

Title	Étude sur la théorie du potentiel généralisé
Author(s)	Kunugui, Kinijiro
Citation	Osaka Mathematical Journal. 1950, 2(1), p. 63-103
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/6525">https://doi.org/10.18910/6525</a>
rights	
Note	

***Osaka University Knowledge Archive : OUKA***

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## *Étude sur la théorie du potentiel généralisé*

Par Kinjiro KUNUGUI.

§ 1. *Définitions sur les potentiels généralisés.* Considérons l'espace euclidien  $\Omega$  aux dimensions  $m$  supérieures à 1:  $m \geq 2$ . Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles de  $\Omega$ :  $\mu = \mu(e)$ ,  $e \subseteq \Omega$ , dont les valeurs sont réelles, finies ou infinies:  $-\infty \leq \mu(e) \leq +\infty$ . Nous appellerons une telle fonction  $\mu$  "*distribution de masse*", si elle satisfait encore aux quatre conditions suivantes:

1) Le domaine de définition de  $\mu$  (c.-à-d. la famille des ensembles  $e$  pour lesquels  $\mu(e)$  sont définis) qui sera désigné par  $T$  est une famille *additive*:  $T$  contient l'ensemble vide;  $T$  contient, avec un ensemble  $e$ , l'ensemble complémentaire  $Ce$ ;  $T$  contient la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$  avec ensembles  $e_n$ . 2<sup>o</sup>)  $\mu$  est complètement additive, c.-à-d. pour toute suite des ensembles  $e_n$  de  $T$  qui sont disjoints:  $e_i \cdot e_j = 0$  ( $i \neq j$ ), nous avons  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(e_n) = \mu(\sum_{n=1}^{\infty} e_n)$  dès que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(e_n)$  converge absolument. 3<sup>o</sup>) Pour tous les ensembles bornés  $e$  de  $T$ ,  $\mu(e)$  sont finis. 4<sup>o</sup>)  $A, B$  étant deux ensembles quelconques dont la distance est positive, il existe un ensemble  $e$  de  $T$  tel qu'on ait  $e \supseteq A$ ,  $Ce \supseteq B$ .

Pour fixer les idées, considérons le cas de l'espace trois dimensionnel:  $m = 3$  sauf indication contraire. Désignons par  $x, y, z$  les trois coordonnées des points de cet espace. Alors, deux demi-espaces  $A: x \leq 0$  et  $B: x \geq 1/n$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$ , qui ont la distance mutuelle  $1/n$ , sont contenus dans un  $e_n$  et  $Ce_n$  de  $T$  resp., suivant la condition 4<sup>o</sup>). Donc, en vertu de 1<sup>o</sup>) et l'égalité  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n$ , on a  $A \in T$ . Ainsi, toute parallélépipède ou plus généralement tout ensemble borelien appartient à  $T$ .

Étant donnée une distribution de masse  $\mu$ , l'ensemble de tous les points  $p$  de l'espace  $\Omega$ , dont tous les voisinages  $V(p)$  contiennent des ensembles  $e$  de  $T$  tels que  $\mu(e) \neq 0$ , s'appelle "*le noyau de  $\mu$* ". Il est toujours un ensemble fermé. D'après un théorème de MM. de la Vallée Poussin et Hahn<sup>1)</sup>, le noyau contient deux ensembles  $F_\sigma: P$  et  $N$ , qui

1) de la Vallée Poussin [2], pp. 63-64, 56, Théorème. De la Vallée Poussin a remarqué que  $P$  et  $N$  sont des ensembles de tous les points où  $\mu' > 0$  ou  $\mu' < 0$  resp. (de la Vallée Poussin [1] p. 7) et que  $\mu'$  est une fonction de Baire (de la Vallée Poussin [2] p. 63). Donc, nous pouvons supposer que  $F$  et  $N$  sont des ensembles boreliens et par suite  $F_\sigma$ . Voir aussi H. Hahn [1] p. 404. Une démonstration simplifiée se trouve dans W. Sierpinski [1].

Les chiffres dans les renvois se rapportent à la liste des ouvrages cités, qui se trouve à la fin.

sont disjoints et tels qu'on ait  $\mu(eP) \geq 0$ ,  $\mu(eN) \leq 0$ ,  $\mu(e(F-P-N)) = 0$  et  $\mu(e) = \mu(eP) + \mu(eN)$  (dès que  $\mu(eP)$  et  $\mu(eN)$  soient finis) pour tout  $e$  de  $T$ .  $\mu(eP)$ ,  $\mu(eN)$  et  $\mu(eP) - \mu(eN)$  s'appellent la *variation positive*, *négative* et *totale* de  $\mu$  resp., et elles sont désignées resp. par  $\mu^+(e)$ ,  $\mu^-(e)$  et  $|\mu|(e)$ . Pour fixer les idées, nous supposons dans la suite que le noyau de  $\mu$  soit un ensemble borné.

Considérons d'abord le cas où  $m = 3, 4, 5, \dots$ . Dans ce cas, nous prenons une fonction réelle continue  $\Phi(t)$  définie pour une variable réelle positive  $t: 0 < t < +\infty$ . Définissons d'abord le *potentiel pour la masse non négative*, c.-à-d. pour le cas où l'on ait  $\mu(e) \geq 0$  pour tous les ensembles  $e$  de  $T$ . Soit  $F$  le noyau de  $\mu$ , et introduisons, pour tout nombre positif  $M$ , une fonction (dite *tronquée*) définie comme il suit :

$$(1) \quad \Phi_M(t) = \begin{cases} \Phi(t) & \text{pour tout } t \text{ tel que } |\Phi(t)| \leq M, \text{ et} \\ M & \text{ou } -M \text{ suivant que } \Phi(t) \geq M \text{ ou } \Phi(t) \leq -M. \end{cases}$$

Pour tout point  $p$  de  $\Omega$ , posons

$$(2) \quad u_n(p) = u_n(p; \mu) = \int_F \Phi_n(1/r_{pq}^{m-2}) d\mu_q$$

où  $r_{pq}$  désigne la distance entre deux point  $p, q$  et l'intégrale est prise au sens de Radon-Stieltjes. Posons encore

$$u(p) = u(p; \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(p),$$

si cette limite existe (finie ou infinie).  $u(p) = u(p; \mu)$  s'appelle le *potentiel de (ou engendré par) la distribution  $\mu$  au point  $p$* . Quant à la distribution de deux signes, nous posons

$$(3) \quad u(p) = u(p; \mu^+) - u(p; -\mu^-)$$

à condition que le membre droit est déterminé, fini ou infini.

Pour le cas où  $m = 2$ , nous prenons une fonction  $\Phi(t)$ , définie pour tout  $t$  réel:  $-\infty < t < +\infty$  et pour définir le potentiel  $u(p)$  nous n'avons qu'à remplacer l'égalité (2) par

$$(2') \quad u_n(p) = u_n(p; \mu) = \int_F \Phi(\log 1/r_{pq}) d\mu_q.$$

Concernant à la fonction  $\Phi(t)$ , nous introduisons d'abord trois axiomes suivants, dont le premier est subdivisé en quatre :

(A<sub>1</sub>)  $\Phi(t)$  est une fonction continue. (A<sub>2</sub>)  $\Phi(t)$  est une fonction monotone croissante. (A<sub>3</sub>)  $\Phi(t)$  est convexe<sup>1)</sup>. (A<sub>4</sub>)  $\Phi(t)$  n'est pas

1) Une fonction  $\Phi(t)$  définie dans un intervalle ouvert  $G$  est dite *convexe* si, pour toute paire des valeurs  $t_1, t_2, t_1 < t_2$  de  $G$ , l'inégalité  $\Phi((t_1+t_2)/2) \leq (\Phi(t_1) + \Phi(t_2))/2$  a toujours lieu.

identiquement une constante.

$$(B) \lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) \geq 0.$$

(C) En posant  $h(\xi) = 1/\xi^{m-2}$  pour  $m \geq 3$  et  $h(\xi) = -\log \xi$  pour  $m = 2$  ( $m$  désignant le nombre de dimensions de  $\Omega$ ), nous avons

$$\int_0^1 \Phi(h(\xi)) \cdot \xi^{m-1} \cdot d\xi < +\infty.$$

L'ensemble des trois conditions  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  et  $(A_4)$  sera désigné simplement par  $(A)$ .

Exemple 1. Considérons d'abord le cas où  $m = 3, 4, 5, \dots$ . Si l'on pose  $\Phi(t) = t^a$ , les conditions  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  veulent dire  $a \geq 1$ , tandis que la condition (C) veut dire  $a < m/(m-2)$ . Les autres conditions  $(A_4)$ , (B) sont remplies naturellement. Dans ce cas, les potentiels  $u(p)$  s'appellent "*potentiels généralisés d'ordre  $a$* ".

S'il s'agit de l'espace de deux dimensions, nous posons  $\Phi(t) = e^{at}$  pour obtenir les potentiels généralisés d'ordre  $a$ . La condition  $(A_2)$  nous donne alors une restriction  $a \geq 0$ , tandis que la condition (C) veut dire  $a < 2$ .  $(A_4)$  fait exclure le cas  $a = 0$ , et les autres sont remplies naturellement.

Les potentiels généralisés d'ordre  $a$  ont été considérés pour la première fois par Green<sup>2)</sup>, et étudiés ensuite par Hall<sup>3)</sup> et Cayley<sup>4)</sup>. Récemment, MM. M. Riesz<sup>5)</sup> et O. Frostman<sup>6)</sup> ont en donné des recherches systématiques et complètes.

Exemple 2. Considérons le cas où  $m = 3$ . Si l'on pose  $\Phi(t) = k^2 t e^{-\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $k \neq 0$ ,  $\lambda$  et  $k$  étant deux constantes, nous obtenons une autre sorte de potentiels. Dans ce cas,  $\Phi(t)$  satisfait aux conditions  $(A_2)$  et  $(A_3)$ , puisqu'on a  $\Phi'(t) > 0$  et  $\Phi''(t) > 0$ . Les trois autres conditions  $(A_4)$ , (B) et (C) sont naturellement satisfaites.

Les potentiels de ces formes ont été introduites par MM. Seeliger<sup>7)</sup> et C. Neumann<sup>8)</sup>. Mais, tout récemment, M. H. Yukawa s'en est servi pour décrire le champ de meson<sup>9)</sup>.

Dans ce qui suit, nous étudierons les potentiels généralisés donnés par la formule (3), dont la fonction  $\Phi(t)$  est soumise aux conditions (A), (B) et (C).

*Quelques conséquences.* Si  $\Phi(t)$  satisfait à la condition  $(A_3)$ ,  $\Phi(t)$  est continue et  $D_{\pm}\Phi(t)$  existe pour tout  $t$  (Voir p. ex. G. Polya et G.

2) Green [1].

3) Hall [1].

4) Cayley [1].

5) M. Riesz [1].

6) O. Frostman [1].

7) Seeliger [1].

8) C. Neumann [1].

9) H. Yukawa [1].

Szegö, [1] p. 52 et p. 6)<sup>1)</sup>. Des deux conditions  $(A_2)$  et  $(A_3)$ , il s'ensuit que, pour tout  $t$ ,  $t_1$ ,  $t < t_1$ , on a

$$(4) \quad 0 \leq D_{\pm} \Phi(t) \leq \frac{\Phi(t_1) - \Phi(t)}{t_1 - t}.$$

Or, en vertu de  $(A_2)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)$  existe toujours. Si cette limite est finie, (4) entraîne  $\lim_{t \rightarrow \infty} D_{\pm} \Phi(t) = 0$ , et par suite  $D_{\pm} \Phi(t) \equiv 0$ . Dans ce cas,  $\Phi(t)$  est une fonction constante, et ceci contrevient à l'hypothèse  $(A_4)$ . Donc, la condition (A) entraîne qu'on a toujours  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = +\infty$ .

**Théorème 1.** *Si  $\Phi(t)$  satisfait à  $(A_1)$ , le potentiel généralisé  $u(p)$  est continue pour tout  $p$  situé hors du noyau de  $\mu$ . Si  $\Phi(t)$  satisfait aux  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(B)$ , et si  $\mu$  est non négative,  $u(p)$  est une fonction semi-continue inférieurement partout dans l'espace.*

**Démonstration.** Pour tout point  $p_0$  situé hors du noyau, il existe un voisinage  $V(p_0)$  de  $p_0$  tel que,  $M$  étant assez grand, on ait  $\Phi_M(h(r_{pq})) = \Phi(h(r_{pq}))$ , pour tout  $p, q$  tels que  $p \in V(p_0)$ ,  $q \in F$ . Alors, il existe une suite de division  $\Delta_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  de  $F$ , telle que, si l'on exprime  $\Delta_n$  par  $F = \sum_i F_i^{(n)} (i = 1, 2, \dots, m_i)$ ,  $F_i^{(n)} \cdot F_j^{(n)} = 0$  pour  $i \neq j$ , et si l'on pose

$$(5) \quad S_n(p) = \sum_i \Phi(h(r_{pq_i})) \cdot \mu(F_i), \text{ où } q_i \text{ est un point arbitraire de } F_i,$$

la suite  $S_n(p)$  tend uniformément (par rapporte à  $p$  de  $V(p_0)$ ) vers  $u(p)$ .  $S_n(p)$  étant continue au point  $p_0$ , la continuité de  $u(p)$  au point  $p_0$  s'en suit immédiatement.

Da la même manière, nous pouvons voir que  $u_n(p)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sont continues partout dans l'espace. Or, en vertu des  $(A_2)$ ,  $(B)$ ,  $\Phi(t)$  est non négative. Donc si  $\mu$  est non négative,  $u_n(p)$  est une suite monotone croissante. Par conséquent,  $u(p)$  est semicontinue inférieurement partout dans l'espace.

**Théorème 2.** *Soit  $\mu$  une distribution de masse non négative. Si  $\Phi(t)$  satisfait aux  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  et  $(B)$ , le potentiel généralisé  $u(p)$  est une fonction subharmonique de  $p$ , pour tout  $p$  situé hors du noyau de  $\mu$ .*

**Démonstration.** Soit  $p_0$  un point quelconque situé hors du noyau  $F$  de  $\mu$ . Pour tout point  $q_0$  de  $F$ , la fonction  $h(r_{pq_0})$  ( $= 1/r_{pq_0}^{m-2}$  ou  $= -\log r_{pq_0}$  suivant que  $m \geq 3$  ou  $= 2$ ) est harmonique par rapport à  $p$  dès que  $p \neq q_0$ . Soit  $S$  une petite sphère du centre  $p_0$  et de rayon  $r$ ,  $r$  étant assez petit de sorte que  $S$  soit située hors de  $F$ . Nous avons alors, en posant  $\omega_m = 2(\sqrt{\pi})^m / \Gamma(m/2)$

1) Aufgabe 124. Là, ces auteurs appellent "fonction non concave de bas" au lieu de la fonction convexe à notre sens.

$$\left(\frac{1}{r_{p_0q_0}}\right)^{m-2} = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int \left(\frac{1}{r_{pq_0}}\right)^{m-2} d\sigma_m, \text{ où } -\log r_{p_0q_0} = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log r_{pq_0}) d\theta$$

suivant que  $m \geq 3$  ou  $m = 2$ , où  $d\sigma_m$  désigne l'élément de volume à  $m-1$  dimensions situé sur la surface de  $S$ , et  $\theta$  l'angle que fait cet élément au centre  $p_0$  de  $S$ . Or, comme  $\Phi(t)$  est une fonction convexe, nous avons l'inégalité<sup>1)</sup>:

$$\Phi \left\{ \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int \frac{1}{r_{pq_0}^{m-2}} d\sigma_m \right\} \leq \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int \Phi \left\{ \frac{1}{r_{pq_0}^{m-2}} \right\} d\sigma_m$$

ou  $\Phi \left\{ \frac{-1}{2\pi} \int \log r_{pq_0} d\theta \right\} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-\log r_{pq_0}) d\theta$

Par suite, nous avons

$$\Phi \left\{ \frac{1}{r_{p_0q_0}^{m-2}} \right\} \leq \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int \Phi \left\{ \frac{1}{r_{pq_0}^{m-2}} \right\} d\sigma_m,$$

ou  $\Phi \left\{ \log \frac{1}{r_{p_0q_0}} \right\} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \left\{ \log \frac{1}{r_{pq_0}} \right\} d\theta.$

Par conséquent, la fonction  $\Phi\{h(r_{pq_0})\}$  est subharmonique par rapport à  $p$ . Or, comme nous avons vu dans la démonstration du théorème 1,  $u(p)$  est la limite d'une suite  $S_n(p)$  donnée par la formule (5), qui converge uniformément. Mais, d'autre part, comme  $\mu(F_i) \geq 0$ , l'expression  $S_n(p)$  est subharmonique<sup>2)</sup>, et il s'en suit que  $u(p)$  lui-même est subharmonique<sup>3)</sup>, c. q. f. d.<sup>4)</sup>

§ 2. *Capacité des ensembles.* La notion de la capacité des ensembles est d'origine électro-statique. Soit  $L_1, L_2$  un système de deux conducteurs disjoints. Supposons encore que l'un des  $L_1, L_2$  porte une charge  $e$  et l'autre la charge  $-e$ . Ces charges seront alors distribuées dans  $L_1$  ou  $L_2$  resp. de sorte que le potentiel électro-statique soit constante sur  $L_1$  et  $L_2$ . Soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  ces deux constantes. Nous disons alors que le système  $L_1, L_2$  forme un *condenseur* dont la capacité est  $C = e/(\Phi_1 - \Phi_2)$ . Mais, lorsqu'on éloigne  $L_2$  jusqu'à la distance infinie, on obtient la capacité de  $L_1$  qui est égale à  $e/\Phi_1$ . La définition de la capacité de la théorie mathématique du potentiel est simple-

1) Voir p. ex. G. Polya u. G. Szegö, [1], p. 53, Aufgabe 75; J. L. W. Jensen, [1] p. 175.

2) Voir p. ex. T. Rado [1], p. 15, Article 3. 10.

3) Voir T. Rado [1], p. 13, Article 3. 3.

4) Le résumé de ce chapitre a été publié dans K. Kunugui [1].

ment une précision et généralisation de cette notion. Dans ce chapitre nous supposons que les axiomes  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(B)$  soient satisfaites.

Définitions. Désignons par  $\mathfrak{F}$  la famille de tous les ensembles  $M$  de  $\Omega$ , qui satisfait à la condition suivante: pour toute distribution de masse  $\mu$  non négative et telle que  $0 < \mu(M) < +\infty$ , et pour tout nombre positif  $\varepsilon$ , il existe un ensemble fermé  $F$  et un ensemble ouvert  $G$  satisfaisant aux inégalités  $\mu(G-F) < \varepsilon$ ,  $F \subseteq M \subseteq G$ .  $\mathfrak{F}$  contient tous les ensembles boréliens ou analytiques<sup>1)</sup>. Soit  $A$  un ensemble quelconque de  $\Omega$ . La borne supérieure de la masse totale  $\mu(A)$  de la distribution  $\mu$  non négative, satisfaisant aux deux conditions suivantes: 1) le noyau de  $\mu$  est contenu dans  $A$ , 2) le potentiel  $u(p; \mu)$  est partout inférieur ou égal à 1:  $u(p; \mu) \leq 1$ ,  $p \in \Omega$ , est appelé "capacité de l'ensemble  $A$ " et sera désignée par  $C(A) = C_\Phi(A)$ .

Théorème 1. 1<sup>o</sup>) Pour tout ensemble  $M, N$ , l'inclusion  $M \supseteq N$  entraîne  $C(M) \geq C(N)$ . 2<sup>o</sup>) Pour toute suite des ensembles de  $\mathfrak{F}$ :  $A_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), on a  $C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(A_n)$ .<sup>2)</sup>

Démonstration. La proposition 1<sup>o</sup>) est évidente, puisque  $\Phi(t) \geq 0$ , en vertu des  $(A_2)$  et  $(B)$ . Nous démontrons donc 2<sup>o</sup>). Nous considérons d'abord le cas où  $C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)$  est finie.  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire, il existe une distribution d'une masse non négative  $\mu$  telle que  $\mu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) > C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) - \varepsilon$ ,  $u(p; \mu) \leq 1$ ,  $p \in \Omega$  et dont le noyau appartient à  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ . Puisque l'ensemble  $A_n$  est de  $\mathfrak{F}$ , il existe un ensemble fermé  $F_n$  et un ensemble ouvert  $G_n$  tels que  $F_n \subseteq A_n \subseteq G_n$ ,  $\mu(G_n) \leq \mu(F_n) + \varepsilon/2^n$ . D'autre part, puisque  $\Phi(t) \geq 0$ , la partie de la masse  $\mu$  qui se trouve sur  $F_n$  engendre un potentiel inférieure ou égale à 1. Par suite, on a  $\mu(G_n) \leq C(A_n) + \varepsilon/2^n$ . Ainsi nous avons

$$\mu(\sum_{n=1}^{\infty} G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(A_n) + \varepsilon,$$

et conséquemment  $C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) - \varepsilon < \sum_{n=1}^{\infty} C(A_n) + \varepsilon$ .  $\varepsilon$  étant arbitraire, nous avons finalement  $C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(A_n)$ . Le cas où  $C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = +\infty$  se traite de la même manière.

Corollaire 1. La somme d'une suite des ensembles de  $\mathfrak{F}$  de capacité

1) Voir p. ex. S. Saks [1], p. 47.

2) O. Frostman [1] pp. 53; S. Kakutani [1] p. 395, Lemme 2; S. Kametani, [1] p. 228, Théorème 8.

nulle est un ensemble de capacité nulle.

**Corollaire 2.** *Pour que la capacité de tous les ensembles soit identiquement nulle, il faut et il suffit qu'elle le soit pour toutes les sphères fermées.*

**Démonstration.** Supposons que la capacité de toutes les sphères fermées soit nulle. Si un ensemble  $A$  est borné, il existe une sphère fermée qui contient  $A$ . Donc  $C(A) = 0$ , en vertu du théorème 1 1°). Si  $A$  n'est pas borné, il est une somme d'une suite des ensembles bornés. Alors, il s'ensuit du Corollaire 1 que sa capacité est également nulle.

**Théorème 2.** *La capacité d'un ensemble  $A$  est la borne supérieure de celles des ensembles fermés et bornés, qui sont contenus dans  $A$ .*

**Démonstration.** Désignons par  $\underline{C}(A)$  la borne supérieure de  $C(F)$ , où  $F$  est un ensemble fermé borné quelconque, contenu dans  $A$ . Puisqu'on a  $C(F) \leq C(A)$ , en vertu du théorème 1 1°), on a  $\underline{C}(A) \leq C(A)$ . Il nous suffit donc de démontrer qu'on a  $\underline{C}(A) \geq C(A)$ . Supposons d'abord que  $C(A)$  soit finie. Il existe alors, pour tout nombre positif  $\varepsilon$ , une distribution de masse non négative  $\mu$  dont le noyau  $F$  est contenu dans  $A$ , qui engendre un potentiel inférieur ou égal à 1 et enfin telle qu'on ait  $\mu(F) > C(A) - \varepsilon$ . La capacité de  $F$  est alors, d'après définition, est  $\geq \mu(A)$ . Donc,  $C(A) \geq \underline{C}(A) - \varepsilon$ .  $\varepsilon$  étant arbitraire, nous avons  $\underline{C}(A) \geq C(A)$ . Le cas où  $C(A) = +\infty$  se traite de la même manière.

**Théorème 3.** *Pour que la fonction d'ensembles  $C(A)$  ne s'évanouisse pas identiquement, il faut et il suffit que la condition*

$$(C) \quad \int_0^1 \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi < +\infty$$

*soit remplie.*

**Démonstration.** La condition est nécessaire. En effet, si la condition (C) n'est pas remplie, nous avons, pour tout  $r$ ,  $r > 0$ ,

$$\int_0^r \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi = +\infty.$$

Si, d'autre part, la capacité d'une sphère  $S$  est positive, nous avons une distribution de masse non négative  $\mu$ , répartie sur un ensemble fermé de  $A$  telle que  $\mu(S) > C(S)/2$  et que le potentiel  $u(p; \mu)$  ne surpasse pas 1. Soient  $r$  le rayon de  $S$  et  $S^*$  une sphère fermée concentrique à  $S$  dont le rayon est double. En désignant par  $\Gamma$  la valeur moyenne de  $u(p)$ , pour  $p$  appartenant à  $S^*$ , on a



$$1 \geq \Gamma = \frac{3}{32\pi r^3} \int_{S^*} u(p) dv_p = \frac{3}{32\pi r^3} \int_{S^*} \int_S \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q dv_p$$

où  $dv_p$  est l'élément de volume au point  $p$ . L'inversion de l'ordre de l'intégration nous donne

$$\Gamma = \frac{3}{32\pi r^3} \int_S \int_{S^*} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) dv_p d\mu_q.$$

Or, comme la sphère  $S^*$  contient toutes les sphères  $S(q)$  au centre  $q$ ,  $q \in S$ , et de rayon  $r$ , nous avons

$$\Gamma \geq \frac{3}{32\pi r^3} \int_S \int_{S(q)} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) dv_p d\mu_q = \frac{3}{8r^3} \cdot \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi \cdot \mu(S)$$

ce qui est absurde. La capacité des sphères est toujours nulle, et le corollaire 2 du théorème 1 implique que la capacité s'évanouit identiquement.

La condition est suffisante. En effet, soit  $S$  une sphère du rayon  $r$ . Distribuons une masse  $\mu$  homogène de densité 1 dans l'intérieur de  $S$ . Cette distribution de masse non négative engendre un potentiel  $u(p)$  qui atteint son maximum au centre de  $S$ . Donc, on a

$$u(p) = \int_S \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) dv_q \leq 4\pi \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi.$$

La masse totale étant égale à  $(4/3) \pi r^3$ , nous avons

$$C(S) \geq r^3 / \left( 3 \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi \right) > 0.$$

**Théorème 4.** *L'ensemble de  $\mathfrak{F}$  de capacité nulle ne peut porter aucune masse non négative qui engendre un potentiel borné.*

**Démonstration.** Soit  $A$  un ensemble de  $F$  capacité nulle, et supposons qu'il existe une distribution de masse non négative  $\mu$  telle que  $\mu(A)$  soit positive et que le potentiel  $u(p; \mu)$  soit borné. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que  $A$  est un ensemble fermé. La partie  $\mu^*$  de  $\mu$  qui se trouve sur  $A$  engendre alors un potentiel  $u^*$  tel que  $u^* \leq u$ , et par suite que maximum  $\Gamma$  soit fini. On a alors  $C(A) \geq \mu(A)/\Gamma > 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse du théorème.

**Corollaire.** *L'ensemble de  $\mathfrak{F}$  de capacité nulle est toujours de mesure (au sens de Lebesgue) nulle, dès que  $\Phi(t)$  satisfait à (C).*

**Démonstration.** Soit, en effet,  $A$  un ensemble de  $\mathfrak{F}$  qui est de capacité nulle, mais de mesure positive. Sans restreindre la généralité,

nous pouvons supposer que  $A$  soit borné. Alors  $A$  est contenu dans une sphère fermée  $S$ , dont le volume engendre, en vertu de l'hypothèse (C), un potentiel borné, ce qui est absurde au théorème 4.

Citons encore un théorème dû à M. S. Kakutani, dont nous allons nous servir dans la suite.

**Théorème 5<sup>1)</sup>.** *Si la masse totale d'une distribution  $\mu$  non négative est 1, les points  $p$  de  $\Omega$  tels que  $u(p; \mu) \geq K$ ,  $0 < K < +\infty$ , forment un ensemble  $E$  de capacité  $\leq 1/K$ .*

**Démonstration<sup>1)</sup>.** Si la capacité de  $E$  est nulle, notre théorème est évidemment vrai. Supposons donc  $C(E)$  soit positive et finie. Alors, il existe, pour tout nombre positif  $\varepsilon$ , une distribution  $\mu^*$  non négative, dont le noyau appartient à  $E$ , telle que  $u(p; \mu^*) \leq 1$ ,  $p \in \Omega$ , et enfin que  $\mu^*(E) > C(E) - \varepsilon$ . On a alors

$$\begin{aligned} \{C(E) - \varepsilon\} \cdot K &< \mu^*(E) \cdot K \leq \int_E u(p; \mu) d\mu_p^* = \int_E \int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q d\mu_p^* \\ &= \int_\Omega \int_E \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) du_p^* d\mu_q = \int_\Omega u(q; \mu^*) d\mu_q \leq \mu(\Omega) = 1 \end{aligned}$$

$\varepsilon$  étant arbitraire, on a  $C(E) \cdot K \leq 1$ . Si  $C(E) = +\infty$ , nous pouvons raisonner de la même manière et amener à la contradiction.

La définition de la notion de la capacité des ensembles pour la fonction arbitraire  $\Phi(t)$  a été donnée pour la première fois par MM. O. Frostman<sup>2)</sup>, S. Kakutani<sup>3)</sup>, S. Kametani<sup>4)</sup>. D'ailleurs, ces auteurs ont donné ce terme à une notion (un peu différente de celle que nous avons donnée plus haut), que nous allons maintenant considérer.

Comme  $\Phi(t)$  est une fonction monotone croissante et continue, les nombres  $\Phi^{-1}(y)$ , pour toute valeur  $y$ , forment un intervalle fermé, ou un point ou un ensemble vide. Pour les deux premiers cas, posons  $\varphi(y) =$  borne inférieure de  $\Phi^{-1}(y)$ , et

$$C^*(A) = \varphi(C(A)).$$

Nous avons toujours  $0 \leq C^*(A) \leq +\infty$ , et ici encore un analogue au théorème 1 subsiste :

**Théorème 6.** 1<sup>o</sup>) *Pour toute paire d'ensembles  $A, B$  tels que  $A \subseteq B$ , nous avons  $C^*(A) \leq C^*(B)$ .* 2<sup>o</sup>) *Supposons que  $\Phi(t)$  satisfasse à la condition (A<sub>3</sub>). Alors, pour toute suite d'ensembles de  $\mathfrak{F} : A_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , nous avons  $C^*(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C^*(A_n)$ .*

1) S. Kakutani [1] p. 396, Lemme 3.

2) O. Frostman [1] pp. 48-49.

3) S. Kakutani [1] p. 394.

4) S. Kametani [1] p. 226.

Démonstration.  $\varphi(y)$  étant une fonction monotone croissante, <sup>1)</sup> s'ensuit immédiatement du théorème 1, 1<sup>o</sup>). Considérons donc 2<sup>o</sup>). D'abord, en vertu du théorème 1, 2<sup>o</sup>), nous avons  $C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(A_n)$ . Mais,  $\varphi(y)$  étant monotone croissante, nous avons

$$(1) \quad \varphi(C(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)) \leq \varphi(\sum_{n=1}^{\infty} C(A_n)).$$

Mais, d'autre part,  $\Phi(t)$  étant convexe, l'inégalité de Jensen<sup>1)</sup>, nous donne

$$(2) \quad \varphi(\sum_{n=1}^{\infty} C(A_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(C(A_n)).$$

(1) et (2) entraînent évidemment  $C^*(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} C^*(A_n)$ , c. q. f. d.

§ 3. *Principe du maximum.* Soient  $D$  et  $H$  deux ensembles quelconques de  $\Omega$  qui sont disjoints. Nous disons qu'une fonction  $\varphi(p)$  définie sur  $D+H$  est *majorée dans (ou sur)  $H$*  si l'on a

$$\text{borne sup}_{p \in D} \varphi(p) \leq \text{borne sup}_{p \in H} \varphi(p)$$

en d'autres termes, si, dès qu'on a  $\varphi(p) \leq K$ ,  $0 \leq K < +\infty$  pour tout  $p$  de  $H$ , la même inégalité subsiste encore pour tout point de  $D$ .

Lemme. Soit  $\varphi_n(p)$  une suite des fonctions définie sur  $D+H$ ,  $D$  et  $H$  étant deux ensembles disjoints. Si l'on a  $\varphi(p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(p)$  dans  $D$  (la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(p)$  pouvant être finie ou infinie),  $\varphi(p) \geq \varphi_n(p)$  dans  $H$ , et si  $\varphi_n(p)$  sont majorées dans  $H$ , alors  $\varphi(p)$  est majorée dans  $H$ ,

Démonstration. Désignons par  $m_D$  et  $m_H$  la borne supérieure de  $\varphi(p)$ ,  $p$  parcourant  $D$  et  $H$  resp., et montrons qu'on a  $m_D \leq m_H$ .

Supposons par impossible qu'on a  $m_D > m_H$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre positif arbitraire, mais tel que  $0 < \varepsilon < m_D - m_H$ . Comme  $m_D > m_H + \varepsilon$ , il existe un point  $p_1$  de  $D$ , où l'on a  $\varphi(p_1) > m_H + \varepsilon$  ( $p_1 \in D$ ). Alors,  $p_1 \in D$  entraîne  $\varphi(p_1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(p_1)$ . Par suite, il existe un indice  $n$ , tel que  $\varphi_n(p_1) > m_H + \varepsilon$ . Comme  $\varphi_n(p)$  est majorée dans  $H$ , il existe un point  $p_2$  de  $H$ , où l'on a  $\varphi_n(p_2) > m_H + \varepsilon$ . Or,  $p_2 \in H$  entraîne  $\varphi(p_2) \geq \varphi_n(p_2)$ . Par suite, on a  $\varphi(p_2) > m_H + \varepsilon$ , ce qui est contradictoire à la définition de  $m_H$ , c. q. f. d.

Maintenant, nous allons démontrer le principe du maximum, qui joue un rôle essentiel dans le théorème fondamental que nous occu-

1) J. L. W. V. Jensen, [1].

perons dans le chapitre suivant.

**Théorème 1.** Soit  $E$  un ensemble fermé arbitraire qui contient le noyau  $F$  d'une distribution de masse  $\mu$  non négative. Le complémentaire de  $F$  se décompose en un nombre fini ou une infinité dénombrable de composants connexes. Soient  $D$  un de ces composants et  $H$  la frontière de  $D$ . Si  $\Phi(t)$  satisfait aux conditions (A) et (B), le potentiel  $u(p; \mu)$ , comme fonction définie sur  $D+H$ , est majoré sur  $H$ .

Démonstration. Désignons par  $T_n$  la solution de l'équation

$$(1) \quad \Phi(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Phi(t) + n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

D'après la condition (A), il existe une valeur  $t_0$  ( $0 \leq t_0$ ) telle que  $\Phi(t)$  croît constamment, dès que  $t$  surpasse  $t_0$ . Donc, la solution de l'équation (1) existe toujours et elle est unique. On a d'ailleurs  $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ ,  $\lim T_n = +\infty$ . Posons

$$(2) \quad \Phi_n^*(t) = \begin{cases} \Phi(t) & \text{pour } 0 < t \leq T_n, \\ \{D - \Phi(T_n)\} \{t - T_n\} + \Phi(T_n) & \text{pour } T_n < t < +\infty. \end{cases}$$

En vertu de (A), il est facile de voir que

$$(3) \quad \Phi_n(t) \leq \Phi_n^*(t) \leq \Phi_{n+1}^*(t) \leq \Phi(t) \text{ pour } 0 < t < +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ainsi, en posant

$$(4) \quad u_n^*(p) = \int_F \Phi_n^* \left( \frac{1}{r_{pq}} \right) d\mu_q,$$

nous avons  $u(p; \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^*(p)$  et  $u_n^*(p) \leq u_{n+1}^*(p)$ ,  $p \in \Omega$ . Par conséquent, notre Lemme montre bien que, pour démontrer le théorème, il nous suffit de voir que la fonction  $u_n^*(p)$  est majorée sur  $H$ .

Remarquons d'abord qu'on peut montrer sans peine que la fonction  $\Phi_n^*(t)$  satisfait aux conditions (A) et (B). Désignons ensuite par  $m_D$  et  $m_H$  la borne supérieure de  $u_n^*(p)$  pour  $p$  parcourant  $D$  et  $H$  resp., et montrons que l'on doit avoir  $m_D \leq m_H$ .

Or, d'après la définition de  $m_D$ , il existe une suite des points  $p_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ) de  $D$ , tel que  $\lim u_n^*(p_\nu) = m_D$ . Or, d'après le théorème 2, § 1,  $u_n^*(p)$  est subharmonique dans  $D$ , et par suite  $p_\nu$  ne peut avoir un point limite dans l'intérieur de  $D$  sauf le cas où  $u_n^*(p)$  est une constante dans  $D$ . Le point  $p_\nu$  ne peut aboutir au point à la distance infinie, puisque dans ce cas  $u_n^*(p_\nu)$  tendrait vers  $\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t) \cdot \mu(F)$  qui est une borne inférieure de  $u_n^*(p)$ . Donc, sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que la suite  $p_\nu$  tende vers un point  $p_0$  de  $H$ . Pour voir qu'on a  $m_D \leq m_H$ , il nous suffit donc de montrer l'inégalité :

$$(5) \quad \lim_{\substack{p' \rightarrow p_0 \\ p' \in H}} u_n^*(p) \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} u_n^*(p_\nu).$$

Prenons, pour cela, un nombre  $r_0$  tel que

$$(6) \quad 0 < r_0 < 1/T_n$$

et décrivons une petite sphère  $S(r_0)$  de rayon  $r_0$  et de centre  $p_0$ . Nous pouvons supposer d'ailleurs que la surface de  $S(r_0)$  ne porte aucune partie de masse  $\mu$ . Partageons ensuite le potentiel  $u_n^*(p)$  en deux parties, dont la première est engendré par la partie de  $\mu$  contenue dans  $S(r_0)$  et l'autre par celle qui se trouve dans  $\Omega - S(r_0)$ . Désignons-les par  $v'(p)$  et  $v''(p)$  respectivement :

$$v'(p) = \int_{S(r_0)} \Phi_n^* \left( \frac{1}{r_{pq}} \right) d\mu_q; \quad v''(p) = \int_{\Omega - S(r_0)} \Phi_n^* \left( \frac{1}{r_{pq}} \right) d\mu_q.$$

En vertu du théorème 1 de § 1,  $v''(p)$  est continue au point  $p_0$ . Donc, on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} v''(p) = \lim_{p' \rightarrow p_0} v''(p'), \quad p' \in H.$$

Par conséquent, pour montrer (5), il nous suffit d'établir

$$\overline{\lim}_{\substack{p' \rightarrow p_0 \\ p' \in H}} v'(p') \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} v'(p_\nu).$$

D'autre part, (2) et (6) entraînent

$$v'(p) = \int_S [\Phi(T_n) - \{D_- \Phi(T_n)\} T_n] d\mu_q + D_- \Phi(T_n) \cdot \int_S \frac{1}{r_{pq}} d\mu_q.$$

Le premier terme étant constant, il nous suffit enfin de montrer que

$$(7) \quad \text{en posant } v(p) = \int_S \frac{1}{r_{pq}} d\mu_q, \text{ on a } \overline{\lim}_{\substack{p' \rightarrow p_0 \\ p' \in H}} v(p) \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} v(p_\nu).$$

Or, ceci est une propriété bien connue du potentiel newtonien<sup>1)</sup>.

**Théorème 2.** *Supposons que  $\Phi(t)$  satisfasse à (A) et (B) et que les ensembles  $D$ ,  $H$  aient les mêmes significations que dans le théorème 1. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel  $u(p; \mu)$  soit majoré sur  $H$  pour toute distribution  $\mu$  et  $D$ ,  $H$ , est qu'on ait*

$$(8) \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow p_0} u(p; \mu) \leq \overline{\lim}_{p' \rightarrow p_0} u(p'; \mu) \text{ à chaque point } p_0 \text{ de } H, \text{ en désignant par } p \text{ et } p' \text{ deux points variables, l'un dans } D, \text{ l'autre dans } H.$$

**Démonstration.** La condition est nécessaire. Si  $u(p_0; \mu) = +\infty$ , la

1) Voir M. A. Maria [1]. Il s'agit d'un corollaire de la page 487.  
Cf. aussi O. Frostman [1], p. 69, et Y. Yosida [1].

fonction  $u(p; \mu)$  étant semicontinue inférieurement, on a  $\lim_{p \rightarrow p_0} u(p; \mu) = +\infty$ . Par suite, l'inégalité (8) a lieu évidemment. Supposons donc qu'on ait  $u(p_0; \mu) < +\infty$ . Étant donné un nombre positif arbitraire  $\varepsilon$ , il existe alors un rayon  $r_0 (r_0 > 0)$ , tel qu'en désignant par  $S_0$  la sphère fermée de rayon  $r_0$  et de centre  $p_0$ , et en posant

$$u_{S_0}(p) = \int_{S_0} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q, \quad u_{\Omega-S_0}(p) = \int_{\Omega-S_0} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q, \quad \text{on a}$$

$$(9) \quad |u_{S_0}(p_0)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad r_0 < \varepsilon.$$

Comme  $u_{\Omega-S_0}(p)$  est continue au point  $p_0$ , il existe un rayon  $r_1$ ,  $0 < r_1 < r_0$ , tel qu'en désignant par  $S_1$  la sphère fermée de rayon  $r_1$  et de centre  $p_0$ , on a

$$(10) \quad |u_{\Omega-S_0}(p_1) - u_{\Omega-S_0}(p_2)| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad p_1, p_2 \in S_1.$$

Maintenant, remarquons d'abord qu'on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = +\infty$ , en vertu de

(A). Prenons ensuite un rayon  $r_2$  assez petit :  $0 < r_2 < r_1$  et considérons la sphère fermée  $S_2$  du rayon  $r_2$  et du centre  $p_0$ . Alors pour tout point  $q$  de  $S_2$ , la distance entre un point quelconque  $p'$  de la surface de la sphère  $S_1$  est toujours supérieure ou égale à  $r_1 - r_2$ . Par suite, on a

$$u_{S_2}(p') = \int_{S_2} \Phi\left(\frac{1}{r_{p'q}}\right) d\mu_q \leq \Phi\left(\frac{1}{r_1 - r_2}\right) \cdot \mu(S_2).$$

Au contraire, si  $p''$  appartient à  $S_2$ , on a  $u_{S_2}(p'') \geq \Phi\left(\frac{1}{2r_2}\right) \cdot \mu(S_2)$ .

Donc, nous pouvons supposer que  $r_2$  soit assez petit de sorte qu'on ait

$$(11) \quad u_{S_2}(p'') > u_{S_2}(p') + \eta, \quad \eta > 0.$$

Pour toute paire  $p', p'', p'' \in S_2$  et  $p'$  situé sur la surface de  $S_1$ , et pour un nombre  $\eta$  qui ne dépend que de  $r_1, r_2$  (et de  $\mu, \Phi(t), p_0$ ).

$$\text{Posons} \quad u_{S_0-S_2}(p) = \int_{S_0-S_2} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q.$$

On voit bien que  $u_{S_0-S_2}(p)$  est continue au point  $p_0$ . Il existe donc un rayon  $r_3$ ,  $0 < r_3 < r_2$ , tel qu'en désignant la sphère fermée de rayon  $r_3$  et de centre  $p_0$  par  $S_3$ , on ait

$$(12) \quad |u_{S_0-S_2}(p_1) - u_{S_0-S_2}(p_2)| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad p_1, p_2 \in S_3.$$

Soit, maintenant,  $p^*$  un point quelconque de la partie de  $D$  et de  $S_3$ , et désignons par  $F$  le noyau de  $\mu$ . Alors,  $S_2 \cdot F$  sera situé en dehors d'un ensemble ouvert contenant  $p^*$ , dont la frontière se compose d'une partie (ou total) de la surface de  $S_1$  et d'une partie (ou total) de l'ensemble  $H \cdot S_1$ . Désignons-les par  $D^*$  et  $H^*$  resp.. Or,  $u_{S_2}(p)$ , comme

fonction définie sur  $D^* + H^*$ , est majorée, en vertu de l'hypothèse faite, sur  $H^*$ . Donc, il existe un point  $p_1$  de  $H^*$ , pour lequel on a

$$(13) \quad u_{s_2}(p^*) < \min \{u_{s_2}(p_1) + \varepsilon, u_{s_2}(p_1) + \eta\} \leq u_{s_0}(p_1) + \varepsilon.$$

Mais, d'après l'inégalité (11),  $p_1$  ne peut être situé sur la surface de  $S_1$ . Donc,  $p_1$  est situé sur  $S_1 \cdot H$ .

Or, d'après (12), on a  $u_{s_0-s_2}(p^*) < u_{s_0-s_2}(p_0) + \varepsilon \leq u_{s_0}(p_0) + \varepsilon$ , et ceci entraîne, en vertu de (9)

$$(14) \quad u_{s_0-s_2}(p^*) < 2\varepsilon.$$

Enfin, d'après (10), on a, en remarquant  $p^*, p_1 \in S_1$ ,

$$(15) \quad u_{\Omega-s_0}(p^*) < u_{\Omega-s_0}(p_1) + \varepsilon.$$

Si l'on ajoute membre à membre les inégalités (13), (14), (15), on peut conclure que, pour tout point  $p^*$  de  $D \cdot S_3$ , il existe un point  $p_1$  de  $S_1 \cdot H$ , tel que

$$u(p^*) = u_{\Omega-s_0}(p^*) + u_{s_0-s_2}(p^*) + u_{s_2}(p^*) < u_{\Omega-s_2}(p_1) + u_{s_0}(p_1) + 4\varepsilon = u(p_1) + 4\varepsilon.$$

$\varepsilon$  étant arbitraire, ceci montre bien l'inégalité (8).

La condition est suffisante. Pour le voir, nous n'avons qu'à raisonner de la manière analogue à une partie de la démonstration du théorème 1 donnée plus haut et il sera inutile de la répéter.

**Corollaire.** Soient  $\Phi(t)$  une fonction satisfaisante aux conditions (A) et (B')  $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$  et  $u(p)$  un potentiel engendré par une distribution  $\mu$  de masse non négative dont le noyau est contenu dans un ensemble fermé et borné  $F$ . Soit donnée encore une fonction  $f(p)$  satisfaisante aux trois conditions suivantes: 1°)  $f(p)$  est subharmonique partout dans l'espace  $\Omega$ . 2°)  $f(p)$  est continue sur  $F$  (comme fonction définie dans  $\Omega$ ). 3°) La limite supérieure de  $f(p)$  pour  $p$  s'éloignant indéfiniment ne surpasse pas la valeur  $K$ . Alors, si la somme  $f(p) + u(p)$  de  $f(p)$  et du potentiel  $u(p)$  engendré par une distribution non négative  $\mu$ , satisfait à l'inégalité  $f(p) + u(p) \leq K'$  ( $K' \geq K$ ) partout dans  $F$ , la même inégalité subsiste partout dans  $\Omega$ .

**Démonstration.** Désignons par  $m_n$  la borne supérieure de  $f(p) + u(p)$  pour  $p$  parcourant  $D = \Omega - F$ . Il existe alors une suite des points  $p_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(p_n) + u(p_n)\} = m_n$ . Supposons par impossible que nous ayons  $m_n > K'$ . Sauf le cas où  $f(p) + u(p)$  se réduit à une constante, la suite  $p_n$  n'a aucun point limite dans l'intérieur de  $D$ . La suite ne peut avoir une suite partielle qui s'éloigne indéfiniment, puisque  $u(p)$  tend vers 0 lorsque  $p$  s'éloigne indéfiniment et que la limite supérieure de  $f(p)$  pour ce cas  $\leq K$  ( $\leq K'$ ). Il existe donc une suite

$p_{n\kappa}$  ( $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ ) qui tend vers un point  $p_0$  de  $F$ , et nous pouvons supposer que ce fait a lieu même si  $f(p) + u(p)$  est une constante. Or, le théorème 2 et la continuité de  $f(p)$  à  $p_0$  entraînent

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} u(p_{n\kappa}) \leq \lim_{\substack{p \rightarrow p_0 \\ p' \in F}} u(p') \text{ et } \lim_{\kappa \rightarrow \infty} f(p_{n\kappa}) = \lim_{\substack{p' \rightarrow p_0 \\ p' \in F}} f(p')$$

et par suite

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \{f(p_{n\kappa}) + u(p_{n\kappa})\} \leq \lim_{\substack{p' \rightarrow p_0 \\ p' \in F}} \{f(p') + u(p')\} \leq K'$$

qui est une contradiction.

Exemple 1. Soit  $F$  la sphère fermée du rayon 1 et du centre  $p_0$  dans l'espace ordinaire  $\Omega$ . Considérons le potentiel newtonien  $u(p)$  qui est d'équilibre pour  $F$ .  $u(p)$  est borné dans  $\Omega$ . Posons  $f(p) = r$ ,  $r$  désignant la distance entre  $p$  et  $p_0$ . On sait que  $r$  est subharmonique partout dans  $\Omega$ .  $r$  est continue sur  $F$ , mais  $r + u(p)$  n'est pas borné dans  $\Omega$ . Ainsi, l'exemple montre que la condition 3<sup>o</sup> du corollaire ne peut pas être omise.

Exemple 2. Considérons l'espace ordinaire dont les points sont désignés par  $(x, y, z)$ . Prenons une suite des points  $p_n = (1/n, 0, 0)$ . Soit  $\alpha$  un nombre positif quelconque, mais tel que  $0 < \alpha < 1$ , et prenons encore une suite des nombres positifs  $m_n$  qui satisfont à l'inégalité :

$$m_n < \varepsilon / \{2^{n+2} n(n+1)\}, \quad 2\varepsilon < 1 - \{2^\alpha(1 - \alpha/2)\}^{-1} = k_\alpha,$$

où  $\varepsilon$  est un nombre positif arbitraire inférieur à  $k_\alpha/2$ . Posons enfin  $r_n = (m_n)^{1/\alpha}$ . Soit  $S_n$  la surface de la sphère du rayon  $r_n$  et du centre  $p_n$ . Considérons maintenant la fonction  $\Phi(t) = t^\alpha$  et une distribution d'une masse non négative de total  $m_n$ , répartie sur  $S_n$ , dont la densité superficielle est constante. Désignons par  $\mu_n$  cette distribution, et posons

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n.$$

On a alors  $F = \sum_{n=1}^{\infty} S_n + (p_0)$ ,  $p_0 = (0, 0, 0)$  et

$$u(p_n; \mu_n) = 1; \quad u(p; \mu_n) = 2^{-\alpha} \{1 - \alpha/2\}^{-1} < 1 \text{ pour } p \in S_n$$

$$u(p; \mu_m) < \varepsilon / 2^{n+1} \text{ pour } p \in S_n \quad (m \neq n).$$

Donc, on a

$$u(p_n, \mu) > 1; \quad u(p; \mu) < \{2^\alpha(1 - \alpha/2)\}^{-1} + \varepsilon/2 \text{ pour } p \in F.$$

Ainsi, l'exemple montre que la condition  $(A_3)$  du théorème 2 ne peut être omise.



Quand même, M. Kamétani<sup>1)</sup> a démontré récemment que tout potentiel  $u(p; \mu)$  de la distribution non négative  $\mu$ , qui est continue sur le noyau  $F$  de  $\mu$  comme fonction définie sur  $F$ , est encore continue partout dans l'espace, et cela pour tout  $\Phi(t)$  qui satisfait seulement  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(B)$ . Ce théorème de M. Kamétani se démontre en raisonnant comme nous avons fait pour le théorème 2, mais en s'appuyant sur un théorème de M. Ugaeri<sup>2)</sup>: Si  $\Phi(t)$  satisfait à  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(B)$ , tout potentiel  $u(p; \mu)$  qui est engendré par une distribution non négative  $\mu$  et qui est inférieur à  $K$  sur le noyau  $F$  de  $\mu$ , est partout inférieur à  $\kappa \cdot K$  dans l'espace, où  $\kappa$  est un nombre entier positif qui dépend seulement du nombre de dimensions. Reproduisons en quelques lignes sa démonstration<sup>3)</sup>. Soit  $p$  un point de  $D = \Omega - F$ .  $\Omega$  peut être une somme d'un nombre  $\kappa$  de cônes congruents au même sommet  $p$ , dont l'angle du sommet est inférieur ou égal à  $\pi/3$  (pour  $m = 2$  on peut poser  $\kappa = 6$ , pour  $m = 3$  il suffit de poser  $\kappa = 42$ , et ainsi de suite). Désignons-les par  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, \kappa$ ). Si  $C_i \cdot F \neq 0$ , il existe un point  $p_i$  de  $C_i F$  qui est situé le plus proche de  $p$ . On a alors, pour tout  $q$  de  $C_i F$ ,  $r_{pq} \geq r_{p_i q}$  et par suite

$$u(p; \mu) \leq \sum_{i=1}^{\kappa} \int_{C_i F} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q \leq \sum_{\substack{i=1 \\ (C_i F \neq 0)}}^{\kappa} \int_{C_i F} \Phi\left(\frac{1}{r_{p_i q}}\right) d\mu_q \leq \sum_{\substack{i=1 \\ (C_i F \neq 0)}}^{\kappa} u(p_i; \mu)$$

ce qui prouve le théorème de M. Ugaéri.

Or, M. Y. Yosida<sup>3)</sup> a remarqué que, d'après un théorème d'Egoroff et Lusin, pour tout potentiel  $u(p; \mu)$  de  $\mu$  non négative, il existe une suite des ensembles fermés  $F_n$  contenus dans le noyau  $F$  de  $\mu$ , telle qu'en désignant par  $\mu_n$  la partie de  $\mu$  qui se trouve sur  $F_n$ , le potentiel  $u(p; \mu_n)$  est continue sur  $F_n$  (comme fonction définie sur  $F_n$ ), et qu'on ait  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(p; \mu_n) = u(p; \mu)$  pour tout  $p$  de  $\Omega - F$ . Alors, en vertu du théorème de M. Kamétani  $u(p; \mu_n)$  est continue partout dans  $\Omega$ . Donc, si  $\Phi(t)$  satisfait à  $(A)$  et  $(B)$ ,  $u(p; \mu_n)$  est majoré sur  $H$  (voir les notations du théorème 1). Par suite, d'après le lemme du théorème 1,  $u(p; \mu)$  est lui-même majoré sur  $H$ . Ainsi, nous avons obtenu une deuxième démonstration du théorème 1 qui a été donnée par M. N. Ninomiya<sup>4)</sup>.

§ 4. *Théorèmes fondamentaux. Applications.* M. O. Frostman a résolu un problème fondamental de la théorie du potentiel, qui remonte à Gauss, mais qui est formulé sous une forme moderne. C'est le pro-

1) Voir S. Kametani [3].

2) T. Ugaeri [1].

3) Y. Yosida [1].

4) N. Ninomiya [1].

blème dit problème d'équilibre et qu'il s'agit de distribuer une masse positive donnée sur un domaine de l'espace, de manière que le potentiel devienne constant dans celui-ci. M. O. Frostman a remarqué que le principe de variation de Gauss dépend très peu des propriétés harmoniques du potentiel ordinaire, et montré que le théorème fondamental est valide pour le potentiel généralisé d'ordre  $\alpha$  (voir la définition de p. 65).

Nous allons montrer, maintenant, que ce théorème d'équilibre subsiste encore pour les potentiels dont la fonction  $\Phi(t)$  satisfait aux conditions (A) et (B) seulement. *Dans ce chapitre, nous supposons que  $\Phi(t)$  satisfasse toujours (A) et (B) sauf indication contraire.*

**Théorème 1 (théorème d'équilibre).** *Soit  $F$  un ensemble fermé et borné, dont la capacité est positive. Alors, il existe une distribution de masse  $\mu$  non négative et de total 1 sur  $F$ , telle que le potentiel  $u(p; \mu)$  soit constant dans  $F$  sauf aux points d'un ensemble de capacité nulle, cette constante étant maximum des valeurs de  $u(p; \mu)$  pour  $p$  parcourant tout espace. D'ailleurs, cette distribution—dite “d'équilibre”—est unique.*

Mais, considérons encore le cas où l'ensemble  $F$  est placé dans un champ extérieur.

**Théorème 2 (théorème du balayage).** *Soit  $F$  un ensemble fermé et borné quelconque de la capacité positive par rapport à la fonction  $\Phi(t)$  qui satisfait aux conditions (A) et (B')  $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$ . Soit encore  $f(p)$  une fonction définie dans tout espace  $\Omega$ , qui satisfait aux trois conditions suivantes: 1<sup>o</sup>)  $f(p)$  est subharmonique et semicontinue inférieurement dans  $\Omega$ . 2<sup>o</sup>)  $f(p)$  est semicontinue supérieurement et bornée sur  $F$ . 3<sup>o</sup>) la limite supérieure de  $f(p)$  pour  $p$  s'éloignant indéfiniment est non positive. Désignons par  $N$  la borne supérieure de  $|f(p)|$  pour  $p$  parcourant  $F$ . Dans ces conditions, nous pouvons montrer les trois propositions suivantes:*

1\*) *Pour tout nombre positif  $m$  tel que  $m > N \cdot C(F)$ , il existe une distribution d'une masse non négative  $\mu$  répartie sur  $F$ , dont la masse totale est  $m$ , et pour laquelle*

$$h(p) = \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q + f(p)$$

*est constant  $\gamma$  sur  $F$  sauf un ensemble de capacité nulle où il est plus petit que  $\gamma$ .  $\gamma$  est le maximum de  $h(p)$ ,  $p \in \Omega$ .*

2\*) *Si  $f(p) \equiv 0$ , on a  $\gamma = m/C(F)$  pour tout  $m$  ( $m > 0$ ).*

*Désignons par  $\nu$  une distribution de cette sorte pour  $m = C(F)$  ( $f(p) \equiv 0$  et  $\gamma = 1$ , l'existence d'une telle distribution est garantie par la proposition 2\*).*

3\*) Si, de plus,  $f(p)$  est partout négative dans  $F$ , une distribution  $\mu$  de la nature de la proposition 1\*) existe encore pour

$$m = - \int_F f(p) d\nu_p$$

avec  $\gamma = 0$ .

D'ailleurs, la distribution  $\mu$  qui jouit de ces propriétés est toujours unique pour chaque  $m$  ( $m > N \cdot C(F)$  pour le cas 1\*) et 2\*) et  $m = - \int_F f d\nu_p$  pour le cas 3\*), et pour le même  $\gamma$  dans le cas 1\*).

Remarque. La fonction  $f(p)$  du théorème 2 décrit le champ extérieur. Si l'on pose  $f(p) \equiv 0$ , le théorème se réduit au théorème 1. Nous l'appellerons "théorème du balayage", parce qu'il contient comme cas particulier un théorème bien connu de balayage pour les potentiels newtoniens (voir un corollaire de p. 86).

Démonstration. Considérons la famille de toutes les distributions de masse  $\mu$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$\alpha_1)$   $\mu$  est non négative et répartie sur  $F$ .

$\alpha_2)$   $\mu(F) = m$  ( $m$  étant un nombre fixe,  $0 < m < +\infty$ ).

Pour ces distributions, considérons l'intégrale de Gauss :

$$G(\mu) = \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p d\mu_q + 2 \int_F f(p) d\mu_p.$$

D'abord, montrons qu'il existe une distribution de masse  $\mu$  satisfaisant aux conditions  $\alpha_1)$  et  $\alpha_2)$ , dont l'intégrale de Gauss est finie. En effet, puisque la capacité de  $F$  est positive, il existe une distribution de masse non négative  $\mu'$  sur  $F$  telle que

$$0 < \mu'(F) \leq C(F) \text{ et } u(p; \mu') = \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu'_q \leq 1, \text{ pour } p \in \Omega.$$

Alors, la masse  $\mu = m\mu'/\mu'(F)$  remplit évidemment les conditions  $\alpha_1)$  et  $\alpha_2)$ , et nous avons

$$0 \leq \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p d\mu_q = m^2 \int_F u(p; \mu') d\mu'_p / \{\mu'(F)\}^2 \leq m^2 / \mu'(F).$$

La fonction  $f(p)$  étant bornée dans  $F$ , l'intégrale de Gauss pour  $\mu$  est finie.

Or, soit  $g$  la borne inférieure de  $G(\mu)$ , pour  $\mu$  qui satisfont à  $\alpha_1)$  et  $\alpha_2)$ . Le deuxième terme de l'intégrale de Gauss étant borné,  $g$  ne peut être égal à  $-\infty$ . Donc,  $g$  est fini.

Pour  $g$ , il existe une suite de distributions qui satisfont à  $\alpha_1)$  et  $\alpha_2)$  et telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(\mu_n) = g$ . Alors, de  $\mu_n$ , on peut extraire, en vertu du

théorème de choix<sup>1)</sup>, une suite partielle  $n_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) telle que  $\mu_k$  converge vers une limite-distribution  $\mu^*$  c.-à-d. une distribution telle qu'on ait  $\mu^*(e) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(e)$  pour tout ensemble  $e$  qui est régulier<sup>2)</sup> par rapport à  $\mu^*$ .

Le complémentaire de  $F$  étant une somme d'une suite des sphères dont les surfaces ne portent aucune masse  $\mu^*$ , on voit bien que  $\mu^*$  est distribution de masse sur  $F$ . D'autre part, comme  $F$  est contenu dans une sphère régulière par rapport à  $\mu^*$ , il s'ensuit que  $\mu^*(F) = m$ .

Sans perdre la généralité, nous pouvons poser  $n_k = k$ . Or, on a

$$\begin{aligned} \iint_{F F} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p^* d\mu_q^* &= \lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{F F} \Phi_N\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p^* d\mu_q^* \leq \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{F F} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_{n_p} d\mu_{n_q}. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part, comme  $f(p)$  est continue<sup>3)</sup> sur  $F$ , nous aurons de même

$$\int_F f(p) d\mu_p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f(p) d\mu_{n_p}.$$

Donc, on a  $g \leq G(\mu^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} G(\mu_n) = g$ , et il en suit l'égalité:  $G(\mu^*) = g$ , c.-à-d. la distribution  $\mu^*$  minimise  $G(\mu)$ .

Nous allons voir que la distribution  $\mu^*$  est celle que nous avons en vue. Pour cela, désignons par  $F^*$  le noyau de la distribution  $\mu^*$ , et montrons d'abord que

$$(1^0) \text{ la fonction } h(p) = \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q^* + f(p) \text{ est } \geq \gamma \text{ sur } F, \text{ sauf}$$

aux points d'un ensemble de capacité nulle,  $\gamma$  étant la borne supérieure de  $h(p)$  pour  $p$  situés sur  $F^*$ .

En effet, soit  $E$  l'ensemble de tous les points de  $F$  où l'on a  $h(p) < \gamma$ , et supposons que  $C(E) > 0$ . Désignons encore par  $E(n)$  l'ensemble de tous les points  $p$  de  $F$  où l'on a

$$(1) \quad h(p) \leq \gamma - 1/n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

1) Théorème du choix: de toute suite  $\mu_n$  de distributions de masse, dont les variations totales sont bornées, on peut extraire une suite partielle qui est convergente. Voir O. Frostman [1] p. 11, et de la Vallée Poussin [1] p. 9.

2)\* Tout ensemble tel qu'on ait  $\mu(\bar{e} - e) = 0$  s'appelle régulier par rapport à  $\mu$ .  $\bar{e}$  et  $e$  désignent la fermeture et l'intérieure de  $e$  resp..

3) Puisque  $f(p)$  est semicontinue inférieurement et supérieurement et bornée (en vertu des 1<sup>o</sup>) et 2<sup>o</sup>), elle est continue sur  $F$ .

On a alors  $E = \sum_{n=1}^{\infty} E(n)$ .  $h(p)$  étant semicontinue inférieurement,  $E(n)$  sont des ensembles fermés. Comme  $C(E) > 0$ , il existe un indice  $n_0$  tel que

$$(2) \quad C\{E(n_0)\} > 0.$$

Posons  $\varepsilon = 1/(2n_0)$ . Puisque  $\gamma$  est la borne supérieure de  $h(p)$  pour  $p \in F^*$ , il existe au moins un point  $p_0$  telle que

$$(3) \quad h(p_0) > \gamma - \varepsilon, \quad p_0 \in F^*.$$

Comme  $h(p)$  est semicontinue inférieurement, il existe un voisinage  $U(p_0)$  de  $p_0$ , tel que  $p \in U(p_0)$  entraîne

$$(4) \quad h(p) > \gamma - \varepsilon.$$

Posons  $\mu^*(U(p_0)) = m^*$ . Comme  $p_0$  est un point du noyau, on a  $m^* > 0$ . Ensuite, puisqu'on a  $C(E(n_0)) > 0$  d'après (2), il existe une distribution de masse non négative  $\nu$  sur  $E(n_0)$ , telle que le potentiel  $u(p; \nu)$  soit borné dans tout espace  $\Omega$ . Nous pouvons supposer d'ailleurs qu'on a  $\nu(E(n_0)) = 1$ . Considérons maintenant une distribution de masse définie comme il suit :

$$\sigma(e) = -\mu^*(e) \text{ pour tout ensemble borelien } e \text{ contenu dans } U(p_0).$$

$$\sigma(e) = m^* \cdot \nu(e) \text{ pour tout ensemble borelien } e \text{ contenu dans } E(n_0).$$

$$\sigma \text{ s'annule en dehors de } U(p_0) + E(n_0).$$

Ces conditions déterminent évidemment une distribution de masse unique définie pour tous les ensembles boreliens  $e$ . Désignerons-la par  $\sigma = \sigma(e)$ . Prenons maintenant une variable réelle  $h$  telle que  $0 < h \leq 1$ , et posons  $\mu' = \mu^* + h\sigma$ . On voit bien que  $\mu'$  sont des distributions de masse non négative, et qui entrent dans notre famille. En effet,  $\mu'$  est répartie sur  $F$  et la masse totale est  $\mu'(\Omega) = \mu^*(\Omega) + h\sigma(\Omega) = m$ , puisque  $\sigma(\Omega) = 0$ . Donc, on a, d'abord

$$(5) \quad G(\mu^* + h\sigma) - G(\mu^*) \geq 0.$$

Or, d'autre part

$$\begin{aligned} G(\mu^* + h\sigma) - G(\mu^*) &= 2h \int_F h(p) d\sigma_p + h^2 \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\sigma_p d\sigma_q \\ &= 2h \int_{U(p_0), F} h(p) d\sigma_p + 2h \int_{E(n_0)} h(p) d\sigma_p + h^2 \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\sigma_p d\sigma_q, \text{ et par suite} \\ (6) \quad G(\mu^* + h\sigma) - G(\mu^*) &\leq -2h \cdot m^* \cdot \varepsilon + h^2 \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\sigma_p d\sigma_q. \end{aligned}$$

Or, l'intégrale  $I = \iint_{F \cdot F} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\sigma_p d\sigma_q$  est finie. En effet, nous avons

$$(7) \quad |I| \leq \left| \int_{U \cdot F} \int_{U \cdot F} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p^* d\mu_q^* \right| + (m^*)^2 \left| \int_{E(n_0) \cdot E(n_0)} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\nu_p d\nu_q \right| \\ + 2m^* \left| \int_{U \cdot F} \int_{E(n_0)} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\nu_p d\mu_q^* \right|.$$

Mais, comme le potentiel  $u(p; \nu)$  est borné, nous pouvons poser  $0 \leq u(p; \nu) < M$ ,  $0 < M < +\infty$ . Alors la somme du deuxième et du troisième terme du membre droit de (7) est inférieure à  $3(m^*)^2 M$ .  $f(p)$  étant borné dans  $F$ , nous avons posé  $|f(p)| \leq N$ ,  $p \in F$ . Par suite, on a

$$0 \leq \iint_{U \cdot F} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p^* d\mu_q^* \leq \iint_{F \cdot F} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p^* d\mu_q^* \\ \leq |g| + 2 \int_F |f(p)| d\mu_p^* \leq |g| + 2Nm.$$

Le premier terme du membre droit de (7) est donc fini, et l'intégrale est finie.

Ainsi, si l'on fait tendre  $h$  vers 0, le membre droite de l'inégalité (6) deviendra négatif, et l'inégalité (5) doit être absurde. Nous avons donc établi la proposition (1°).

Considérons d'abord le cas où  $f(p) \equiv 0$ . Dans ce cas,  $\gamma$  est la borne supérieure de la fonction

$$h(p) = \int_{F^*} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q^* = u(p; \mu^*).$$

Or, on voit bien que  $h(p) \geq 0$  et par suite  $\gamma \geq 0$ .

Si  $\gamma = 0$ , on aura  $h(p) \equiv 0$  pour  $p \in F^*$ . Alors, l'intégrale d'énergie  $\int_{F^*} h(p) d\mu_p^*$  sera égale à 0. Donc, en vertu d'un théorème que nous établirons dans le chapitre suivant, la masse totale  $m$  s'annule, contrairement à l'hypothèse. Donc, nous avons toujours  $\gamma > 0$ . Alors, en vertu de principe du maximum, nous avons  $h(p) \leq \gamma$  partout dans l'espace. Donc,  $u(p; \mu^*)$  est égale à  $\gamma$  partout dans  $F$  sauf un ensemble de capacité nulle.  $u(u; \mu^*)$  est donc un potentiel d'équilibre.

Pour terminer la démonstration de la proposition 2\*), intercalons un Lemme qui sera utile dans la suite.

**Lemme.** Soit  $F$  un ensemble fermé et borné dans l'espace à trois dimensions, dont la capacité (par rapport à  $\Phi(t)$  qui satisfait à (A) et (B)) est positive. Etant donnée une distribution non négative  $\mu$  de la

masse unité sur  $F$ , désignons par  $G$  et  $H$  la borne supérieure et inférieure des valeurs prises par le potentiel  $u(p; \mu)$  pour  $p$  parcourant  $F$ . Nous avons alors

$$(8) \quad H \leq g \leq G$$

où l'on désigne par  $g$  la valeur minimum de l'intégrale d'énergie  $G(\mu)$ ,  $f(p) \equiv 0$ ,  $m = 1$ .

Démonstration.  $g$  étant minimum de l'intégrale d'énergie, on a

$$G(\mu) \geq g \quad (f(p) \equiv 0)$$

pour tout  $\mu$ , telle que  $m = 1$ . Mais, puisqu'on a  $G(\mu) \leq G$ , nous avons  $G \geq g$ . D'autre part, si  $u(p; \mu) \geq g + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in F$ , on aura

$$\begin{aligned} \int_F u(p; \mu) d\mu^* &\geq \int (g + \varepsilon) d\mu^* = g + \varepsilon \quad \text{et} \\ \int_F u(p; \mu) d\mu^* &= \int_F u(p; \mu^*) d\mu = \int_F g d\mu = g \end{aligned}$$

puisque  $u(p; \mu^*)$  est égale à  $g$  sauf un ensemble  $E$  de capacité nulle, et que tout ensemble de capacité nulle ne contribue pas à l'intégrale par rapport à  $\mu$  quelconque. On aurait donc une contradiction. Conséquemment, nous avons  $H \leq g$ .

Remarque. Nous verrons bientôt que la distribution d'équilibre est unique. Donc, on a, au lieu de (8),

$$(9) \quad H \leq g < G$$

pour tout  $\mu$  autre que  $\mu^*$ .

Corollaire. La constante  $g$  qui est le minimum de l'intégrale d'énergie ( $f(p) \equiv 0$ ,  $m = 1$ ), est égale à  $1/C(F)$ .

Démonstration. L'existence de la distribution  $\mu^*$  montre que  $C(F) \geq 1/\gamma$ . Mais, comme  $\mu^*$  est minimisante de l'intégrale d'énergie, on a  $\gamma = g$ . Enfin, la formule (8)  $g \leq G$  montre que  $1/g \geq C(F)$ . En somme, nous avons  $C(F) = 1/g$ .

Ce corollaire montre bien que, pour tout  $m$ ,  $0 < m < +\infty$ , la distribution  $\mu^*$  qu'on a considérée plus haut satisfait à l'équation  $\gamma = m/C(F)$ . Notre proposition 2\*) est donc complètement établie.

Passons maintenant au cas général. Exprimons d'abord la constante  $\gamma$  de la proposition (1<sup>o</sup>) d'une manière explicite.  $h(p)$  étant inférieure ou égale à  $\gamma$  dans  $F^*$ , nous avons

$$u(p; \mu^*) = h(p) - f(p) \leq \gamma + N, \quad p \in F^*$$

D'après le principe du maximum,  $u(p; \mu^*) \leq \gamma + N$  partout dans  $\Omega$ . Donc, la capacité de l'ensemble  $F^*$  est positive. Alors, d'après la proposition 2\*), nous pouvons distribuer une masse  $\nu^*$  de total  $C(F^*)$

de sorte que  $u(p; \nu^*) \equiv 1$  sur  $F^*$  sauf d'un ensemble de capacité nulle et  $\leq 1$  partout dans l'espace. Par suite, nous avons (en vertu du théorème 4, § 2)

$$\begin{aligned} \gamma \cdot C(F^*) &= \int_{F^*} h(p) d\nu_p^* = \iint_{F^*} \left[ \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q^* + f(p) \right] d\nu_p^* \\ &= \iint_{F^*} \left( \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\nu_q^* \right) d\mu_q^* + \int_{F^*} f(p) d\nu_p^* = m + \int_{F^*} f(p) d\nu_p^* \geq m - N \cdot C(F^*) \end{aligned}$$

Donc, si  $m > N C(F^*)$ ,  $\gamma$  sera positive, et alors nous pouvons appliquer le corollaire du théorème 2, § 3, avec  $K=0$ ,  $K'=\gamma$ , et conclure que

(2') Si  $m > N C(F)$  ( $\geq N C(F^*)$ ),  $\gamma$  est positive. D'ailleurs,  $h(p) = \gamma$  sur  $F$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle.

La proposition 1\*) du théorème 2 est donc établie.

Enfin, supposons qu'on a  $f(p) < 0$  pour  $p \in F$ . Alors, si l'on pose

$$m = - \int_{F^*} f(p) d\nu_p^*$$

on a  $m > 0$ , et de plus l'égalité donnée plus haut montre que  $\gamma = 0$ . Or, pour  $\gamma = 0$ , nous pouvons encore appliquer le corollaire du théorème 2, § 3, avec  $K=K'=0$ . Alors,  $h(p) = 0$  sur  $F$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. Par suite, on a

$$0 = \int_F h(p) d\nu_p = \iint_{F^*} \left( \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\nu_p \right) d\mu_q^* + \int_F f(p) d\nu_p = m + \int_F f(p) d\nu_p$$

On a donc  $m = - \int_F f(p) d\nu_p$ , et la proposition 3\*) du théorème 2 est donc établi.

Enfin, nous allons considérer l'unicité de la distribution<sup>1)</sup>. Pour ce but, soit  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux distributions de masse non négative, réparties sur  $F$  et telle que  $\mu_1(F) = \mu_2(F) = m$  et que

$$h_1(p) = \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_1 + f(p), \quad h_2(p) = \int_F \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_2 + f(p)$$

soient égaux à la même valeur  $\gamma$  sur  $F$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. Si l'on pose  $\sigma = \mu_1 - \mu_2$ , nous avons alors

$$(10) \quad \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\sigma_p d\sigma_q = \int_F \{h_1(p) - h_2(p)\} d\sigma_p = 0.$$

Ceci veut dire que  $\sigma \equiv 0$  ou  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , en vertu du théorème sur l'inté-

1) S. Kametani, [1].



grale d'énergie, que nous allons établir dans le chapitre suivant. Le théorème 2 est donc complètement démontré.

La proposition 3\*) du théorème 2 contient comme cas particulier le corollaire suivant dû à M. O. Frostman<sup>1)</sup>:

*Corollaire. Soit  $T$  un domaine connexe dans l'espace ordinaire  $\Omega$ , dont la frontière est un ensemble borné  $F$  de capacité newtonienne positive. Alors, toute répartition de masse finie et positive  $\lambda$  dans  $T$  peut être remplacée d'une manière unique par une répartition positive sur  $F$  de façon que le potentiel newtonien  $u(p; \lambda)$  reste conservé en tout point extérieur à  $T+F$  et en tout point de  $F$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle. Dans cet ensemble et dans le domaine  $T$  le potentiel n'est jamais augmenté.*

Démonstration. Désignons par  $D_n$  l'ensemble de tous les points de  $\Omega$  qui sont à la distance supérieure à  $1/n$  de  $F$ , et inférieure à  $n$  de l'origine. Posons  $T_1 = T \cdot D_1$ , et  $T_n = T \cdot (D_n - D_{n+1})$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ). On a  $T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ . Désignons encore par  $\lambda_n$  la partie de la distribution  $\lambda$  qui se trouve dans  $T_n$  et posons enfin

$$(11) \quad f_n(p) = - \int_{T_n} \frac{1}{r_{pq}} d\lambda_{nq}$$

Alors, on sait que 1)  $-f_n(p)$  est surharmonique et semicontinue supérieurement partout dans l'espace<sup>1)</sup>  $\Omega$ , 2) comme la distance entre  $T_n$  et  $F$  est positive,  $f_n(p)$  est continue sur  $F$  comme fonction de  $p$  définie sur  $\Omega$ , 3) comme  $T_n$  est borné, on a évidemment  $\lim_{p \rightarrow (\infty)} f(p) = 0$ , où l'on désigne par  $p \rightarrow (\infty)$  le fait que  $p$  s'éloigne indéfiniment. D'ailleurs,  $f(p) < 0$  partout dans  $F$ . Donc, d'après la proposition 3\*) du théorème 2, il existe une distribution  $\mu_n$  qui satisfait aux conditions suivantes:

(1<sup>0</sup>)  $\mu_n$  est répartie sur  $F$ . (2<sup>0</sup>) En désignant par  $U$  le potentiel d'équilibre de  $F$  qui est engendré par une masse (non négative) de total  $C(F)$ , on a

$$\mu_n(F) = \int U(p) d\lambda_{nn}.$$

(3<sup>0</sup>) On a  $u(p; \mu_n) = u(p; \lambda_n)$  pour tout point  $p$  extérieur à  $T+F$ , et en tout point  $p$  de  $F$  à l'exception au plus d'un ensemble  $E_n$  de capacité nulle. (4<sup>0</sup>) Dans  $T+F$  le potentiel n'est jamais augmenté.

Posons  $\mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ ,  $u^*(p) = \sum_{n=1}^{\infty} u(p; \mu_n)$ ,  $u(p) = u(p; \lambda)$ . On voit bien que (5<sup>0</sup>)  $\mu^*$  est répartie sur  $F$  avec  $\mu_n$ . (6<sup>0</sup>) D'après (2<sup>0</sup>), on a

1) O. Frostman [1], p. 70.

2) de la Vallée Poussin [1] p. 16.

$$\mu^*(F) = \int_T U(p) d\lambda_p$$

(7<sup>o</sup>) Si  $p$  est extérieur à  $T + F$ , on a  $u^*(p) = u(p)$ , puisque nous y avons (3<sup>o</sup>) pour tout  $n = 1, 2, 3, \dots$ . La même égalité subsiste dans  $F$  sauf dans un ensemble de capacité nulle. Cet ensemble de points exceptionnels est contenu dans la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$  qui est de capacité nulle. (8<sup>o</sup>)

Dans tout espace  $\Omega$ , on a  $u^*(p) \leq u(p)$ .

Or, nous allons montrer que  $u^*(p)$  est engendré par  $\mu^*$ . En effet,

$$u(p; \mu^*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \Phi_N d\mu^* \geq \int \Phi_N d\left(\sum_{n=1}^{n_1} \mu_n\right)$$

entraîne  $u(p; \mu^*) \geq \sum_{n=1}^{n_1} u(p; \mu_n)$ , ou encore  $u(p; \mu^*) \geq u^*(p)$ . D'autre part,

$$u(p; \mu^*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \Phi_N d\mu^* < \int \Phi_N d\mu^* + \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \int \Phi_N d\mu_n + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} u(p; \mu_n) + \varepsilon.$$

$\varepsilon$  étant arbitraire, on a  $u(p; \mu^*) \leq u^*(p)$ . Par suite,  $u(p; \mu^*) = u^*(p)$ .

Enfin, voyons qu'il n'existe qu'une seule distributions de  $\mu^*$  ayant ces propriétés. En effet, remarquons d'abord que  $u(p; \lambda)$  est fini sur  $F$  sauf un ensemble de capacité nulle. Pour s'en convaincre, il nous suffit d'appliquer le théorème de M. Kakutani (voir théorème 5 § 2). Alors deux distributions  $\mu_1^*, \mu_2^*$  donneraient d'après la propriété (7<sup>o</sup>) le même  $u(p; \mu_i^*)$   $i = 1, 2$  dans  $F$  sauf sur un ensemble de capacité nulle. Donc, la différence  $\sigma = \mu_1^* - \mu_2^*$  engendre un potentiel égal à 0 sur  $F$  sauf un ensemble de capacité nulle. L'intégrale d'énergie pour  $\sigma$  sera 0, et par suite nous avons  $\mu_1^* \equiv \mu_2^*$  en vertu du théorème 2 § 5, c. q. f. d.

Application 1. Nous allons appliquer le théorème d'équilibre pour démontrer un théorème sur la capacité des ensembles.

**Théorème 3.** Soient  $F$  un ensemble fermé et borné, et  $F_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) une suite des ensembles fermés et bornés, telle que

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots; \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F$$

Alors, nous avons toujours  $\lim C(F_n) = C(F)$ .

Démonstration. Soient  $\mu^*$  et  $\mu_n$  la distribution d'équilibre de masse unité de l'ensemble  $F$  et  $F_n$  resp.. Nous pouvons choisir, d'après le théorème du choix (voir p. 81), une suite partielle  $\mu_{n_k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) telle qu'elle converge (au sens qu'on a précisé à la p. 81). Soit  $\mu$  la limite-distribution de  $\mu_{n_k}$ . Le noyau de  $\mu$  étant compris  $F$ , on a

$$(12) \quad I(\mu^*) \leq I(\mu)$$

D'autre part, le théorème d'abaissement<sup>1)</sup> montre

$$(13) \quad I(\mu) \leq \lim_{\kappa \rightarrow \infty} I(\mu_{n\kappa}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n)$$

Comme  $\mu_n$  est une distribution minimisante pour l'ensemble  $F_n$ , nous avons

$$(14) \quad I(\mu_n) \leq I(\mu^*)$$

Ainsi, (12), (13) et (14) entraînent évidemment  $I(\mu^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n)$ . Enfin, d'après le corollaire du lemme de théorème 2, nous avons  $C(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(F_n)$ , c. q. f. d.

**Corollaire.** *Pour tout ensemble fermé et borné  $F$ , il existe une suite des ensembles ouverts  $G_n$  telles que  $G_n \supseteq F$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = F$ , et que  $C(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(G_n)$ .*

En effet, il suffit de prendre une suite des ensembles ouverts  $G_n$  tels que  $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$  et que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = F$  et d'appliquer le théorème 3.

**Application 2.** Appliquons maintenant le lemme du théorème 2 à évaluer la capacité des sphères. Soit  $S(r)$  une sphère de rayon  $r$  ( $0 < r$ ), fermée ou ouverte, et du centre arbitraire. Dans  $S(r)$ , distribuons une masse à densité uniforme égale à  $3/(4\pi r^3)$ . Cette distribution, qu'on désignera par  $\mu_0$  donne la masse totale 1. Le potentiel  $u(p; \mu_0)$  prend la plus petite valeur (de celles qui sont prises dans  $S(r)$ ) à la surface de  $S(r)$ . Et, on voit facilement que cette valeur est supérieure à

$$\frac{3}{4r^3} \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi.$$

D'après (8), et avec un résultat de la p. 70, nous avons

$$(15) \quad \frac{r^3}{3 \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi} < C(S(r)) \leq \frac{4r^3}{3 \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^2 d\xi}.$$

§ 5. *Intégrale d'énergie.* Pour démontrer l'unicité de la distribution d'équilibre ou de balayage, il nous fallait examiner d'abord l'intégrale d'énergie. Nous avons déjà mentionné la décomposition de Jordan,

1) Voir O. Frostman [1] p. 23, et de la Vallée Poussin [1] p. 12.

précisée par *MM.* de la Vallée Poussin et Hahn. D'après ce théorème, étant donnée une distribution de masse  $\sigma$ , nous pouvons la décomposer en deux distributions non négatives  $\mu$  et  $\nu$  de sorte qu'on ait  $\sigma(e) = \mu(e) - \nu(e)$  pour tout ensemble  $e$  de son domaine de définition. D'ailleurs, l'espace  $\Omega$  (de trois dimensions) se décompose en deux ensembles  $F_1$  et  $F_2$  tels que  $\mu(e) = \sigma(e \cdot \Omega_1)$ ,  $-\nu(e) = \sigma(e \cdot \Omega_2)$ ,  $\Omega_1 \cdot \Omega_2 = 0$ .

Supposons maintenant que  $\sigma$  soit distribuée sur l'ensemble fermé et borné  $F$ , et posons par définition

$$\begin{aligned} (1) \quad I(\sigma) &= \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\sigma_p d\sigma_q \\ &= \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p d\mu_q + \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\nu_p d\nu_q \\ &\quad - 2 \iint_{FF} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_p d\nu_q, \end{aligned}$$

pourvu que l'expression dernière ne soit pas de la forme indéfinie :  $\infty - \infty$ .  $I(\sigma)$  s'appelle "*intégrale d'énergie de  $\sigma$* ". Or, concernant cette intégrale nous pouvons établir deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.** *Pour toute distribution de masse répartie sur un ensemble  $F$  fermé et borné, l'intégrale d'énergie  $I(\sigma)$ , pourvu qu'elle existe et soit finie, est toujours  $\geq 0$ .*

**Théorème 2.** *Si  $I(\sigma) = 0$ , alors  $\sigma$  s'annule identiquement.*

Nous allons démontrer ces deux théorèmes dans la condition que  $\Phi(t)$  satisfasse aux (A), (B) et (C).

Il faut remarquer d'abord qu'au lieu de (B) on peut supposer (B')  $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$ . En effet, en posant  $\Theta(t) = \Phi(t) - \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t)$ , on a

$$I(\sigma) = \iint \Theta\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\sigma_p d\sigma_q + \{\mu(F) - \nu(F)\}^2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t).$$

Donc, tout revient à démontrer que  $\iint \Theta d\sigma_p d\sigma_q \geq 0$  ou à déduire  $\sigma \equiv 0$  de l'hypothèse  $\iint \Theta d\sigma_p d\sigma_q = 0$ . Supposons donc (B') dans la suite.

Désignons par  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(y_1, y_2, y_3)$  trois coordonnées des deux points  $p$  et  $q$  resp., et posons

$$(2) \quad \xi_i = x_i - y_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

de sorte qu'on ait  $r = r_{pq} = \sqrt{\sum_i \xi_i^2}$ . D'autre part, comme  $F$  est un ensemble borné, le diamètre  $\delta(F)$  de  $F$  est fini. Soit  $M$  un nombre positif quelconque supérieur à  $\delta(F)$ . Posons

$$\Psi(t) = \Phi(t) \text{ ou } 0 \text{ suivant que } 0 < t \leq 1/M \text{ ou } 1/M < t < +\infty.$$

Considérons maintenant le transformé de Fourier de la fonction  $\Psi(1/r)$ :

$$(3) \quad E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{1}{r}\right) e^{-i\sum \kappa \xi_\kappa} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$\Psi(1/r)$ , comme fonction de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , étant paire, la partie imaginaire de l'intégrale (3) s'évanouit, et nous avons conséquemment

$$(4) \quad E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{1}{r}\right) \cos\left(\sum_{\kappa=1}^3 \alpha_\kappa \xi_\kappa\right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

De cette formule, on voit bien que

$$(5) \quad |E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^M \Phi\left(\frac{1}{r}\right) r^2 dr$$

et d'après la condition (C), cette intégrale converge.

Posons d'abord  $\alpha = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}$  et considérons le cas où  $\alpha > 0$ . Posons encore  $c_{1\kappa} = \alpha_\kappa / \alpha$ ,  $\kappa = 1, 2, 3$ , et choisissons six nombres réels  $c_{2\kappa}, c_{3\kappa}$  ( $\kappa = 1, 2, 3$ ) tels que

$$(6) \quad \sum_{\lambda=1}^3 c_{\kappa\lambda} c_{\kappa'\lambda} = \delta_{\kappa\kappa'} (= 0 \text{ ou } 1 \text{ suivant que } \kappa \neq \kappa' \text{ ou } \kappa = \kappa').$$

Changeons ensuite les variables par les formules

$$(7) \quad \tau_\kappa = \sum_{\lambda=1}^3 c_{\kappa\lambda} \xi_\lambda, \quad \kappa = 1, 2, 3.$$

On a alors d'après (5) et (6)

$$(8) \quad E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{1}{r}\right) e^{-i\alpha\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Enfin, adoptons les coordonnées polaires:

$$(9) \quad \tau_1 = r \cos \theta, \quad \tau_2 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \tau_3 = r \sin \theta \sin \varphi.$$

L'expression (8) se transforme alors à

$$(10) \quad E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{2\alpha\pi^2} \int_0^\infty r \Psi\left(\frac{1}{r}\right) \sin \alpha r dr$$

L'intégrande de l'expression (10) est identiquement égale à 0 pour  $M < r$ , et l'inégalité  $|\sin \alpha r| \leq \alpha r$  et la condition (C) montrent que l'intégrale (10) converge absolument.

Or, puisque  $\Phi(t)$  est convexe et que  $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$ , en vertu de  $(A_3)$  et  $(B')$ , la fonction  $r \Psi(1/r)$  est non négative et monotone décroissante. Par suite, d'après la formule (10), nous pouvons affirmer le

Lemme. Nous avons  $E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > 0$  sauf le cas où  $\Phi(t) = Kt$  et  $M = 2m\pi\alpha$  où  $K$  est une constante et  $m = 1, 2, 3, \dots$ , d'ailleurs, dans ce cas exceptionnel, on a  $E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ .

Prenons maintenant un nombre naturel  $r$ , arbitrairement grand, mais fixé, tel que  $0 < 1/n < M$ , et formons la fonction  $\Phi_n^*(t)$  (voir la définition de la p. 73). Si l'on désigne par  $E_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  le transformé de Fourier de  $\Psi_n^*(1/r)$ , nous avons, en posant

$$(11) \quad f_n(r) = r \Psi_n^*(1/r), \quad S_n(\alpha) = 4\pi\alpha E_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$(12) \quad S_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n(r) \sin \alpha r dr.$$

Or, nous allons faire appel à un théorème du transformé de Fourier qu'on trouve dans les traités classiques d'analyse<sup>1)</sup>:

Soit  $f(r)$  une fonction définie pour  $0 < r < +\infty$  et qui satisfait aux deux conditions suivantes. 1)  $f(r)/r$  est intégrable absolument dans l'intervalle  $M' < r < +\infty$ ,  $M'$  étant un nombre arbitraire positif. 2)  $r_0$  étant un nombre fixé tel que  $0 < r_0 < +\infty$ , il existe un voisinage de  $r_0$  où  $f(r)$  est à variation bornée. Alors, nous avons

$$(13) \quad \frac{f(r_0+0) + f(r_0-0)}{2} = \int_0^{\infty} S(\alpha) \sin \alpha r d\alpha$$

$$\text{où l'on pose } S(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(r) \sin \alpha r dr$$

D'ailleurs, si  $f(r)$  est continue dans  $a < r < b$  ( $0 \leq a < b < +\infty$ ) et y est à variation bornée, l'intégrale de la formule (11) converge uniformément, c.-à-d. la convergence de la limite

$$f(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N S(\alpha) \sin \alpha r d\alpha$$

est uniforme pour  $a_1 \leq r \leq b_1$  ( $a < a_1 < b_1 < b$ ). Si, de plus,  $a = 0$  et si  $f(+0)$  existe et est finie, l'intégrale  $\int_0^N S(\alpha) \sin \alpha r d\alpha$  est uniformément bornée pour  $0 < r < b_1$ .

1) Voir p. ex. Zygmund [1] p. 306.

Appliquons ce théorème à la fonction  $f_n(r)$  qui est identiquement 0 dans  $M < r < +\infty$ , continue dans  $0 < r < M$ , y est monotone décroissante, et dont  $f_n(+0)$  existe et est fini. Ainsi, nous avons, d'après (13)

$$(14) \quad f_n(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N S_n(\alpha) \sin r d\alpha$$

pour tout  $0 < r < M$  et la convergence est uniforme pour  $0 < \varepsilon \leq r \leq M - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire donné d'avance. D'ailleurs, l'intégrale est uniformément bornée pour  $0 < r \leq \varepsilon$ :

$$(15) \quad \left| \int_0^N S_n(\alpha) \sin \alpha r d\alpha \right| \leq K_n < +\infty, \quad 0 < r \leq \varepsilon$$

où  $K_n$  est une constante indépendante de  $N$ ,  $r$  et  $\varepsilon$ .

Nous utilisons ce résultat à évaluer l'intégrale d'énergie:

$$I_n(\sigma) = \iint_{FF} \Psi_n^* \left( \frac{1}{r_{pq}} \right) d\sigma_p d\sigma_q = \iint_{FF} \frac{1}{r} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N S_n(\alpha) \sin \alpha r d\alpha \right\} d\sigma_p d\sigma_q$$

Or, nous pouvons l'écrire, en vertu de la transformation (6), (7) et (9)

$$I_n(\sigma) = \iint_{FF} \frac{1}{r} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} E_n(\alpha) e^{i \sum \alpha \xi \kappa} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \right\} d\sigma_p d\sigma_q$$

où  $S(N)$  désigne la sphère  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 < N^2$ , ou encore

$$(16) \quad I_n(\sigma) = \iint_{FF} \frac{1}{r} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} E_n(\alpha) \cos \left( \sum_{\kappa=1}^3 \alpha \kappa \xi \kappa \right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \right\} d\sigma_p d\sigma_q$$

Divisons l'expression (16) en deux parties:

$$(17) \quad I_n(\sigma) = I_n^* + I_n^{**}, \quad I_n^* = \iint_{FF} \quad , \quad I_n^{**} = \iint_{FF}$$

(0 ≤ r ≤ ε)                      (ε ≤ r ≤ M - ε)

Pour la première partie, on a d'après (15)

$$|I_n^*| \leq \iint_{FF} \frac{1}{r} K_n d|\sigma_p| d|\sigma_q| \leq C K_n \iint_{FF} \Phi \left( \frac{1}{r_{pq}} \right) d|\sigma_p| d|\sigma_q|$$

(0 ≤ r ≤ ε)                      (0 ≤ r ≤ ε)

où l'on pose  $|\sigma| = \mu + \nu$  et  $C$  est une constante telle que  $\Phi(t) > t/C$  pour  $t > 1/\varepsilon$ . D'après la condition (A), (B') une telle constante existe toujours pour  $\varepsilon$  assez petit. Donc  $I_n^*$  tend vers zéro avec  $\varepsilon$ . Quant à la deuxième partie, remarquons que

$$\iiint_{S(N)} E_n(\alpha) \cos \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k \xi_k \right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

converge uniformément lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi, l'ordre de deux intégrales  $\iint_{FF}$  et  $\iiint_{S(N)}$  dans l'expression (16) peut être inversé, et nous avons conséquemment

$$(18) \quad I_n(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} E_n(\alpha) \left\{ \iint_{FF} \cos \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k \xi_k \right) d\sigma_p d\sigma_q \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

D'autre part, d'après (3), on a  $\sum_k \alpha_k \xi_k = \sum_k \alpha_k x_k - \sum_k \alpha_k y_k$  et

$$(19) \quad I_n(\sigma) = I_n^1(\sigma) + I_n^2(\sigma);$$

$$I_n^1(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} E_n(\alpha) \left\{ \iint_{FF} \cos \left( \sum x_k \alpha_k \right) \cos \left( \sum y_k \alpha_k \right) d\sigma_p d\sigma_q \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3,$$

$$I_n^2(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} E_n(\alpha) \left\{ \iint_{FF} \sin \left( \sum x_k \alpha_k \right) \sin \left( \sum y_k \alpha_k \right) d\sigma_p d\sigma_q \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Les deux variables  $p$  et  $q$  dans les intégrales (19) étant séparées, on a

$$(20) \quad \iint_{FF} \cos \left( \sum x_k \alpha_k \right) \cos \left( \sum y_k \alpha_k \right) d\sigma_p d\sigma_q = \left\{ \int_F \cos \left( \sum x_k \alpha_k \right) d\sigma_p \right\}^2,$$

$$\iint_{FF} \sin \left( \sum x_k \alpha_k \right) \sin \left( \sum y_k \alpha_k \right) d\sigma_p d\sigma_q = \left\{ \int_F \sin \left( \sum x_k \alpha_k \right) d\sigma_p \right\}^2.$$

Enfin, nous avons déjà vu qu'on a  $E_n(\alpha) \geq 0$ . Donc, en vertu de (19),

$$(21) \quad I_n(\sigma) \geq 0.$$

Mais,  $I(|\sigma|)$  étant finie, on a

$$(22) \quad I(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\sigma),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1:  $I(\sigma) \geq 0$ .

Démonstration du théorème 2. Il faut remarquer d'abord que la fonction  $E_n(\alpha)$  ( $0 \leq \alpha < +\infty$ ) est monotone croissante avec  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Pour  $E_n(0) = E_n(0, 0, 0)$ , ce fait se voit facilement en vertu de (5), puisqu'on a  $\Phi_n(t) \leq \Phi_{n+1}(t)$  pour  $n > 1/M$ . Pour  $0 < \alpha < +\infty$ , on a, en vertu de la formule (12)

$$(23) \quad S_{n+1}(\alpha) - S_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^M \left\{ r \Psi_{n+1} \left( \frac{1}{r} \right) - r \Psi_n \left( \frac{1}{r} \right) \right\} \sin \alpha r \, dr.$$



Or,  $r \left\{ \Psi_{n+1} \left( \frac{1}{r} \right) - \Psi_n \left( \frac{1}{r} \right) \right\}$ , comme fonction de  $r$ , est non négative et monotone décroissante. En effet, la dérivée gauche de Dini de la fonction  $D_- \{ \Psi_{n+1}(t) - \Psi_n(t) \}$  est nulle pour  $0 < t \leq T_n$  et elle est monotone croissante pour  $T_n \leq t < +\infty$  puisque  $D_- \Psi_n(t)$  y est constante. Donc la fonction  $\Psi_{n+1}(t) - \Psi_n(t)$  est convexe pour  $0 < t < +\infty$ . D'ailleurs, on a  $\Psi_{n+1}(t) - \Psi_n(t) \equiv 0$  pour  $0 < t \leq T_n$ .

Ainsi la formule (23) montre que  $S_{n+1}(\alpha) \geq S_n(\alpha)$  pour tout  $n$  et  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < +\infty$ ,  $n > 1/M$ ). La même chose a lieu pour  $E_n(\alpha)$ . Alors, (19) et (20) montrent que  $I_n(\sigma)$  croît d'une manière monotone. Par conséquent, l'hypothèse  $I(\sigma) = 0$  entraîne  $I_n(\sigma) = 0$  ou encore

$$(24) \quad I_n^1(\sigma) = 0, I_n^2(\sigma) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

D'autre part, si  $\alpha \neq M/2m\pi$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), on a toujours  $E_n(\alpha) > 0$ . Donc, en vertu de (19), (20), nous avons encore

$$(25) \quad \int_F \{ \cos (\sum x_k \alpha_k) \} d\sigma_p = 0, \quad \int_F \{ \sin (\sum x_k \alpha_k) \} d\sigma_p = 0.$$

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ensembles  $F_\sigma$  qui donnent la décomposition de Jordan pour la distribution  $\sigma$ . Il existe alors deux ensembles fermés  $F_1, F_2$  tels que  $F_1 \subseteq \Omega_1, F_2 \subseteq \Omega_2$  et que  $\mu(\Omega_1 - F_1) < \varepsilon, \nu(\Omega_2 - F_2) < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire.

Supposons, par impossible, que  $\sigma$  ne s'annule pas identiquement. Alors, nous avons  $\mu(\Omega_1) > 0$  ou  $\nu(\Omega_2) > 0$ . Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que c'est la premier cas qui a lieu. Nous pouvons d'ailleurs supposer que le nombre  $\varepsilon$  satisfasse à l'inégalité :

$$(26) \quad \varepsilon < \mu(\Omega_1)/5.$$

Alors, nous pouvons couvrir l'ensemble  $F_1$  par la somme d'une suite de sphères ouvertes  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , contenues dans le complémentaire de  $F_2$ , et qui peuvent empiéter l'une sur l'autre mais de telle manière que tout point de  $\Omega$  soit intérieur à quatre sphères au plus. On aura alors

$$\sum_n \sigma(S_n) = \sum_n \mu(S_n) - \sum_n \nu(S_n) \geq \mu(F_1) - 4 \nu(\Omega_2 - F_2)$$

et, en vertu de (26), on a

$$\sum_n \sigma(S_n) > \mu(\Omega_1) - 5\varepsilon > 0.$$

Donc, il existe, parmi  $S_n$ , une sphère, soit désignée par  $S$ , telle que  $\sigma(S) > 0^{1)}$ .

Soit  $r_1$  le rayon de  $S$  et désignons par  $S(r)$  la sphère ouvert con-

1) Nous avons suivi la marche des raisonnements de M. O. Frostman [1] p. 32.

centrique à  $S$ , mais qui a le rayon  $r$  au lieu de  $r_1$ . On a alors  $\sigma(S) = \lim_{r \rightarrow r_1 + 0} \sigma(S(r))$ . Donc, nous pouvons supposer, de plus, que la surface de  $S$  ne porte aucune masse de  $|\sigma|$ .

Enfin, désignons par  $p_0$  le centre de  $S$ . Le point  $p_0$ , lui seul, ne porte aucune masse  $|\sigma|$ , puisque  $I(|\sigma|)$  est fini. Donc, si l'on choisit un rayon  $r_0$  assez petit, la sphère  $S(r_0)$  porte une partie de masse  $|\sigma|$  aussi petit qu'on voudra. Posons  $S^* = S - S(r_0)$ . Alors, on a

$$(27) \quad \sigma(S^*) > 0.$$

Introduisons maintenant une fonction  $f(p)$  définie pour  $p \in \Omega$  comme il suit :  $f(p) = 1$  ou  $0$ , suivant que  $p \in S^*$  ou non. Adoptons un système de coordonnées rectangulaires  $(x_1, x_2, x_3)$  dont l'origine est  $p_0$ . Alors, on peut poser  $\varphi(r) = f(p)$ ,  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , ou encore  $\varphi(r) = 1$  ou  $0$  suivant que  $r_0 \leq r < r_1$  ou non.

Désignons par  $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  le transformé de Fourier de  $\varphi(r)$  (considérée comme fonctions de trois variables  $x_1, x_2, x_3$ ).  $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  est une fonction de  $\alpha$ ,  $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ , et si l'on pose  $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = g(\alpha)$ , on a

$$(28) \quad r \varphi(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N 4\pi \alpha g(\alpha) e^{i\alpha r} d\alpha$$

Cette intégrale converge uniformément pour  $r$  tel que  $r_0 + \varepsilon \leq r \leq r_1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire, mais inférieur à  $(r_1 - r_0)/2$ . Elle est uniformément bornée (par rapport à  $N$ ) pour  $r$  situé dans un voisinage de  $r_1$  et  $r_0$  respectivement. D'ailleurs, on peut écrire (28) dans la forme :

$$\varphi(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} g(\alpha) e^{i\alpha r} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

où  $S(N)$  désigne la sphère du centre  $p_0$  et du rayon  $N$ . Par suite, on a

$$(29) \quad \int_F \varphi(r) d\sigma_p = \int_{S^*F} \frac{1}{r} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} r g(\alpha) e^{i\alpha r} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \right\} d\sigma_p$$

Comme nous avons vu plus haut, nous pouvons, dans ces conditions, permuter l'ordre de deux intégrales de (29), et obtenir

$$(30) \quad \int_F \varphi(r) d\sigma_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{S(N)} g(\alpha) \left\{ \int_{S^*F} e^{i\alpha r} d\sigma_p \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

Or, l'intégrale entre les parenthèses est nulle sauf  $\alpha = M/(2m\pi)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , en vertu de (25). Donc, on a

$$(31) \quad \int_F \varphi(r) d\sigma_p = 0$$

Mais, d'autre part, d'après la définition de  $\varphi(r)$ , on a

$$(32) \quad \int_F \varphi(r) d\sigma_p = \int_{S^*F} d\sigma_p = \sigma(S^*) > 0$$

en vertu de (27). Ainsi, nous sommes amenés à deux conséquences (31), (32) qui sont contradictoires, c. q. f. d.

Signalons finalement que M. N. Ninomiya a donné tout récemment une autre méthode de démonstration pour les théorèmes 1 et 2<sup>1) 2)</sup>.

§ 6. *Condition de Poincaré généralisée.* Le potentiel d'équilibre pour un ensemble fermé et borné  $F$  de capacité positive peut prendre sur quelques points de  $F$  des valeurs inférieures à la constante-maximum, bien que ces points forment un ensemble de capacité nulle. Si cet ensemble n'est pas vide, appelons ses points "exceptionnels". Pour les propositions 1\*) et 3\*) du théorème de balayage, nous pouvons évidemment considérer des pareils points exceptionnels. Or, l'existence de tels points dans des certains cas se voit facilement. Considérons p. ex. le cas du théorème d'équilibre. Le complémentaire de  $F$  se décompose au plus en une infinité dénombrable des domaines connexes, dont l'un, soit désigné par  $G_\infty$ , n'est pas borné. Si l'ensemble  $\bar{G}_\infty - G_\infty$  ( $\bar{G}_\infty$  désignant la fermeture de  $G_\infty$ ) contient un point isolé, ce point est nécessairement exceptionnel, puisqu'un seul point ne porte aucune partie de la masse d'équilibre. Mais, les points du noyau  $F$  peuvent être également exceptionnels. Pour le voir, nous n'avons qu'à considérer

l'exemple de Lebesgue<sup>3)</sup>: Soit  $\mu$  une distribution de masse non négative répartie sur le segment:  $0 \leq x \leq 1, y = z = 0$  de l'espace ordinaire, la densité de  $\mu$  au point  $(x, 0, 0)$  étant égale à  $2x$ . Considérons le potentiel newtonien  $u(p) = u(p; \mu)$ . En posant  $p = (x, y, z)$ ,  $\rho^2 = y^2 + z^2$ , on a

$$u(p) = 2 \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{(t-x)^2 + \rho^2}}$$

En particulier, pour l'origine  $p_0 = (0, 0, 0)$ , on a  $u(p_0) = 2$ , et pour  $p_x = (x, 0, 0)$ ,  $0 < x \leq 1$ ,  $u(p_x) = +\infty$ . Soit  $c$  un nombre positif quelconque, mais supérieur à 2. La surface équipotentielle  $F: u(p) = c$  avec  $p_0$  enferme un domaine fermé contenant le segment:  $0 \leq x \leq 1, y =$

1) N. Ninomiya [1].

2) Quelques résultats de ce chapitre ont été résumés dans K. Kunugui [2].

3) H. Lebesgue [1], Cf aussi Courant-Hilbert [1] p. 272.

$z = 0$ . Balayons la masse contenue dans ce domaine sur  $F$  (voir le corollaire du théorème 2 § 4). On obtient ainsi une distribution de masse  $\mu^*$  répartie sur  $F$ , et qui engendre un potentiel qui coïncide avec  $u(p)$  ou  $C$  dans l'extérieur ou dans l'intérieur de  $F$  respectivement. Le noyau de  $\mu^*$  coïncide avec  $F$  et l'origine  $p_0$  est un point exceptionnel de ce potentiel qui est évidemment d'équilibre pour  $F$ .

Considérons maintenant la condition suffisante pour qu'on puisse conclure qu'un point  $p_0$  de  $\Omega$  ne soit pas exceptionnel. D'abord H. Poincaré a considéré la condition suivante. Soit  $F$  un ensemble de  $F$ . Nous disons qu'un point de  $\Omega$  satisfait à la condition de Poincaré, s'il existe un cône  $K$  au sommet  $p_0$  et une sphère  $S$  au centre  $p_0$  tels que la partie commune  $K \cdot S$  soit contenue dans  $F$ . Soit  $s(r)$  une petite sphère au centre  $p_0$  et au rayon  $r$  ( $0 < r < +\infty$ ). Désignons par  $\text{mes}\{s(r)\}$ ,  $\text{mes}\{s(r) \cdot F\}$  les mesures au sens de Lebesgue (trois-dimensionnelle) des ensembles  $s(r)$ ,  $s(r) \cdot F$  resp.. Alors, si l'on a

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{\text{mes}\{s(r) \cdot F\}}{\text{mes}\{s(r)\}} > 0 \quad \left( \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\text{mes}\{s(r) \cdot F\}}{\text{mes}\{s(r)\}} > 0 \right)$$

on dit  $p_0$  est un point de densité supérieure (inférieure) positive (par rapport à  $F$ ). Supposons, maintenant, que la fonction  $\Phi(t)$  satisfasse à la condition (C). On a alors  $C\{s(r)\} > 0$ . Or, si l'on a

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{C\{s(r) \cdot F\}}{C\{s(r)\}} > 0 \quad \left( \lim_{r \rightarrow +0} \frac{C\{s(r) \cdot F\}}{C\{s(r)\}} > 0 \right)$$

on dit  $p_0$  est un point de densité capacitaire supérieure (inférieure) positive (par rapport à  $F$ ). Tout point de  $p_0$  qui satisfait à la condition de Poincaré est un point de densité supérieure positive. En effet, si l'on désigne par  $\theta$  l'angle solide du cône  $K$ , et par  $r_0$  le rayon de  $S$ , on a

$$\frac{\text{mes}\{s(r) \cdot F\}}{\text{mes}\{s(r)\}} \geq \frac{\text{mes}\{s(r) \cdot K\}}{\text{mes}\{s(r)\}} = \frac{\theta}{4\pi}, \text{ dès que } 0 < r < r_0.$$

Mais, nous pouvons encore établir le

**Théorème 1<sup>1)</sup>.** Si  $\Phi(t)$  satisfait à (A) et (B), (C), tout point  $p_0$  de  $F$  qui est de densité supérieure (inférieure) positive, est un point de densité capacitaire supérieure (inférieure) positive.

**Démonstration.** Posons pour tout ensemble  $e$  de  $F$ ,  $\tau(e) = \text{mes}\{e \cdot s(r) \cdot F\}$ , et considérons le potentiel

1) Voir N. Ninomiya [1], où l'on suppose que  $\Phi(t)$  satisfasse à la relation :

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \left\{ \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt / (r^3 \Phi(1/r)) \right\} \leq m < +\infty.$$

$$u(p; \tau) = \int \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\tau_q.$$

Par l'hypothèse,  $p_0$  est un point de densité supérieure positive. Donc, on a  $0 < \text{mes } \{s(r) \cdot F\} < +\infty$ . Soit  $M$  la borne supérieure de  $u(p; \tau)$ . Alors, en vertu de la définition de la capacité, nous avons

$$\frac{1}{C\{s(r) \cdot F\}} \leq \frac{M}{\text{mes } \{s(r) \cdot F\}}, \quad 0 < M < +\infty.$$

D'autre part, nous avons déjà établi l'inégalité (voir p. 88):

$$C\{s(r)\} \leq \frac{4r^3}{3 \int_0^r \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{C\{s(r) \cdot F\}}{C\{s(r)\}} \geq \frac{\text{mes } \{s(r) \cdot F\}}{(4/3) \pi r^3} \cdot \frac{\int_0^r \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt}{M} \cdot \pi$$

Or, nous avons déjà vu que  $\int_0^r \Phi(1/t) t^2 dt$  est la borne supérieure du potentiel engendré par la distribution de masse donnée par  $\tau^*(e) = \text{mes } \{e \cdot s(r)\}$ . Par suite, nous avons  $\int_0^r \Phi(1/t) t^2 dt \geq M$ , et l'inégalité se réduit à

$$\frac{C\{s(r) \cdot F\}}{C\{s(r)\}} \geq \frac{\text{mes } \{s(r) \cdot F\}}{\text{mes } \{s(r)\}} \cdot \pi$$

qui prouve évidemment le théorème 1.

Le théorème 1 montre que tout point satisfaisant à la condition de Poincaré est un point de densité capacitaire inférieure positive. C'est la raison que nous appelons, tout point de cette nature point qui satisfait à "la condition de Poincaré généralisée"<sup>1)</sup>.

Maintenant, nous allons voir que la condition de Poincaré généralisée est une condition suffisante pour qu'un point  $p_0$  de l'ensemble  $F$  ne soit pas exceptionnel. Considérons d'abord le théorème d'équilibre. Soit  $p_0$  un point du noyau  $F$  de la distribution d'équilibre. Supposons que  $p_0$  satisfasse à la condition de Poincaré généralisée, et désignons par  $E$  l'ensemble de tous les points  $p$  de  $F$  où le potentiel d'équilibre est inférieure à la constante-maximum.  $E$  est un ensemble  $F_0$  de capacité nulle. Alors, nous pouvons dire que  $p_0$  satisfait à la condition de

1) M. O. Frostman a appelé ainsi tout point de densité capacitaire *supérieure* positive.

Poincaré généralisée non seulement par rapport à  $F$ , mais encore par rapport à  $F-E$ . En effet, on a, d'une part,  $C\{s(r) \cdot F\} \geq C\{s(r)(F-E)\}$  et d'autre part,  $C\{s(r) \cdot F\} \leq C\{s(r) \cdot (F-E)\} + C\{s(r) \cdot E\} = C\{s(r)(F-E)\}$ . Par suite, nous avons  $C\{s(r) \cdot F\} = C\{s(r)(F-E)\}$  et cette égalité montre bien que la densité capacitaire inférieure au point  $p_0$  reste même pour ces deux cas.

Ainsi, pour démontrer que le potentiel d'équilibre soit égal à sa constante-maximum au point  $p_0$  de  $F$  qui satisfait à la condition de Poincaré généralisée, il nous suffit d'établir le

Lemme de Frostman : *Le potentiel  $u(p)$  d'une distribution non négative est égal à la limite inférieure en chaque point  $p_0$ , quand  $p$  tend vers  $p_0$  en restant dans un ensemble  $M$  par rapport auquel  $p_0$  satisfait à la condition de Poincaré généralisée :*

$$(1) \quad u(p_0) = \lim_{p \rightarrow p_0} u(p), \quad p \in M.$$

Mais, à cet égard, nous allons démontrer le

Théorème 2. *Le lemme de Frostman subsiste chaque fois que  $\Phi(t)$  satisfait aux conditions (A), (B), (C) et*

(D) *Il existe trois nombres positifs  $\varepsilon_0$ ,  $y_0$ ,  $A$  tels qu'on ait*

$$(2) \quad \Phi\{(1+\varepsilon_0)y\} \leq A \Phi(y)$$

*pour tout  $y$  tel que  $y_0 \leq y < +\infty$ .*

Démonstration.  $u(p)$  étant un potentiel engendré par une distribution non négative, il est semicontinue inférieurement partout dans l'espace (théorème 1 § 1). Donc, on a

$$u(p_0) \leq \lim_{p \rightarrow p_0} u(p) \leq \lim_{\substack{p' \rightarrow p_0 \\ p' \in M}} u(p')$$

où  $p$  désigne une variable sans restriction, tandis que  $p'$  reste toujours dans  $M$ . Par conséquent, pour avoir (1), il nous suffit de montrer qu'on a

$$(3) \quad u(p_0) \geq \lim_{\substack{p' \rightarrow p_0 \\ p' \in M}} u(p'),$$

et d'ailleurs, nous y pouvons évidemment supposer que  $u(p_0)$  est fini.

Or, pour montrer (3), il suffit encore d'établir le

Lemme. *Supposons que  $\Phi(t)$  satisfasse aux (A), (B), (C), (D) et que  $p_0$ ,  $M$ ,  $u(p)$  aient les mêmes sens que dans le lemme de Frostman mentionné plus haut. Supposons, encore que  $u(p_0)$  soit fini. Alors, il existe, pour tout nombre positif  $\varepsilon$ , un ensemble fermé  $F_1$  de capacité positive, contenu dans la partie commune  $M \cdot s(\varepsilon)$  (de  $M$  et de la sphère  $s(\varepsilon)$  de*

centre  $p_0$  et de rayon  $\varepsilon$ ), tel que la distribution d'équilibre d'une masse unité sur  $F_1$ , soit désignée par  $\mu^*$ , jouit de l'inégalité

$$(4) \quad \int_{F_1} u(p) d\mu_p^* < u(p_0) + \varepsilon.$$

En effet, l'inégalité (4) montre qu'il existe au moins un point  $p_1$  de  $F_1$ , par suite de  $M$  à la distance inférieure à  $\varepsilon$  de  $p_0$ , tel qu'on ait  $u(p_1) < u(p_0) + \varepsilon$ ; d'où  $u(p_0) \geq \lim_{p' \rightarrow p_0} u(p')$ ,  $p' \in M$ .

Démonstration du Lemme. Soit  $\varepsilon$  un nombre positif arbitraire, donné d'avance. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer qu'on ait  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$ , et  $0 < \varepsilon_0 < 1$ . Prenons un nombre positif  $R_1$  tel que  $0 < R_1 < \varepsilon$  et désignons par  $S_1$  la sphère du rayon  $R_1$  et du centre  $p_0$ . La distribution de masse  $\mu$  peut être décomposée alors en deux parties: la partie qui se trouve dans  $S_1$  et celle qui est répartie dans le complémentaire de  $S_1$ . Elles seront désignées par  $\mu'$  et  $\mu''$  respectivement, et nous posons de plus  $u'(p) = u(p; \mu')$ ,  $u''(p) = u(p; \mu'')$ . Comme  $u(p_0)$  est fini, nous pouvons prendre  $R_1$  assez petit de sorte qu'on ait

$$(5) \quad u'(p_0) < \varepsilon', \quad \varepsilon' = h(\varepsilon)$$

où la fonction  $h(\varepsilon)$  sera déterminée à la fin de la démonstration (voir la formule (14)). Nous supposons d'ailleurs que  $2R_1 \leq 1/y_0$ .

D'abord, nous allons montrer qu'il existe une suite des nombres positifs  $R_n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), tels que  $R_1 > R_2 > R_3 > \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ , et qu'en désignant par  $S_n$  la sphère du rayon  $R_n$  et du même centre  $p_0$ , on ait

$$(6) \quad \mu(S_n) \leq \frac{2R_n^3 \varepsilon'}{3 \int_0^R \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt}.$$

En effet, sinon, il existerait un petit nombre positif  $R_0$  tel qu'on ait  $R_0 < R_1$  et

$$(7) \quad \mu(R) > (2R^3 \varepsilon') / \left( 3 \int_0^R \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt \right)$$

pour tout  $R$  satisfaisant à  $0 < R \leq R_0$ . Désignons par  $S_0$  la sphère du rayon  $R_0$  et du centre  $p_0$ . Remarquons le dénominateur du membre droit de la formule (7) décroît d'une manière monotone avec  $R$ . Par suite, si l'on considère une distribution de masse répartie dans  $S_0$  et

qui donne la mesure lebesguienne multipliée par une constante

$$\varepsilon' / \left( 2\pi \int_0^{R_0} \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt \right)$$

donnerait un potentiel qui, au point  $p_0$ , ne surpasse pas  $u'(p_0)$ . Ceci veut dire

$$u'(p_0) \geq \left( 2\varepsilon' \iiint_0^{R_0} \Phi\left(\frac{1}{\rho}\right) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho \right) / \left( 4\pi \int_0^{R_0} \Phi\left(\frac{1}{\rho}\right) \rho^2 d\rho \right) = 2\varepsilon'$$

qui est contradictoire.

Maintenant, pour  $n$  assez grand, on peut dire que 1<sup>o</sup>) dès que  $p \in R_n$ , nous avons  $u''(p) < u''(p_0) + \varepsilon/2$ , et que 2<sup>o</sup>) en posant  $r_n = \varepsilon R_n$ , on a

$$(8) \quad C\{s(r_n) \cdot M\} / C\{s(r_n)\} \geq \kappa > 0$$

où  $\kappa$  est une constante positive (indépendante de  $n$ ), Alors, il existe, d'après la définition de la capacité, un ensemble fermé et borné  $F_1$ , contenu dans  $M \cdot s(r_n)$  et une distribution d'équilibre de masse unité sur  $F_1$ , qu'on désignera par  $\mu_n$ . On a alors

$$(9) \quad \int_{F_1} u(p) d\mu_n = \int_{F_1} u'(p) d\mu_n + \int_{F_1} u''(p) d\mu_n$$

et d'après 1<sup>o</sup>) on a, d'abord

$$(10) \quad \int_{F_1} u''(p) d\mu_n \leq u''(p_0) + \varepsilon/2 \leq u(p_0) + \varepsilon/2, \text{ et d'autre part}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \int_{F_1} u'(p) d\mu_n &= \int_{F_1} \int_{S_1} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_q d\mu_n = \int_{S_1} \int_{F_1} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_n d\mu_q \\ &= I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_{S_1 - S_n} \int_{F_1} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_n; \quad I_2 = \int_{S_n} \int_{F_1} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_n. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'intégrale  $I_1$ . On a d'abord

$$I_1 = \int_{S_1 - S_n} \int_{F_1} \left\{ \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) / \Phi\left(\frac{1}{r_{p_0q}}\right) \right\} \Phi\left(\frac{1}{r_{p_0q}}\right) d\mu_n$$

Mais, si  $r_{pq} \geq r_{p_0q}$ , on a  $\Phi(1/r_{pq}) \geq \Phi(1/r_{p_0q})$ . Or, puisque  $\varepsilon < \varepsilon_0/2$  et que  $p \in s(r_n)$ ,  $q \in S_1 - S_n$  on a

$$r_{pq}/r_{p_0q} \geq (R_1 - r_n)/R_1 \geq 1 - r_n/R_1 = 1 - \varepsilon \geq 1 - \varepsilon_0/2 \geq 1/(1 + \varepsilon_0)$$

Par suite, on a

$$\frac{\Phi(1/r_{pq})}{\Phi(1/r_{p_0q})} \leq \frac{\Phi(1 + \varepsilon_0)/r_{p_0q}}{\Phi(1/r_{p_0q})} \leq A, \text{ et par suite}$$



$$I_1 \leq \int_{S_1 - S_n} d\mu_q \left\{ A \cdot \Phi\left(\frac{1}{r_{p_0q}}\right) \cdot \int_{F_1} d\mu_{n_p} \right\} \leq A \int_{S_1} \Phi\left(\frac{1}{r_{p_0q}}\right) d\mu_q, \quad \text{ou}$$

$$(12) \quad I_1 \leq A\varepsilon'$$

Ensuite, évaluons  $I_2$ . On a

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{S_n} d\mu_q \cdot \int_{F_1} \Phi\left(\frac{1}{r_{pq}}\right) d\mu_{n_p} \leq \frac{1+\varepsilon}{C\{Ms(r_n)\}} \cdot \mu(S_n) \leq \frac{1+\varepsilon}{\kappa C\{s(r_n)\}} \cdot \mu(S_n) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{\kappa} \left( 3 \int_0^{r_n} \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt / r_n^3 \right) \cdot 2R_n^3 \varepsilon' / \left( 3 \int_0^{R_n} \Phi\left(\frac{1}{t}\right) t^2 dt \right) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{\kappa} \cdot \frac{2\varepsilon'}{\varepsilon^3} \end{aligned}$$

en vertu de l'application 2 § 4 et de l'inégalité (6), c.-à-d.

$$(13) \quad I_2 \leq \frac{1+\varepsilon}{\kappa} \frac{2\varepsilon'}{\varepsilon^3}$$

Ainsi, si l'on pose

$$(14) \quad \varepsilon' < h(\varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{1+\varepsilon}{\kappa} \cdot 2\varepsilon^{-3} + A \right\}^{-1}$$

on a, d'après (12), (13),  $I_1 + I_2 < \varepsilon/2$ , et cette inégalité, avec (9), (10), (11), montre bien qu'on a

$$\int_{F_1} u(p) d\mu_{n_p} < u(p_0) + \varepsilon, \quad F_1 \subseteq s(r_n),$$

et  $F_1$  est justement l'ensemble qu'on avait besoin, c. q. f. d.

Passons finalement au théorème de balayage. Si  $\Phi(t)$  satisfait aux (A), (B), (C), (D) et si  $f(p)$  satisfait aux conditions du théorème 2 § 4, alors dans les propositions 1\*) et 3\*) de ce théorème est égal à la constante  $\gamma$  à tout point  $p_0$  de  $F$  qui satisfait à la condition de Poincaré généralisée. Cela résulte immédiatement du lemme de Frostman mentionné plus haut.

Fin.

#### Ouvrages cités.

- 1) Cayley, A. [1] A memoir on prepotential, Mathematical papers, t, IX, 1896, Cambridge.
- 2) Courant u. Hilbert. [1] Methoden der mathematischen Physik, zweiter Band, Berlin, 1937.
- 3) Frostman, O. [1] Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Meddelanden fran Lundo Universitats matematiska Seminarium, Bd. 3, Lund, 1935.
- 4) Green, G. [1] Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids analogous to the electric fluid, 1832, (Camb. Phil. Trans. 1883 et Mathematical papers, London, 1871).

- 5) Hahn, H. [1] Theorie der reellen Funktione, Berlin, 1921.
- 6) Hall, [1] A suggestion in the theory of mercury, Astronomical Journal, 14 (1894).
- 7) Jensen, J. L. W. V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30 (1906).
- 8) Kakutani, S. [1] On the function  $m(r, a)$  in the theory of meromorphic functions, Japanese Journal of Math. vol. XIII (1937), pp. 393-404.
- 9) Kametani, S. [1] On Hausdorff's measures and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions, Japanese Journal of Math., vol. XIX (1945), pp. 217-257. [2] Positive definite integral quadratic forms and generalized potentials, Proc. Imp. Acad. vol. 20 (1944), pp. 7-14. [3] Progrès récents de la théorie du potentiel (en japonais), sous presse.
- 10) Kunugui, K. [1] Sur quelques points de la théorie du potentiel (I), Proc. Imp. Acad. vol. XXI (1945) pp. 234-239. [2] *ibid.* (II), Proc. Imp. Acad. vol. XXIII (1947).
- 11) Lebesgue, H. [1] Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet, C. R. de la Société math. de France, 1913.
- 12) Maria, A. [1] The potential of a positive mass and the weight function of Wiener, Proc. of the National Acad. of Science of the U. S. A., vol. 20 (1934), pp. 485-489.
- 13) Neumann, C. [1] Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Prinzip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen, Leipzig, 1896.
- 14) Ninomiya, N. [1] Equilibrium potentials and energy integrals, Proc. Jap. Acad. vol. XXV (1950).
- 15) Polya u. Szegő, [1] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Berlin, 1925.
- 16) Rado, T. [1] Subharmonic functions (Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Bd. 5, Heft 1), Berlin, 1937.
- 17) Riesz, M. [1] Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, Acta Litt. Sci. Szeged, t. 9, pp. 1-42 (1938).
- 18) Saks, S. [1] Theory of the integral, (second revised edition), Warszawa-Lwów, New York, 1937.
- 19) Seeliger, H. 1 Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz, Munch. Ber. Bd. 26 (1886), pp. 373-400.
- 20) Sierpiński, W. [1] Démonstration d'un théorème sur les fonction additives d'ensemble, Fundamenta Mathematicae, t. V (1924), pp. 262-264.
- 21) Ugaeri, T. [1] On the general potential and capacity, Japanese Journal of Math., sous presse.
- 22) de la Vallée Poussin, Ch., [1] Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet, Paris, 1937. [2] Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire (première ed. 1916, deuxième ed. 1937).
- 23) Yosida, Y. [1] Sur le principe du maximum dans la théorie du potentiel, Proc. Imp. Acad. vol. XVII (1941), pp. 476-478.
- 24) Yukawa, H. [1] On the interaction of the elementary particles I, Proceedings of the Physico-mathematical Soc. of Japan, vol. 17, (1935), pp. 48-57.
- 25) Zygmund, A. [1] Trigonometrical series, Warszawa-Lwów, 1935.

(Reçu le 31 janvier, 1950)

