



Title	L' ANNEAU DE COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SEIFERT NON-ORIENTABLES
Author(s)	Bauval, Anne; Hayat, Claude
Citation	Osaka Journal of Mathematics. 2017, 54(1), p. 157-195
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/61909">https://doi.org/10.18910/61909</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SEIFERT NON-ORIENTABLES

ANNE BAUVAL and CLAUDE HAYAT

(Received December 16, 2013, revised February 5, 2016)

## Abstract

If  $p$  is a prime number, the cohomology ring with coefficients in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  of an orientable or non-orientable Seifert manifold  $M$  is obtained using a  $\Delta$ -simplicial decomposition of  $M$ . Several choices must be made before applying the Alexander-Whitney formula. The answers are given in terms of the classical cellular generators.

## Résumé

Si  $p$  est un nombre premier, l'anneau de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  d'une variété de Seifert  $M$ , orientable ou non-orientable est obtenu à partir d'une décomposition  $\Delta$ -simpliciale de  $M$ . Plusieurs choix sont à faire avant d'appliquer la formule d'Alexander-Whitney. Les réponses sont données en fonction des générateurs cellulaires classiques.

## 1. Introduction, Notations

**1.1. Introduction.** Dans cet article on détermine l'anneau de cohomologie à valeurs dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , où  $p$  est un entier premier, pour toutes les variétés de Seifert orientables ou non. Les résultats ont été annoncés dans [2]. Le cas où il s'agit de variétés de Seifert orientables dont la base est une sphère, et les coefficients à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , a été étudié dans [3]. L'article [1] a généralisé ce résultat en supprimant l'hypothèse sur la base et l'article [5] a obtenu cet anneau de cohomologie des variétés de Seifert orientables à valeurs dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Dans l'article [15], sont déterminés les anneaux de cohomologie à coefficients entiers (et cycliques finis) des variétés  $S^3/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un sous-groupe fini de  $SO(4)$  agissant librement sur  $S^3$ .

Notre attention pour le calcul des cup-produits a été attirée par les études portant sur une extension du Théorème de Borsuk-Ulam pour les variétés de dimension 3 [6]. En effet si  $\tau$  est une involution sur une telle variété  $N$ , alors toute application continue  $f$  de  $N$  dans  $\mathbb{R}^3$  admet un point  $x \in N$  tel que  $f(\tau(x)) = x$  si et seulement si la puissance trois pour le cup-produit de la classe de cohomologie élément de  $H^1(N/\tau, \mathbb{Z}_2)$  associée à  $\tau$  est non nulle.

Les preuves détaillées des résultats annoncés dans [2] sont obtenues en utilisant un point de vue  $\Delta$ -simplicial. Utiliser cette méthode d'abord pour les variétés orientables rend plus courte et plus facile son extension au cas non-orientable. Les choix les plus délicats sont ceux de relevés du complexe cellulaire dans le complexe  $\Delta$ -simplicial auxquels on impose

d'être des cocycles  $\Delta$ -simpliciaux, Section 6. Décrivons les étapes de la méthode que nous avons choisie.

Nous commençons par construire une décomposition cellulaire de la variété  $M$ , Section 4, en précisant dans la Sous-section 4.1 les mots qui permettent de paver les 2-cellules, bords du voisinage tubulaire des fibres singulières et de la dernière 3-sphère. Le complexe cellulaire  $(C_*)_{cell}$  ainsi obtenu est subdivisé en un complexe  $\Delta$ -simplicial  $(C_*)_{simp}$ .

Notons  $T: (C_*)_{cell} \rightarrow (C_*)_{simp}$  le morphisme associé à cette subdivision, et  $T^t: C_{simp}^* \rightarrow C_{cell}^*$  le morphisme transposé défini dans la Sous-section 5. Nous choisissons, pour chaque générateur  $\xi$  des cochaînes cellulaires, un relevé  $R(\xi)$  de  $T^t(\xi)$  dans les cochaînes  $\Delta$ -simpliciales. Ce choix est fait de telle façon que  $R(\xi)$  soit un cocycle et pas seulement une cochaîne, Section 6.

Le cup-produit de deux cochaînes  $\Delta$ -simpliciales est calculé par la formule d'Alexander-Whitney. Pour les cup-produits sur  $H^1(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , on décrit un calcul qui permet d'éviter l'évaluation sur les (nombreux !) 2-simplexes, Sous-sections 7.1, 7.2, 8.1. Pour les cup-produits sur  $H^1(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , on applique la formule d'Alexander-Whitney de façon plus classique puis le quasi-isomorphisme  $T^t$ , Sous-sections 7.3 et 8.2.

Le plan de cet article est comme suit. Après cette section d'introduction, de notations sur les variétés de Seifert et de quelques invariants associés, la Section 2 décrit une décomposition cellulaire d'une variété de Seifert quelconque  $M$  et donne une présentation des groupes de cohomologie  $H^*(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . Dans la Section 3, les théorèmes principaux présentent tous les cup-produits. La preuve de ces résultats constitue le reste de l'article. Dans les Sections et Sous-sections 4, 5, 6 sont décrits les choix faits pour une décomposition  $\Delta$ -simpliciale, le quasi-isomorphisme  $T$ , et les relevés des cocycles cellulaires en cocycles  $\Delta$ -simpliciaux.

Dans la Section 7, on applique, via la formule d'Alexander-Whitney, tous ces choix pour le calcul des cup-produits lorsque les coefficients de la cohomologie sont égaux à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et dans la Section 8 lorsque les coefficients de la cohomologie sont égaux à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  où  $p > 2$  est un entier premier.

La Section 9 est faite de figures symbolisant les décompositions cellulaires et simpliciales.

**1.2. Notations.** Dans la suite, le groupe  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sera noté  $\mathbb{Z}_p$ .

En suivant essentiellement les notations de Orlik [11], mais aussi celles de [13], [14],  $M$  est une variété de Seifert décrite par une liste d'invariants de Seifert

$$\{e; (\Upsilon, g); (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}.$$

Ici  $e$  est un entier, le TYPE  $\Upsilon$  sera décrit plus bas,  $g$  est le genre de la surface de base (l'espace des orbites obtenues en identifiant chaque fibre  $S^1$  de  $M$  à un point), et pour chaque  $k$ , les entiers  $a_k, b_k$  sont premiers entre eux avec  $a_k \neq 0$  (si  $b_k = 0$  alors  $a_k = \pm 1$ ).

Comme dans [11], p.74 (et aussi pour d'autres auteurs), nous introduisons une fibre supplémentaire, non-exceptionnelle  $a_0 = 1, b_0 = e$  et utilisons la présentation suivante du groupe fondamental de  $M$  :

$$(1.1) \quad \pi_1(M) = \left\langle \begin{array}{l} q_0, \dots, q_m \\ t_1, \dots, t_{g'} \\ h \end{array} \middle| \begin{array}{l} [q_k, h] \text{ and } q_k^{a_k} h^{b_k}, \quad 0 \leq k \leq m \\ t_j h t_j^{-1} h^{-\varepsilon_j}, \quad 1 \leq j \leq g' \\ q_0 \dots q_m V \end{array} \right\rangle,$$

où les générateurs et  $g', V$  sont décrits ci-dessous.

- Le TYPE  $\Upsilon$  de  $M$  est égal à:
  - $o_1$  si la surface de base et l'espace total sont orientables (alors tous les  $\varepsilon_j$  sont égaux à 1) ;
  - $o_2$  si la surface de base est orientable et l'espace total non-orientable, alors  $g \geq 1$  (forcément tous les  $\varepsilon_j$  sont égaux à  $-1$ ) ;
  - $n_1$  si la surface de base et l'espace total sont non-orientables alors  $g \geq 1$  et de plus tous les  $\varepsilon_j$  sont égaux à 1 ;
  - $n_2$  si la surface de base est non-orientable alors  $g \geq 1$  et l'espace total est orientable (forcément tous les  $\varepsilon_j$  sont égaux à  $-1$ ) ;
  - $n_3$  si la surface de base et l'espace total sont non-orientables avec de plus, tous les  $\varepsilon_j$  égaux à  $-1$  sauf  $\varepsilon_1 = 1$ , et  $g \geq 2$  ;
  - $n_4$  si la surface de base et l'espace total sont non-orientables avec de plus, tous les  $\varepsilon_j$  égaux à  $-1$  sauf  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , et  $g \geq 3$ .
- L'orientabilité de la surface de base et le genre  $g$  déterminent le nombre  $g'$  de générateurs  $t_j$  et le mot  $V$  dans la longue relation de  $\pi_1(M)$  de la façon suivante:
  - quand la surface de base est orientable, i.e.  $\Upsilon = o_i$ ,  $g' = 2g$  et  $V = [t_1, t_2] \dots [t_{2g-1}, t_{2g}]$  ;
  - quand la surface de base est non-orientable, i.e.  $\Upsilon = n_i$ ,  $g' = g$  et  $V = t_1^2 \dots t_g^2$ .
- Le générateur  $h$  correspond à la fibre générique régulière.
- Les générateurs  $q_k$  pour  $0 \leq k \leq m$  correspondent aux (possibles) fibres exceptionnelles.

Dans ce papier nous utiliserons les notations suivantes.

Notations 1. Soit  $M$  une variété de Seifert décrite par une liste d'invariants de Seifert

$$\{e; (\Upsilon, g); (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\},$$

et soit  $p$  un entier premier.

- Notons  $a$  le plus petit commun multiple des  $a_k$ , avec de plus  $a_0 = 1$  et  $b_0 = e$ , alors

$$c = \sum_{k=0}^m b_k(a/a_k).$$

- Le nombre de  $a_k$  divisibles par  $p$  sera noté  $n$ .
  - Quand  $n = 0$ , on suppose que  $b_k$  est divisible par  $p$  si et seulement si  $0 \leq k < r$  ;
  - quand  $n > 0$ , on suppose que  $a_k$  est divisible par  $p$  si et seulement si  $0 \leq k \leq n$ , les indices  $k$  sont réordonnés par  $p$ -valuation décroissante  $v_p(a_k)$ .
- On distingue trois cas :
  - Cas 1,  $n = 0$  et  $c$  est divisible par  $p$  ;
  - Cas 2,  $n = 0$  et  $c$  n'est pas divisible par  $p$  ;
  - Cas 3,  $n > 0$ .

## 2. Les groupes de cohomologie

**2.1. Le complexe cellulaire.** La variété de Seifert  $M$  admet une décomposition cellulaire

en cellules de dimension de 0 à 3 qui est décrite ci-dessous. Voir Figures 1, 2, 3, 4, Section 9.

- une 0-cellule  $\sigma$  ;
- des 1-cellules (d'origine et d'extrémité l'unique 0-cellule)  $t_j, q_k, h$  ;
- des 2-cellules :
  - $\delta$  de bord :
    - $\prod [t_{2i-1}, t_{2i}] \prod q_k$  pour les TYPES  $o_i$  ;  $\prod t_j^2 \prod q_k$  pour les TYPES  $n_i$  ;
  - $\rho_k$  de bords  $[h, q_k]$  qui correspondent à des tores ;
  - $\nu_j$  de bords  $ht_j h^{-\varepsilon_j} t_j^{-1}$  qui correspondent à des tores si  $\varepsilon_j = 1$  et à des bouteilles de Klein si  $\varepsilon_j = -1$  ;
  - $\mu_k$  disques de bords  $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$ , qui est un mot en  $q_k, h$  comportant  $a_k$  fois la lettre  $q_k$  et  $b_k$  fois la lettre  $h$ , mais dans un ordre très particulier qui sera précisé plus loin (Sous-section 4.1) ;
- des 3-cellules :
  - $\epsilon$  dont le bord est pavé par deux exemplaires de  $\delta$  et de chaque  $\nu_j$  et un exemplaire de chaque  $\rho_k$  ;
  - $\zeta_k$  dont le bord est pavé par deux exemplaires de  $\mu_k$  et un exemplaire de  $\rho_k$ . Ce pavage, assez délicat, est lié à une propriété essentielle du mot  $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$ , sera expliqué plus loin.

**2.2. Groupes et générateurs de  $H^*(M, \mathbb{Z}_p)$ .** On note  $\hat{x}$  le dual de  $x$ . Sauf précision, les indices  $j$  sont des entiers vérifiant  $1 \leq j \leq g'$  et sont absents si  $g = 0$ .

**Théorème 2. Pour  $p = 2$ .**

Les groupes de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  sont :

- $H^0(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  et  $H^3(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\{\gamma\}$ .

$H^1(M, \mathbb{Z}_2)$  et  $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$  dépendent des Cas 1,2,3 et non des TYPES :

– Cas 1

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+1} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j, 1 \leq j \leq g'; \alpha\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j]$  et  $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+1} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j, 1 \leq j \leq g'; \beta\}$  où  $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$  et  $\beta = [\hat{\delta}]$ .

– Cas 2

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j]$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j\}$  où  $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ .

– Cas 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+n-1} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j; \alpha_k, 0 < k \leq n-1\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j]$  et  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+n-1} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j; \beta_k\}$  où  $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$  et  $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$  pour  $0 < k$ .

**Pour  $p > 2$ .**

Les groupes de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$  sont :

- $H^0(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$  et  $H^3(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p\{\gamma\}$  pour  $o_1$  et  $n_2$  tandis que  $H^3(M, \mathbb{Z}_p) = 0$  pour  $o_2, n_1, n_3, n_4$ .

$H^1(M, \mathbb{Z}_p)$  et  $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$  dépendent des Cas 1,2,3 et du TYPE :

TYPE  $o_1$  Les résultats sont les mêmes que lorsque  $p = 2$  avec  $g' = 2g$  éventuellement nul.

TYPE  $o_2$

– Cas 1,2

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j]$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta\}$  où  $\varphi_j = [\hat{v}_j + (-1)^j \hat{v}_1]$  pour  $j > 2$  et  $\beta = [\hat{\delta}]$ .

– Cas 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j; \alpha_k\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j]$  et  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$  pour  $0 < k$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$  où  $\varphi_j = [\hat{v}_j + (-1)^j \hat{v}_1]$  pour  $j > 2$  et  $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ .

TYPE  $n_1$

– Cas 1,2

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^g = \mathbb{Z}_p\{\theta_j; \alpha\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$  pour  $j > 1$  et  $\alpha = [\frac{c}{2a}\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$ , la constante  $c$  étant égale à 0 dans le Cas 1 ;
- $H^2 = \mathbb{Z}_p^{g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j\}$  où  $\varphi_j = [\hat{v}_j - \hat{v}_1]$  pour  $j > 1$ .

– Cas 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j; \alpha_k\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$  pour  $j > 1$  et  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g+n-2} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$  où  $\varphi_j = [\hat{v}_j - \hat{v}_1]$  pour  $j > 1$  et  $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$  pour  $0 < k$ .

TYPE  $n_2$

– Cas 1,2,3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-1+n} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j, j > 1; \alpha_k\}$  où  $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$  pour  $j > 1$  et  $\alpha_k = [\hat{q}_k - 1/2\hat{t}_g]$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{n+g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$  où  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$  pour  $j > 1$  et  $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ .

TYPE  $n_3$

– Cas 1,2,3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$  a les mêmes générateurs que pour le TYPE  $n_2$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-2+n} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j; \beta_k\}$  où  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$  pour  $j > 2$  et  $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ .

TYPE  $n_4$

– Cas 1,2,3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$  a les mêmes générateurs que pour le TYPE  $n_2$  ;
- $H^2(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-2+n} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_3; \varphi_j, j > 3; \beta_k\}$  où  $\varphi_3 = [\hat{v}_2 - \hat{v}_1]$ ,  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$  pour  $j > 3$  et  $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ .

Les quatre lemmes suivants constituent la preuve de ce théorème. Ils détaillent les bords des chaînes, les bords des cochaînes et les expressions de  $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$  et  $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$  pour un  $p$  premier quelconque.

De la décomposition cellulaire, on déduit la description suivante des bords des chaînes :

**Lemme 3.** *Bord des chaînes cellulaires*

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= 0, \partial t_j = \partial q_k = \partial h = 0, \partial\rho_k = 0, \\ \partial\delta &= \sum q_k \text{ pour } o_i, \partial\delta = 2 \sum t_j + \sum q_k \text{ pour } n_i, \\ \partial v_j &= 0 \text{ lorsque } \varepsilon_j = 1, \partial v_j = 2h \text{ lorsque } \varepsilon_j = -1, \\ \partial\mu_k &= a_k q_k + b_k h, \end{aligned}$$

$\partial\epsilon = \sum \rho_k$  pour  $o_1$ ,  $\partial\epsilon = \sum \rho_k + 2 \sum (-1)^j v_j$  pour  $o_2$ ,  $\partial\epsilon = \sum \rho_k + 2 \sum_{\epsilon_j=1} v_j$  pour  $n_i$ ,  
 $\partial\zeta_k = -\rho_k$ .

Par dualité, on obtient les bords des cochaînes :

**Lemme 4.** *Bord des cochaînes cellulaires*

$$\begin{aligned} \partial\hat{\sigma} &= 0, \partial\hat{\delta} = \partial\hat{\mu}_k = 0, \partial\hat{\epsilon} = \partial\hat{\zeta}_k = 0, \\ \partial\hat{t}_j &= 0 \text{ pour } o_i, \partial\hat{t}_j = 2\hat{\delta} \text{ pour } n_i, \\ \partial\hat{q}_k &= \hat{\delta} + a_k\hat{\mu}_k, \\ \partial\hat{h} &= \sum b_k\hat{\mu}_k + 2 \sum_{\epsilon_j=-1} \hat{v}_j, \\ \partial\hat{v}_j &= 0 \text{ pour } o_1, n_2, \text{ et pour } n_1, n_3, n_4 \text{ lorsque } \epsilon_j = -1, \\ \partial\hat{v}_j &= 2(-1)^j \hat{\epsilon} \text{ pour } o_2, \partial\hat{v}_j = 2\hat{\epsilon} \text{ pour } n_1, n_3, n_4 \text{ lorsque } \epsilon_j = 1, \\ \partial\hat{\rho}_k &= \hat{\epsilon} - \hat{\zeta}_k. \end{aligned}$$

Quel que soit l'anneau de coefficients  $A$ ,  $H^0(M, A) = A$  est engendré par  $1 := [\hat{\sigma}]$ . Le groupe  $H^3(M, \mathbb{Z}_p)$  est égal à  $A$  pour  $o_1$  et  $n_2$ , et à  $A/2A$  pour  $o_2, n_1, n_3, n_4$ . Il est engendré par  $\gamma := [\hat{\epsilon}] = [\hat{\zeta}_k]$ .

**Lemme 5.** *Présentation du groupe  $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$*

1) *Quelque soit l'anneau de coefficients  $A$ , on a*

$H^1(M, A) = \{x\hat{h} + \sum y_j \hat{t}_j + \sum z_k \hat{q}_k \mid x, y_j, z_k \in A, (*)\}$  où la condition  $(*)$  de cocycle est

$$\forall k, a_k z_k + b_k x = 0,$$

avec en plus, pour  $n_i$ ,  $\sum z_k = 0$  ; pour  $o_i$ ,  $\sum z_k = -2 \sum y_j$  ; et pour  $o_2, n_2, n_3, n_4$ ,  $2x = 0$ .

2) *Si l'anneau  $A = \mathbb{Z}$ , ou  $\mathbb{Z}_p$  avec  $p > 2$  premier, ceci se simplifie en*

pour  $o_2$ ,  $H^1(M, A) = A^{2g} \times \{\sum z_k \hat{q}_k \mid z_k \in A, \forall k, a_k z_k = 0, \sum z_k = 0\}$  ;

pour  $n_2, n_3, n_4$ ,  $H^1(M, A) = \{\sum y_j \hat{t}_j + \sum z_k \hat{q}_k \mid y_j, z_k \in A, \forall k, a_k z_k = 0, 2 \sum y_j + \sum z_k = 0\}$ .

3) *Si l'anneau  $A = \mathbb{Z}_2$ , ceci se simplifie pour tous les TYPES en*

$H^1(M, A) = \{x\hat{h} + \sum y_j \hat{t}_j + \sum z_k \hat{q}_k \mid x, y_j, z_k \in A, \forall k, a_k z_k + b_k x = 0, \sum z_k = 0\}$ .

**Lemme 6.** *Présentation du groupe  $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$*

$H^2 = \{x\hat{\delta} + \sum y_j \hat{v}_j + \sum z_k \hat{\mu}_k \mid x, y_j, z_k \in A, (*)\} / \text{Im}(\partial)$  où la condition  $(*)$  est

vide pour  $o_1, n_2$  ; pour  $o_2$ ,  $2 \sum (-1)^j y_j = 0$  ; pour  $n_1, n_3, n_4$ ,  $2 \sum_{\epsilon_j=1} y_j = 0$ .

De plus  $\text{Im}(\partial)$  est engendré par les  $\hat{\delta} + a_k \hat{\mu}_k$ ,  $\sum b_k \hat{\mu}_k + 2 \sum_{\epsilon_j=-1} \hat{v}_j$ , avec de plus  $2\hat{\delta}$  pour  $n_i$ .

### 3. Les théorèmes principaux

**Théorème 7.** *Pour  $p = 2$ , les seuls cup-produits  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_2)$*

sont :

– Dans le Cas 1 :

- $\theta_i \cup \theta_j$ 
  - Pour les TYPES  $o_i$ , les cup-produits  $\theta_i \cup \theta_j$  sont nuls sauf  $\theta_{2i} \cup \theta_{2i-1} = \beta$  ;
  - Pour les TYPES  $n_i$ , les cup-produits  $\theta_i \cup \theta_j$  sont nuls sauf  $\theta_i \cup \theta_i = \beta$ .
- $\theta_j \cup \alpha$ 
  - Pour tous les TYPES, on a  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$ .
- $\alpha \cup \alpha$ 
  - Pour les TYPES  $o_1$  et  $n_1$ , on a  $\alpha \cup \alpha = c/2\beta$  ;

- Pour les TYPES  $o_2$  et  $n_2$ , on a  $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{1 \leq j} \varphi_j$  ;
- Pour le TYPE  $n_3$ , on a  $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{j>1} \varphi_j$  ;
- Pour le TYPE  $n_4$ , on a  $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{j>2} \varphi_j^2$ .

- Dans le Cas 2 :

- $\theta_i \cup \theta_j$   
- Pour tous les TYPES,  $\theta_i \cup \theta_j = 0$ .

- Dans le Cas 3 :

- $\theta_i \cup \theta_j$   
- Pour tous les TYPES, on a  $\theta_i \cup \theta_j = 0$ .
- $\theta_j \cup \alpha_k$   
- Pour tous les TYPES, on a  $\theta_j \cup \alpha_k = 0$ .
- $\alpha_k \cup \alpha_i$   
- Pour tous les TYPES, on a  $\alpha_k \cup \alpha_i = \frac{a_0}{2} \sum_{0 < \ell \leq n-1} \beta_\ell + \delta_{k,\ell} \frac{a_k}{2} \beta_k$ .

**Théorème 8.** Pour  $p = 2$ , les seuls cup-produits  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_2)$  sont :

- Dans les trois Cas :

- $\theta_i \cup \varphi_j$   
- Pour les TYPES  $o_i$ , les  $\theta_i \cup \varphi_j$  non nuls sont :  
si  $j$  est impair  $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$ , si  $j$  est pair  $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$  ;  
- Pour les TYPES  $n_i$ , on a  $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$  et 0 sinon.

- Dans le Cas 1 :

- $\alpha \cup \varphi_j$   
- Pour les TYPES  $o_1$  et  $n_1$ ,  $\alpha \cup \varphi_j = 0$  ;  
- Pour les TYPES  $o_2$  et  $n_2$ ,  $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$  ;  
- Pour le TYPE  $n_3$ ,  $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$  si  $j \neq 1$  et 0 sinon ;  
- Pour le TYPE  $n_4$ ,  $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$  si  $j \neq 1, 2$  et 0 sinon.
- $\theta_i \cup \beta$   
- Pour tous les TYPES,  $\theta_i \cup \beta = 0$ .
- $\alpha \cup \beta$   
- Pour tous les TYPES,  $\alpha \cup \beta = \gamma$ .

- Dans le Cas 3 :

- $\alpha_k \cup \varphi_j$   
- Pour tous les TYPES,  $\alpha_k \cup \varphi_j = 0$ .
- $\alpha_k \cup \beta_k$   
- Pour tous les TYPES,  $\alpha_k \cup \beta_k = \gamma$  et 0 sinon.
- $\theta_i \cup \beta_j$   
- Pour tous les TYPES,  $\theta_i \cup \beta_k = 0$ .

**Théorème 9.** Pour  $p > 2$ ,

- Dans le Cas 1, les seuls cup-produits  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$  sont :

---

<sup>2</sup>Dans [5], Theorem 1.3 (i), le coefficient de  $\beta$  devrait être remplacé par  $c/2$ .

- $\theta_i \cup \theta_j$ 
    - Pour les TYPES  $o_i$ , les cup-produits  $\theta_i \cup \theta_j$  sont nuls sauf  $\theta_{2i-1} \cup \theta_{2i} = \beta$  ;
    - Pour les TYPES  $n_i$ , les cup-produits  $\theta_i \cup \theta_j$  sont nuls.
  - $\theta_j \cup \alpha$ 
    - Pour le TYPE  $o_1$ , on a  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$  ;
    - Pour le TYPE  $n_1$ , on a  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j, j > 1$ .
  - $\alpha \cup \alpha$ 
    - Pour les TYPES  $o_1$  et  $n_1$ , les cup-produits  $\alpha \cup \alpha$  sont nuls.
- Dans le Cas 2, les seuls cup-produits  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$  sont :
- $\theta_i \cup \theta_j$ 
    - Pour le TYPE  $o_2$ , les cup-produits  $\theta_i \cup \theta_j$  sont nuls sauf  $\theta_{2i-1} \cup \theta_{2i} = \beta$  ;
    - Pour tous les autres TYPES,  $\theta_i \cup \theta_j = 0$ .
  - $\theta_j \cup \alpha$ 
    - Pour le TYPE  $n_1$ , on a  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j, j > 1$ .
- Dans le Cas 3, les seuls cup-produits  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$  sont :
- $\theta_i \cup \theta_j$ 
    - Pour tous les TYPES, on a  $\theta_i \cup \theta_j = 0$ .
  - $\theta_j \cup \alpha_k$ 
    - Pour tous les TYPES, on a  $\theta_j \cup \alpha_k = 0$ .
  - $\alpha_k \cup \alpha_i$ 
    - Pour tous les TYPES, on a  $\alpha_k \cup \alpha_i = 0$  sont nuls.

**Théorème 10.** Pour  $p > 2$ , les seuls cup-produits  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_p)$  sont :

- Dans les trois Cas :

- $\theta_i \cup \varphi_j$ 
  - Pour le TYPE  $o_1$ , on a pour  $j$  impair  $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$  et pour  $j$  pair  $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$  ;
  - Pour le TYPE  $n_2$ , on a  $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ , et 0 sinon.

- Dans le Cas 1, pour tous les TYPES :

- $\theta_i \cup \beta = \mathbf{0}$
- $\alpha \cup \beta = \gamma$
- $\alpha \cup \varphi_j = \mathbf{0}$

- Dans le Cas 3 :

- $\alpha_i \cup \beta_k$ 
  - Pour les TYPES  $o_1$  et  $n_2$ , on a  $\alpha_i \cup \beta_k = 0$  sauf si  $i = k$  et dans cette situation on a  $\alpha_k \cup \beta_k = b_k^{-1} \gamma$ .
- $\alpha_k \cup \varphi_j$ 
  - Pour le TYPE  $o_1$ , on a  $\alpha_k \cup \varphi_j = 0$ .
- $\alpha_k \cup \varphi_j$ 
  - Pour le TYPE  $n_2$ , pour tout indice  $k$ , on a  $\alpha_k \cup \varphi_g = -\frac{1}{2} \gamma$ .

#### 4. Décomposition $\Delta$ -simpliciale

Avant de décrire le découpage  $\Delta$ -simplicial, nous donnons la définition et les propriétés du mot  $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$  qui permet de paver la sphère bordant  $\zeta_k$  comme décrit dans 2.1.

**4.1. Définition et propriétés de  $w_{\alpha, \beta}$ .** Le cas  $a_k = 1, b_k \leq 0$  sera très simple, mais dans le cas général  $a_k, b_k > 0$ , pour pouvoir paver comme évoqué dans 2.1 la sphère bordant  $\zeta_k$ , le bord  $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$  de  $\mu_k$  doit être un mot tel qu'en effectuant sur ce mot une certaine permutation circulaire et en remplaçant un certain  $hq_k$  par  $q_k h$ , on retombe sur le mot de départ. C'est cette propriété qui permet le pavage de la sphère par deux exemplaires de  $\mu_k$  et un exemplaire de  $\rho_k$  pour former le bord de la 3-cellule  $\zeta_k$ .

**DÉFINITION 11.** Le mot  $w_{\alpha, \beta}$  (pour  $\alpha, \beta$  premiers entre eux) est défini récursivement par :  
 $w_{1,0}(a, t) = a, w_{0,1}(a, t) = t, w_{1,1}(a, t) = at,$   
 si  $0 < \alpha < \beta, w_{\alpha, \alpha+\beta}(a, t) = w_{\alpha, \beta}(at, t),$   
 si  $0 < \beta < \alpha, w_{\alpha+\beta, \beta}(a, t) = w_{\alpha, \beta}(a, at),$  si bien que le mot  $w_{\alpha, \beta}(a, t)$  contient  $\alpha$  fois la lettre  $a$  et  $\beta$  fois la lettre  $t$ .

Par une preuve similaire à celle des articles [12], [10], [7], [9], on montre que ces mots  $w_{\alpha, \beta}$  vérifient les relations suivantes :

**Proposition 12.** Soient  $\alpha, \beta, u, v$  entiers tels que

$$\alpha u - \beta v = 1, \quad 0 < u \leq \beta, \quad 0 \leq v < \alpha,$$

alors

$$w_{\alpha, \beta}(a, t) = w_{\alpha-v, \beta-u}(a, t)w_{v, u}(a, t) = (w_{v, u}(a, t)t^{-1})at(a^{-1}w_{\alpha-v, \beta-u}(a, t)).$$

**Notations 13.** Dans la suite, nous appliquerons ce théorème à  $\alpha = a_k, \beta = b_k$  et noterons  $u_k, v_k$  les entiers  $u, v$  correspondants. En notant  $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$  sous la forme  $x_{k,1} \dots x_{k,z_k}$  avec les  $x_{k,i}$  égaux à  $q_k$  (pour  $a_k$  d'entre eux dont le premier) ou  $h$  (pour  $b_k$  d'entre eux dont le dernier) (donc  $z_k = a_k + b_k$ ), le théorème exprime que pour  $w_k = z_k - u_k - v_k + 1$ , le mot  $w_{a_k, b_k}(q_k, h)$  est aussi égal à  $x_{k,w_k} \dots x_{k,z_k-1} q_k h x_{k,2} \dots x_{k,w_k-1}$ , et que de plus, le morceau  $x_{k,w_k} \dots x_{k,z_k}$  de ce mot contient  $v_k$  fois  $q_k$  et  $u_k$  fois  $h$ .

Dans le cas  $b_k \leq 0$  (donc  $a_k = 1$ ), nous poserons  $u_k = 1, v_k = 0, w_k = z_k = 1 + |b_k|$ , et  $x_{k,1} = q_k, x_{k,\ell} = h$  pour  $2 \leq \ell \leq z_k$ .

**4.2. Découpage  $\Delta$ -simplicial.** Transformons ce complexe cellulaire en complexe  $\Delta$ -simplicial en rajoutant :

- un centre et des rayons aux 2-cellules  $\delta$  et  $\mu_k$ , pour remplacer chacune par une juxtaposition de triangles ;
- une "diagonale" aux  $v_j, \rho_k$ , pour remplacer chacun par deux triangles ;
- pour chacune des 3-cellules  $\epsilon, \zeta_k$ , dont le bord est une sphère pavée par les 2-simplexes déjà construits : un centre, des rayons joignant ce centre aux sommets marqués sur la sphère ; des triangles joignant ce centre aux arêtes marquées sur la sphère, de manière à remplacer chaque 3-cellule par une juxtaposition de tétraèdres.

Plus précisément, on remplace la décomposition cellulaire ci-dessus par la décomposition  $\Delta$ -simpliciale suivante.

**1) Le 0-simplexe  $\sigma$  et les 1-simplexes  $t_j, q_k, h,$ .**

**2) Découpage des  $\rho_k$ , Figure 5 :**

- des 1-simplexes  $g_k$  (d'origine et d'extrémité  $\sigma$ ) et des 2-simplexes  $\rho_{k,1}, \rho_{k,2}$ , (de faces respectives  $(h, g_k, q_k), (q_k, g_k, h)$ ).

**3) Découpage des  $v_j$ , Figures 6, 7, 8 :**

- des 1-simplexes  $f_j$  (d'origine et d'extrémité  $\sigma$ ) et des 2-simplexes  $v_{j,2}$  (de faces  $(t_j, f_j, h)$ ) et  $v_{j,1}$  (de faces  $(h, f_j, t_j)$  si  $\varepsilon_j = 1$ ,  $(h, t_j, f_j)$  si  $\varepsilon_j = -1$ ).

**4) Découpage de  $\delta$ , Figures 9, 10 :**

Dans le découpage de  $\delta, \epsilon$ , il faudra distinguer les TYPES  $o_1, o_2, n_1$  à  $n_4$  :

- Un 0-simplexe  $a$ , des 1-simplexes  $e_0, \dots, e_{2g'+m}$  (d'origine  $a$  et d'extrémité  $\sigma$ ). On rappelle que le symbole  $g'$  est égal à  $2g$  pour le  $\Upsilon = o_i$ , et à  $g$  pour le  $\Upsilon = n_i$ .
- des 2-simplexes  $\delta_0, \dots, \delta_{2g'+m}$ , plus précisément :
  - pour les TYPES  $o_1, o_2$  :  $\delta_i$ , de faces, respectivement  $(t_1, e_1, e_0), (t_2, e_2, e_1), (t_1, e_2, e_3), (t_2, e_3, e_4), \dots, (q_0, e_{4g+1}, e_{4g}), \dots, (q_m, e_0, e_{4g+m})$ ;
  - pour les TYPES  $n_1$  à  $n_4$  :  $(t_1, e_1, e_0), (t_1, e_2, e_1), \dots, (q_0, e_{2g+1}, e_{2g}), \dots, (q_m, e_0, e_{2g+m})$ .

**5) Découpage de chaque  $\mu_k$ , Figure 11, 12 :**

Dans le découpage de  $\mu_k, \zeta_k$  il faudra distinguer le cas particulier  $b_k \leq 0$  (et  $a_k = 1$ ) du cas général :

- Un 0-simplexe  $c_k$ , des 1-simplexes  $p_{k,1}, \dots, p_{k,\zeta_k}$  (d'origine  $c_k$  et d'extrémité  $\sigma$ ) ;
- des 2-simplexes  $\mu_{k,1}, \dots, \mu_{k,\zeta_k}$ , de faces :
  - si  $b_k > 0$  :  $(x_{k,1}, p_{k,2}, p_{k,1}), \dots, (x_{k,\zeta_k}, p_{k,1}, p_{k,\zeta_k})$
  - si  $b_k < 0$  :  $(q_k, p_{k,2}, p_{k,1}), (h, p_{k,2}, p_{k,3}), \dots, (h, p_{k,\zeta_k}, p_{k,1})$
  - si  $b_k = 0$  :  $(q_k, p_{k,1}, p_{k,1})$ .

**6) Découpage de  $\epsilon$ , Figures 13 à 17 :**

- un 0-simplexe  $b$  ;
- des 1-simplexes  $A^+, A^-$  (d'origine  $b$ , d'extrémité  $a$ ) ;
- des 1-simplexes  $S_0^+, \dots, S_{2g'+m}^+, S_0^-, \dots, S_{2g'+m}^-$  (d'origine  $b$  et d'extrémité  $\sigma$ ), et des 2-simplexes  $E_0^+, \dots, E_{2g'+m}^+, E_0^-, \dots, E_{2g'+m}^-$  avec  $E_\ell^\pm$  de faces  $(e_\ell, S_\ell^\pm, A^\pm)$  ;
- des 2-simplexes  $T_0^+, \dots, T_{2g'+m}^+, T_0^-, \dots, T_{2g'+m}^-$ , plus précisément :
  - pour les TYPES  $o_1, o_2$  :  $T_0^\pm, \dots, T_{4g+m}^\pm$  de faces  $(t_1, S_1^\pm, S_0^\pm), (t_2, S_2^\pm, S_1^\pm), (t_1, S_2^\pm, S_3^\pm), (t_2, S_3^\pm, S_4^\pm), \dots, (q_m, S_0^\pm, S_{4g+m}^\pm)$  ;
  - pour les TYPES  $n_1$  à  $n_4$  :  $T_0^\pm, \dots, T_{2g+m}^\pm$  de faces  $(t_1, S_1^\pm, S_0^\pm), (t_1, S_2^\pm, S_1^\pm), \dots, (q_m, S_0^\pm, S_{2g+m}^\pm)$ .

Notations 14. Ici la notation  $T_0^\pm$  de faces  $(t_1, S_1^\pm, S_0^\pm)$  signifie que les faces de  $T_0^+$  sont  $(t_1, S_1^+, S_0^+)$  et celles de  $T_0^-$  sont  $(t_1, S_1^-, S_0^-)$  etc.

• des 2-simplexes  $H_0, \dots, H_{2g'+m}$  :

les faces de  $H_\ell$  étant en général  $(h, S_\ell^+, S_\ell^-)$ , mais étant  $(h, S_\ell^-, S_\ell^+)$  si  $\ell = 2j - 1 < 2g'$  avec  $\varepsilon_j = -1$ , i.e. dans les TYPES suivants : TYPE  $o_2$ ,  $\ell$  impair  $< 4g$  ; TYPE  $n_2$ ,  $\ell$  impair  $< 2g$  ; TYPE  $n_3$ ,  $\ell$  impair,  $3 \leq \ell < 2g$  ; TYPE  $n_4$ ,  $\ell$  impair,  $5 \leq \ell < 2g$  ;

• des 2-simplexes  $F_0, \dots, F_{2g'+m}$ , de faces :

- pour le TYPE  $o_1$  :  $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_2, S_2^+, S_1^-), (f_1, S_2^+, S_3^-), (f_2, S_3^+, S_4^-), \dots, (g_m, S_0^+, S_{4g+m}^-)$  ;  
- pour le TYPE  $o_2$  :  $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_2, S_2^-, S_1^+), (f_1, S_2^-, S_3^+), (f_2, S_3^+, S_4^-), \dots, (g_m, S_0^+, S_{4g+m}^-)$  ;  
- pour le TYPE  $n_1$  :  $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$  ;  
- pour le TYPE  $n_2$  :  $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^-, S_1^+), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$  ;  
- pour le TYPE  $n_3$  :  $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), (f_2, S_3^+, S_2^-), (f_2, S_4^-, S_3^+), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$  ;  
- pour le TYPE  $n_4$  :  $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), (f_2, S_3^+, S_2^-), (f_2, S_4^+, S_3^-), (f_3, S_5^+, S_4^-), (f_3, S_6^-, S_5^+), \dots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$  ;

• des 3-simplexes  $D_0^+, \dots, D_{2g'+m}^+, D_0^-, \dots, D_{2g'+m}^-$ , plus précisément :

- pour les TYPES  $o_1, o_2$  :  $D_0^\pm, \dots, D_{4g+m}^\pm$  de faces  $(\delta_0, T_0^\pm, E_1^\pm, E_0^\pm), (\delta_1, T_1^\pm, E_2^\pm, E_1^\pm), (\delta_2, T_2^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm), (\delta_3, T_3^\pm, E_3^\pm, E_4^\pm), \dots, (\delta_{4g+m}, T_{4g+m}^\pm, E_0^\pm, E_{4g+m}^\pm)$  ;  
- pour les TYPES  $n_1$  à  $n_4$  :  $D_0^\pm, \dots, D_{2g+m}^\pm$  de faces  $(\delta_0, T_0^\pm, E_1^\pm, E_0^\pm), \dots, (\delta_{2g+m}, T_{2g+m}^\pm, E_0^\pm, E_{2g+m}^\pm)$  ;

• des 3-simplexes  $N_{j,1}, N'_{j,1}, N_{j,2}, N'_{j,2}$  de faces,

- pour le TYPE  $o_1$  :

si  $j$  impair,  $(v_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-2}, T_{2j-2}^-), (v_{j,1}, H_{2j}, F_{2j}, T_{2j}^-),$

$(v_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (v_{j,2}, T_{2j}^+, F_{2j}, H_{2j+1})$

si  $j$  pair,  $(v_{j,1}, H_{2j-2}, F_{2j-3}, T_{2j-3}^-), (v_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-1}, T_{2j-1}^-),$

$(v_{j,2}, T_{2j-3}^+, F_{2j-3}, H_{2j-3}), (v_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j})$  ;

- pour le TYPE  $o_2$  :

si  $j$  impair,  $(v_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-2}^-, F_{2j-2}), (v_{j,1}, H_{2j}, T_{2j}^+, F_{2j}),$

$(v_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (v_{j,2}, T_{2j}^-, F_{2j}, H_{2j+1}),$

si  $j$  pair,  $(v_{j,1}, H_{2j-2}, T_{2j-3}^+, F_{2j-3}), (v_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-1}^-, F_{2j-1}),$

$(v_{j,2}, T_{2j-3}^-, F_{2j-3}, H_{2j-3}), (v_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j})$  ;

- pour les TYPES  $n_1$  à  $n_4$  :

si  $\varepsilon_j = 1$ ,  $(v_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-2}, T_{2j-2}^-), (v_{j,1}, H_{2j}, F_{2j-1}, T_{2j-1}^-),$

$(v_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (v_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j-1})$  ;

si  $\varepsilon_j = -1$ ,  $(v_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-2}^-, F_{2j-2}), (v_{j,1}, H_{2j}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}),$

$(v_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (v_{j,2}, T_{2j-1}^-, F_{2j-1}, H_{2j-1})$  ;

• des 3-simplexes  $R_{k,1}, R_{k,2}$ ,

de faces  $(\rho_{k,1}, H_{2g'+k+1}, F_{2g'+k}, T_{2g'+k}^-), (\rho_{k,2}, T_{2g'+k}^+, F_{2g'+k}, H_{2g'+k})$

(avec par convention  $H_{2g'+m+1} = H_0$ ).

### 7) Découpage de chaque $\zeta_k$ , Figures 18, 19, 20 :

- un 0-simplexe  $d_k$  ;
- des 1-simplexes  $C_k^+, C_k^-$  (d'origine  $d_k$  et d'extrémité  $c_k$ ) et  $S_{k,0}, \dots, S_{k,z_k}$  (d'origine  $d_k$  et d'extrémité  $\sigma$ ) ;
- des 2-simplexes  $P_{k,1}^-, \dots, P_{k,z_k}^-$  de faces  $(p_{k,1}, S_{k,1}, C_k^-), \dots, (p_{k,z_k}, S_{k,z_k}, C_k^-)$  ;
- des 2-simplexes  $P_{k,1}^+, \dots, P_{k,z_k}^+$  de faces
  - si  $b_k > 0$ ,  $(p_{k,1}, S_{k,w_k}, C_k^+), \dots, (p_{k,z_k-w_k+1}, S_{k,z_k}, C_k^+),$   
 $(p_{k,z_k-w_k+2}, S_{k,0}, C_k^+), (p_{k,z_k-w_k+3}, S_{k,2}, C_k^+), \dots, (p_{k,z_k}, S_{k,w_k-1}, C_k^+)$
  - si  $b_k < 0$ ,  $(p_{k,1}, S_{k,0}, C_k^+), (p_{k,2}, S_{k,3}, C_k^+), \dots, (p_{k,z_k}, S_{k,1}, C_k^+)$
  - si  $b_k = 0$ ,  $(p_{k,1}, S_{k,0}, C_k^+)$  ;
- des 2-simplexes  $X_{k,1}, \dots, X_{k,z_k}$ , de faces
  - si  $b_k > 0$ ,  $(x_{k,1}, S_{k,2}, S_{k,1}), \dots, (x_{k,z_k}, S_{k,1}, S_{k,z_k}),$
  - si  $b_k < 0$ ,  $(q_k, S_{k,2}, S_{k,1}), (h, S_{k,2}, S_{k,3}), \dots, (h, S_{k,z_k}, S_{k,1}),$
  - si  $b_k = 0$ ,  $(q_k, S_{k,1}, S_{k,1})$  ;
- des 2-simplexes  $Q_k, H'_k, G_k$  de faces
  - si  $b_k > 0$ ,  $(q_k, S_{k,0}, S_{k,z_k}), (h, S_{k,2}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,2}, S_{k,z_k}),$
  - si  $b_k < 0$ ,  $(q_k, S_{k,3}, S_{k,0}), (h, S_{k,1}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,2}, S_{k,0}),$
  - si  $b_k = 0$ ,  $(q_k, S_{k,0}, S_{k,0}), (h, S_{k,1}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,1}, S_{k,0})$  ;
- des 3-simplexes  $M_{k,1}^-, \dots, M_{k,z_k}^-$ , de faces
  - si  $b_k > 0$ ,  $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,2}^-, P_{k,1}^-), \dots, (\mu_{k,z_k}, X_{k,z_k}, P_{k,1}^-, P_{k,z_k}^-),$
  - si  $b_k < 0$ ,  $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,2}^-, P_{k,1}^-), (\mu_{k,2}, X_{k,2}, P_{k,2}^-, P_{k,3}^-), \dots,$   
 $(\mu_{k,z_k}, X_{k,z_k}, P_{k,z_k}^-, P_{k,1}^-),$
  - si  $b_k = 0$ ,  $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,1}^-, P_{k,1}^-)$  ;
- des 3-simplexes  $M_{k,1}^+, \dots, M_{k,z_k}^+$  de faces
  - si  $b_k > 0$ ,  $(\mu_{k,1}, X_{k,w_k}, P_{k,2}^+, P_{k,1}^+), \dots, (\mu_{k,z_k-w_k+1}, Q_k, P_{k,z_k-w_k+2}^+, P_{k,z_k-w_k+1}^+),$   
 $(\mu_{k,z_k-w_k+2}, H'_k, P_{k,z_k-w_k+3}^+, P_{k,z_k-w_k+2}^+), \dots, (\mu_{k,z_k}, X_{k,w_k-1}, P_{k,1}^+, P_{k,z_k}^+),$
  - si  $b_k < 0$ ,  $(\mu_{k,1}, Q_k, P_{k,2}^+, P_{k,1}^+), (\mu_{k,2}, X_{k,3}, P_{k,2}^+, P_{k,3}^+), \dots,$   
 $(\mu_{k,z_k-1}, X_{k,z_k}, P_{k,z_k-1}^+, P_{k,z_k}^+), (\mu_{k,z_k}, H'_k, P_{k,z_k}^+, P_{k,1}^+),$
  - si  $b_k = 0$ ,  $(\mu_{k,1}, Q_k, P_{k,1}^+, P_{k,1}^+)$  ;
- des 3-simplexes  $R'_{k,1}, R'_{k,2}$  de faces
  - si  $b_k > 0$ ,  $(\rho_{k,1}, H'_k, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, X_{k,z_k}),$
  - si  $b_k < 0$ ,  $(\rho_{k,1}, X_{k,2}, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, H'_k),$
  - si  $b_k = 0$ ,  $(\rho_{k,1}, H'_k, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, H'_k).$

### 5. Morphisme des cellules vers les $\Delta$ -simplexes

DÉFINITION 15. On note  $T$  l'application définie sur les générateurs du complexe des chaînes cellulaires vers ceux des chaînes  $\Delta$ -simpliciales par :

- $T$  envoie les 0- et 1-cellules  $\sigma$  et  $t_j, q_k, h$  sur les 0- et 1- $\Delta$ -simplexes du même nom,

- $T(\rho_k) = \rho_{k,1} - \rho_{k,2}$ ,
- $T(v_j) = v_{j,1} - \varepsilon_j v_{j,2}$ ,
- $T(\mu_k)$ ,  $1 \leq \ell \leq z_k$  (voir Sous-section 4.1),
  - si  $b_k \geq 0$  :  $T(\mu_k) = \sum \mu_{k,\ell}$ ,
  - si  $b_k \leq 0$  :  $T(\mu_k) = \mu_{k,1} - \sum_{\ell>1} \mu_{k,\ell}$ ,
- $T(\delta)$ 
  - pour les TYPES  $o_i$  :  $T(\delta) = \sum_{i=0}^{g-1} (\delta_{4i} + \delta_{4i+1} - \delta_{4i+2} - \delta_{4i+3}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} \delta_\ell$ ,
  - pour les TYPES  $n_i$  :  $T(\delta) = \sum \delta_\ell$ ,
- $T(\epsilon)$ , en notant  $D'_\ell := D_\ell^+ - D_\ell^-$ ,
  - pour le TYPE  $o_1$  :  $T(\epsilon) = \sum_{k=0}^m (R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{g-1} (D'_{4i} + D'_{4i+1} - D'_{4i+2} - D'_{4i+3}) + \sum (N_{j,1} - N_{j,2} - N'_{j,1} + N'_{j,2})$ ,
  - pour le TYPE  $o_2$  :  $T(\epsilon) = \sum_{k=0}^m (R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{g-1} (D'_{4i} + D'_{4i+1} - D'_{4i+2} - D'_{4i+3}) + \sum (-1)^j (N_{j,1} + N_{j,2} + N'_{j,1} + N'_{j,2})$ ,
  - pour les TYPES  $n_i$  :  $T(\epsilon) = \sum_{k=0}^m (R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=2g}^{2g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{2g-1} D'_j + \sum_{\varepsilon_j=1} (N_{j,1} - N_{j,2} + N'_{j,1} - N'_{j,2}) + \sum_{\varepsilon_j=-1} (-N_{j,1} - N_{j,2} + N'_{j,1} + N'_{j,2})$ ,
- $T(\zeta_k)$ , en notant  $M'_{k,\ell} := M_{k,\ell}^+ - M_{k,\ell}^-$ ,
  - si  $b_k \geq 0$  :  $T(\zeta_k) = -R'_{k,1} + R'_{k,2} + \sum M'_{k,\ell}$ ,
  - si  $b_k \leq 0$  :  $T(\zeta_k) = -R'_{k,1} + R'_{k,2} + M'_{k,1} - \sum_{\ell>1} M'_{k,\ell}$ .

**Proposition 16.** *L'application  $T$  définie ci-dessus est un quasi-isomorphisme du complexe des chaînes cellulaires vers celui des chaînes  $\Delta$ -simpliciales.*

*On en déduit un quasi-isomorphisme  $T^t$ , du complexe des cochaînes  $\Delta$ -simpliciales vers celui des cochaînes cellulaires :  $(T^t(f))(s) := f(T(s))$ .*

## 6. Relevé des cocycles cellulaires en cocycles $\Delta$ -simpliciaux

**6.1. Bord du complexe des cochaînes  $\Delta$ -simpliciales.** Pour chaque générateur  $\xi = [\hat{\xi}]$ , le but des deux sections suivantes est de *choisir* un relevé de  $T^t$ , noté  $R(\hat{\xi})$ , i.e. tel que  $T^t R(\hat{\xi}) = \hat{\xi}$  avec la propriété supplémentaire d'être un cocycle (et pas seulement une cochaîne).

Pour alléger la présentation, on n'écrira (en commençant à regrouper) que les bords qui seront utiles dans la partie suivante pour expliciter des représentants des générateurs.

Le bord est nul sur toutes les 3-cochaînes, et le bord de la 0-cochaîne  $\hat{\sigma} + \hat{a} + \hat{b} + \sum \hat{c}_k + \sum \hat{d}_k$  est nul.

Posons  $U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}_\ell^\pm$ . Ici et dans la suite cette notation est à comprendre de la façon suivante :  $U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}_\ell^+ + \hat{T}_\ell^-$ .

### Bords des 1-cochaînes $\Delta$ -simpliciales :

**Lemme 17.** *Pour les TYPES  $o_1, o_2$*

—  $\partial \hat{t}_j = \varepsilon_j \hat{v}_{j,1} + \hat{v}_{j,2} + \hat{T}_{2j-2}^\pm + \hat{T}_{2j}^\pm + \hat{\delta}_{2j-2} + \hat{\delta}_{2j}$  si  $j$  impair, et  $\varepsilon_j \hat{v}_{j,1} + \hat{v}_{j,2} + \hat{T}_{2j-3}^\pm + \hat{T}_{2j-1}^\pm + \hat{\delta}_{2j-3} + \hat{\delta}_{2j-1}$  si  $j$  pair

—  $\partial \hat{f}_j = -\varepsilon_j \hat{v}_{j,1} - \hat{v}_{j,2} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{F}_{2j}$  si  $j$  impair,  $\hat{F}_{2j-3} + \hat{F}_{2j-1}$  si  $j$  pair

—  $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_\ell + U_{\ell-2}$  avec  $\ell = 2j$  si  $j$  impair et  $\ell = 2j - 1$  si  $j$  pair

Pour les TYPES  $n_1$  à  $n_4$

$$\begin{aligned} -\partial \hat{t}_j &= \varepsilon_j \hat{v}_{j,1} + \hat{v}_{j,2} + \hat{T}_{2j-2}^\pm + \hat{T}_{2j-1}^\pm + \hat{\delta}_{2j-2} + \hat{\delta}_{2j-1} \\ -\partial \hat{f}_j &= -\varepsilon_j \hat{v}_{j,1} - \hat{v}_{j,2} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{F}_{2j-1} \end{aligned}$$

Pour les TYPES  $o_1, o_2$  et  $n_1$  à  $n_4$

$$\begin{aligned} -\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k) &= \sum(\hat{H}_\ell + \hat{F}_\ell) + \sum_k(\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i})) \\ -\partial \hat{q}_k &= \hat{\rho}_{k,1} + \hat{\rho}_{k,2} + \hat{\delta}_{2g'+k} + \hat{T}_{2g'+k}^\pm + \sum_{x_{k,i}=q_k}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}) + \hat{Q}_k \\ -\partial \hat{g}_k &= -\hat{\rho}_{k,1} - \hat{\rho}_{k,2} + \hat{F}_{2g'+k} + \hat{G}_k \\ -\partial \hat{\rho}_{k,\ell} &= \hat{P}_{k,\ell}^\pm + \hat{\mu}_{k,\ell} - \hat{\mu}_{k,\ell-1} \text{ si } \ell > 1 \text{ et si } b_k > 0 \\ -\partial \hat{\rho}_{k,\ell} &= \hat{P}_{k,\ell}^\pm - \hat{\mu}_{k,\ell} + \hat{\mu}_{k,\ell-1} \text{ si } \ell > 2 \text{ et si } b_k < 0 \\ -\partial \hat{\rho}_{k,2} &= \hat{P}_{k,2}^\pm - \hat{\mu}_{k,2} - \hat{\mu}_{k,1} \\ -\partial(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0) &= (\hat{T}_0^\pm + \hat{H}_0 + \hat{F}_0) - (\hat{T}_{2g'+m}^\pm + \hat{H}_{2g'+m} + \hat{F}_{2g'+m}). \text{ Le symbole } g' \text{ est défini dans} \\ &\text{Notation 1} \end{aligned}$$

Pour les TYPES  $o_i$  lorsque  $1 < \ell \leq 4g$  et  $\ell = 2$  ou  $3 \pmod{4}$

$$-\partial(\hat{S}_\ell^\pm + \hat{S}_{\ell-1}^\pm + \hat{e}_\ell + \hat{e}_{\ell-1}) = -U_\ell - U_{\ell-2}$$

Pour les TYPES  $n_i$  lorsque  $1 < \ell \leq 2g'$ , et pour  $o_i$  et  $n_i$  lorsque  $2g' < \ell \leq 2g' + m$ ,

$$-\partial(\hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_\ell) = U_\ell - U_{\ell-1}$$

Pour les TYPES  $o_1$  et  $n_1$  (et pour tous les TYPES si  $p = 2$ )

$$\begin{aligned} -\partial(\hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+) &= -\sum(\hat{H}_\ell + \hat{F}_\ell) \\ -\partial \hat{C}_k^+ &= \sum \hat{P}_{k,\ell}^+ \\ -\text{Bord des } \hat{S}_{k,-} & \\ -\text{si } b_k > 0 & \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,0} = -\hat{Q}_k + \hat{H}'_k - \hat{P}_{k,z_k-w_k+2}^+ \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,1} = -\hat{X}_{k,z_k} + \hat{X}_{k,1} - \hat{P}_{k,1}^- \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,2} = -\hat{H}'_k - \hat{G}_k - \hat{X}_{k,1} + \hat{X}_{k,2} - \hat{P}_{k,2}^- - \hat{P}_{k,z_k-w_k+3}^+ \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,\ell} = -\hat{X}_{k,\ell-1} + \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}_{k,\ell}^- - \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+ \text{ si } 2 < \ell < w_k \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,\ell} = -\hat{X}_{k,\ell-1} + \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}_{k,\ell}^- - \hat{P}_{k,\ell-w_k+1}^+ \text{ si } w_k \leq \ell < z_k \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,z_k} = \hat{Q}_k + \hat{G}_k - \hat{X}_{k,z_k-1} + \hat{X}_{k,z_k} - \hat{P}_{k,z_k}^- - \hat{P}_{k,z_k-w_k+1}^+ \\ -\text{si } b_k < 0 & \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,0} = \hat{Q}_k + \hat{H}'_k + \hat{G}_k - \hat{P}_{k,1}^+ \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,1} = -\hat{H}'_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{X}_{k,z_k} - \hat{P}_{k,1}^- - \hat{P}_{k,z}^+ \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,2} = -\hat{G}_k - \hat{X}_{k,1} - \hat{X}_{k,2} - \hat{P}_{k,2}^- \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,3} = -\hat{Q}_k + \hat{X}_{k,2} - \hat{X}_{k,3} - \hat{P}_{k,3}^- - \hat{P}_{k,2}^+ \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,\ell} = \hat{X}_{k,\ell-1} - \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}_{k,\ell}^- - \hat{P}_{k,\ell-1}^+ \text{ si } \ell > 3 \\ -\text{si } b_k = 0 & \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,0} = \hat{H}'_k + \hat{G}_k - \hat{P}_{k,1}^+ \\ & \quad -\partial \hat{S}_{k,1} = -\hat{H}'_k - \hat{G}_k - \hat{P}_{k,1}^- \end{aligned}$$

Le bord de la 1-cellule  $Z_k$  est donné dans le lemme suivant.

**Lemme 18.** Définissons  $Y_k, Z_k, V_k$  par :

- si  $b_k > 0$ 
  - $Y_k = \hat{H}'_k + \hat{G}_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1} - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+$
  - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k - v_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}$
  - $V_k = u_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}$
- si  $b_k \leq 0$  (donc  $a_k = u_k = 1$  et  $v_k = 0$ )
  - $Y_k = \hat{Q}_k + \hat{G}_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}$
  - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k$
  - $V_k = \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})(z_k - \ell + 1)$ .

Alors  $\partial Z_k = U_{G+k} + a_k Y_k$  et  $\sum_{x_{k,i}=h} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) = b_k Y_k - \hat{H}'_k - \hat{G}_k + \partial V_k$ .

Preuve. Le cas  $b_k \leq 0$  est facile.

Dans le cas  $b_k > 0$ , détaillons la preuve.

$\partial(\hat{q}_k + \hat{g}_k) = U_{G+k} + \hat{G}_k + \hat{Q}_k + \sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i})$ , or  
 $\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i} - \hat{X}_{k,1} - \hat{\mu}_{k,1} - \hat{H}'_k - \hat{G}_k - \partial \sum_{2 \leq \ell \leq i} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) + \sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell}^+$  est égal :  
- si  $2 \leq i < w_k$ , à  $\sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+$ ,  
- si  $w_k \leq i < z_k$ , à  $\sum_{2 \leq \ell < w_k} \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+ + \sum_{w_k \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell-w_k+1}^+$ , d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) - a_k (\hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}) - (a_k - 1) (\hat{H}'_k + \hat{G}_k) \\ & - \partial \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} \\ & = - \sum_{\ell \geq 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} + \sum_{\ell < z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ \text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 \mid x_{k,i} = q_k\} \\ & + \sum_{\ell > z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ \text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 - z_k \mid x_{k,i} = q_k\}. \end{aligned}$$

Dans cette expression, le coefficient de  $\hat{P}_{k,\ell}^+$  vaut (compte tenu des propriétés de  $w_{\alpha,\beta}$  détaillées dans 4.1)

si  $\ell = 1$ ,  $\text{card}\{i \geq w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = v_k$

si  $\ell = z_k - w_k + 2$ ,  $-\text{card}\{i \geq z_k - w_k + 2 \mid x_{k,i} = q_k\} = 1 - \text{card}\{i < w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = 1 - (a_k - v_k)$

si  $2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 2$ ,  $\text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = \text{card}\{i \mid \ell \leq i < z_k - w_k + 1 \text{ et } x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = -\text{card}\{i \geq z_k - w_k + 1 \mid x_{k,i} = q_k\} = -\text{card}\{i < w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = -(a_k - v_k)$ ,

si  $\ell > z_k - w_k + 2$ ,  $\text{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 - z_k \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = \text{card}\{i \geq w_k \mid x_{k,i} = q_k\} + \text{card}\{i \mid \ell + w_k - 1 - z_k \leq i < w_k \text{ et } x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = v_k$ .

On en déduit que  $\sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) = a_k Y_k - \hat{Q}_k - \hat{G}_k + \partial[v_k \hat{C}_k^+ - \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}]$ , si bien que  $\partial Z_k$  est égal au résultat annoncé.

On a déjà calculé  $\sum_{x_{k,i}=q_k} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$ . On va en déduire  $\sum_{x_{k,i}=h} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$  par différence, en calculant  $\sum_i (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$ . Rappelons que pour  $1 \leq i < z_k$ ,

$\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i} - \hat{X}_{k,1} - \hat{\mu}_{k,1} - \hat{H}'_k - \hat{G}_k - \partial \sum_{2 \leq \ell \leq i} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) + \sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell}^+$  était égal :  
- si  $2 \leq i < w_k$ , à  $\sum_{2 \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+$   
- si  $w_k \leq i < z_k$ , à  $\sum_{2 \leq \ell < w_k} \hat{P}_{k,z_k-w_k+\ell+1}^+ + \sum_{w_k \leq \ell \leq i} \hat{P}_{k,\ell-w_k+1}^+$ .

De plus, pour  $i = z_k$ , on a presque la même formule que pour  $w_k \leq i < z_k$ , mais en remplaçant  $-\hat{G}_k$  par  $+\hat{Q}_k$ .

D'où

$$\begin{aligned} & \sum_i (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) - z_k (\hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}) - (z_k - 1) \hat{H}'_k - (z_k - 2) \hat{G}_k + \hat{Q}_k - \partial \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell\} = \\ & - \sum_{\ell \geq 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ (z_k - \ell + 1) + \sum_{\ell < z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ (z_k - \ell + 2 - w_k) + \sum_{\ell > z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+ (2z_k - \ell + 2 - w_k) = \\ & (u_k + v_k) \partial \hat{C}_k^+ - (a_k + b_k) \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 2} \hat{P}_{k,\ell}^+, \end{aligned}$$

si bien que par différence,  $\sum_{x_{k,i}=h} (\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$  est égal au résultat annoncé.  $\square$

### Bord des 2-cochaînes $\Delta$ -simpliciales

**Lemme 19.** *Pour tous les TYPES, on a d'abord*

$$\begin{aligned} & - \partial(\hat{\delta}_0 + \hat{T}_0^\pm + \hat{F}_0) = 0 \\ & - \partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+) = 0. \end{aligned}$$

Pour les TYPES  $o_i$  (avec  $\varepsilon = 1$  pour  $o_1$  et  $-1$  pour  $o_2$ )

- si  $j$  impair

$$\begin{aligned} & - \partial(\hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}) = \hat{N}'_{j,1} + \varepsilon \hat{N}_{j+1,1} \\ & - \partial(\hat{v}_{j,1} + \varepsilon \hat{H}_{2j-1} + \varepsilon \hat{F}_{2j-1} + \hat{H}_{2j}) = (1 - \varepsilon) \hat{N}_{j,1} \text{ et} \\ & - \partial(\hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2} + \hat{F}_{2j-3}) = \varepsilon (\hat{N}_{j,1} + \hat{N}'_{j-1,1}) \end{aligned}$$

- si  $j$  pair

$$\begin{aligned} & - \partial(\hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-2}) = \hat{N}_{j,1} + \varepsilon \hat{N}'_{j-1,1} \text{ et} \\ & - \partial(\hat{v}_{j,1} + \varepsilon \hat{H}_{2j-1} + \varepsilon \hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2}) = (1 - \varepsilon) \hat{N}'_{j,1} \\ & - \partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+) = 0. \end{aligned}$$

Pour les TYPES  $n_i$

$$\begin{aligned} & - \partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+) = 0 \\ & - \partial(\hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}) = (1 + \varepsilon_j) \hat{N}'_{j,1} \\ & - \partial(\hat{v}_{j,2} + \hat{H}_{2j-1} + \varepsilon_j \hat{F}_{2j-2}) = (1 + \varepsilon_j) \hat{N}_{j,2} \\ & - \partial \hat{H}_{2j-2} = -\hat{N}'_{j-1,1} - \hat{N}_{j,2}. \end{aligned}$$

**6.2. Relevé des 0 et 1-cocycles cellulaires.** Ayant décrit les cobords, on est prêt à choisir des relevés qui soient des *cocycles* relevant mod  $p$  un représentant des divers générateurs.

**Le 0-cocycle cellulaire**  $\hat{\sigma}$  se relève en  $1 = \hat{\sigma} + \hat{a} + \hat{b} + \sum \hat{d}_k$ .

Grâce au lemme 18, les 1-cocycles sont relevés comme suit :

DÉFINITION 20. Relevés des 1-cocycles

**1) Pour le générateur  $\theta_j$  :**

pour les TYPES  $o_i$  et pour tout  $p$ ,  $\theta_j = [\hat{t}_j]$ . On peut relever  $\hat{t}_j$  par  $R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm$

pour les TYPES  $n_i$ , il faut distinguer selon  $p$

— si  $p = 2$ , alors on a  $\theta_j = [\hat{t}_j]$ . On peut relever  $\hat{t}_j$  par

$$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm ;$$

— si  $p > 2$  alors on a  $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$  qui se relève par

$$R(\hat{t}_j - \hat{t}_1) = \hat{t}_j + \hat{f}_j - (\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - 2 \sum_{u=2}^{2j-2} (\hat{e}_u + \hat{S}_u^\pm) - (\hat{e}_1 + \hat{S}_1^\pm) - (\hat{e}_{2j-1} + \hat{S}_{2j-1}^\pm).$$

Dans les deux situations, on a pris  $\ell = 2j$  si  $j$  est impair et  $\ell = 2j - 1$  si  $j$  est pair.

## 2) Pour le générateur $\alpha_k$ :

pour tous les TYPES et pour tout  $p$ , si  $0 \leq k < n - 1$ , on commence par relever  $\hat{q}_k - \hat{q}_{k-1}$  par

$$R(\hat{q}_k - \hat{q}_{k-1}) = Z_k - Z_{k-1} - \hat{S}_{2g'+k}^\pm - \hat{e}_{2g'+k}, \text{ avec } Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k - v_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\};$$

pour les TYPES  $o_i, n_i$ , quand  $p = 2$  et pour les TYPES  $o_i$  quand  $p > 2$ , le générateur  $\alpha_k$  est  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ . En additionnant, on trouve le relevé

$$R(\hat{q}_k - \hat{q}_0) = Z_k - Z_0 - \sum_{i=1}^k (\hat{S}_{2g'+i}^\pm + \hat{e}_{2g'+i}), \text{ où } Z_u \text{ est défini dans Lemme 18};$$

pour tous les TYPES  $n_i$ , quand  $p > 2$ ,  $\alpha_k = [\hat{q}_k - 1/2\hat{t}_g]$ . Il faut rajouter à la somme précédente le relevé de  $\alpha_0 = [\hat{q}_0 - 1/2\hat{t}_g]$  qui est choisi égal à

$$R(\hat{q}_0 - 1/2\hat{t}_g) = Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g) - (\hat{e}_{2g} + \hat{S}_{2g}^\pm) - 1/2(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}_{2g-1}^\pm). \text{ On obtient :}$$

$$R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) = Z_k - \frac{1}{2}(\hat{t}_g + \hat{f}_g) - \sum_{i=-1}^k (\hat{S}_{2g'+i}^\pm + \hat{e}_{2g'+i}).$$

## 3) Pour le générateur $\alpha = [c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$ . Avec la notation $c_k = b_k a / a_k$ , on a :

pour les TYPES  $o_1$  et  $n_1$ , dans le Cas 1 (on a  $c = 0$ ), lorsque  $p > 2$  et pour tous les TYPES, dans le Cas 1, lorsque  $p = 2$ , on peut relever  $\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$  par

$$R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a [c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)];$$

pour le TYPE  $n_1$ , dans le Cas 2, on peut relever  $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$  par

$$R(c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a [c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)] + c/2a[(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0)]$$

avec

- si  $b_k > 0$ ,
  - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k - v_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}$ ,
  - $V_k = u_k \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}$ ;
- si  $b_k \leq 0$ ,
  - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k$ ,
  - $V_k = \hat{C}_k^+ + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell \geq 2} (\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})(z_k - \ell + 1)$ .

**Pour justifier** (lorsque cela n'est pas évident) ces choix de relevés, on fait les remarques suivantes :

$$\text{On rappelle la notation } U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}_\ell^\pm.$$

## 1) Pour le générateur $\theta_j$ :

pour  $o_i$ , pour tout  $p$ ,  $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_\ell + U_{\ell-2}$  avec :

- si  $j$  impair :  $\ell = 2j$  et

$$\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = -U_\ell - U_{\ell-1}, \quad \partial(\hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm) = U_{\ell-1} - U_{\ell-2},$$

– si  $j$  pair :  $\ell = 2j - 1$  et

$$\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = -U_\ell + U_{\ell-1}, \quad \partial(\hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm) = -U_{\ell-1} - U_{\ell-2},$$

– donc quelle que soit la parité de  $j$ ,

$$\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = -\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm).$$

Pour tout  $p$ , le relevé du cocycle  $\theta_j = \hat{t}_j$  est :

$$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm.$$

pour  $n_i$ , pour tout  $p$ ,  $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_{2j-1} + U_{2j-2}$  et  $\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = U_\ell - U_{\ell-1}$ ,

– si  $p = 2$ , on peut relever  $\theta_j = \hat{t}_j$  par

$$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm,$$

– si  $p > 2$ , on peut (pour relever  $\theta_j = \hat{t}_j - \hat{t}_1$ ) relever  $\hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}$  par  $(\hat{t}_j + \hat{f}_j) - (\hat{t}_{j-1} + \hat{f}_{j-1}) - (\hat{e}_{2j-1} + \hat{S}_{2j-1}^\pm) - (\hat{e}_{2j-2} + \hat{S}_{2j-2}^\pm)$ .

**2) Pour les générateurs  $\alpha_k$  :** On va se servir des  $Z_k$  du lemme, puisqu'ils contiennent  $\hat{q}_k$  plus des cochaînes  $\Delta$ -simpliciales dont l'image cellulaire (par  $T^t$ ) est nulle. D'après le lemme, pour tout  $k \in [0, n[$  on a, modulo  $p$  :  $\partial Z_k = U_{2g'+k}$ , or pour  $2g' < \ell \leq 2g' + m$  on a :  $\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm) = U_\ell - U_{\ell-1}$ . Ceci permet ( $\forall p, \forall o_i, n_i$ ) de relever  $\hat{q}_k - \hat{q}_{k-1}$  (pour  $0 < k < n$ ) par  $Z_k - Z_{k-1} - (\hat{e}_{2g'+k} + \hat{S}_{2g'+k}^\pm)$ .

Pour les TYPES  $n_i$  et  $p > 2$ , il faut relever en plus  $\alpha_0 = \hat{q}_0 - 1/2\hat{t}_g$ . On se sert de

$$\partial[Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g)] = U_{2g} - 1/2(U_{2g-1} + U_{2g-2}) = (U_{2g} - U_{2g-1}) + 1/2(U_{2g-1} - U_{2g-2}),$$

ce qui, puisqu'ici  $U_\ell - U_{\ell-1} = \partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm)$ , permet de relever  $\alpha_0$  par :

$$Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g) - (\hat{e}_{2g} + \hat{S}_{2g}^\pm) - 1/2(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}_{2g-1}^\pm).$$

**3) Pour le générateur  $\alpha$  pour  $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$  :**

On a  $\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+) = \sum_k (\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h} (\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}))$  or d'après le lemme, pour  $k$  fixé,

$$\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h} (\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}) = b_k Y_k + \partial V_k = b_k a_k^{-1} (\partial Z_k - U_{2g'+k}) + \partial V_k.$$

Donc on a  $\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k) = -\sum b_k a_k^{-1} U_{2g'+k} = -1/a \sum c_k U_{2g'+k}$  avec  $\sum c_k = c$  et  $U_{2g'+k} - U_{2g'+k-1} = \partial(\hat{e}_{2g'+k} + \hat{S}_{2g'+k}^\pm)$ , d'où

$$-\sum c_k U_{2g'+k} = \partial[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)] - c U_{2g'+m}.$$

Dans les Cas 1 (de  $o_1$  et  $n_1$ ),  $c = 0 \pmod p$ , on peut relever  $\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$  par  $\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)]$ .

Dans le Cas 2 de  $n_1$ , comme  $\partial(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0) = U_0 - U_{2g'+m}$  et  $\partial(\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) = U_1 - U_0$  et  $\partial(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) = U_0 + U_1$ , on peut relever  $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$  par la même expression que dans les Cas 1, à laquelle on ajoute  $c/2a[(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0)]$ .

### 6.3. Relevé des 2-cocycles cellulaires.

DÉFINITION 21. Relevés des 2-cocycles

**4) Pour le générateur  $\beta = [\hat{\delta}]$ , dans tous les Cas et pour tous les TYPES. On relève  $\hat{\delta}$  par :**  
 $R\hat{\delta} = U_0 = \hat{\delta}_0 + \hat{T}_0^\pm + \hat{F}_0.$

**5) Relevé de  $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ , valable dans tous les Cas, que  $p$  divise  $a_k$  ou pas et que  $b_k$  soit positif ou pas. On relève  $\hat{\mu}_k$  par :**

$$R\hat{\mu}_k = \hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 1} \hat{P}_{k,\ell}^+.$$

**6) Pour le générateur  $\varphi_j$  pour  $p \geq 2$ .**

pour  $o_i$ , si  $\varepsilon = 1$ , on relève  $\hat{v}_j$  par :

$$R\hat{v}_j = \hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1} + \hat{H}_{2j} \text{ si } j \text{ impair,}$$

$$R\hat{v}_j = \hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2} \text{ si } j \text{ pair.}$$

pour  $n_i$ , si  $\varepsilon_j = -1$ , on relève  $\hat{v}_j$  par

$$R\hat{v}_j = \hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}.$$

Il n'est pas nécessaire de définir le relevé de  $\varphi_j$  pour les autres TYPES car pour  $p > 2$ , les cup-produits  $H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_p)$  ne seront à calculer que pour les TYPES  $o_1$  et  $n_2$ .

## 7. Calcul des cup-produits pour $p = 2$

**7.1. Formules d'Alexander-Whitney. Méthode des coefficients.** D'après la formule d'Alexander-Whitney [8], le cup-produit de deux cochaînes  $\Delta$ -simpliciales  $f$  de degré  $p$  et  $g$  de degré  $q$  est défini sur tout  $p + q$ -simplexe par

$$(f \cup g)(v_0, \dots, v_{p+q}) = f(v_0, \dots, v_p)g(v_p, \dots, v_{p+q}).$$

On en déduit immédiatement que le générateur 1 de  $H^0(M, \mathbb{Z}_p)$  est l'élément neutre pour le  $\cup$ -produit.

Si  $\varphi = f \cup g$  avec  $f, g$  deux 1-cochaînes  $\Delta$ -simpliciales, on obtient, pour tout 2- $\Delta$ -simplexe  $s = (s_0, s_1, s_2)$ , de sommets  $(v_0, v_1, v_2)$  et de faces  $s_0 = (v_1, v_2)$ ,  $s_1 = (v_0, v_2)$ ,  $s_2 = (v_0, v_1)$ ,  $\varphi(s) = f(s_2)g(s_0)$ .

Heureusement, si  $f, g$  sont des 1-cocycles, pour connaître la classe du 2-cocycle  $\varphi$ , il ne sera pas nécessaire de l'évaluer sur les (nombreux !) 2-simplexes. En effet, soit  $\varphi' = T^t(\varphi)$  son image dans le complexe cellulaire (voir 5),

$$\varphi' = x\hat{\delta} + \sum_{j=1}^{g'} y_j \hat{v}_j + \sum z_k \hat{\rho}_k + \sum_{k=0}^m r_k \hat{\mu}_k.$$

Comme  $0 = \partial\varphi'$ , les  $z_k$  sont nuls. De plus, la classe de cohomologie de  $\varphi'$  (donc de  $\varphi$ ) est

- dans le Cas 1 :  $(x + \sum_{k=0}^m r_k)\beta + \sum_{j=1}^{g'} y_j \varphi_j$ ,
- dans le Cas 2 :  $\sum_{j=1}^{g'} y_j \varphi_j$ ,
- dans le Cas 3 :  $\sum_{k=0}^{n-1} r_k \beta_k + \sum_{j=1}^{g'} y_j \varphi_j$ , en posant  $\beta_0 = -\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ .

**REMARQUE 22.** Pour calculer la classe de cohomologie  $[\varphi]$ , il suffira d'évaluer (mod 2)  $x = \varphi(\sum \delta_\ell)$  (dans le Cas 1), les  $r_k = \varphi(\sum \mu_{k,\ell})$  (dans les Cas 1 et 3), et les  $y_j = \varphi(v_{j,1} - \varepsilon_j v_{j,2})$  (dans les trois Cas).

Les preuves ne sont données que pour les cup-produits qui ne sont pas nuls pour des raisons classiques de topologie, voir par exemple Aaslepp [1].

**7.2. Les cup-produits, pour  $p = 2$ ,**  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ . Cette sous-section prouve le théorème 7.

Preuve.

### Calcul de $\theta_i \cup \theta_j$

Quand ils apparaissent, les  $r_k$  et les  $y_j$  sont nuls.

TYPES  $o_i$

• Il suffit de calculer  $x$  pour le Cas 1. On a, voir la Sous-section 4.2, Découpage  $\Delta$ -simplicial :

$$x = R\hat{t}_i(e_0)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_1)R\hat{t}_j(t_2) + R\hat{t}_i(e_3)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_4)R\hat{t}_j(t_2) + \dots$$

vaut 1 si et seulement si  $i$  impair et  $j = i + 1$  ou  $i$  pair et  $j = i - 1$ . Et  $x$  vaut 0 sinon.

CONCLUSION : POUR LES TYPES  $o_i$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT NULS SAUF DANS LE CAS 1, OÙ ON A  $\theta_{2i} \cup \theta_{2i-1} = \beta$ .

TYPES  $n_i$ ,  $\theta_j = [\hat{t}_j]$  et le relevé de  $\theta_j$  est  $R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm$ .

• Calcul de  $x$  :  $x = R\hat{t}_i(e_0)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_1)R\hat{t}_j(t_1) + \dots$  vaut 1 si et seulement si  $i = j$  et vaut 0 sinon.

CONCLUSION : POUR LES TYPES  $n_i$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT NULS SAUF DANS LE CAS 1 ET SI  $i = j$ , ALORS ON A  $\theta_i \cup \theta_i = \beta$ .

### Calcul de $\theta_i \cup \alpha$

Pour tous les TYPES,  $\alpha = [\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j]$  n'est générateur que dans le Cas 1.

Le relevé de  $\alpha$  est

$$R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a} [c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)].$$

• Calcul du coefficient  $x$ .

Dans le découpage  $\Delta$ -simplicial de  $\delta$ , l'indice des  $\Delta$ -simplexes  $\delta_u$  varie de 0 à  $4g + m$ .

Pour  $u \leq 4g - 1$ , le  $\Delta$ -simplexe  $\delta_u$  est  $\delta_u = (t, e, e)$  et  $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)$  (le relevé de  $\alpha$ ) appliqué à  $(\delta_u)_0 = t$  est nul.

Pour  $u \geq 4g$ , le  $\Delta$ -simplexe  $\delta_u$  est  $\delta_u = (q, e, e)$  et  $R(\hat{t}_j)$  le relevé de  $\theta_j$  appliqué à  $(\delta_u)_2 = e$  est nul. Le coefficient  $x$  est nul.

• Il ne reste plus qu'à calculer  $y_i$ . Or

$$\begin{aligned} y_i &= R\hat{t}_j(v_{i,1})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{i,1})_0 - \varepsilon_j R\hat{t}_j(v_{i,2})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{i,2})_0 \\ &= R\hat{t}_j(v_{i,1})_2, \end{aligned}$$

et  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{i,1})_0 = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(h) = 1$  et  $R\hat{t}_j(v_{i,2})_2 = R\hat{t}_j(h) = 0$ . Comme de plus,  $(v_{i,1})_2 = t_i$  ou  $f_i$ , on obtient  $y_i = 1$  si et seulement si  $i = j$  et  $y_i = 0$  sinon.

CONCLUSION :  $\theta_j \cup \alpha$  N'INTERVIENT QUE DANS LE CAS 1. POUR TOUS LES TYPES, ON A  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$ .

**Calcul de  $\alpha_i \cup \alpha_j$** 

Pour tous les TYPES, les générateurs  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$  n'interviennent que dans le Cas 3. Nous devons calculer les coefficients  $r_\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq n-1$  et  $y_i$ .

• Calcul des coefficients  $r_\ell = \sum_w R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0$ , avec  $(\mu_{\ell,w})_0 = x_{\ell,w}$  et  $(\mu_{\ell,w})_2 = p_{\ell,w}$

1) Dans  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)$  interviennent  $Z_j$  et  $Z_0$ . Dans chaque  $Z_u$ , on voit

$$\hat{q}_u - \sum_{s \geq 1} \hat{p}_{u,s} \text{card}\{t \geq s \mid x_{u,t} = q_u\}.$$

- Si  $u = j$ ,  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(x_{\ell,w}) = 0$  sauf si  $\ell = j$  et ceci pour tous les  $a_j$  indices  $w$  tels que  $x_{j,w} = q_j$ . Dans ces situations  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{j,w})_0 = 1$ .

- Si  $u = 0$ , pour n'importe quel indice  $j \neq 0$ ,  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = 0$  sauf si  $\ell = 0$  et ceci pour tous les  $a_0$  indices  $w$  tels que  $x_{0,w} = q_0$ . Dans ces situations  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{0,w})_0 = 1$ .

2)  $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{\ell,w}) = 0$  sauf si

i)  $\ell = j = k$  et pour tous les  $w$  tels que  $x_{k,w} = q_k$ . Dans ces situations on a  $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{k,w}) = \text{card}\{t \geq w \mid x_{k,t} = q_k\}$  ;

ii)  $\ell = 0$  et pour tous les  $w$  tels que  $x_{0,w} = q_0$ . Dans ces situations, pour n'importe quel indice  $k \neq 0$ , on a  $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{0,w}) = \text{card}\{t \geq w \mid x_{0,t} = q_0\}$ .

Si  $k = j$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , nous avons obtenu

$$r_k = \sum_{\substack{w \geq 1 \\ x_{k,w} = q_k}} R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{k,w})_2 = \sum_{w=1}^{w=a_k-1} (a_k - w) = \frac{a_k(a_k - 1)}{2} = \frac{a_k}{2}.$$

Le dernier calcul est fait modulo 2.

• Calcul des coefficients

$$y_i = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(v_{i,1})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(v_{i,1})_0 - \varepsilon_i R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(v_{i,2})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(v_{i,2})_0.$$

Nous avons  $(v_{i,1})_2 = t_i$  si  $\varepsilon_i = 1$  et  $(v_{i,1})_2 = f_i$  si  $\varepsilon_i = -1$  ;  $(v_{i,1})_0 = (v_{i,2})_2 = h$  ;  $(v_{i,2})_0 = t_i$ .

Aucun de ces éléments n'intervient dans  $R(\hat{q}_u - \hat{q}_0)$ . On a que pour tout  $i$ ,  $y_i = 0$ .

Il reste à remarquer que les calculs précédents sont valables pour tous les TYPES.

CONCLUSION : LES CUP-PRODUITS  $\alpha_i \cup \alpha_j$  N'INTERVIENNENT QUE DANS LE CAS 3. POUR TOUS LES TYPES,  $\alpha_i \cup \alpha_j = \frac{a_0}{2} \beta_0 + \delta_{i,j} \frac{a_j}{2} \beta_j$ , OÙ  $\beta_0 = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \beta_k$  ET  $\delta_{i,j}$  EST LE SYMBOLE DE KRONECKER.

**Calcul de  $\alpha \cup \alpha$** 

Pour tous les TYPES, le générateur  $\alpha$  n'intervient que dans le Cas 1. On rappelle que  $r$  est le nombre de  $b_k$  pairs et on les a rangés entre 0 et  $r-1$ .

• Calcul du coefficient  $x$ .

Le calcul se fait par la formule :

$$T^t(R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(\delta) = (R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(T(\delta)).$$

Si  $\ell \leq 2g' - 1$ , on a  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\delta_\ell)_0 = 0$ .

Mais si  $\ell = 2g' + k$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ , on a

$$\begin{aligned} & (R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(q_k, e_{2g'+k+1}, e_{2g'+k}) \\ &= R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(q_k) R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(e_{2g'+k}). \end{aligned}$$

On a d'abord  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(q_k) = 1$  si et seulement si  $k \geq r - 1$ .

Ensuite on calcule  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(e_{2g'+k}) = (c_0 + c_1 + \dots + c_{k-1})$  où  $c_u = \frac{b_u a}{a_u}$  qui est non nul seulement si  $u < r$ . On obtient  $(c_0 + c_1 + \dots + c_{k-1}) = 1$  si et seulement si  $k - r$  est impair.

- **Si  $r$  impair**,  $k$  doit être pair et comme on est dans le Cas où  $c = 0$ , on doit avoir  $m - r$  pair donc  $m$  impair. Le nombre de  $k$  pairs entre  $r + 1$  pair et  $m - 1$  pair,  $r + 1 \leq k \leq m - 1$ , est  $x = \frac{m-r}{2}$ .

- **Si  $r$  est pair**, alors  $k$  est impair et  $m$  est pair. Le nombre de  $k$  impairs entre  $r + 1$  impair et  $m - 1$  impair,  $r + 1 \leq k \leq m - 1$ , est  $x = \frac{m-r}{2}$ .

On en déduit que

$(R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j))(\delta_\ell) = 1$  si et seulement si  $\ell = 2g' + r + 2i$  pour un  $i > 0$  et donc que  $x = \frac{m-r}{2} = \frac{1}{2} \sum_r^{m-1} 1$ .

Le calcul de  $x$  a été fait pour les TYPES  $o_i$ . Pour les TYPES  $n_i$ ,  $T(\delta) = \sum \delta_\ell$ . Par conséquent ce calcul est valable aussi pour les TYPES  $n_i$ .

• Calcul des coefficients  $r_k$

On rappelle que  $(\mu_{k,\cdot})_0 = x_{k,\cdot}$  et  $(\mu_{k,\cdot})_2 = p_{k,\cdot}$  et  $r_k = \sum_{\ell=0}^{m-1} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell}) R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell})$ .

**Si  $b_k > 0$**

- si  $0 \leq k \leq r - 1$ , les  $b_k$  sont pairs. Le terme intervenant dans chaque  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)$  est  $\sum_t V_t$ , plus précisément

$$\sum_t \sum_{u \geq 1} \hat{p}_{t,u} \text{card}\{i \geq u \mid x_{t,i} = h\}.$$

Calculons  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell})$ .

- Si  $\ell$  est tel que  $x_{k,\ell} = h$ , ce qui arrive pour  $b_k$  d'entre eux, alors  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$  et  $r_k = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell})$ . On a

$$r_k = \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=h}^{m-1} \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = h\} = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} (b_k - \ell) = \frac{b_k}{2}.$$

La dernière égalité est calculée modulo 2.

- Si  $\ell$  est tel  $x_{k,\ell} = q_k$ , alors  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 0$ .

On conclut que, si  $b_k > 0$  et  $0 \leq k \leq r - 1$ , on a  $r_k = \frac{b_k}{2}$ .

- si  $k \geq r$ , les  $b_k$  sont impairs, les  $z_k = a_k + b_k$  sont pairs. La somme intervenant dans chaque  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)$  est  $\hat{h} + \sum_{u=r}^{m-1} Z_u + \sum V_t$ . Que  $\ell$  soit tel que  $x_{k,\ell} = h$  ou  $x_{k,\ell} = q_k$ , on a  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$  d'où

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{\ell} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell}) \\ &= \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=q_k}^{m-1} \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = q_k\} + \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=h}^{m-1} \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = h\} \\ &= \sum_{\ell=1}^{z_k-1} (z_k - \ell) = \frac{z_k}{2}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est calculée modulo 2.

**Si  $b_k \leq 0$**  on trouve les mêmes résultats que pour  $b_k > 0$ , puisque  $r_k$  devient (mod 2)

- si  $k \leq r$ , alors  $z_k = 1 + b_k$  est impair. Ce qui change est l'expression de  $V_t$  et ce qui nous intéresse est maintenant

$\sum_t \sum_{u \geq 1} \hat{p}_{t,u} (z_k - u + 1)$ . On a encore

$R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell})$  est égal à 1 si  $x_{k,\ell} = h$  et à 0 sinon, d'où

$$r_k = \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=h} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell}) = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} (z_k - \ell + 1) = \frac{b_k}{2} = \frac{a_k b_k}{2}.$$

Les égalités sont calculées modulo 2.

- si  $k \geq r$ , alors  $z_k$  est pair. On a en plus  $Z_u = \hat{q}_u + \hat{g}_u$ . Comme précédemment, que  $\ell$  soit tel que  $x_{k,\ell} = h$  ou  $x_{k,\ell} = q_k$ , on a  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$  d'où

$$r_k = \sum_{\ell=1}^{z_k} (z_k - \ell + 1) = \frac{z_k - 2}{2} = \frac{-b_k - 1}{2} = \frac{b_k + 1}{2} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{1 + a_k b_k}{2}.$$

Les égalités sont calculées modulo 2.

Maintenant, on rappelle que dans le Cas 1, on a  $\beta = [\hat{\delta}] = [\hat{\mu}_k] = \beta_k$ . Le coefficient de  $\beta$  est  $(\sum r_k) - x = \sum_{0 \leq k \leq r-1} \frac{a_k b_k}{2} + \sum_{r \leq k \leq m-1} \frac{(a_k b_k)}{2} = \frac{1}{2} \sum a_k b_k = \frac{c}{2}$ .

Remarquons que ces calculs sont valables pour tous les TYPES.

- Calcul des coefficients  $y_j$

On rappelle que

$$y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{j,1})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{j,1})_0 - \varepsilon_j R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{j,2})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{j,2})_0.$$

Pour tous les TYPES, on a  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{j,2})_0 = 0$ .

Comme  $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{i,1})_0 = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(h) = 1$ , on a  $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(v_{j,1})_2$ . Alors si  $\varepsilon_j = 1$ ,  $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(t_j) = 0$ , tandis que si  $\varepsilon_j = -1$ ,  $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(f_j) = 1$ .

CONCLUSION :  $\alpha \cup \alpha$  N'EXISTE QUE DANS LE CAS 1. POUR LES TYPES  $o_1$  ET  $n_1$ , ON A  $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta$ . POUR LES TYPES  $o_2$  ET  $n_2$ , ON A  $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j \geq 1} \varphi_j$ . POUR LE TYPE  $n_3$ , ON A  $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j > 1} \varphi_j$ . POUR LE TYPE  $n_4$ , ON A  $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j > 2} \varphi_j$ .  $\square$

REMARQUE 23. Pour les TYPES  $o_1$  et  $n_2$  ceci correspond bien au résultat de [3], [4], [5], puisque pour  $a$  pair  $\binom{a}{2}$  est congru mod 2 à  $a/2$ .

**7.3. Les cup-produits, pour  $p = 2$ ,**  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_2)$ . Dans cette sous-section, nous utiliserons le procédé suivant.

1) Pour  $[\xi_1]$  un générateur du  $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$  et  $[\xi_2]$  un générateur du  $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ , on choisit un représentant  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Soient  $R(\xi_1)$  et  $R(\xi_2)$  les cocycles  $\Delta$ -simpliciaux qui sont des sections de  $T^t$  données dans la Section 6.

2) D'après la formule d'Alexander-Whitney, si  $f$  est un 1-cocycle  $\Delta$ -simplicial,  $g$  un 2-cocycle  $\Delta$ -simplicial et  $s$  un 3- $\Delta$ -simplexe de faces  $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $s_1 = (v_0, v_2, v_3)$ ,  $s_2 = (v_0, v_1, v_3)$  et  $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$  alors  $f \cup g(s) = f(v_0, v_1)g(s_0)$ , et on trouve  $(v_0, v_1)$  en prenant la dernière arête de  $s_2$  ou  $s_3$ , i.e.  $(v_0, v_1) = (s_2)_2 = (s_3)_2$ .

3) Quand la combinaison  $C$  des 3-simplexes telle que  $R(\xi_1) \cup R(\xi_2) = C$  a été trouvée, on obtient finalement  $[\xi_1] \cup [\xi_2] = [T^t C]$ .

Cette sous-section prouve le théorème 8.

Preuve.

**Calcul de  $\theta_i \cup \varphi_j$** 

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES, dans les trois Cas.

$\theta_i = [\hat{t}_i]$  pour  $1 \leq i \leq g'$  et  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$  pour  $1 \leq j \leq g'$ .

Le relevé de  $\varphi_j$  contient  $\hat{v}_{j,1}$ . Les seuls 3-simplexes  $s$  dont la face  $s_0$  est  $\hat{v}_{j,1}$  sont uniquement  $s = N_{j,1}$  ou  $s = N'_{j,1}$ . Pour les différents TYPES, les découpages  $\Delta$ -simpliciaux de  $N_{j,1}$  et  $N'_{j,1}$  sont différents.

Le relevé de  $\theta_i$  est

$$R(\hat{t}_i) = \hat{t}_i + \hat{f}_i + \hat{e}_\ell + \hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}_{\ell-1}^\pm,$$

- si  $i$  est impair,  $\ell = 2i$  ce qui donne ici  $\ell = 2$  modulo 4,

- si  $i$  est pair  $\ell = 2i - 1$  ce qui donne ici  $\ell = 3$  modulo 4.

TYPE  $o_1$ ,  $\varepsilon_j = 1$ , on trouve, en comparant les valeurs modulo 4 et les parités :

- pour  $j$  impair,  $(N_{j,1})_3 = T_{2j-2}^-$  et  $(N'_{j,1})_3 = T_{2j}^-$ ,
  - comme  $2j - 2 = 0$  modulo 4, on a  $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$ ,
    - si  $i$  est impair,  $2i$  et  $2i - 1$  ne sont pas égaux modulo 4 à  $2j - 2$ , on a  $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
    - si  $i$  est pair,  $2i - 1$  et  $2i - 2$  ne sont pas égaux modulo 4 à  $2j - 2$ , on a  $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
  - comme  $2j = 2$  modulo 4, on a  $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j}^-)_2 = S_{2j+1}^-$ ,
    - si  $i$  est impair, comme  $2j + 1$  et  $2i$  ne sont pas de la même parité, on a  $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
    - si  $i$  est pair et  $i = j + 1$  alors  $R(\hat{t}_{j+1})((N'_{j,1})_3)_2 = 1$ ,
- pour  $j$  pair,  $(N_{j,1})_3 = T_{2j-3}^-$  et  $(N'_{j,1})_3 = T_{2j-1}^-$ ,
  - comme  $2j - 3 = 1$  modulo 4, on a  $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-3}^-)_2 = S_{2j-3}^-$ ,
    - si  $i$  est impair et  $i = j - 1$ , on a  $R(\hat{t}_{j-1})((N_{j,1})_3)_2 = 1$ ,
    - si  $i$  est pair,  $2i - 1$  et  $2i - 2$  ne sont pas égaux modulo 4 à  $2j - 3$ , on a  $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
  - comme  $2j = 2$  modulo 4, on a  $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j}^-$ ,
    - si  $i$  est impair,  $2i$  et  $2i - 1$  ne sont pas égaux modulo 4 à  $2j$ , on a  $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
    - si  $i$  est pair, comme  $2j$  et  $2i - 1$  ne sont pas de la même parité, on a  $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$ .

De plus on a  $T'[N_{j,1}] = T'[N'_{j,1}] = \epsilon$ , d'où la conclusion :

**CONCLUSION : DANS TOUS LES CAS, POUR LE TYPE  $o_1$ , LES SEULS  $\theta_i \cup \varphi_j$  NON NULS SONT :**

- SI  $j$  EST IMPAIR  $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$ ,

- SI  $j$  EST PAIR  $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$ .

TYPE  $o_2$ ,  $\varepsilon_j = -1$ , on trouve

- pour  $j$  impair,  $(N_{j,1})_2 = T_{2j-2}^-$  et  $(N'_{j,1})_2 = T_{2j}^+$ ,
  - comme  $2j - 2$  est égal à 0 modulo 4, on a  $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$ ,
  - comme  $2j$  est égal à 2 modulo 4, on a  $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j}^+)_2 = S_{2j+1}^+$ ,
- pour  $j$  pair,  $(N_{j,1})_2 = T_{2j-3}^+$  et  $(N'_{j,1})_2 = T_{2j-1}^-$ ,
  - comme  $2j - 3$  est égal à 1 modulo 4, on a  $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-3}^+)_2 = S_{2j-3}^+$ ,
  - comme  $2j - 1$  est égal à 3 modulo 4, on a  $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j}^-$ .

Peu importe qu'on applique  $R(\hat{t}_i)$  à un  $S_{\cdot}^+$  ou à un  $S_{\cdot}^-$ , on obtient les mêmes conditions sur les indices que pour le TYPE  $o_1$ . On a encore  $T^+[N_{j,1}] = T^+[N'_{j,1}] = \epsilon$ , d'où la même conclusion que pour le Type  $o_1$  :

CONCLUSION : DANS TOUS LES CAS, POUR LE TYPE  $o_2$ , LES SEULS  $\theta_i \cup \varphi_j$  NON NULS SONT :

- SI  $j$  EST IMPAIR  $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$ ,
- SI  $j$  EST PAIR  $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$ .

TYPE  $n_1$ ,  $\varepsilon_j = 1$ , pour tous  $j$ , on a  $(N_{j,1})_3 = T_{2j-2}^-$  et  $(N'_{j,1})_3 = T_{2j-1}^-$ . Comme plus haut, en comparant les valeurs modulo 4 et les parités, on trouve :

- pour  $j$  impair,
  - $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$ ,
    - pour  $i$  impair, on a  $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
    - pour  $i$  pair, on a  $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
  - $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j-1}^-$ ,
    - pour  $i$  impair et  $i = j$ , on a  $R(\hat{t}_j)((N'_{j,1})_3)_2 = 1$ ,
    - pour  $i$  pair, on a  $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
- pour  $j$  pair,
  - $((N_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-1}^-$ ,
    - pour  $i$  impair, on a  $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
    - pour  $i$  pair, on a  $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
  - $((N'_{j,1})_3)_2 = (T_{2j-1}^-)_2 = S_{2j}^-$ ,
    - pour  $i$  impair et  $i = j$ , on a  $R(\hat{t}_j)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$ ,
    - pour  $i$  pair, on a  $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 1$ .

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LES TYPES  $n_1$ , ON A  $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$  ET 0 SINON.

TYPE  $n_2$ ,  $\varepsilon_j = -1$  pour tous  $j$ , on a  $((N_{j,1})_2)_2 = (T_{2j-2}^-)_2 = S_{2j-2}^-$  et  $((N'_{j,1})_2)_2 = (T_{2j-1}^+)_2 = S_{2j-1}^+$ . Comme pour le TYPE  $n_1$ , en comparant les valeurs modulo 4 et les parités, on trouve la même conclusion puisque le signe  $\pm$  de l'arête  $S_{\cdot}^{\pm}$  ne change rien au calcul.

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LES TYPES  $n_2$ ,  $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$  ET 0 SINON.

TYPES  $n_3, n_4$  en utilisant les résultats précédents pour  $\varepsilon_j = 1$  et  $\varepsilon_j = -1$ , on a la conclusion :

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LES TYPES  $n_3$  ET  $n_4$ , ON A  $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$  ET 0 SINON.

### Calcul de $\alpha \cup \varphi_j$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES seulement dans le Cas 1.

$$\alpha = [\hat{h} + \sum b_k \hat{q}_k] \text{ et } \varphi_j = [\hat{v}_j].$$

D'après l'étude précédente, on sait déjà que le relevé de  $\varphi_j$  contient  $\hat{v}_{j,1}$ . Les seuls 3-simplexes  $s$  dont la face  $s_0$  est  $\hat{v}_{j,1}$  sont uniquement  $s = N_{j,1}$  ou  $s = N'_{j,1}$ . On sait aussi que les arêtes  $(s_3)_2$  ou  $(s_2)_2$  sont  $S_u^{\pm}$  avec  $1 \leq u \leq g'$ .

Dans le relevé de  $\alpha$  n'interviennent que les  $S_u^+$ . L'étude précédente mène à la conclusion :

CONCLUSION : LORSQUE  $\varepsilon_j = 1$ ,  $\alpha \cup \varphi_j = 0$  ET LORSQUE  $\varepsilon_j = -1$ ,  $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$ .

### Calcul de $\alpha \cup \beta$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES seulement dans le Cas 1.

Maintenant, pour tous les TYPES, dans le relevé de  $\alpha$ , il y a l'arête  $A^+$ . Comme  $T'(D_0^+) = \epsilon$ , on a la conclusion :

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR TOUS LES TYPES, ON A TOUJOURS  $\alpha \cup \beta = \gamma$ .

### Calcul de $\alpha_i \cup \beta_k$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES mais seulement dans le Cas 3.

Le relevé de  $\beta_k$  est  $R(\hat{\mu}_k) = \hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{1 \leq \ell \leq z_k - w_{k+1}} \hat{P}_{k,\ell}$ . Le seul 3-simplexe  $s$  tel que  $R(\hat{\mu}_k)(s_0) = 1$  est  $s = M_{k,1}^\pm$ . On a  $s_3 = P_{k,1}^\pm$  et  $(P_{k,1}^\pm)_2 = C_k^\pm$ . Dans le relevé de  $\alpha_i$  apparaît seulement (via  $Z_i$ )  $C_i^+$ .

On vérifie que  $T'(M_{k,1}^\pm) = \zeta_k$  et on a  $\gamma = [\hat{\zeta}_k]$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 3, POUR TOUS LES TYPES,  $\alpha_k \cup \beta_k = \gamma$  ET 0 SINON.

$\theta_i \cup \beta_k$  et  $\alpha_k \cup \varphi_j$  Pour des raisons topologiques, ces cup-produits sont nuls.

### Calcul de $\theta_i \cup \beta$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES mais seulement dans le Cas 1.

On a  $\theta_i = [\hat{t}_i]$  et  $\beta = [\hat{\delta}]$ .

On cherche un 3-simplexe  $s$  tel que  $R(\hat{\delta})(s_0) \neq 0$  sachant que  $R(\hat{\delta}) = \hat{\delta}_0 + \hat{T}_0^\pm + \hat{F}_0$ . Le seul possible 3-simplexe est  $s = D_0^\pm$  pour lequel  $(s_3)_2 = (E_0^\pm)_2 = A^\pm$ . Comme l'arête  $A^\pm$  n'intervient pas dans le relevé de  $\theta_i$ , on a :

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR TOUS LES TYPES, ON A  $\theta_i \cup \beta = 0$ . □

## 8. Calcul des cup-produits pour $p > 2$

Ce calcul est à la fois plus compliqué (1 et  $-1$  ne sont plus égaux, et les générateurs diffèrent selon les TYPES) et plus simple (la plupart des cup-produits seront nuls).

**8.1. Les cup-produits, pour  $p > 2$ ,**  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ . Par la même méthode des coefficients, en calculant maintenant modulo  $p$ , cette sous-section prouve le théorème 9.

Preuve.

### Calcul de $\theta_i \cup \theta_j$

#### - Dans le Cas 1

TYPE  $\theta_1, \theta_2, \theta_j = [\hat{t}_j]$ .

• Il y a seulement à calculer  $x$  mais en prenant garde aux signes dans  $T(\delta)$  :

$T(\delta) = \sum_{i=0}^{g-1} (\delta_{4i} + \delta_{4i+1} - \delta_{4i+2} - \delta_{4i+3}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} \delta_\ell$  donne alors  $x = 1$  si  $i$  impair et  $j = i + 1$ , mais  $x = -1$  si  $i$  pair et  $j = i - 1$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LES TYPES  $\theta_1, \theta_2$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT NULS SAUF  $\theta_{2k-1} \cup \theta_{2k} = \beta, k > 0$ .

TYPES  $n_i, \theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ .

On a  $R(\hat{t}_j - \hat{t}_1) = \hat{t}_j + \hat{f}_j - (\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - \sum (\hat{S}_\ell^\pm + \hat{e}_\ell)$ .

• Les coefficients  $r_i$  et  $y_\ell$  sont encore nuls.

- On ne calcule pas  $x$  car  $\beta$  n'est pas un générateur du  $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LES TYPES  $n_i$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT TOUS NULS.

### - Dans le Cas 2

TYPE  $o_1$ ,  $\theta_j = [\hat{t}_j]$ .

- Comme les relevés sont les mêmes que pour  $p = 2$ , les coefficients  $r_k$  et  $y_\ell$  sont encore nuls.
- On ne calcule pas  $x$  car  $\beta$  n'est pas un générateur du  $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LES TYPES  $o_1$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT TOUS NULS.

TYPE  $o_2$ ,  $\theta_j = [\hat{t}_j]$ .

- Comme les relevés sont les mêmes que pour  $p = 2$ , les coefficients  $r_k$  et  $y_\ell$  sont encore nuls.
- Il y a seulement à calculer  $x$  mais en prenant garde aux signes dans  $T(\delta)$ , comme dans le Cas 1 pour les TYPES  $o_i$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LES TYPES  $o_2$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT NULS SAUF  $\theta_{2k-1} \cup \theta_{2k} = \beta, k > 0$ .

TYPES  $n_i$ . La situation est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LES TYPES  $n_i$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT TOUS NULS.

### - Dans le Cas 3

TYPES  $o_i, n_i$ .

- Comme les relevés sont les mêmes que pour  $p = 2$ , les coefficients  $r_k$  et  $y_\ell$  sont encore nuls.
- On ne calcule pas  $x$  car  $\beta$  n'est pas un générateur du  $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 3, POUR LES TYPES  $o_i, n_i$ , LES CUP-PRODUITS  $\theta_i \cup \theta_j$  SONT TOUS NULS.

### Calcul de $\theta_j \cup \alpha$

Ce cup-produit n'intervient que dans le Cas 1 pour le TYPE  $o_1$  et dans les Cas 1 et 2 pour le TYPE  $n_1$ .

### - Dans le Cas 1

TYPE  $o_1$ ,  $\theta_j = [\hat{t}_j]$  et  $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$ .

- Calcul du coefficient  $x$ .

Dans  $T(\delta)$ , l'indice des  $\Delta$ -simplexes  $\delta_u$  varie de 0 à  $4g + m$ . Pour  $u \leq 4g - 1$ , le  $\Delta$ -simplexe  $\delta_u$  est  $\delta_u = (t, e, e)$  et  $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)$  le relevé de  $\alpha$  appliqué à  $(\delta_u)_0 = t$  est nul. Lorsque  $u \geq 4g$ , le  $\Delta$ -simplexe  $\delta_u$  est  $\delta_u = (q, e, e)$  et  $R(\hat{t}_j)$  le relevé de  $\theta_j$  appliqué à  $(\delta_u)_2 = e$  est nul. Le coefficient  $x$  est nul.

- Calcul du coefficient  $y_j$ .

Pour le TYPE  $o_1$ , on a  $T(v_j) = v_{j,1} + v_{j,2}$ , puisque tous les  $\varepsilon_j = 1$  et  $v_{j,1} = (h, f_j, t_j), v_{j,2} = (t_j, f_j, h)$ . On voit que seulement

$$R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)((v_{j,1})_0) = 1, R(\hat{t}_j)((v_{j,1})_2) = 1.$$

CONCLUSION : LES CUP-PRODUITS  $\theta_j \cup \alpha$  SONT NULS SAUF POUR LE TYPE  $o_1$ , DANS LE CAS 1 ET ALORS  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$ .

TYPE  $n_1$ ,  $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$  et  $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$ .

Dans le relevé de  $\theta_j$  intervient  $t_1 + f_1$  mais ce terme ne donne pas de contribution car il suffit de calculer  $y_j$  pour  $j > 1$  puisque  $\varphi_1$  n'est pas un générateur de  $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ . Alors la conclusion est la même que pour le TYPE  $o_1$  avec une restriction sur l'indice  $j$ .

CONCLUSION : DANS LES CAS 1, POUR LE TYPE  $n_1$ ,  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$ ,  $j > 1$ .

### -Dans le Cas 2

TYPE  $n_1$ ,  $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$  et  $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$ .

La conclusion est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : DANS LES CAS 2, POUR LE TYPE  $n_1$ ,  $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$ ,  $j > 1$ .

### Calcul de $\alpha \cup \alpha$

Ce cup-produit n'intervient que dans le Cas 1 pour le TYPE  $o_1$  et dans les Cas 1 et 2 pour le TYPE  $n_1$ .

#### - Dans le Cas 1

TYPE  $o_1$ ,  $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$ .

Le relevé de  $\alpha$  est  $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a} [c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)]$ .

#### • Calcul du coefficient $x$ .

Comme  $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) = 0$ , on a

$$x = \sum R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(e_{2g'+k}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(q_k).$$

#### • Calcul des coefficients $r_k$ .

- Si  $b_k > 0$ ,

$$\begin{aligned} r_k &= \sum R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(p_{k,\ell}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(x_{k,\ell}) \\ &= \sum_{x_{k,\ell}=q_k} (-b_k/a_k) [(b_k/a_k) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}] \\ &\quad + \sum_{x_{k,\ell}=h} [(b_k/a_k) \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} - \text{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}] \\ &= \frac{-1}{a_k^2} \sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell, \end{aligned}$$

avec  $s_i = b_k$  si  $x_{k,i} = q_k$  et  $s_i = -a_k$  si  $x_{k,i} = h$ . Cet entier  $\sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell$  est égal à :

$$\sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell = \frac{1}{2} [\sum (s_\ell^2) - (\sum s_\ell)^2] = \frac{1}{2} (a_k b_k^2 + b_k a_k^2 - 0) = \frac{a_k b_k (a_k + b_k)}{2},$$

$$\text{donc } r_k = -\frac{b_k (a_k + b_k)}{2a_k}.$$

- Si  $b_k \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} r_k &= R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(q_k) \alpha(p_{k,1}) - R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(p_{k,3} + \dots + p_{k,1}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) \\ &= -\sum_{\ell > 2} \alpha(p_{k,\ell}) = -\sum_{\ell > 2} (z_k - \ell + 1) = -\frac{(z_k - 2)(z_k - 1)}{2}, \end{aligned}$$

or  $z_k = 1 - b_k$  et  $a_k = 1$  d'où

$$r_k = -\frac{b_k (a_k + b_k)}{2a_k}, \text{ comme dans le cas } b_k > 0.$$

- Calcul des coefficients  $y_\ell$ .

On a

$$\begin{aligned} y_j &= R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) \\ &\quad - R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il reste  $\alpha \cup \alpha = [x\hat{\delta} + \sum r_k \hat{\mu}_k] = N[\hat{\delta}]$ , avec

$$N = x - \sum \frac{r_k}{a_k} = \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_k} \left( \sum_{i < k} \frac{b_i}{a_i} \right) + \sum \frac{b_k(a_k + b_k)}{2a_k^2} = \frac{c(a+c)}{2} a^{-2}.$$

Comme  $c$  est divisible par  $p > 2$ ,  $N$  est congru mod  $p$  à 0.

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LE TYPE  $o_1$ ,  $\alpha \cup \alpha = 0$ .

TYPE  $n_1$ ,  $\alpha = [\frac{c}{2}\hat{t}_1] + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k$ .

Le relevé de  $\alpha$  est  $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a}[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}_{2g'+1}^\pm) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}_{2g'+2}^\pm) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}_{2g'+m}^\pm)] + \frac{c}{2}a((\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}_1^\pm + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}_0^\pm + \hat{e}_0))$ .

Comme  $p$  divise  $c$ , le nouveau dernier facteur n'intervient pas dans le calcul des coefficients.

De plus pour ce TYPE, on a  $[\hat{\delta}] = 0$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LE TYPE  $n_1$ ,  $\alpha \cup \alpha = 0$ .

### - Dans le Cas 2

Pour le TYPE  $n_1$ , la situation est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LE TYPE  $n_1$ ,  $\alpha \cup \alpha = 0$ .

### Calcul de $\alpha_k \cup \alpha_j$

Ce cup-produit intervient dans le Cas 3 pour tous les TYPES. Le déroulement de la preuve est la même que pour  $p = 2$ . Il faut maintenant tenir compte des signes  $\pm$  et de la divisibilité par  $p$ .

TYPE  $o_i$ . Le générateur  $\alpha_k$  est alors  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ . Nous devons calculer les coefficients  $r_\ell$  et  $y_i$ .

- Calcul des coefficients  $r_\ell = \sum_w R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0$ , avec  $(\mu_{\ell,w})_0 = x_{\ell,w}$  et  $(\mu_{\ell,w})_2 = p_{\ell,w}$ .

1) Dans  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)$  interviennent  $Z_j$  et  $-Z_0$  et, dans  $Z_u$  on voit

$$\hat{q}_u - \sum_{s \geq 1} \hat{p}_{u,s} \text{card}\{t \geq s \mid x_{u,t} = q_u\}.$$

- Si  $u = j$ ,  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(x_{\ell,w}) = 0$  sauf si  $\ell = j$  et ceci pour tous les  $a_j$  indices  $w$  tels que  $x_{j,w} = q_j$ . Dans ces situations  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{j,w})_0 = 1$ .

- Si  $u = 0$ ,  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = 0$  sauf si  $\ell = 0$  et ceci pour tous les  $a_0$  indices  $w$  tels que  $x_{0,w} = q_0$ . Dans ces situations  $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{0,w})_0 = -1$ .

2)  $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{\ell,w}) = 0$  sauf si

i)  $\ell = j = k$  et pour tous les  $w$  tels que  $x_{k,w} = q_k$ . Dans ces situations on a  $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{k,w}) = -\text{card}\{t \geq w \mid x_{k,t} = q_k\}$  ;

ii)  $\ell = 0$  et pour tous les  $w$  tels que  $x_{0,w} = q_0$ . Dans ces situations on a  $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{0,w}) = -\text{card}\{t \geq w \mid x_{0,t} = q_0\}$ .

Si  $k = j$ , nous avons obtenu

$$r_k = - \sum_{\substack{w \geq 1 \\ x_{k,w} = q_k}} R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{k,w})_2 = - \sum_{w=1}^{w=a_k-1} (a_k - w) = - \frac{a_k(a_k - 1)}{2}.$$

Comme  $p \mid a_k$ , tous les  $r_k$  sont nuls. (Remarquons que ceci n'est pas vrai quand  $p = 2$ .)

• Calcul des coefficients

$$y_i = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(v_{i,1})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(v_{i,1})_0 - \varepsilon_i R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(v_{i,2})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(v_{i,2})_0.$$

Nous avons

$$(v_{i,1})_2 = t_i \text{ si } \varepsilon_i = 1 \text{ et } (v_{i,1})_2 = f_i \text{ si } \varepsilon_i = -1 ;$$

$$(v_{i,1})_0 = (v_{i,2})_2 = h; (v_{i,2})_0 = t_i.$$

Aucun de ces éléments n'intervient dans  $R(\hat{q}_u - \hat{q}_0)$ . On a que pour tout  $i$ ,  $y_i = 0$ .

- Il reste à remarquer que les calculs précédents sont valables pour les TYPES  $o_1$  et  $o_2$ .

CONCLUSION : POUR LES TYPES  $o_i$ , TOUS LES CUP-PRODUITS  $\alpha_k \cup \alpha_j$  SONT NULS.

Pour les TYPES  $n_i$ . Maintenant le générateur est  $\alpha = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$ .

• Calcul des  $r_k$ . La différence avec le paragraphe précédent est que le terme  $Z_0$  n'intervient pas. Les calculs des  $r_k$  restent les mêmes et les  $r_k$  sont nuls puisque  $p \mid a_k$ .

• Dans les  $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)$  il y a maintenant  $\frac{1}{2}\hat{t}_g$  mais  $R(\hat{q}_j - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(v_{i,1})_0 = R(\hat{q}_j - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(h) = 0$  et  $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(v_{i,1})_2 = R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(h) = 0$ . Ici aussi tous les  $y_i$  sont nuls.

CONCLUSION : POUR LES TYPES  $n_i$ , TOUS LES CUP-PRODUITS  $\alpha_k \cup \alpha_j$  SONT NULS.  $\square$

**8.2. Les cup-produits, pour  $p > 2$ ,  $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z}_p)$ .** Il suffit de considérer les TYPES  $o_1$  et  $n_2$ , car dans le cas non orientable,  $H^3(M, A)$  à coefficients dans un anneau  $A$  vaut  $A/2A$ . Il est nul si  $A = \mathbb{Z}_p$  avec  $p > 2$ .

On rappelle que si  $f$  est un 1-cocycle,  $g$  un 2-cocycle, et  $s$  un 3-simplexe de faces  $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $s_1 = (v_0, v_2, v_3)$ ,  $s_2 = (v_0, v_1, v_3)$  et  $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$  alors  $f \cup g(s) = f(v_0, v_1)g(s_0)$ , et on trouve  $(v_0, v_1)$  en prenant la dernière arête de  $s_2$  ou  $s_3$ , i.e.  $(v_0, v_1) = (s_2)_2 = (s_3)_2$ .

Mais aussi, si  $g$  est un 2-cocycle,  $f$  un 1-cocycle et  $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  un 3-simplexe de faces  $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $s_2 = (v_0, v_2, v_3)$  et  $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$ , où les  $v_i$  sont les sommets, alors  $g \cup f(s) = g(s_3)f(v_2, v_3)$ . On trouve  $(v_2, v_3)$  en prenant la première arête de  $s_1$  ou de  $s_0$ , i.e.  $(v_2, v_3) = (s_1)_0 = (s_0)_0$ .

Dans ces dimensions de cocycles, on a  $f \cup g = (-1)^{1 \times 2} g \cup f = g \cup f$ .

Cette sous-section prouve le théorème 10.

Preuve. **Calcul de  $\theta_i \cup \varphi_j$**

Ces cup-produits interviennent dans les trois Cas.

TYPE  $o_1$ ,  $\theta_i = [\hat{t}_i]$ ,  $1 \leq i \leq 2g$  et  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ ,  $1 \leq j \leq 2g$ .

Comme pour  $p = 2$ , on trouve  $R(\hat{t}_i) \cup R(\hat{v}_j) = 0$  sauf

- si  $j$  est impair,  $R(\hat{t}_{j+1}) \cup R(\hat{v}_j) = N'_{j,2}$

- si  $j$  est pair  $R(\hat{t}_{j-1}) \cup R(\hat{v}_j) = N_{j,2}$ .

Pour  $p > 2$ , on a

- pour  $j$  impair,  $T'(N'_{j,2}) = -\epsilon$  d'où  $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$
- pour  $j$  pair,  $T'(N'_{j-1,2}) = \epsilon$  d'où  $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$ .

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LE TYPE  $o_1$ , ON A

- POUR  $j$  IMPAIR  $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$
- POUR  $j$  PAIR  $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$ .

TYPE  $n_2$ .

On a  $\theta_i = [\hat{t}_i - \hat{t}_1]$ ,  $i > 1$ , et  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ ,  $j > 1$ . Pour le TYPE  $n_2$ , tous les  $\varepsilon_j$  sont égaux à  $-1$ . Le relevé de  $\theta_i$  n'est plus le même que pour  $p = 2$ , mais on a encore  $R(\hat{t}_i - \hat{t}_1) \cup R(\hat{v}_j) = 0$  sauf si  $i = j$ . De plus on a  $T'(N'_{j,2}) = \epsilon$ , d'où la conclusion :

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LE TYPE  $n_2$ , ON A  $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ , ET 0 SINON.

**Calcul de  $\theta_i \cup \beta$ ,  $\alpha \cup \beta$ ,  $\alpha \cup \varphi_j$**

Ces cup-produits n'interviennent que pour le TYPE  $o_1$  dans le Cas 1.

La preuve est exactement la même que pour  $p = 2$ , d'où la conclusion :

CONCLUSION : ON A TOUJOURS  $\theta_i \cup \beta = 0$ ,  $\alpha \cup \beta = \gamma$ ,  $\alpha \cup \varphi_j = 0$ .

**Calcul de  $\alpha_i \cup \beta_k$**

Ces cup-produits n'interviennent que dans le Cas 3. Les calculs suivants ne dépendent pas des TYPES.

Comme pour  $p = 2$ , le seul 3-simplexe  $s$  tel que  $R(\hat{\mu}_k)(s_0) = 1$  est  $s = M_{k,1}^\pm$ . On a  $s_3 = P_{k,1}^\pm$  et  $(P_{k,1}^\pm)_2 = C_k^\pm$ . Dans le relevé de  $\alpha_i$  apparaît seulement (via  $Z_k$ )  $C_k^+$ , affecté du coefficient  $-v_k$ , si  $i = k$ .

Du fait que  $a_k u_k - b_k v_k = 1$  et que  $p$  divise  $a_k$ , on  $-v_k = b_k^{-1}$  dans  $\mathbb{Z}_p$ . On vérifie que  $T'(M_{k,1}^\pm) = \zeta_k$  et on a  $\gamma = [\hat{\zeta}_k]$ .

CONCLUSION : DANS LE CAS 3, POUR LES TYPES  $o_1$  ET  $n_2$ ,  $\alpha_i \cup \beta_k = 0$  SAUF SI  $i = k$  ET DANS CETTE SITUATION ON A  $\alpha_k \cup \beta_k = b_k^{-1} \gamma$ .

**Calcul de  $\alpha_k \cup \varphi_j$**  Ces cup-produits n'interviennent que dans le Cas 3.

TYPE  $o_1$ ,  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ ,  $1 \leq k \leq m$  et  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ ,  $1 \leq j \leq 2g$ .

La preuve est exactement la même que pour  $p = 2$ , d'où la conclusion :

CONCLUSION : DANS LE CAS 3, POUR LE TYPE  $o_1$ , TOUS LES CUP-PRODUITS  $\alpha_k \cup \varphi_j$  SONT NULS.

TYPE  $n_2$ ,  $\alpha_k = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$ ,  $0 \leq k \leq m$  et  $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ ,  $1 < j \leq g$ .

Comme pour  $p = 2$ , les seuls 3-simplexes  $s$  tels que  $R(\hat{v}_j)s_0 \neq 0$  sont  $s = N_{j,1}$  et  $s = N'_{j,1}$  car on a  $(N'_{j,1})_0 = (N_{j,1})_0 = v_{j,1}$ . On a  $((N_{j,1})_3)_2 = (F_{2j-2})_2 = S_{2j-2}^-$  et  $((N'_{j,1})_3)_2 = (F_{2j-1})_2 = S_{2j-1}^+$ .

- Le relevé de  $\alpha_k$  est maintenant

$R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) = Z_k - \sum_{\ell=0}^k (\hat{e}_{2g+\ell} + \hat{S}_{2g+\ell}^\pm) - \frac{1}{2}(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}_{2g-1}^\pm)$ . Par conséquent, on obtient  $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)((N_{j,1})_3)_2 = 0$ ,  $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)((N'_{j,1})_3)_2 = -\frac{1}{2}$  lorsque  $j = g$  d'où  $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) \cup R(\hat{v}_j) = -\frac{1}{2}T'(N'_{g,1})$ . Comme  $T'(N'_{g,1}) = \epsilon$ , on a la conclusion :

CONCLUSION : DANS LE CAS 3, POUR LE TYPE  $n_2$ , POUR TOUS INDICES  $k$ , ON A  $\alpha_k \cup \varphi_g = -\frac{1}{2}\gamma$ .  $\square$

REMARQUE 24. Les quelques différences de signe avec les résultats obtenus précédemment (voir par exemple [5]) s'expliquent par le fait que les générateurs notés  $\alpha$  sont de signe opposé. De plus les  $\beta_k$  qui apparaissent naturellement ici sont des multiples des générateurs notés  $b_k$  dans [5], ce qui modifie certains produits par ces facteurs. Pour  $n_2$  nous avons choisi (pour éviter de distinguer inutilement les cas  $n = 0$  et  $n > 0$ ) des générateurs du  $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$  différents, mais ces perturbations sont tuées dans les produits.

9. Figures

Figure 1: Décomposition cellulaire, TYPE  $\mathcal{O}_1$

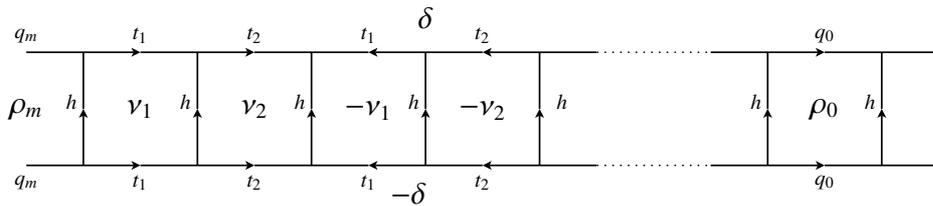


Figure 2: Décomposition cellulaire, TYPE  $\mathcal{O}_2$

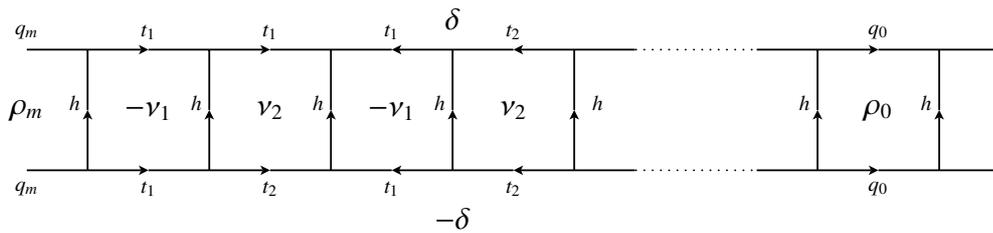
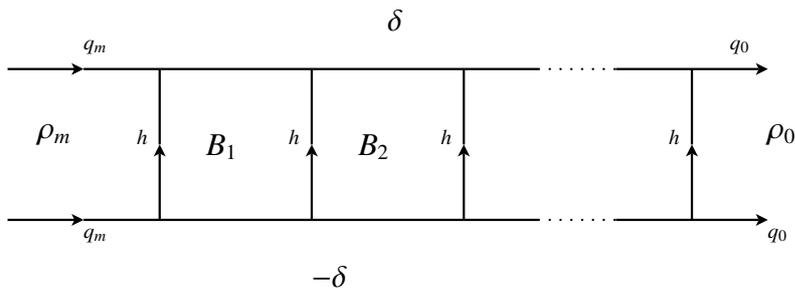
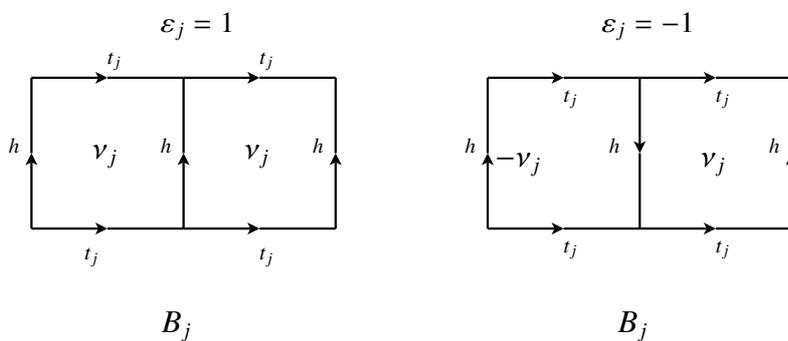


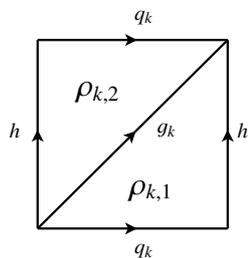
Figure 3: Décomposition cellulaire, TYPE  $n_i$



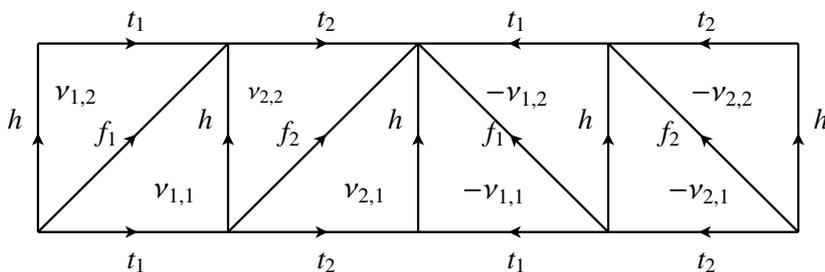
**Figure 4: Description de  $B_j$  pour les TYPES  $n_1, n_2$**



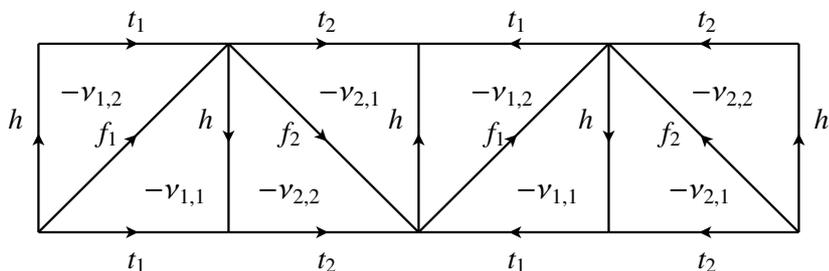
**Figure 5: Décomposition simpliciale de  $\rho_k$**



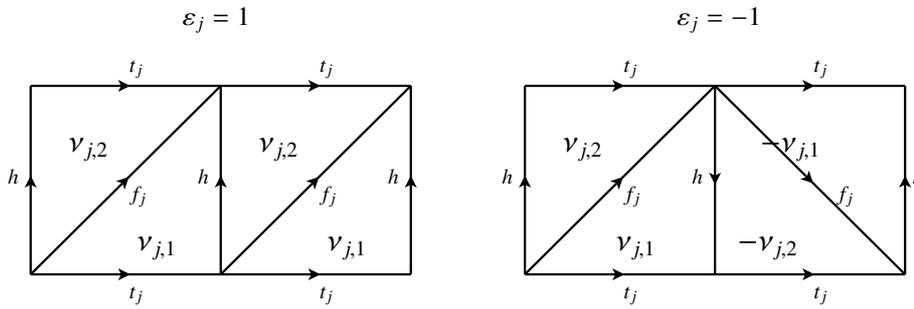
**Figure 6: Décomposition simpliciale de  $v_1$ , TYPE  $o_1$**



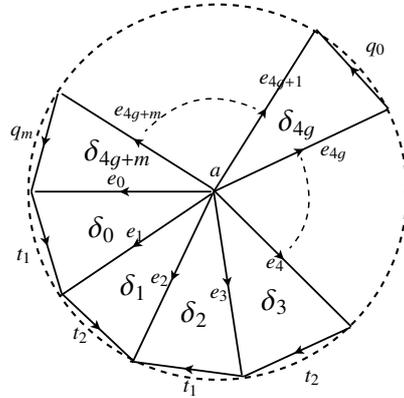
**Figure 7: Décomposition simpliciale de  $-v_1$ , TYPE  $o_2$**



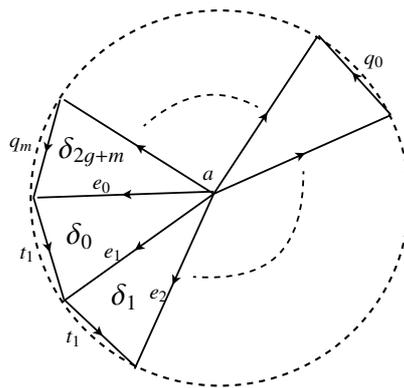
**Figure 8: Décomposition simpliciale de  $-v_j$  quand  $\varepsilon_j = 1$  et quand  $\varepsilon_j = -1$**



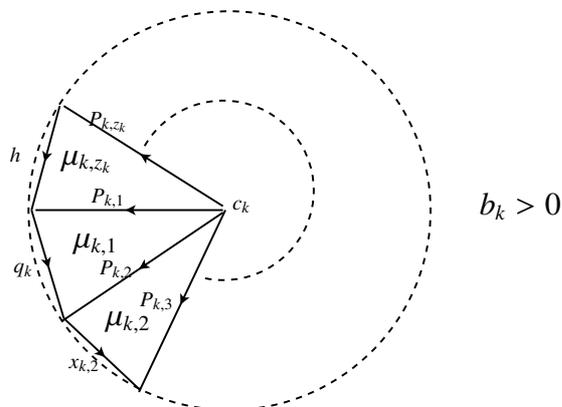
**Figure 9: Décomposition simpliciale de  $\delta$ , TYPE  $o_i$**



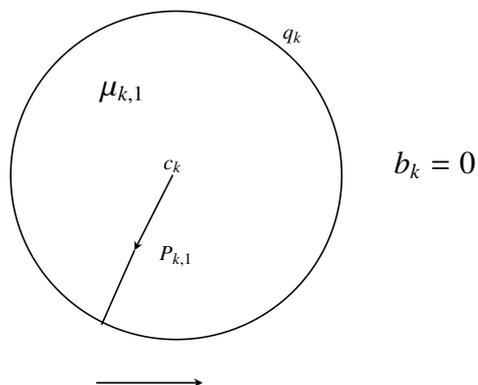
**Figure 10: Décomposition simpliciale de  $\delta$ , TYPE  $n_i$**



**Figure 11: Décomposition simpliciale de  $\mu_k$  pour  $b_k > 0$**

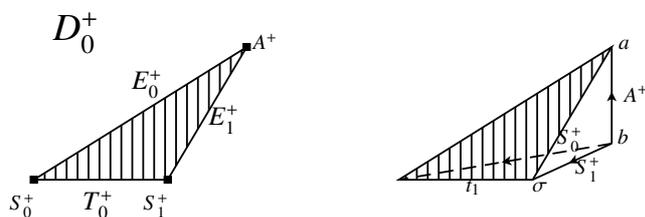


**Figure 12: Décomposition simpliciale de  $\mu_k$  pour  $b_k = 0$**

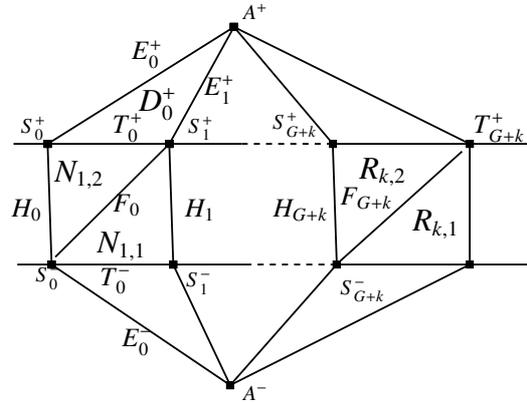


**Figure 13: Codage des points carrés sur le 3-simplexe  $D_0^+$**

Les figures suivantes sont des projections des décompositions simpliciales de chacun des 3-simplexes. Les sommets sont des points carrés. Ils représentent la projection d'une arête. Ci-dessous, nous donnons en exemple le codage des points carrés sur le 3-simplexe  $D_0^+$ .

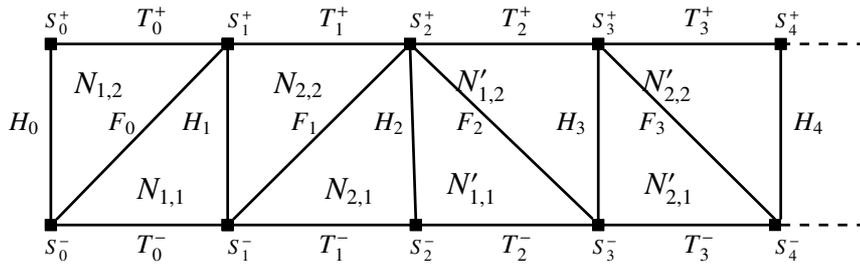


**Figure 14: Parties communes des décompositions simpliciales de  $\epsilon$  pour tous les TYPES**

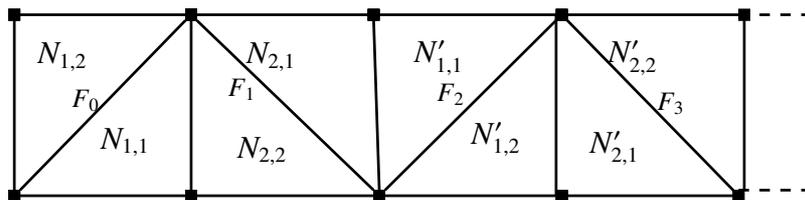


Les quatre figures suivantes sont les détails de la partie centrale de la figure ci-dessus, pour le début de la longue relation.

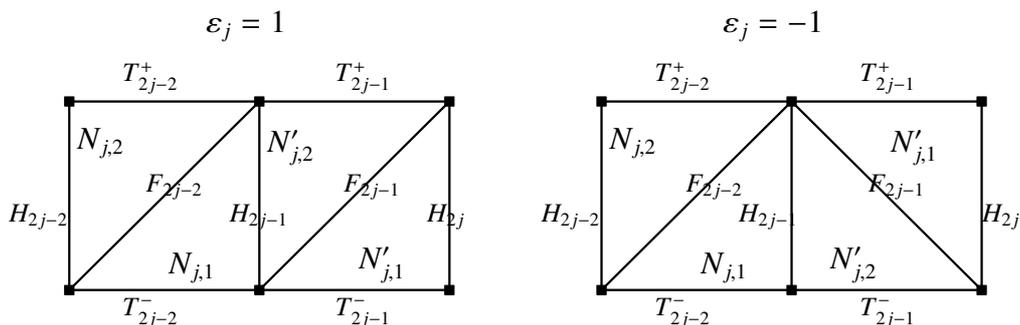
**Figure 15: Partie centrale pour la décomposition simpliciale de  $\epsilon$  pour le TYPE  $o_1$**



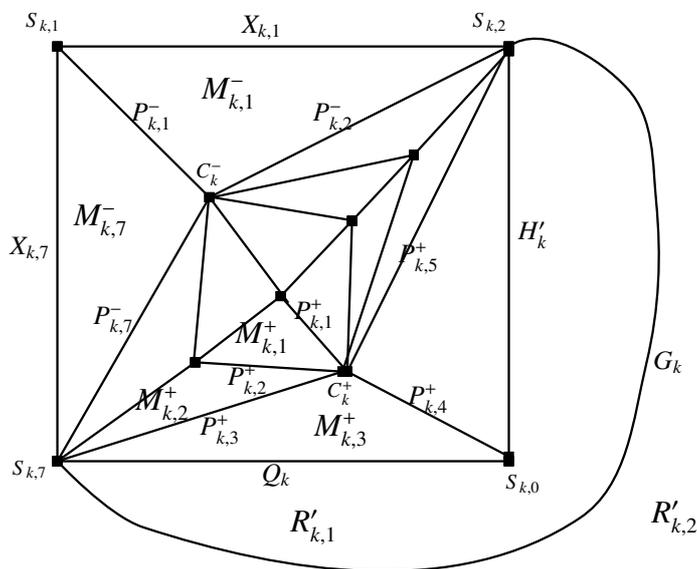
**Figure 16: Partie centrale pour la décomposition simpliciale de  $\epsilon$  pour le TYPE  $o_2$**



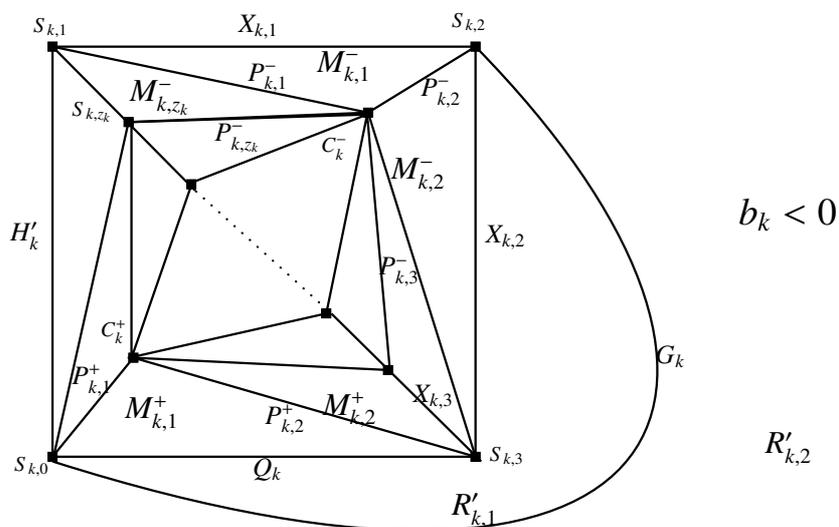
**Figure 17: Partie centrale pour la décomposition simpliciale de  $\epsilon$  pour les TYPES  $n_i$**

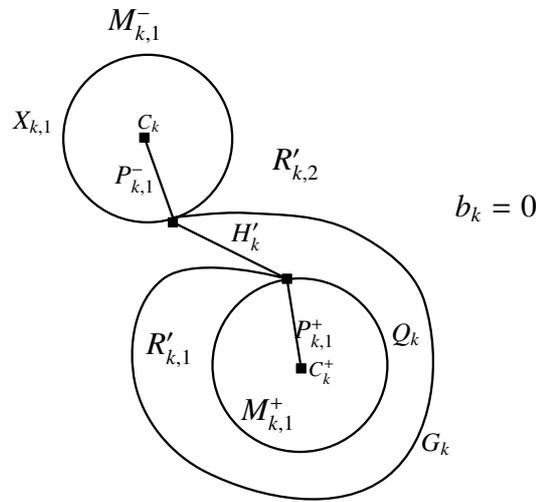


**Figure 18: Décomposition simpliciale de  $\zeta_k$  pour  $b_k > 0$  et  $a_k = 5, b_k = 2, w_{k,2}(q_k, h) = q_k^3 h q_k^2 h = x_{k,1} \cdots x_{k,7}$**



**Figure 19: Décomposition simpliciale de  $\zeta_k$  pour  $b_k < 0$**



**Figure 20: Décomposition simpliciale de  $\zeta_k$  pour  $b_k = 0$** 


---

### References

- [1] K. Aaslepp, M. Drawe, C. Hayat-Legr, C. A. Szczesny and H. Zieschang: *On the cohomology of Seifert and graph manifolds*, *Topology and its Applications* **127** (2003), 3–32.
- [2] A. Bauval and C. Hayat: *L’anneau de cohomologie des variétés de Seifert*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **351** (2013), 81–85.
- [3] J. Bryden, C. Hayat, H. Zieschang and P. Zvengrowski: *L’anneau de cohomologie d’une variété de Seifert*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **324** (1997), 323–326.
- [4] J. Bryden, C. Hayat, H. Zieschang and P. Zvengrowski: *The cohomology ring of a class of Seifert manifolds*, *Topology and its Applications* **105** (2000), 123–156.
- [5] J. Bryden and P. Zvengrowski: *The cohomology ring of the orientable Seifert manifolds.II*, *Topology and its Applications* **127** (2003), 123–156.
- [6] D.L. Gonçalves, C. Hayat and P. Zvengrowski: *The Borsuk-Ulam theorem for manifolds, with applications to dimensions two and three*, *Proceedings of the International Conference Bratislava Topology Symposium (2009) “Group Actions and Homogeneous Spaces”* editors J. Korbaš, M. Morimoto, K. Pawłowski.
- [7] F. González-Acuña and A. Ramirez: *A composition formula in the rank two free group*, *Pro. Amer. Math.* **127**, (1999), 2779–2782.
- [8] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [9] C. Hayat, S. Matveev and H. Zieschang: *Primitive elements in the free product of two finite cyclic groups*, *Experiment. Math.* **10** (2001), 497–508.
- [10] M. Lustig, E-M. Thiele and H. Zieschang: *Computer calculation of the degree of maps into Poincaré homology sphere*, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **65**, (1995), 277–281.
- [11] P. Orlik: *Seifert Manifolds*, *Lecture Notes in Math.* **291**, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [12] R.P. Osborne and H. Zieschang: *Primitives in the freegroup on two generators*, *Invent. Math.* **63** (1981), 17–24.
- [13] H. Seifert: *Topologie Dreidimensionaler Gefaserner Räume*, (German) *Acta Math.* **60** (1932), 147–238; english translation appears as “Topology of 3-dimensional fibered spaces” in the book “A textbook of topology” by H. Seifert and W. Threlfall *Academic Press*, 1980.
- [14] H. Seifert and W. Threlfall: *A textbook of topology*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.
- [15] S. Tomoda and P. Zvengrowski: *Remarks on the cohomology of finite fundamental groups of 3-manifolds*, *The Zieschang Gedenkschrift*, 519–556, *Geom. Topol. Monogr.*, 14, *Geom. Topol. Publ.*, Coventry, 2008.

Anne Bauval  
Institut de Mathématiques de Toulouse  
Equipe Emile Picard, UMR 5580  
Université Toulouse III  
118 Route de Narbonne, 31400 Toulouse  
France  
e-mail: [bauval@math.univ-toulouse.fr](mailto:bauval@math.univ-toulouse.fr)

Claude Hayat  
Institut de Mathématiques de Toulouse  
Equipe Emile Picard, UMR 5580  
Université Toulouse III  
118 Route de Narbonne, 31400 Toulouse  
France  
e-mail: [hayat@math.univ-toulouse.fr](mailto:hayat@math.univ-toulouse.fr)