



Title	Blalockの質的安定条件およびBonacich=Baileyの”Key Variables”をめぐって：研究ノート
Author(s)	白倉, 幸男
Citation	大阪大学人間科学部紀要. 1982, 8, p. 329-356
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/6462
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

Blalockの質的安定条件およびBonacich=Bailey
の “Key Variables” をめぐって

—研究ノート—

白 倉 幸 男

Blalock の質的安定条件および Bonacich=Bailey の “Key Variables” をめぐって

—研究ノート—

1. はじめに

本稿の目的は、(a)Simon の流れをくむ Blalock および Bonacich=Bailey の質的分析の吟味、(b)質的な行列理論による彼らの意図の位置づけと展開、(c)その社会学的意義の解明、にある。Simon 自身の分析も、この過程で批判的に解析的位置づけが与えられる。すなわち、質的な変数間の関係を安定性を介して確定し、理論的インプリケーションを導出することをねらいとする。

Blalock は年来探究してきた識別や因果性の問題の自然な延長として、『*Theory Construction*』で、動学的理論化の途を探るにいたった¹⁾。その中では、社会学の変数間の影響の方向を手がかりに。ループ、一対相互因果 (pair-wise reciprocal causation)、逐次的外生変数 (recursive exogenous variable) の着想が、システムの質的安定性をめぐって展開された。量的でなく、質的な洞察にもとづく安定性の吟味は、Blalock によって重要性が認められて、初めて社会学的考察の対象になったのである。

しかしながら、安定性に関する純粋に質的なアプローチをとった場合に Blalock の分析は、本質的な部分を含むほどに十分に行なわれているとは言い難い。この原因としては、Blalock が安定性の必要条件のみを考察していることがあげられる。この背後には、Blalock が得意とする因果推論の図的表示にこだわりすぎたこともあるかもしれない。ともかく、国際政治を分析する Richardson の『*Arms and Insecurity*』や Simon の『*Models of Man*』に触れながら²⁾、特に後者の Simon-Homans モデルの非線型の定式化に言及しないのは不思議でさえある。そのみならず、非線型の Simon-Homans モデルは Blalock の安定条件すら満していないからである。

他方、やはり動学的システムを中心に置きながらも Bonacich=Bailey は、Blalock とは、やや異なった視点からの問題を提起する。たとえば、Zetterberg が唱えた所謂「公理的社会理論 (axiomatised social theory)」³⁾ は、Aが増すにつれてBが増す、というような、いくつかの社会学の命題から何らかの推論をしようとするものであった、Aが増せば、Bが増し、他方、Bが増せば、Cが増す、とする。このとき、Aが増せば、Cが増す、という命題は、必ずしも妥当なものではないことが Costner=Leik によって統計学的に示されている⁴⁾。Bonacich=

Baileyの解明しようとした主眼点は、理論によってシステム内の2変数間の関係（正、負、ゼロ）が仮定されたとき、ある変数が変化した場合、システムの変化によって、理論的には何らの推論を行なうことが不可能だ、ということにある⁹⁾。Bonacich=Baileyは、このような変数をkey variableとよび、他のものをnon-key variableとよんでいる。彼らのこの分類もまた、動学的システムの質的安定性の議論の上に築かれている。ループの概念は、Blalockのものと同じものであり、安定性の判別において重要な役割を果たしている。

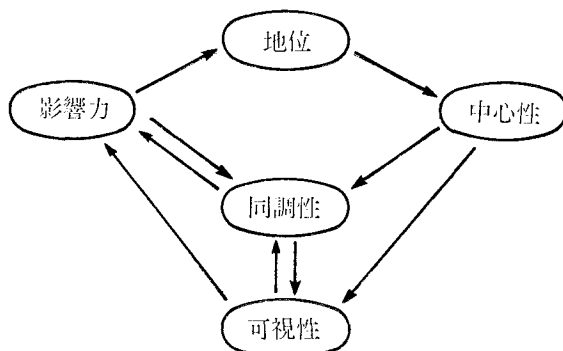
Bonacich=BaileyがBlalockと異なる点は、質的比較静学をどのように考えるかにある¹⁰⁾。もちろん、両者とも質的比較静学という考え方を明晰に打ち出した訳でもなく、ただ、その周辺に近づいた、ということである。この近づき方において、Bonacich=Baileyの方がBlalockより近きにあるといえる。けれども、Bonacich=Baileyは、質的推論の重要性を唱えたそのすぐ後で、実数性を変数の条件として再びもち出してくるという不正確な議論を展開する。

しかし、Bonacich=Baileyは、動学と比較静学との対応を明らかにしようとした点でBlalockにまさる。これは、対応原理とよばれ動学的システムにおいては、均衡への近づく経路によって、システムの行動が全く異なるものとなることが指摘されている¹¹⁾。対応原理が意味をもってくるのは、このような場合である。比較静学そのものは、安定性とは無関係に行なうことができるが、このような均衡の移動の分析は均衡点の安定が前提とされぬ限りほとんど価値がない。というのは、均衡点の安定性が満たされぬならば、新均衡点に収束するものかどうかを判別しえぬからである。比較静学において捨象された時間的経路が安定性にかかわってくるからである。

Bonacich=Baileyの分析は、質的安定性をア・プリオリに想定しており、その意味は不問のままにされている。他方、Blalockの質的安定性の識別は、必要条件のみにもとづいている。実質面でも、BlalockがHopkinsの小集団理論を念頭におくのに対し、Bonacich=BaileyはBalesおよびHomansの小集団理論を例証に用いるなどの共通性がみられる⁹⁾。この意味で、両者とも古典的なSimonの『*Models of Man*』の思想的系譜上にあるといえる。

2. Blalockの質的安定条件

Blalockがたえず言及するHopkinsの小集団理論では、同調性・影響力・中心性・地位・可視性、の5変数からなる因果関係が析出されている（図2・1）¹⁰⁾。図の中で実線の矢印は、正の因果関係を表わし、同時に因果の方向を示している。これについてBlalockがいだいた疑問は、このような正の因果関係のみから構成されるシステムが安定たりうるか、と



(注) Hopkins, T. (1964). p. 52 より修正。

図2・1 Hopkins モデル

いうことにあった¹¹⁾。

Hopkins 理論では、このような正の関係を中和する過程が明確でない。もちろん、情報の不十分さなどの多くの制約的存在、他者との競争や結託の出現、システムのアウトプットのチェック・メカニズムの存在、等の中和過程が背後に暗黙にあるということはあるであろう¹²⁾。このような中で、いくつかの先行する理論に触発されながら Blalock はこの問題をまず線型動学システムに帰着させることにより解決の糸口をさぐろうとした¹³⁾。このことの意味は、他の科学における考え方と異なるものではない¹⁴⁾。そこで、Blalock のとった方法に触れてみよう。

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
 \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

この方程式系において、 dx_i/dt ($i=1, \dots, n$) は、変数 x_i の調整速度を表わす¹⁵⁾。ただし、ここでは各 a_{ij} は定数とする。(2.1) の解は行列 $A = (a_{ij})$ の特性方程式、 $\phi(\lambda) \equiv |\lambda E - A| = 0$ によって規定されている。

$$\phi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0
 \tag{2.2}$$

この特定方程式の根の実部がすべて負となれば、このシステムは安定しており、初期条件に依存しない¹⁶⁾。

$\phi(\lambda)$ は明らかに n 次多項式である。そこで、

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + h_1 \lambda^{n-1} + h_2 \lambda^{n-2} + \cdots + h_n \quad (2.3)$$

とおく。また、 A の k 次首座小行列式を $A^{(k)}$ で表わす。このとき、(2.2) および (2.3) の両辺を順次微分し、 $\phi_{(n-k)}(0)$ を $k=1, \dots, n-1$ まで求め、さらに、 $\phi(0)$ を求める。この結果から次式を得る。

$$h_k = \frac{\phi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = (-1)^k \Sigma A^{(k)} \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (2.4)$$

$$h_n = (-1)^n |A| \quad (2.5)$$

(2.4) および (2.5) の形から明らかなように (2.3) の係数 $h_k (k=1, \dots, n)$ は、すべて実数である。

また、任意の実多項式は実1次式と、判別式が負となる実2次式とに分解できる¹⁷⁾。すなわち、 $(x+c)$ 、 $(x^2-2ax+a^2+b^2)$ ($b \neq 0$) の形に分解することができる。よって、 $\phi(\lambda)=0$ の根の実部 $\text{Re} \lambda$ がすべて負のとき、根と係数との関係から、少なくとも次式が成立する。

$$h_1 = (-1) \Sigma A^{(1)} = - \sum_{i=1}^n a_{ii} > 0 \quad (2.6)$$

$$h_n = (-1)^n |A| > 0 \quad (2.7)$$

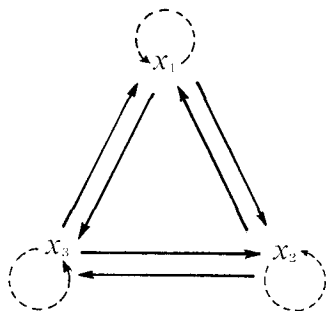
(2.6)、(2.7) は、それぞれ次の各式と同値である。

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} < 0 \quad (2.8)$$

$$\text{sgn} |A| = \text{sgn} (-1)^n \quad (2.9)$$

ここで得られた (2.8) および (2.9) が、それぞれ Blalock の言う条件 I、II である¹⁸⁾。これは、安定のための必要条件であって十分条件ではない。

ところで、Blalock は3変数 x_1 、 x_2 、 x_3 からなるシステムを考える。このシステムの係



(注) Blalock, H. (1969). p. 111 より修正。
ただし、この図ではすべての $a_{ij} (i \neq j)$ は正としてある。

図2・2 一般の2変数モデル

数行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,3}$ の各要素の符号のみから安定性の判定を行なう、というのが Blalock の基本的思想である。 $\sum_{i=1}^3 a_{ii} < 0$ 、であることを質的に保証するためには、 $a_{ii} \leq 0$ ($i=1, 2, 3$) かつ少なくとも 1 つの $a_{ii} < 0$ 、であることを要する。というのは、純粋に質的な加法の演算では、異符号間の和の符号の判定をすることはできぬからであった。しかるに、Blalock はあたかもこのようなことが可能であるかのように、異符号のものの和の符号の判定を試みている。これは、量的情報が得られぬ場合、不可能である。

条件Ⅱに関して、 $|A|$ を展開する。

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (2.10)$$

上式の各項の直観的意味は次のようなものである¹⁹⁾。図2・3において、 $a_{12}a_{23}a_{31}$ は $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ の反時計まわりのループのスロープの積、同様に、 $a_{13}a_{21}a_{32}$ は $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ は時計まわりのものである。また、 $a_{13}a_{22}a_{31} = a_{22}(a_{13}a_{31})$ ゆえ、 $a_{13}a_{31}$ は $x_1 \rightleftharpoons x_3$ という互酬関係を表わす。これもループの短いものである。 a_{ii} は x_i のフィードバックを表わし、最短のループと言える。

質的情報を最優先する Blalock の思想では、スロープという量的表現は控えるべきである。また、ループの表記上も添字の順序がループの順序と 1 対 1 に対応するよう、 $x_i \rightarrow x_j \rightarrow x_k \rightarrow x_i$ のとき、 $a_{ik}a_{kj}a_{ji}$ と統一して表わすことにする。

Bonacich=Bailey との比較の上から、そして、Blalock の思想の吟味の上からも、図2・2の図示に $\text{sgn}a_{ij}$ を反映させると都合がよい²⁰⁾。すなわち、 a_{ij} に対応する矢印を、 $\text{sgn}a_{ij}$ に応じてそれぞれ次のように表示しなおす。

- (i) $\text{sgn}a_{ij} > 0$ ならば、 $\longrightarrow$ (実線の矢印)
- (ii) $\text{sgn}a_{ij} < 0$ ならば、 $\dashrightarrow$ (破線の矢印)
- (iii) $\text{sgn}a_{ij} = 0$ ならば、矢印なし。

また、フィードバックを別にして、ループが 1 個の場合について、次の A が考えられる²¹⁾ (図2・3)。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

ここで、理論的ないし先見的に a_{ii} はすべて負であることが判明しているものとする。このとき、条件Ⅰは自動的に満たされる。

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} \quad (2.12)$$

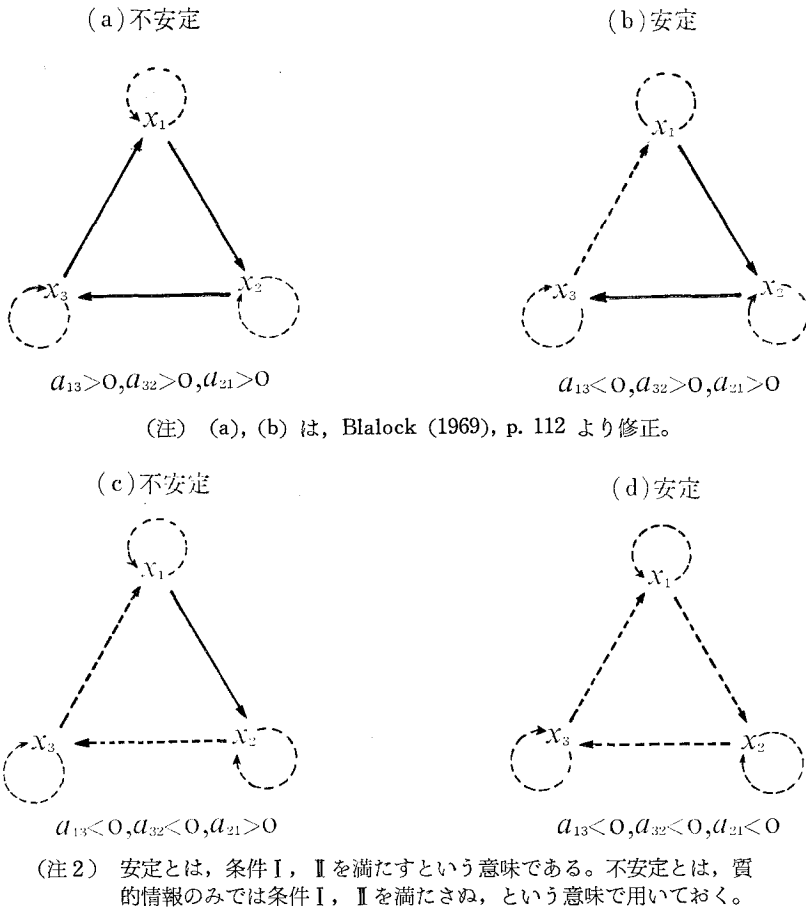


図2・3 Blalock の安定条件

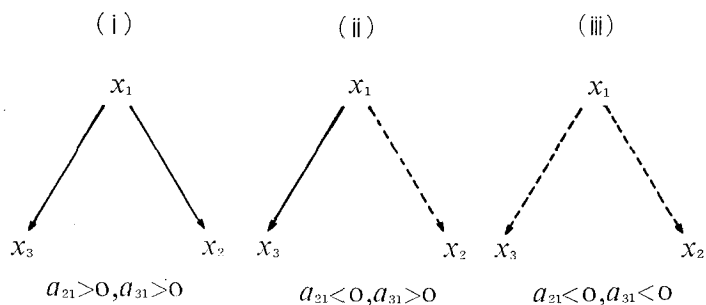
条件Ⅱについて, (a) $a_{13} > 0, a_{32} > 0, a_{21} > 0$ (図2・3(a)), (b) $a_{13} < 0, a_{32} > 0, a_{21} > 0$ (図2・3(b)), の2つが考察される。(なお, 本節では特にことわりがない限り, 添字をサイクリックに変えても本質に影響を与えない。)

$\text{sgn}|A| < 0$ となるのは, (a)では, $|a_{11}a_{22}a_{33}| > a_{13}a_{32}a_{21}$ のとき, (b)ではつねに, であることがわかる。大小関係の考慮が必要となる(a)の場合, 質的情報 $\text{sgn}a_{ij}$ から安定性を識別することはできない。質的情報のみから Blalock の条件Ⅰ, Ⅱを満たさぬ(a)の場合を不安定とよんでおく。同様にして, Blalock の吟味の及ばぬ (c) $a_{13} < 0, a_{32} < 0, a_{21} > 0$ (図2・3(c)), (d) $a_{13} < 0, a_{32} < 0, a_{21} < 0$ (図2・3(d)), について考察する。結局, 実質的に, (c)は(a), (d)は(b)と同じこととなる。要するに, 質的情報のみから条件Ⅱが満たされるのは, (b)および(d)の場合のみである。

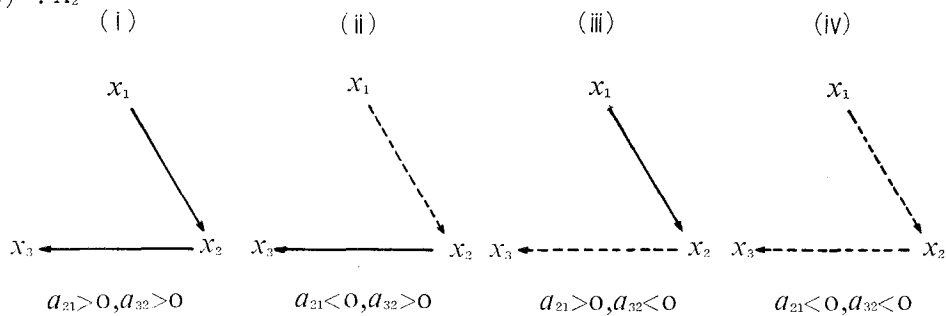
ループのない場合は考察されていないが, 社会学における因果推論の基本形であるから,

ここで吟味しておくのがよい (図2・4(a)―(c))²²⁾。

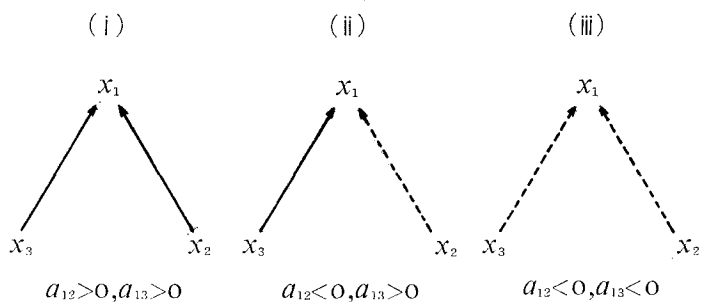
(a) : A_1



(b) : A_2



(c) : A_3



(注) フィードバックの矢印は、わざわざしいので省略した。図の中に、安定か不安定か記入していないのは、安定性の識別がフィードバックのみに依存するからである。

図2・4 因果推論と安定性

$$\begin{aligned}
 (a) \quad A_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 (c) \quad A_3 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで、 A_1, A_2, A_3 は図2・4 の (a), (b), (c)にそれぞれ対応する。

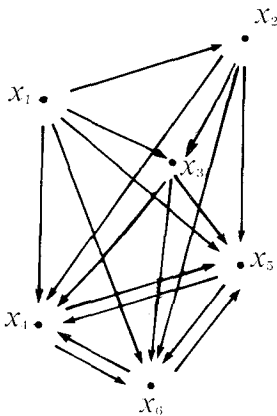
$$\operatorname{sgn}|A_i| = a_{i1}a_{i2}a_{i3} \quad (i=1, 2, 3) \tag{2.14}$$

よって、 $a_{ii} < 0$ ($i=1, 2, 3$) のとき A_1, A_2, A_3 のすべてが、条件Ⅰ, Ⅱを満たす。このとき、Blalock の意味でシステムは安定である。驚くことには、図2・4の中で矢印で示された因果性は、システムの安定性には無関係である。言いかえれば、システムの安定性の識別はフィードバックの性質にのみよっている。これは常識的感覚からやや乖離した結論である。 A_1 および A_2 が下三角行列、 A_3 が上三角行列となる場合でも、 $\operatorname{sgn}|A_i| = a_{i1}a_{i2}a_{i3}$ ($i=1, 2, 3$) であるから、安定性に変化は見られない。

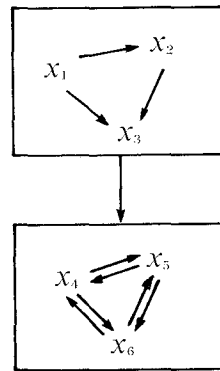
図2・3 および 図2・4 が3変数のシステムで基本となるものである。これに新たなリンク(図の矢印)を加えたものを順次考察してゆけば良い。

一般の多変数の場合の Blalock の安定条件の中で最も重要なものは、(a)逐次外生変数システム、および、(b)多重ループ・システム、である²³⁾。

(a) 実際の図



(b) ブロック図

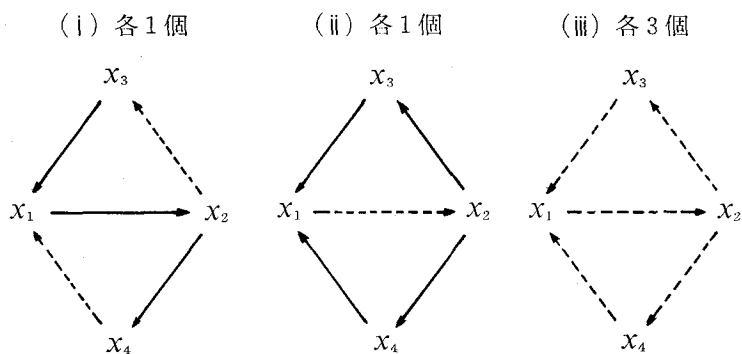


(注) (b) は、Blalock (1969). p. 120. より修正。

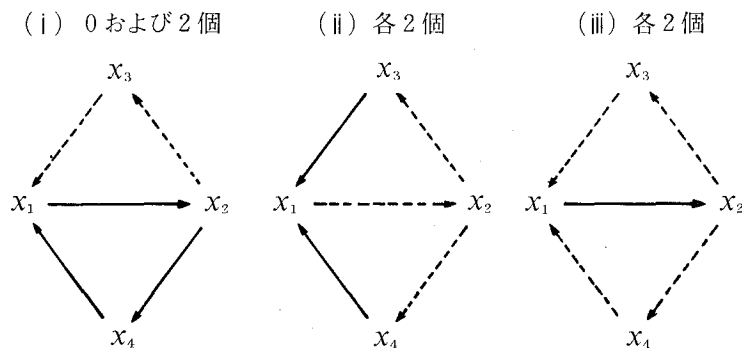
ここで、 x_1, x_2, x_3 が逐次外生変数、フィードバックの矢印は省略。

図2・5 逐次外生変数システム

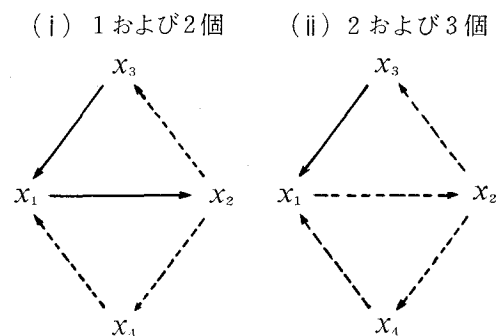
I. 各ループ内の負のリンクの数が奇数個(安定)



II. 各ループ内の負のリンクの数が偶数個(不安定)



III. 1つのループ内の負のリンクの数が奇数個、(不安定)
もう1つのループ内では同じく偶数個



(注) この図は、とりうるすべての場合を示したものではなく、ループが2, 3個の場合について示したものである。フィードバックの表示は省略。

図2・6 多重ループ・システム

逐次外生変数システムは、例えば、図2・5のように表わせる。このときAは次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{このとき, } |A| = a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

よって、逐次的外生変数のフィードバックが判明していれば、システム全体の安定性は、残りの変数だけについて考えればよいというのである。

多重ループ・システムで最も単純な 図2・6 についてすら、Blalock は分析を深めていない。図2・6 を行列Aで表わす。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

このとき、

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{33}a_{21}(a_{14}a_{42}) + a_{44}a_{21}(a_{13}a_{32}) \quad (2.18)$$

ここで 図2・6 の x_3 と x_4 を入れかえても議論の本質は不変のままである。理論的ないし先見的に $a_{ii} < 0$ ($i=1, \dots, 4$) であることが知られているとしよう。すると、(2・18) の第1項は正となる。第2項、第3項ともに a_{21} が現われる。

故に、条件Ⅱが満される場合を調べるには起りうるケースの半分の16通りを調べれば十分である。(i) $a_{21} > 0$ のとき、 a_{14} と a_{42} が異符号、かつ、 a_{13} と a_{32} が異符号、もしくは、(ii) $a_{21} < 0$ のとき、 a_{14} と a_{42} が同符号、かつ、 a_{13} と a_{32} が同符号のときである。(i)、(ii)をまとめて表わせば、各ループ内にある負のリンクの数がそれぞれ奇数のとき、Blalockの意味でシステムは安定、である。

すべての a_{ii} が負となる場合は多くの社会学的条件の下で想定しうる状況であり、このとき、Blalock の条件Ⅰは満されている。この状況の下で、多重ループとループに属さぬリンクが存在する一般のシステムを考える。

まず、4変数の場合をとりあげる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

このとき、 $|A|$ は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} |A| = & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Blalock の要請する基本方針は符号のみによる安定性の識別にあった。しかるに、この基本方針の支えとなる代数学的立場を破却することなくして Blalock の思想を展開しえない。この観点からして、決定的に代数学的立場を転換したのは、Quirk らの考察であった²⁴⁾。この中に含まれる置換による行列式の符号の識別思想こそ、Simon, Blalock そして Bonacich = Bailey と続く、質的安定性の識別の隘路を脱する途を示したものである。この思想の中に小集団の数学的理論の中で十分に解き明されなかった社会学的意味を把握する鍵が存在すると言える。それ故、ここでは、循環置換に着目し、循環置換への分解の一意性によって、 $\text{sgn}|A|$ の識別の理路を明らかにしておこう。

記号 $\approx$ で行列式の各項とその置換の対応を次のように表わすとしよう。一般の場合には、

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \approx \left(\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{matrix} \right) \quad (2.21)$$

ここで、 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ は $1, 2, \dots, n$ の1つの順序である。それゆえ、 n 次正方行列 A では (2.21) の左辺の項は $n!$ 個存在する。(2.21) の右辺の置換を σ で表わす。 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ が偶順列であるとき σ を偶置換といい $\varepsilon(\sigma) = 1$ とおく。また、奇順列のとき奇置換であるといい $\varepsilon(\sigma) = -1$ とおく。このとき、 $|A|$ は次のように表わすことができる。

$$|A| = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \quad (2.22)$$

上式において各 a_{ij} の符号は理論的ないし先見的にわかるものと想定しているから、後はすべての σ について $\varepsilon(\sigma)$ を知れば $\text{sgn}|A|$ を知ることができる途が拓かれる。

ところで任意の置換は必ず循環置換の積で表わすことができる²⁵⁾。循環置換とは、次のような置換であり、 $(j_1 j_2 \cdots j_r)$ と表わす。

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_{r-1} & j_r \\ j_2 & j_3 & \cdots & j_r & j_1 \end{pmatrix} = (j_1 j_2 \cdots j_r) \quad (2.23)$$

この記号法を用いれば、(2.20) の第1項 および 第2項はそれぞれ次のように表わすことができる。

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \approx (1) (2) (3) (4) \quad (2.24)$$

$$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \approx (1) (2) (34) \quad (2.25)$$

(2.24) の(1)は変数 x_1 のフィードバックを表わす a_{11} に対応する。(2.25) の(34)は変数 x_3 と x_4 との間にあるループを表わし、 $a_{34}a_{43}$ に対応する。同様にして、一般の場合にも行列式を展開してできた各項について、必ず、フィードバックもしくはループとの対応づけができる。

n 個のものの置換 σ を r 個の循環置換の積で表わしたとき、 r 個の循環置換がそれぞれ $S_1, S_2, \dots, S_r$ 個の要素からできているとする。このとき、各循環置換は、それぞれ $S_1-1, S_2-1, \dots, S_r-1$ の互換の積として表わすことができる²⁸⁾。従って、元の置換は、

$$n-r = \sum_{i=1}^r (S_i-1) \quad (2.26)$$

個の互換の積として表わせる。 $n-r$ が偶数のとき σ は偶置換で $\varepsilon(\sigma)=1$ 、奇数のとき $\varepsilon(\sigma)=-1$ となる。

$S_i-1 \equiv 0 \pmod{2}$ ならば、 $S_i \equiv 1 \pmod{2}$ 。それゆえ、偶数となる S_i の数が t 個のとき次式がなり立つ。

$$n-r \equiv \sum_{i: S_i \text{ は偶数}} (S_i-1) \pmod{2} \quad (2.27)$$

$$n-r \equiv \sum_{i: S_i \text{ は偶数}} (S_i+1) \pmod{2} \quad (2.28)$$

$$n-r \equiv t \pmod{2} \quad (2.29)$$

従って、(2.29) より $\varepsilon(\sigma)$ の正負の識別において、フィードバックおよび奇数個のリンクからなるループを無視することができる。つまり、偶数個のリンクから構成されるループの個数 t が $\varepsilon(\sigma)$ を決定する。

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1; & t \equiv 0 \pmod{2} \\ -1; & t \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (2.30)$$

また、もちろん、次式が成立している。

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= (-1)^t \\ &= (-1)^{n-r} \end{aligned} \quad (2.31)$$

それゆえ、(2.22) の右辺の Σ の中の項、 $\varepsilon(\sigma) a_{1i_2} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ は次のように表わせる。

$$\varepsilon(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = (-1)^{n-r} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \quad (2.32)$$

符号に関する演算規則から明らかなように、Blalock の条件Ⅱ、つまり、 $\text{sgn}|A| = \text{sgn}(-1)^n$ が成立する場合は、(2.22) の Σ 内の各項の符号が $\text{sgn}(-1)^n$ もしくは 0 となるときであり、しかも項のうち少なくとも 1 つは 0 であってはならない²⁷⁾。

ところで、(2.32) の $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ は、 r 個のフィードバックもしくはループに対応していた。これらのフィードバックもしくはループに、それぞれ奇数個ずつ、負のリンクが含ま

れているとすれば, $\text{sgn} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \cdots a_{n i_n} = \text{sgn}(-1)^r$ となる。それゆえ, 次式が成立する。

$$\text{sgns}(\sigma) a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \cdots a_{n i_n} = (-1)^n \quad (2.33)$$

同様にして, (2.22) の Σ 内の各項に対応するすべてのフィードバックもしくはループ内にそれぞれ奇数個ずつの負のリンクが含まれていれば, $\text{sgn}|A| = \text{sgn}(-1)^n$ となる。

(2.22) の Σ 内のある項がゼロとなった場合は, ループ内に含まれぬリンクが存在することを意味している。この場合, すべての項がゼロとならぬ限り, $\text{sgn}|A|$ に影響はない。

それゆえ, フィードバックをすべて負とすれば, Blalock の安定条件は, システム内のすべてのループ内に奇数個の負のリンクがあるとき満される。これが Blalock が探究を意図したものであった。それゆえ, ここでは Blalock の考察の意図を置換の循環置換への分解の一意性を用いて, 数学的に反映させるように試みた。

さて, Blalock の言う逐次外生変数は, 理論的には内生変数であり, 通常の意味での外生変数ではない。それゆえ, ループの現論が完全に展開されなかったこととも連関して, 比較静学を質的に考察することがうまく結びつくにいたらなかった。Bonacich=Bailey も質的安定性を手がかりとして, 外生変数と内生変数との区別をはっきりした上で, “key variables” なる考えを提出した。これが, Blalock の進むべき方向であったと見ることができる。

3. Bonacich=Bailey の “Key Variables” の意義

“key variables” の着想の実質的背景には, 小集団の数学的理論が存在する。Simon, Blalock らに連なる質的解析の伝統の上にあり, また, 不完全ではあるが, (i) 質的安定性, (ii) 比較静学, (iii) ループの理論, の3つを結びつけようとした点で前進があった。

その核心は, 安定な均衡の下で, 外生変数が変化したとき, 内生変数はどのように変化するか, の予測にある。Bonacich=Bailey においては, システムの挙動は近似的に線型で次のように表わされる²⁸⁾。直ちにわかるように, Blalock のものと異なるのは, 外生変数 b_i が各式の右辺に存在することである。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

均衡点では, 左辺はゼロとなる。このとき,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$a_{ij}^* = \text{sgn} a_{ij}$, つまり a_{ij} の符号のみを要素とする行列 $A^* = (a_{ij}^*)$ が定義される。

$$A^* = (a_{ij}^*) \quad (3.3)$$

また, 外生変数 b_i ($i=1, \dots, n$) は相互に関連がなく, かつ, b_i が直接に働くのは x_i に対してのみであると想定される ($i=1, \dots, n$)。 b_i が変化したとき, x_i がどのように変化するかを, Bonacich=Bailey は知ろうとした。 A で変数の増分を表わすとき, $\Delta x_i / \Delta b_i$ の符号について知見が得られぬならば, 変数 x_i は key variable とよばれ, 符号が判明するとき, 変数 x_i は non-key variable とよばれる。

Bonacich=Bailey も Blalock 同様に質的性質の考察といいながらも, $a_{ii} = -1$ ($i=1, \dots, n$) とか, $a_{ii} = -r$ ($r > 0$) ($i=1, \dots, n$) と仮定して, 実数の性質を利用してみたりする。特に注意すべきは, 一般に, 対角成分 $a_{ii} < 0$ ($i=1, \dots, n$) と仮定しながらも, 実際の分析例では, 直ちに実数性をもちこんだりしていることである²⁹⁾。このことは, 彼らの質的解析が必ずしもうまくいかなかったことを示している。

ループの中に奇数個の負のリンクが存在するとき, 負のループといい, そうでないループは正のループとよばれる。ループの正負によって key variable か否かの判定をしようという訳である。そして, A が n 次正方行列のとき, $\text{sgn}|A| = (-1)^n$ と想定される。

まず, 彼らが key variable としてあげた例をとりあげてみたい。図3・1(a)を A^* で示せば次のようになる。

$$A^* = \begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ + & 0 & - \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

もとの A について, 循環置換に基づいて $\text{sgn}|A|$ を求める。

$$a_{11}a_{22}a_{33} \approx (1)(2)(3) \quad (3.5)$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \approx (1)(23) \quad (3.6)$$

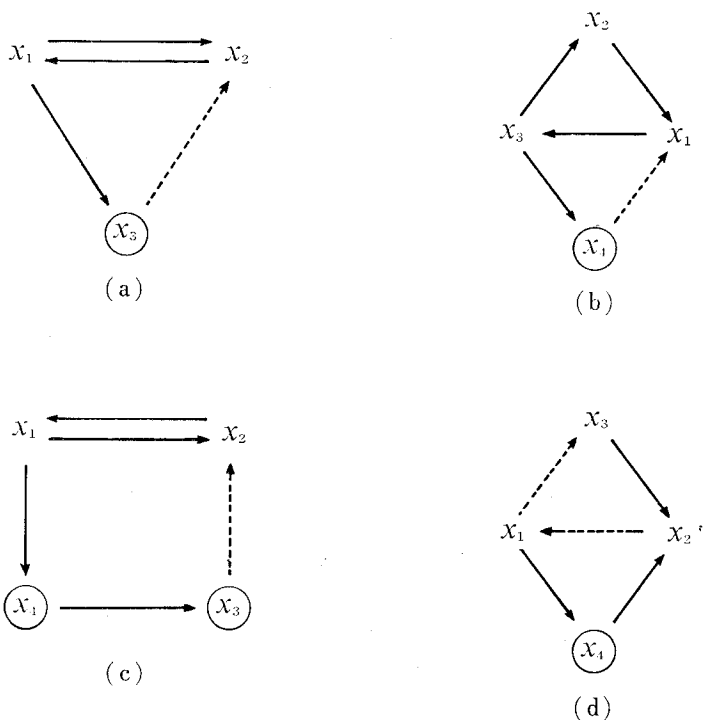
$$a_{12}a_{21}a_{33} \approx (12)(3) \quad (3.7)$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \approx (123) \quad (3.8)$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} \approx (13)(2) \quad (3.9)$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \approx (132) \quad (3.10)$$

a_{13} , a_{32} はゼロであるから, (3.6), (3.9) および (3.10) の左辺はともにゼロとなる。(3.5) および (3.8) は偶置換, (3.7) は奇置換である。(3.5), (3.7) および (3.8) の左辺の符号は, ともに負である。よって, 符号に関する演算規則から, $\text{sgn}|A| = \text{sgn}(-1)^3$ と



(注) Bonacich=Bailey (1971), p. 231 より。

ただし、実線の矢印は正の因果、破線の矢印は負の因果を表わす。ここでも、フィードバックは負として、図中では省略されている。なお、各 x_i には b_i がそれぞれ影響を与えるが図中では省略される。丸で囲んだ変数が key variables。

図3・1 Key Variables の例

いう Bonacich=Bailey の想定が現実には満たされぬことが示された。彼らの質的安定性のための条件は、実質的には Blalock の安定条件に帰着する。

図3・1(a)では、各 x_i に b_i が作用することを示してはいない。そして、外生変数は1つしか変化しないものとする。いま、 b_3 が正の変化をしたとする。各 x_i は $x_i + \Delta x_i$ に、 b_i は b_i ($i=1, 2$) のまま、 b_3 は $b_3 + \Delta b_3$ に変化する。従って、次式が成り立つ。

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta b_3} = \frac{-A_{33}}{|A|} \quad (3.11)$$

A_{33} は、 A の第3行および第3列を消して作った首座小行列式とし、 A_{33}^* は同様にして作った符号を要素とする首座小行列 (principal submatrix) とする。

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

$$A_{33}^* = \begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$\text{sgn}|A|$ と同様に, $\text{sgn } A_{33}$ の符号も確定しない。奇妙なことに, Bonacich=Bailey は先見的に $\text{sgn}|A| = \text{sgn}(-1)^3$ と想定している。だが, この想定の下でも, $\text{sgn } A_{33}$ から $\text{sgn } 4x_3$ を知ることはできない。それゆえ, 変数 x_3 は key variable とよばれる。

同様にして, 首座小行列 A_{11}^*, A_{22}^* から, $\text{sgn } A_{11}, \text{sgn } A_{22}$ を求めることができる。

$$A_{11}^* = \begin{pmatrix} - & - \\ 0 & - \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$A_{22}^* = \begin{pmatrix} - & 0 \\ + & - \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

明らかに, $\text{sgn } A_{11}, \text{sgn } A_{22}$ はともに正。それゆえ変数 x_1 と x_2 は non-key variable とされる。

$\text{sgn}|A| = \text{sgn}(-1)^3$ の仮定の下での key variable の判定法は単純である。変数 x_i を取り去って, 残る変数間に正のループがあるならば, 変数 x_i は key variable である。すなわち, リンクが2個以上の負のループの中に x_i があるとき, x_i を消したとき, 元のループと残った正のループとに同時に含まれる変数が存在するならば, x_i は key variable である。non-key variable では負のループとなる。

彼らの貢献は, $b_i \rightarrow x_i$ への直接的効果だけでなく, システムそのものに固有の波及効果のもつ意味を図示的に示し, 数学的にも若干の展開をみせたところにある。そして, この考え方が, 間接的に key および non-key variable という概念につながったといえる。

そして, 数学的には $\text{sgn } A_{ii}$ を求めることは, つまるところ, $\text{sgn}|A|$ を求める論理と同一である。よって, 首座小行列式 A_{ii} の中に正のループが存在すれば, 変数 x_i は key variable となる。

さて, Bonacich=Bailey は循環置換による行列式の符号の判定という厳密な数学的方法をとった訳ではない。むしろ, 先に示した図形的な直観型の判定にたよっていたといえる。それゆえ, b_i と x_j との関係となると, もはや解決できない³⁰⁾。図3・1(a)の場合, b_3 が正の変化をしたとき, x_2 の変化の方向はどうなるかは, 次式で与えられる。

$$\frac{4x_2}{4b_3} = \frac{-(-1)^{3+2}D_{32}}{|A|} \quad (3.16)$$

ただし, ここで D_{32} は, A の第3行および第2列をとりさって得られる小行列式である。前と同様に D_{32}^* を定義すれば, 次のようになる。よって, $\text{sgn } D_{32}$ は正となって, x_2 は b_3 と異方向に変化するという結論に, 彼らの想定 $\text{sgn}|A| = \text{sgn}(-1)^3$ の下ではなる。既

$$D_{32}^* = \begin{pmatrix} - & 0 \\ + & - \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

に述べたように、実際にはこの想定は満たされていない。key variable の図形的判定のような方法が、 x_i と b_j との関係についても存在すると考えられる。key variable の場合には、当該変数 x_i に入出入りするリンクをすべて取り去って、残ったループがすべて負になるか否かによる。 x_i と b_j との場合も、いくつかのリンクを取ればよいと考えられる。このための方法を循環置換に基づいて与える。

n 次正方形行列 A の行列式は、第 i 行の各要素 a_{ij} ($j=1, \dots, n$) の 1 次の同次整関数である。

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (3.18)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & j & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

(3.18) の右辺で a_{ij} を含む項は、 $\varepsilon(\sigma) a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \dots a_{ij} \dots a_{i_n i_n}$ となる項である。これは、置換 (3.19) を意味する。 σ は必ず循環置換で表わすことができる。 $i=j$ の場合は、key variable についてふれたように、 $\text{sgn}|A|$ と同様に、ループの正負によって判定しうる。ただし、 $a_{ii} < 0$ ($i=1, \dots, n$) とする。つまり、フィードバックとループで処理しうる。 $i \neq j$ の場合には、ちがった見方が必要となる。

そこで、 $n=4$, $i=2$, $j=3$ の場合を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & 3 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

このとき、次の関係が成り立つ。

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \approx (1)(23)(4) \quad (3.21)$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \approx (123)(4) \quad (3.22)$$

$$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \approx (1)(234) \quad (3.23)$$

$$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \approx (1234) \quad (3.24)$$

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \approx (1423) \quad (3.25)$$

$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \approx (14)(23) \quad (3.26)$$

上の関係から 2 と 3 は必ず同一の循環置換に属する。一般の場合にも、この事実は拡張できる。すなわち、 a_{ij} が現われるような (3.18) の展開式で、 i と j は必ず同一の循環置換に属す。図示的に言うならば、変数 x_i および x_j は、必ず同一ループ内にある。証明は背理法を用い、置換の循環置換への分解において、 i と j が同一の循環置換に属しないとすれば矛盾が生じることから与えられる。

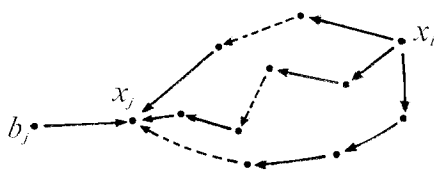
$n=4$ のとき、 $\partial|A|/\partial a_{23} = A_{23}$ であるから、

$$\begin{aligned} A_{23} = & -a_{11}a_{32}a_{44} + a_{12}a_{31}a_{44} + a_{11}a_{34}a_{42} \\ & -a_{12}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{32}a_{41} \end{aligned} \quad (3.27)$$

フィードバック $a_{ii} < 0$ ($i=1, \dots, 4$) としたから、 a_{32} , $a_{31}a_{12}$, $a_{34}a_{42}$, $a_{34}a_{41}a_{12}$, $a_{31}a_{14}a_{42}$,

$(a_{41}a_{14})a_{32}$, の符号が $\text{sgn } A_{23}$ の符号を知るための糸口となる。 $\text{sgn } |A|$ が確定するためには, ループ $a_{41}a_{14}$ は非正。よって, 符号に関する演算規則から, a_{32} , $a_{31}a_{12}$, $a_{34}a_{42}$, $a_{34}a_{41}a_{12}$, $a_{31}a_{14}a_{42}$ が弱い意味で同符号であれば, $\text{sgn } A_{23}$ は確定する。

このことの図形的な意味は, もはや明らかである。つまり, x_2 から出発して x_3 に至るパス (path) に対応する a_{32} , $a_{31}a_{12}$, $a_{34}a_{42}$, $a_{34}a_{41}a_{12}$, $a_{31}a_{14}a_{42}$ の符号が弱い意味で一致すればよい。図3・1(b)では, $a_{31}a_{12}$ が正で他はゼロで $\text{sgn } A_{23}$ は正, 図3・1(d)も同様。図3・1(c)では, $a_{34}a_{41}a_{12}$ が正, $\text{sgn } A_{23}$ も正となる。これによって, Bonacich=Bailey の残した問題のひとつは片づいたことになる。



(注) 各パスに対応する係数の積が弱い意味で同符号になったとき $\text{sgn } A_{ij}$ は確定する。ただし, b_j は外生変数, $\text{sgn } |A|$ は確定しているとする。
・は変数を表わす。ここで, フィード・バックの表示は省略。

図3・2 $\text{sgn } A_{ij}$ とパス

もうひとつの問題として, 外生変数間に連関がある場合が指摘されている。このイメージは, たぶん, Blalock の逐次的外生変数に近いものであろう。逐次外生変数は, 本質的に内生変数である。それゆえ, ここでは外生変数が同時に変化する場合にふれておきたい。この場合, もっとも効率的に解を探究できるのは, 線型空間における直交性に基礎をおく方法である³¹⁾。ループやパスによる解の探究は手間がかかる³²⁾。

線型空間によるアプローチでは, 安定性の識別はできない。そして, “key variables” とは, 質的ベクトルで解となりうる象限が複数個存在し, しかも当該成分の符号が異なる変数である (原点に関して対象なものを除く)。数学的には余因子における ループとパスの問題に “key variables” は帰着する。

4. Routh=Hurwitz の条件と質的安定性

連立微分方程式 (3.1) の解が安定であるためには, 実多項式 (2・3) の根の実数部分がすべて負でなければならない。なお, A は (3.1) の a_{ij} を要素とする行列である。すなわち,

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + h_2\lambda^{n-2} + \cdots + h_n \quad (4.1)$$

$$h_k = (-1)^k \Sigma A^{(k)} \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (4.2)$$

$$h_n = (-1)^n |A| \quad (4.3)$$

とすると、 $\phi(\lambda)=0$ に関する Routh=Hurwitz の条件は、Hurwitz 行列 H (4.4) の首座小行列式 H_i が、すべて正となることである³³⁾。

$$H = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 & k_5 & k_7 & \cdots & 0 \\ 1 & k_2 & k_4 & k_6 & \cdots & 0 \\ 0 & k_1 & k_3 & k_5 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k_2 & k_4 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & k_n \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$H_1 = -\sum_{k=1}^n a_{kk} > 0 \quad (4.5)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (4.6)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} k_1 & k_3 & k_5 \\ 1 & k_2 & k_4 \\ 0 & k_1 & k_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (4.7)$$

$$\vdots$$

$$H_n = \begin{vmatrix} k_1 & k_3 & k_5 & k_7 & \cdots & 0 \\ 1 & k_2 & k_4 & k_6 & \cdots & 0 \\ 0 & k_1 & k_3 & k_5 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k_2 & k_4 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & k_n \end{vmatrix} > 0 \quad (4.8)$$

ところで、根と係数の関係から h_k ($k=1, \dots, n$) は正、従って、(4.5) ~ (4.8) の Hurwitz 不等式は必ずしも独立なものではない³⁴⁾。

$$h_k > 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (4.9)$$

Quirk らは、これらの条件 (4.5) ~ (4.9) から、次の結果を導いた³⁵⁾。 $H_1=h_1>0$ から、 a_{ii} はすべて非負、かつ、少なくともひとつは正。 $h_2>0$ より、 $a_{ij}a_{ji} \leq 0$ ($i \neq j$) がすべての i, j について成立しなければならない。 $h_3>0$ より、 $a_{ij}a_{jk}a_{ki} \leq 0$ であるが、 $H_3>0$ より、 $a_{ij}a_{jk}a_{ki} \geq 0$ 。よって、 $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 0$ 。これが意味しているのは、リンクが3以上のループはシステムが質的に安定なときは存在しえぬことである。完全に質的安定なシステムであるためには、このようにきびしい制約がともなう。

社会学では、リンクが3以上のループの存在は、ごく普通のことである。例えば、後述の Hopkins モデルもそうであった。このことはインプリシットに量的情報が用いられていることを示唆する。Homans が主張するように、「真に興味のある問題は量的であって質的でない」とすれば、なんらかの量的情報が利用しうる場合、明示的にそれを用いるべきであ

る³⁶⁾。

また、リンクが2個のループも負であることを要求される。Homans の小集団理論にもとづく Simon の数学的分析においても、システムの行列Hは質的に次のように表わせる³⁷⁾。

$$H^* = \begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

H*にはリンクが2個の正のループが存在している。それゆえ、 $\text{sgn}|H|$ も一意的に定まらない。ただし、 $H = (h_{ij})$ とするとき、 $h_{11}^* = \text{sgn}(\partial\phi/\partial A)$, $h_{12}^* = \text{sgn}(\partial\phi/\partial F)$, $h_{21}^* = \text{sgn}(\partial\phi/\partial A)$, $h_{22}^* = \text{sgn}(\partial\phi/\partial F)$ である。Aは集団所属成員による活動量、Fは成員間の親近性の水準、Eは外部から課せられる活動量とする。このとき、システムとしての小集団の行動は次のように表わされる。

$$\frac{dA}{dt} = \phi(A, F; E) \quad (4.11)$$

$$\frac{dF}{dt} = \phi(A, F) \quad (4.12)$$

(4.10) のH*は、このシステムについて均衡の近傍で求めたものである。

すなわち

$$\frac{\partial\phi}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial E} + \frac{\partial\phi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial E} = -\frac{\partial\phi}{\partial E} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial E} + \frac{\partial\phi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial E} = 0 \quad (4.14)$$

ただし、 $\text{sgn}(\partial\phi/\partial E)$ は正であることがわかっている。質的安定性が想定されるならば、 $\text{sgn}|H| = \text{sgn}(-1)^2$ となる。この想定の下で、連立方程式 (4.13) ~ (4.14) は質的に一意な解をもつ。すなわち、 $\text{sgn}(\partial A/\partial E)$ は正、 $\text{sgn}(\partial F/\partial E)$ も正となる。ここにおいて、Simon も質的分析を唱えながらも自ら気づくことなく、量的情報を暗黙に持ちこんだのである。それゆえ、Eが減少すれば、AもFも減少する、という命題が得られたわけである³⁸⁾。もちろん、質的安定性を保証する量的情報の存在の想定がなければ、Eが減少するとき、AもFも増す、という現象が生じる³⁹⁾。Bonacich=Bailey らの術語では、AもFも non-key variables である。それゆえ、質的比較静学で一意的な解が得られなかったのは、完全な質的安定性が満たされないからである。

Bonacich=Bailey の考察は、図形にたよるなどややプリミティブな面もあるが、直観的にわかりやすい。また、本質的に Quirk らとはほぼ同一の結論に達していた、といえる⁴⁰⁾。パスの考えが十分に展開されていない点が異なる。両者とも質および量という混合情報を用いることに特徴がある。

5. む す び

質的安定性をめぐって、Blalock の安定条件および “key variables” の意味、数学的構造を中心に吟味を加えてきた。この過程で、Simon の小集団の数学的分析の中に潜む暗黙の想定も明らかにしてきた。線型空間での直交性にもとづくとき、質的比較静学で解が一意的にもとまるのは、質的安定性が存在する場合に限られる。また、量的情報が得られ、質的安定性が想定しうるときも、解は一意的となる。Bonacich=Bailey らの思想は後者にかかわる。彼らの図形的方法は、拡張することができる。この根拠は、行列式における循環置換とループとの対応にある。もっと一般的には、群論の問題として考察できる⁴¹⁾。

Simon は、社会現象におけるふたつの主要なメカニズムとして、影響および選択のメカニズムをとりあげている⁴²⁾。本稿で論じたものの理論的背景は小集団論であり、広義の影響を主要なメカニズムとして想定するものであった。もちろん、質的安定性をめぐる思想は、社会学の他の多くの領域にとって有用でる。完全に質的安定であることは、その理論性においてはすぐれている。しかし、現実の社会学的場面においては、分析用具として汎用性が欠ける。それゆえ、Blalock の安定条件や、Bonacich=Bailey らの “key variables” でみられる質的安定性の想定の方が分析用具としてすぐれていることがありうる。この矛盾の解決は、今後の社会学の一つの課題である。

〔注〕

- 1) Blalock, H. (1969), *Theory Construction: From Verbal to Mathematical Formulations*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, および, 主に因果の問題を論じた, Blalock, H. (1964), *Causal Inference in Non-Experimental Research*, Chapel Hill, University of North Carolina Press がある。Blalock については、高島通敏, (1973)「地下室での出会い—計量政治学の方法を求めて」, 『UP』, 第2巻, 第5号, 1—5頁, に当時の姿が描かれている。
- 2) Richardson, Lewis F. (1960), *Arms and Insecurity*, Pittsburgh, Boxwood Press, および Simon, Herbert A. (1957), *Models of Man: Social and Rational*, New York, John Wiley and Sons. また、前者については、Abelson, Robert P., (1963), “A ‘Derivation’ of Richardson’s Equations”, *Journal of Conflict Resolution*, Vol. 7, pp. 13-15. も参照。
- 3) Zetterberg, Hans L. (1963), *On Theory and Verification in Sociology*, Totowa, Bedminster Press.
- 4) Costner, H. L. and Leik, R. K. (1964), “Deductions from ‘Axiomatic Theory’”, *American Sociological Review*, Vol. 29, pp. 819-835. なお、Doreian, Patrick (1970), *Mathematics and the Study of Social Relations*, London, Weidenfeld and Nicolson, pp. 143-153 も参照。
- 5) Bonacich, Phillip and Bailey, Kenneth D. (1971), “Key Variables”, in Costner, H. L. (ed.), *Sociological Methodology 1971*, San Francisco, Jossey-Bass, pp. 221-235.
- 6) この点に関しては、白倉幸男 (1981), 「質的比較静学の社会学的意義をめぐって」, 『大阪大学人間科学部紀要』, 第7巻, 173-188頁, を参照。
- 7) Samuelson, Paul A. (1965), *Foundations of Economic Analysis*, New York, Atheneum, pp. 257-283. 第1種および第2種安定などの概念が示されている。なお、本稿で論じられるのは、

Samuelson の意味での小域での第1種安定である。

- 8) Hopkins, Terence K. (1964), *The Exercise of Influence in Small Groups*, Totowa, Bedminster Press. および, Bales, Robert F. (1951), *Interaction Process Analysis: A Method for the Study of Small Groups*, Cambridge, Addison-Wesley Press, Homans, George C. (1950), *The Human Group*, New York, Harcourt, Brace and Company. なお, 本稿で考察する質的な性質をめぐって, グラフ理論, バランス理論など様々な形での関係性の分析の試みがなされている。ネットワーク分析などは, 実質・形式の双方がうまくつりあって成長しつつある社会学の研究分野ということが出来る。Lauman, Edward O. and Pappi, Franz U., (1976), *Networks of Collective Action: A Perspective on Community Influence Systems*, New York, Academic Press, および, Bott, Elizabeth (1957), *Family and Social Network*, London, Tavistock Publications などを参照。
- 9) Parsons, T. (1945), "The Present Position and Prospects of Systematic Theory in Sociology", in Gurvitch, G. and Moore, W. (eds.), *Twentieth Century Sociology*, New York, Philosophical Library. における構造機能分析についての議論も参照。
- 10) Hopkins, Terence K. op. cit., p. 32.
- 11) Blalock, H. (1969), pp. 100-106.
- 12) Idid.
- 13) Baumol, William J. (1959), *Economic Dynamics*, New York, Macmillan. Coleman, James S. (1968), "The Mathematical Study of Change", in Blalock, Hubert M. and Blalock, Ann B. (eds.) *Methodology in Social Research*, New York, McGraw-Hill, Chap. 11. および, Simon, Herbert A. (1957) である。
- 14) 中谷宇吉郎 (1958), 『科学の方法』, 岩波書店, 105-121頁。ここでの記述は物理と数学にかかわるものであるが, 社会現象においても有益な考え方と言える。
- 15) これは, Lange 型の解釈であるが, 他にも Metzler 型の解釈もある。社会学では, Simon も Lange 型の解釈をとっており, 歴史的に見てもこの方が適当だと考えられる。cf. Metzler, L. A. (1945), "Stability of Multiple Markets", *Econometrica*, Vol. 13, p. 281.
- 16) Simmons, George F. (1972), *Differential Equations*, New York, McGraw-Hill, pp. 305-316 には簡潔な説明がある。本稿では, Simmons のものとは異なるアプローチをとる。
- 17) Birkhoff, Garret and MacLane, Saunders (1965), *A Survey of Modern Algebra*, New York, Macmillan 奥川光太郎・辻吉雄訳 (1967), 『現代代数学概論』, 白水社, 152頁参照。
- 18) Blalock, H. (1969), 107.
- 19) Ibid., p. 111.
- 10) Bonacich, P. and Bailey, K. op. cit.
- 21) Blalock, H. (1969), p. 112.
- 22) 因果推論の古典としては, Blalock, Hubert M. (1964), *Causal Inferences in Nonexperimental Research*, Chapel Hill, University of North Carolina Press, をあげることができる。安田三郎・海野道郎 (1977) 『社会統計学』丸善も参照。
- 23) Blalock, H. (1969), pp. 119-122, 124-125.
- 24) Bassett, Lowell, Maybee, John and Quirk, James (1968), "Qualitative Economics and the Scope of the Correspondence Principle", *Econometrica*, Vol. 36, pp. 544-563, および, Maybee, John and Quirk, James (1969), "Qualitative Problems in Matrix Theory", *SIAM Review*, Vol. 11, pp. 31-51.
- 25) 藤原松三郎 (1974), 『代数学』第1巻, 内田老鶴圃新社, 357-364頁参照。
- 26) 上掲書参照。
- 27) 前掲拙稿参照。
- 28) Bonacich=Bailey, op. cit. pp.227-228.
- 29) Ibid., pp.231-233.
- 20) Ibid., p. 235 および Bassett, L. et al. op. cit. Th. 9' 参照。
- 31) Lancaster K. (1965), "The Theory of Qualitative Linear Systems", *Econometrica*, Vol. 33, pp. 395-408. および Lancaster, K. (1966), "The Solution of Qualitative Comparative Static Problems", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, pp. 278-295. および前掲拙稿を参照。
- 32) Bassett, L. et al. op. cit. Th. 8, および Maybee, J. et al. op. cit. Th. 3・3 を参照。彼らの解

法は、符号の演算規則にうまく適するようにラプラス展開するということにつきる。ただし、注意すべきことは彼らのパス（チェーン）は、社会学における Blalock や Bonacich=Bailey の記号法とは因果の順序が逆になっている。これは、彼らのアイデアが別のところから出てきたことによる。本稿では一貫して Blalock の立場をとる。彼らの定理によれば、 $Ax=b$ なるシステムが符号に関して解けるための必要かつ十分な条件は、変形によって、 $b \geq 0, x \leq 0$ となる、 $Ax=b$ なるシステムに変るとき、(i) A のすべてのループ（フィードバックも含めて）が非正、かつ (ii) b の成分 b_i が正ならば、すべてのパス ($x_i \rightarrow x_j$) が非負となることである。変数が多くなるほど、この定理によって解を求めることは非効率的となる。

- 33) Routh=Hurwitz の条件について、もっとも良い文献は、Gantmacher, F.R. (1959), *The Theory of Matrices*, Vol. II, New York, Chelsea, pp. 172-201 であろう。実数だけを用いて証明しようとするならば、Bézout 形式を用いるなどやや複雑になる。これについては、藤原松三郎 (1974), 『代数学』第1巻, 内田老鶴園新社, 595-607頁, 617-619頁を参照。具体的な証明に関しては、安井琢磨 (1971) 『安井琢磨著作集第3巻』, 創文社, 165-176頁を参照。また、連立差分方程式システムの安定性については、根の絶対値が1より小という条件に帰着する。これは、Schur の問題とよばれる。この問題が Routh=Hurwitz の条件に帰着することも、つとに、知られている。上記の諸文献を参照。
- 34) Gantmacher, F.R. op. cit. pp. 220-225. 高木貞治 (1965) 『代数学講義』, 共立出版社, 361-364頁を参照。Liénard=Chipart の安定条件が満たされればよい。ところで、 $f(x)=x^4+3x^2+9x^2+x+2$ の Hurwitz 行列 H は次のように表わされる。

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_1=3>0, H_2=26>0, H_3=8>0, H_4=2 \cdot H_3=16>0$. このことから、Routh=Hurwitz の条件の性質がわかる。

- 35) Quirk, J. and Ruppert, R. (1965), “Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium”, *Review of Economic Studies*, Vol. 32, pp. 311-326.
- 36) Homans も社会学における論理的問題のひとつとして、微分方程式体系の意義を重視している。Homans, G.C. (1950). *The Human Group*, New York, Harcourt, Brace and Company, Ch. 4-5 参照。
- 37) 前掲拙稿, 182-185頁参照。
- 38) Simon, H.A. (1957), *Models of Man: Social and Rational*, New York, John Wiley and Sons, p. 111. および前掲拙稿参照。
- 39) 前掲拙稿参照。
- 40) Basset, L. et. al. op. cit. P. 558. Th. 9'.
- 41) 本稿では特に言及していないが, Fararo, Thomas J. (1973), *Mathematical Sociology: An Introduction To Fundamentals*, New York, Wiley-Interscience, Ch. 17-19. 西田春彦・安田三郎監訳 (1980), 『数理社会学』第2巻, 紀伊国屋書店も参照。
- 42) Simon, H.A op. cit. pp. vii-viii.

ON THE BLALOCK'S STABILITY CONDITIONS AND THE BONACICH-BAILEY'S "KEY VARIABLES"

Yukio SHIRAKURA

Nowadays, the qualitative analysis is widely used in many branches of sociology. However, there is no sufficiently complete account of the properties of qualitative stability. Therefore the purpose of this paper is to investigate some relation between qualitative analysis and qualitative stability and to re-examine the classical Simon's small group model in terms of qualitative properties.

Blalock studied the properties of qualitative stability in his *Theory Construction* (1969). Given the signs of the coefficients of a simultaneous linear differential equation system $dx/dt = Ax + b$, he examined them by means of the matrix of the coefficients A . Let $A = (a_{ij})$ be an $n \times n$ matrix and $x = (x_i)$ be an n -vector. The x_i represents the endogenous sociological variable ($i=1, \dots, n$). Let $b = (b_i)$ be an n -vector. The b_i represents the exogenous sociological variable ($i=1, \dots, n$). Then the Blalock's conditions are expressed as follows:

$$I. \sum_{i=1}^n a_{ii} < 0$$

$$II. \operatorname{sgn}|A| = \operatorname{sgn}(-1)^n.$$

His main purpose is to approach the problem of qualitative stability through the properties of determinants on the basis of the sign pattern of A alone. The expansion of $|A|$ consists of $n!$ terms. Thus he considered to begin with the cases of small n with the diagram. In the diagram, the a_{ij} corresponds to one-way arrow from a determining x_j to a variable x_i dependent on it ($i \neq j$; $i, j=1, \dots, n$). The arrow is either solid if a_{ij} is positive or dotted if negative. The a_{ii} corresponds to the curved arrow from x_i back to x_i . The diagrammatic representation, which is called as an interaction diagram, is of great use in re-examining Blalock's analysis.

The properties of qualitative stability is suggested by Blalock as follows: (i) $\operatorname{sgn}|A|$ is determined only by such terms as a_{ii} , $a_{ij}a_{ji}$, $a_{ij}a_{jk}a_{ki}$, $a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{li}$ (i, j, k and l differ from each other); (ii) these terms corresponds to the loops in the interaction diagram biunivoquely. The term a_{ii} represents the feedback. The term $a_{ij}a_{ji}$ represents the loop from x_i back to x_i via x_j . Similarly the term $a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ represents the loop from x_i to x_j back to x_i , and so on; (iii) $\operatorname{sgn}|A| = \operatorname{sgn}(-1)^n$ if and only if every loop includes an odd number of dotted arrows. Put a little differently, the terms not included in the loops in the diagram are irrelevant to qualitative stability in the Blalock's

conditions. But, he didn't state these properties explicitly except for the second. In this respect, Quirk and his associates had investigated the properties of qualitative stability independent of Blalock. They approached it utilizing the theory of cycles in matrices.

In this paper, I consider this problem by the permutation of the set $\{1, 2, \dots, n\}$. A permutation σ of such a set is usually denoted as follows:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Associated with every permutation σ is the number $+1$ or -1 , expressed as $\varepsilon(\sigma)$. If $\varepsilon(\sigma)$ is $+1$ the permutation is even, otherwise it is odd. Moreover, any permutation is shown as the product of distinctive cyclic permutations uniquely. For example,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(34).$$

The determinant of A is $\Sigma \varepsilon(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$. If the $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ corresponds to the r cyclic permutations, which consist of s_l elements respectively ($l=1, \dots, r$), then each cyclic permutation is shown as the product of the (s_l-1) transpositions. Therefore σ can be expressed by the product of the $(n-r)$ transpositions. If $n-r$ is even $\varepsilon(\sigma)=1$, otherwise $\varepsilon(\sigma)=-1$. Since $n-r \equiv t \pmod{2}$, where t is the number of the cyclic permutations with odd elements, there can be the following cases: (i) $n=\text{odd}$, $r=\text{odd}$, $t=\text{even}$; (ii) $n=\text{odd}$, $r=\text{even}$, $t=\text{odd}$; (iii) $n=\text{even}$, $r=\text{odd}$, $t=\text{odd}$; (iv) $n=\text{even}$, $r=\text{even}$, $t=\text{even}$. In every case, $\text{sgn}|A| = \text{sgn}(-1)^n$ if and only if every loop in the diagram has an odd number of dotted arrows. Furthermore, I illustrate the properties of qualitative stability with the diagram. For example, a usual causal inference schema without loop is qualitatively stable if Condition-I is satisfied.

The Bonacich-Bailey's "key variable" is defined as follows: if the Blalock's conditions are satisfied and $\text{sgn}(\partial x_i / \partial b_i)$ is not determined, x_i is called as a "key variable", otherwise it is called as a "non-key variable". As often pointed out, sociological theories are frequently formulated on the assumption only about the signs of relation between variables. For example, the "sign rule" is used in Zetterberg's "axiomated social theory". This rule implies that "the sign of deduced relationship is the algebraic product of the signs of the postulated relationships", according to Costner and Leik. Statistically, this problem was solved by Costner and Leik. Generally, the "sign rule" doesn't hold. Bonacich and Bailey approached this problem from a different point of view, although some problems remain unsolved.

According to Bonacich and Bailey, $\text{sgn}(\partial x_i / \partial b_i)$ is determined if and only if $\text{sgn} A_{ii} = \text{sgn}(-1)^{n-1}$, where A_{ii} is the cofactor of A . If there is any positive loop among the variables except for x_i , x_i is a "key variable", where positive loop is defined as the loop with an even number of dotted arrows, otherwise it is a "non-key variable". Their contribution is not only to show the direct effect from b_i to x_i but also to clarify the

repercussion effect of the system within which these variables are embedded. But, Bonacich and Bailey didn't elucidate the properties of $\text{sgn}(\partial x_i / \partial b_i)$. I illustrate them in the diagram, too.

As might be suspected, however, this problem is more efficiently solved by the linear space approach under Condition-II. This approach reduces the problem to that of the binary or ternary system. Moreover, Bonacich and Bailey's stability hypothesis requires some quantitative information. In other words, $\text{sgn}|A|$ is not always $\text{sgn}(-1)^n$ in their examples.

Simon also assumed the sign of the determinant of the matrix of coefficients to be $\text{sgn}(-1)^3$ implicitly in his Simon-Homans model. Then all endogenous variables in the model are "non-key variables". The appropriateness of this assumption has been not elucidated, however. I clarify it in terms of cyclic permutations. Without the assumption two distinctive solutions could be obtained by means of the binary system. I have already investigated Simon's analysis in terms of the linear space approach (1981).

The Blalock conditions are necessary for qualitative stability. The necessary and sufficient conditions imply that there are no loops with more than two arrows. In this sense, the complete qualitative stability as a clue to elucidate the logic of society is too restrictive. On the other hand, the stability hypothesis by Bonacich=Bailey is often very useful in sociological explorations. To fill this gap theoretically and empirically is one of the sociological subjects for future study.