射な正則写像で一般ファイバーが連結なものをファイバー曲面という。ファイバー曲面の重要な数値的不変量として、相対標準束の自己交点数と、その順像層の次数があり、その比をファイバー曲面のスロープという。スロープの値はファイバー曲面の大域的な構造や特異ファイバーの様子などの局所的な構造と関係している。例えば、相対極小なファイバー曲面のスロープの下限は一般ファイバーの種数を g とすると $4(g-1)/g$ となり、スロープが下限を取るファイバー曲面の一般ファイバーは超楕円曲線に限ることが知られている。スロープの上限は12であり、スロープが上限の12を取ることとそのファイバー曲面が位相的に局所自明になる（但し、正則ファイバー束ではない）ことは同値である。このような事実を踏まえて、本論文は主に3つの内容に分かれる。 1つ目はスロープの上限に関することである。ファイバー曲面のスロープ上限は上述の通り12であるが、一般ファイバーを特殊なものに限定すると上限が12より小さくなる現象が起こることがある。本研究以前にこの現象について知られていたことは、一般ファイバーが超楕円曲線の場合であり、この場合のスロープの真の上限はXiaoにより与えられた。本論文では、一般ファイバーが双楕円曲線の場合を含むファイバー曲面のあるクラスに対し、この現象を観察した。具体的には、楕円曲面の単純な巡回分岐被覆で与えられるファイバー曲面のスロープは12より小さい数で上から評価できることを示した。 2つ目はスロープの下限に関することである。一般型曲面の地誌学の観点から、非超楕円的なファイバー曲面のスロープの下限は興味深く、多くの研究がなされている。この研究に関する最初の結果は非超楕円の種数3の場合であり、この場合のスロープの下限は3である。種数3の非超楕円曲線は標準写像により非特異平面4次曲線と同一視できる。本論文では、この種数3の場合の結果を一般ファイバーが一般次数の非特異平面曲線の場合に拡張した。具体的には、一般ファイバーが非特異平面 d 次曲線であるファイバー曲面（以下、平面 d 次曲線束と呼ぶ）のスロープの下限が次数 d を用いて $6(d-3)/(d-2)$ となることを示した。さらに、スロープの下限からのずれが有限個の退化ファイバー芽で決まることを意味する数値的不変量の間の等式（この種の等式はスロープ等式と呼ばれている）を証明した。この等式から平面曲線束の構造を有する曲面の実4次元多様体としての位相不変量である符号数が退化ファイバー芽に局在化される現象を観察でき、退化ファイバー芽に対し局所符号数と呼ばれる値を定義できる。 3つ目は局所符号数に関することである。一般ファイバーに適切な条件を課せば上述の平面曲線束の場合のように局所符号数が定義できる場合がある。本論文では、種数 g の非特異射影曲線のモジュライ空間上の有効因子 D に対し、一般ファイバーのモジュライ点が D に含まれない種数 g のファイバー曲面に対する局所符号数を定義した。さらに種数2で D が双楕円曲線跡の場合と種数3で D が4重接点を持つ非特異平面4次曲線のなす跡に対し、この値をいくつかの退化ファイバー芽に対し計算し、従来より定義されていた種数2のファイバー曲面や種数3の非超楕円的ファイバー曲面に対する局所符号数とは異なるものであることを示した。	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (複 数)			
論文審査担当者	(職)		
	氏 名		
	主 査	教授	今野 一宏
	副 査	教授	藤野 修
	副 査	教授	高橋 篤史
	副 査	教授 (東北学院大学)	足利 正

論文審査の結果の要旨

題目： Slopes and local invariants of fibered surfaces
(和訳： ファイバー曲面のスロープと局所不変量)

本論文は、非特異射影代数曲線上のファイバー空間構造をもつ非特異射影代数曲面（以下、ファイバー曲面と呼ぶ）に対して、そのスロープおよび堀川指数、局所符号数といった局所不変量を研究するものであり、大きく3つの部分から成る。

まず第1部においては、種数 h の代数曲線を一般ファイバーにもつファイバー曲面の n 次巡回分岐被覆として得られるファイバー曲面に対して、 h が1の場合にスロープの上限を与えている。ここに、ファイバー曲面のスロープとは相対標準束の自己交点数と相対的な正則オイラー・ポアンカレ標数との比を指す。一般ファイバーに特定の性質を指定した場合に、スロープの下限が決定できることはままあるが、上限まで得られるのは極めて稀である。自身による以前の結果と併せれば、超楕円曲線束に対して知られていた結果が h が1以下で n が一般の場合に拡張されたことになる。これは h が1以下ならば小平ファイバー曲面とは成り得ないことを示すもので、Kas の定理の一般化でもある。

第2部は一般ファイバーが平面曲線であるようなファイバー曲面に関する精緻な研究である。堀川指数という退化ファイバー芽に対する解析的な局所不変量が導入されるが、その最も重要な非負性は、定義から直ちに従うものではない。そこでまず初めにスロープの下限を確定させ、次に任意に与えられた退化ファイバーの近傍をコンパクト化して、堀川指数には着目したファイバーからの寄与のみがあるファイバー曲面を構成する。それにスロープの下限を適用して堀川指数の非負性を導出するという斬新な手法を用いている。同時にスロープ等式が与えられ、そのひとつの帰結として、向き付けられた実4次元多様体としての当該ファイバー曲面の符号数が退化ファイバーの周りに局在化することが示されている。さらに、こうして得られた局所符号数は、久野によって位相幾何学的方法で導入されたものと完全に一致するという事実も明らかにされている。これは、代数幾何学と位相幾何学を結びつける特筆すべき成果である。

第3部は、ファイバー曲面の符号数の様々な局在化の可能性を示すものである。一般ファイバーの種数が2あるいは3の場合には、符号数はそれぞれ特異点ファイバー、超楕円的なファイバーのまわりに局所化することが知られている。同時に、これらと異なる局在化は存在しないだろうと考えられていたが、足利・吉川が導入した代数曲線のモジュライ空間上の符号数因子を巧みに用いることによって、既知のものとは全く異なる局在化が与えられている。

以上の業績は、当該研究分野に新たな知見をもたらすものである。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。