

|              |   |
|--------------|---|
| Title        | Finite multiple polylogarithms  |
| Author(s)    | 関, 真一郎  |
| Citation     | 大阪大学, 2017, 博士論文  |
| Version Type | VoR   |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/61499">https://doi.org/10.18910/61499</a> |
| rights       |   |
| Note         |   |

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 論文内容の要旨

|  |  |
|--|--|
| 氏 名 ( 関 真一朗 )  |  |
| 論文題名   | Finite multiple polylogarithms<br>(有限多重ポリログ) |
| 論文内容の要旨  |  |
| <p>本学位論文において学位申請者は有限多重ポリログの基礎的な研究を行い、それらの満たす基本関係式を証明した。</p> <p>本学位論文は三部から成り、第一部では多重ゼータ値(MZV)および多重ポリログの知られた結果のレビューを行っているが、多重ポリログと等号付き多重ポリログを結びつける公式は本論文の手法で証明される新しい公式である。</p> <p>第二部は有限多重ゼータ値(FMZV)について書かれている。金子-Zagierによって或る<math>Q</math>代数<math>A</math>の元として<math>A</math>-FMZVが定義され、Rosenは<math>A</math>から新しい<math>Q</math>代数<math>\hat{A}</math>を導入し、<math>\hat{A}</math>の元として<math>\hat{A}</math>-FMZVを導入した。<math>\hat{A}</math>-FMZVを<math>A</math>-FMZVへ写す<math>\hat{A}</math>から<math>A</math>への自然な全射があり、無限大素数と学位申請者が名付けた<math>\hat{A}</math>の元<math>p</math>を用いると、この射は<math>\hat{A}/p\hat{A}</math>と<math>A</math>の間の同型を誘導する。<math>\hat{A}</math>は<math>p</math>進位相に関して完備である。学位申請者はRosenが扱っていない等号付き(star)版である<math>\hat{A}</math>-FMZSVを導入した上で、Rosenが証明した関係式以外にいくつかの新しい<math>\hat{A}</math>-FMZVの<math>p</math>進関係式を証明した。このうち、Hoffmanが<math>A</math>-FMZVに対して証明した三つの基本関係式の<math>p</math>進版は第三部で証明される関係式の系であるが、それら以外にも金子氏が証明した<math>A</math>-FMZVに対するシャッフル関係式の<math>p</math>進版およびその等号付き版を証明している。</p> <p>第三部が本論文の主要な部分であり、有限多重ポリログを定義し、その研究成果がまとめられている。本論文で<math>A</math>-有限ポリログと呼んでいる対象の関数等式がKontsevichやElbaz-Vincent、Gangl等によって研究されていたが、これを多重化・多変数化・<math>p</math>進化した対象である<math>\hat{A}</math>-有限多重ポリログ(<math>\hat{A}</math>-FMP)を定義した。多重化については等号なしと等号付き(star-version)の二通り、多変数化については調和(H)型とシャッフル(S)型の二通りの一般化が考えられ、計四通りの<math>\hat{A}</math>-FMP (<math>\hat{A}</math>-FHMP, <math>\hat{A}</math>-FHSMP, <math>\hat{A}</math>-FSMP, <math>\hat{A}</math>-FSSMP) が定義される。変数に全て1を代入すると<math>\hat{A}</math>-FMZ(S)Vが得られる。主たる研究目的は<math>A</math>-FMZVや<math>A</math>-有限ポリログについて知られている関係式を含む形で<math>\hat{A}</math>-FMPの関係式を多数発見することであるが、本論文の主結果としてHoffmanの基本関係式やKontsevich、Elbaz-Vincent-Ganglの一部の結果を拡張する次の三つの基本関係式を証明した：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>\hat{A}</math>-FH(S)MPに対する反転公式.</li> <li>(2) <math>\hat{A}</math>-FSSMPに対する双対関数等式.</li> <li>(3) <math>\hat{A}</math>-FHMPと<math>\hat{A}^-</math>-FHSMP間の関係式.</li> </ol> <p>基本関係式の証明には調和数に関するEulerの恒等式を多重化・多変数化する必要があるが、いくつかの切断積分作用素を導入し、その変数変換公式を示すことによって一般化Eulerの恒等式が証明される。最後に、基本関係式の応用として<math>A</math>-FMPおよび<math>A_p</math>-FMPの2や1/2における特殊値を多数計算した (<math>A_p = \hat{A}/p^2\hat{A}</math>)。これはSunやMestrovicが重さが低い場合に計算していたものの一般の重さへの拡張を含むものである。本論文の内容は部分的に佐久川憲児氏との共同研究に基づくが、特に、<math>p</math>進化を考察する点は学位申請者独自の研究である。</p> |  |

## 論文審査の結果の要旨及び担当者

| 氏 名 ( 関 真 一 朗 )  |     |     |      |
|--|-----|-----|------|
|  | (職) | 氏 名 |      |
| 論文審査担当者  | 主 査 | 教授  | 中村博昭 |
|  | 副 査 | 教授  | 渡部隆夫 |
|  | 副 査 | 准教授 | 森山知則 |
|  | 副 査 | 准教授 | 落合理  |
|  | 副 査 | 准教授 | 安田正大 |
| <b>論文審査の結果の要旨</b>  |     |     |      |
| <p>関真一朗君は本博士論文において、金子-Zagier が導入した有限多重ゼータ値の概念の一般化にあたる有限多重ポリログという概念を定式化した。さらに有限多重ポリログの重要な性質を示すことによって理論の基礎を整備した。</p> <p>多重ゼータ値は Euler の時代まで遡る研究対象である。2 以上の整数 <math>k</math> でのゼータ値 <math>\zeta(k)</math> は、指数 <math>k</math> のべき <math>n^k</math> の逆数たちを自然数 <math>n</math> がうごくときに加えた無限和であった。Euler は、整数 <math>k</math> の代わりに整数の組 <math>k, \ell</math> を考えて 2 重ゼータ値 <math>\zeta(k, \ell)</math> を研究した。 <math>\zeta(k, \ell)</math> は、指数がそれぞれ <math>k, \ell</math> のべき <math>m^k n^\ell</math> の逆数たちを自然数 <math>m, n</math> の組が不等式 <math>m &gt; n</math> の条件下でうごくときに加えた無限和であった。同様にして、指数の組 <math>k_1, \dots, k_r</math> に付随した <math>r</math> 重多重ゼータ値 <math>\zeta(k_1, \dots, k_r)</math> が定義でき、数学や数理論理の様々な分野で活発に研究されている。一方、ゼータ値の定義の逆数和において <math>n^k</math> の逆数の分子を変数 <math>z</math> の <math>n</math> 乗に置きかえた無限級数により定義される関数をポリログ関数 <math>\text{Li}_k(z)</math> と呼ぶ。定義から <math>\zeta(k) = \text{Li}_k(1)</math> となり、ゼータ値と同様にポリログ関数の多重化も論じることができる。</p> <p>さて、金子-Zagier は素数 <math>p</math> ごとに上述の多重ゼータ値の定義における逆数和を <math>p-1</math> 番目以下で打ち切って、その和の値を mod <math>p</math> した数をゼータ値の mod <math>p</math> 有限類似と捉えて研究した。しばしば、mod <math>p</math> の有限多重ゼータ値は有限個の素数のみで例外的な挙動を示すが、金子-Zagier は、小さい素数を除外して多重ゼータ値の普遍的な有限類似を考えるべく、すべての素数 <math>p</math> に関する有限体 <math>\mathbb{Z}/(p)</math> たちの無限直積環を、すべての素数 <math>p</math> に関する有限体 <math>\mathbb{Z}/(p)</math> たちの無限直和のイデアルで割った <math>A</math> 代数と呼ばれる代数を導入し、この <math>A</math> 代数において有限多重ゼータ値を考える新しいアイデアを提起した。</p> <p>本博士論文では、これら先行研究のさまざまな一般化が研究されている。とりわけ、有限多重ゼータ値から有限多重ポリログへと向かう方向への一般化と、<math>A</math> 代数の定義における mod <math>p</math> を、すべての <math>s</math> 乗での mod <math>p^s</math> におきかえて定義された <math>\hat{A}</math> 代数を考えるという方向への一般化が挙げられる。また、元々の多重ゼータ値の研究において多重ゼータ値の間に様々な関係式を見出すことが重要であったが、本博士論文においては、<math>\hat{A}</math> 代数の世界での有限多重ポリログに対し、reversal relation をはじめとする多数の関係式を確立したことに加え、有限多重ポリログに対する双対公式などの基本的な結果も得られている。</p> <p>関君の研究は、有限多重ポリログという新しい研究対象を切り開くとともに、従来の有限多重ゼータ値の研究に対しても一層の深化をもたらすものであり、その証明にも様々な工夫がみられ高い数学的能力を発揮している。このように、本論文の研究は今後の有限多重ゼータ値の研究分野に多くの影響を与える有益なものである。</p> <p>よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。</p> |     |     |      |