Title	Artin-Mazur zeta functions of generalized beta-transformations
Author(s)	鈴木, 新太郎
Citation	大阪大学, 2017, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/61509
rights	
Note	

様式3

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　鈴木　新太郎　）	
論文題名	Artin-Mazur zeta functions of generalized beta-transformations (一般化されたベータ変換に対するArtin-Mazur ゼータ関数)

論文内容の要旨

βを1より大きい実数とするとき，β-変換は区間[0,1]において βx mod1 で定義される．2007年にGóraは，β-変換の各切片をいくつか選び，それらの傾きを負とした場合に得られる変換（一般化されたβ-変換）の族を導入した．これらの変換族は，区分的C^2級拡大写像のクラスに含まれるが，一般に区分的C^2級拡大写像のクラスに属する変換のエルゴード的性質は，変換に関するPerron-Frobenius作用素とよばれる転送作用素の一種を用いた関数解析的手法により解析することができる．このときPerron-Frobenius作用素は，区間上の有界変動関数のなす線形空間上に適当なノルムを定めることにより得られるBanach空間上で定義され，その上でスペクトル半径1の擬コンパクトな有界線形作用素となる．作用素の擬コンパクト性から，本質的スペクトル半径$0<\alpha<1$よりも絶対値の大きいスペクトルは有限重の離散固有値となり，それら離散固有値の性質から，変換のエルゴード的性質を決定することができる．一方，1990年のBaladiとKellerによる結果から，区分的C^2級拡大写像のn-固定点と，それらの点における変換のn回合成の拡大率を用いて定義されるArtin-Mazur-Ruelleゼータ関数は，変換に関するPerron-Frobenius作用素のFredholm行列式の逆数としての役割を果たす．つまり変換に対するArtin-Mazur-Ruelleゼータ関数は，複素平面上の単位開円板内で解析的かつ半径$1/\alpha$の開円板上に有理型に解析接続可能で，その極の逆数と，Perron-Frobenius作用素の本質的スペクトル半径$0<\alpha<1$よりも絶対値の大きいスペクトルが1対1に対応する．このことから，Artin-Mazur-Ruelleゼータ関数の極を考察することによって，区分的C^2級拡大写像のエルゴード的性質を解析することが可能となる．BaladiとKellerによる証明は，Artin-Mazur-Ruelleゼータ関数の解析接続を明示的に与えていない．しかしβ-変換の場合，区間[0,1]の端点1のβ-展開の展開係数に関する母関数を用いて，Artin-Mazur-Ruelleゼータ関数を変数変換して得られるArtin-Mazurゼータ関数の解析接続が明示的に得られることが先行研究により知られている．

本論文では，β-変換に対するArtin-Mazurゼータ関数の解析接続に関する結果を，一般化されたβ-変換の場合に拡張した．つまり，一般化されたβ-変換による区間[0,1]の端点1のf-expansionの展開係数に関する母関数を用いて，変換に対するArtin-Mazurゼータ関数の解析接続を明示的に与えた．この結果から，変換に対するArtin-Mazurゼータ関数の解析的性質を，1のf-expansionの展開係数に関する母関数から考察することが可能となる．本論文では，その母関数の性質から，変換に対するArtin-Mazurゼータ関数の自然境界の決定，および関数の極の位置に関する考察を行った．とくに，一般化されたβ-変換に対するArtin-Mazurゼータ関数は$1/\beta$で位数1の極をもち，その極の留数が，変換の絶対連続不変測度に関する量で明示的に与えられることが明らかとなった．また，変換のArtin-Mazurゼータ関数の解析的性質とβの代数的性質を関連付ける結果として，区間[0,1]の端点1が変換の最終的周期点かつ変換に対するArtin-Mazurゼータ関数の絶対値が2番目に小さい極が単位開円板内に存在しなければ，βがPisot数もしくはSalem数となることが分かった．加えて，変換の切片の傾きが全て負となる場合（negative β-変換の場合），1が変換の最終的周期点であれば，βがPerron数となることが知られていたが，Artin-Mazurゼータ関数の解析的性質を用いてその別証明を与えた．さらに，negative β-変換に固有の現象として，βを 1 に近づけたときに，negative β-変換に対するArtin-Mazurゼータ関数が，Thue-Morse 列と関連したある解析関数に単位開円板上で各点収束するとの結果を得た．最後に，一般化されたβ-変換のあるクラスが，区間[-1,1]上で定義されるChebyshev写像と位相共役であることから，区間[-1,1]の端点-1の写像による軌道を用いて，Chebyshev写像のArtin-Mazur-Ruelleゼータ関数の解析接続を明示的に与えた．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏名	(鈴木 新太郎)	
論文審査担当者	(職)	氏名
	主査 教授	盛田 健彦
	副査 教授	杉田 洋
	副査 教授	山ノ井 克俊
	副査 准教授	角 大輝

論文審査の結果の要旨

ベータ変換(以下β-変換と書く、ただし、$\beta>1$)に関するArtin-Mazurゼータ関数の研究は、区分的に単調な区間力学系を含む離散時間力学系の周期点分布に関するゼータ関数の研究のひな形であるばかりでなく、実数のβ-進展開による表示を通して数論とも関係しており、多くの研究者によって様々な研究成果が得られている。

本論文では、従来のβ-変換の各可逆分枝の傾きの符号が分枝毎に異なることを許すという意味で一般化されたβ-変換を考え、そのArtin-Mazurゼータ関数が満たすある種の関数等式を示し、それを応用することによって、今後の発展が期待できる幾つかの興味深い結果が得られている。以下ではそれらについて具体的に述べる。

β-変換に対応して区間$[0,1]$に属する数のβ-進展開が考えられるのと同様に、一般化されたβ-変換に対してもその対応物を考えることができる。これを一般化されたβ-進展開ということにする。一般化されたβ-変換のArtin-Mazurゼータ関数は半径$1/\beta$の円板内部で絶対収束する。本論文では、数1の一般化されたβ-進展開の係数の母関数と円分多項式を用いて一般化されたβ-変換のArtin-Mazurゼータ関数が満たす関数等式を示すことによって、それが単位円板に有理型に解析接続できることを証明している。さらに1の一般化されたβ進展開が循環的であるならばArtin-Mazurゼータ関数は有理関数となること、そうでなければ単位円周を超えて有理型には解析接続できないことが示されている。加えて$z=1/\beta$が1位の極であることやその留数についても言及されている。これらの結果は1994年に発表されたL. Flatto、J.C. Lagarias、B. Poonenによるβ-変換のArtin-Mazurゼータ関数に関する結果の自然な一般化を完成させたものといえる。

上述の関数等式によるArtin-Mazurゼータ関数の解析的性質の研究の第1の応用としては、1の一般化されたβ-進展開が循環的となる場合のβの数論的性質が論じられている。この循環性条件を満たす$\beta>2$はPerron数となり、さらにArtin-Mazurゼータ関数の単位円板内の極が$z=1/\beta$のみである変換の場合には、βはPisot数あるいはSalem数となることが示されている。一方、可逆分枝の傾きがすべて$-\beta$となる、いわゆる$(-\beta)$-変換の場合には1の$(-\beta)$-進展開が循環的となるような$\beta>1$についてはPerron数であることが2012年のL.LiaoとW.Steinerの共著論文で示されているが、これについても本論文では別証明を与えている。

第2の応用として$(-\beta)$-変換のArtin-Mazurゼータ関数をパラメータ$\beta>1$をもつ単位円板上の有理型関数族とみなし$\beta\to1$とした場合、Thue-Morse列と関係した具体的な無限積表示をもつ極限関数が現れることが示されている。これは力学系の特異摂動の観点からも新規性があり、極めて興味深いもので更なる発展が期待できる。

第3の応用はChebyshev多項式の自然な一般化であるChebyshev写像のArtin-Mazur-Ruelleゼータ関数の解析接続と解析的性質に関するもので、共役写像を適当に選ぶことで可逆分枝の傾きが左から交互にβ、$-\beta$と現れる一般化されたβ-変換のArtin-Mazurゼータ関数の場合に帰着する方法によって得られている。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値のあるものと認める。